

現実性のある場面における 子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について —model の自己発達に着目して—

藤川 亮一

上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

小数の乗法及び除法の学習は、整数の乗法及び除法の学習に数としての小数の複雑さが絡んだり(高橋裕樹, 2003)、整数の範囲から小数の範囲へと意味の拡張をしたりする(松原, 1985)という点で難しい。現に 2007 年より実施されている全国学力・学習状況調査において、しばしば小数の乗法及び除法に関する問題が出題されているが、子どもたちの正答率は芳しくない(eg., 国立教育政策研究所, 2012)。

他方で、小数の乗法及び除法は、現実場面との関連性という特性をもつことから、子どもが現実場面から自ら知識を形成していくという、算数における学習の典型的な有り様を支えるものである(高橋等, 2009)ことや、あるいは乗法及び除法を整数の範囲から小数の範囲へ拡張することを通して「拡張の考え」を理解することができる(eg., 中村, 1996; 板垣, 2002)など様々な教育的な意義が含まれており、算数科における主要な学習内容の一つである。

これまでに小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るために、様々な研究(eg., 麻柄, 1995; 高橋久誠, 2000)がなされる中で、数直線を有効に用いて小数の乗法及び除法を割合で意味づけたり、子どもが場に応じて解決の単位を設定したりすることの重要性が示されてきた。とりわけ、高橋裕樹(2003)は、現実的数学教育

(Realistic Mathematics Education, 略称 RME)理論に基づき、子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を明らかにしている。一方で、子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が、informal なものから formal なものへと発達していく過程を、model の自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し、それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにする必要がある。model の自己発達については、これまで「文脈」、「領域」及び「機能」による三つの転換が指摘されている(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003)。

上記より、本研究の目的を、現実性のある場面から出発する子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が、informal なものから formal なものへと発達していく過程を model の転換という視点から明らかにすることとする。

本稿では、第一に、小数の乗法及び除法に関する先行研究を概観することにより、子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件を明らかにする。第二に、現実的な場面から出発して数学化に至る立場を取る RME 理論の提唱者である Freudenthal, H の思想などを基に、本研究における「現実性」の定義を明確にする。第三に、RME 理を視座とした Gravemeijer et al.(2000) や Van den Heuvel-Panhuizen (2003) の心的構成物である model の自己発達について考察する。第四

に、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みを精緻化し発展させることで、新たな理論的枠組みを構築する。第五に、新たに構築した理論的枠組みと子どもの小数の乗法及び除法における知識形成の過程とを照らし合わせることで、小数の乗法及び除法の知識形成を捉えるための理論的枠組みを構築し、それを基に教授実験における子どもの学習過程の分析、考察を行う。

2. 小数の乗法及び除法における先行研究の考察

松原(1985)は、小数をかけるということの意味について、これまで子どもたちが学習してきた「倍」の意味を、あらためて拡張して見直させる必要があることを示した。小数の乗法の意味の拡張に関して、中村(1996)は、乗数が整数のときには「同数累加」で捉え、乗数が小数になったときには「割合による意味付け」で捉える立場から、数直線を用いた指導を提案している。さらに中村(2007)では、子どもが小数の乗法の意味をどのように捉え、表現しているのかに着目し、子どもは、数直線を用いて乗法の意味を割合で捉え、整数倍から小数倍へと移行していることを明らかにしている。中村(1996, 2007)では、子どもは数直線を用いることによって数量の関係が比例関係になることや、あるいは乗法の意味を割合で捉え、整数倍から小数倍へと移行していることを明らかにしている。他方で、子どもが比例関係をどのように捉えるようになっていくのかや、あるいは、子どもが数量関係を数直線へと表していくまでの過程を明らかにする必要がある。

白石(2005)は、除法の「意味の拡張」とは「1」へのアプローチを、これまでの「累加、累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとし、それを子どもたちに導入する際には、数直線を

用いることが有効であることを示している。さらに白石(2006)では、先行研究を基にした授業における子どもの活動を分析、考察することで、数直線が式を立てたり、困難を乗り越えたりするのに便利な道具として子どもに意識されている様相を明らかにした。白石(2005, 2006)では、授業における子どもの学習過程の分析、考察から、子どもたちが数直線を用いて比例的な見方をできることや、あるいは数直線を立式の際に有効な道具として用いることを明らかにした。他方で、小数の除法の知識形成において、どのような視点で自らのmodelを転換させていくのかということや、あるいは子どもたちの小数の除法の知識形成において、小数の乗法の知識がどのように関わることかといったことを考慮する必要がある。

高橋裕樹(2003)は小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るために、RME理論に基づき、子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が、informalなものからformalなものへと発達していく過程を明らかにした。他方で以下の二点を考慮する必要がある。一点目は、子どもの活動の分析に用いた理論的枠組みに、算数授業で複数あるsituationや、文脈に応じてformal knowledgeを繰り返し用いてformal knowledgeを更に洗練させていく過程を明示化することである。二点目は、子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が、informalなものからformalなものへと発達していく過程を、modelの自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し、それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにすることである。以上のことから、本研究における視点として二つのことを考慮する必要がある。一つ目は、子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために、どのようなことを考慮する必要があるのかである。それは(1)子

どもが整数の乗法及び除法の知識を生かしながら解決のために用いる単位や、それと対になる単位量をどのように形成していくのか、(2) 数直線や図などで単位量を利用していくことにより、どのように比例の考えを発達させていくのか、(3) 子どもの小数の乗法の知識が、どのように小数の除法の知識形成に関わるのか、あるいは、小数の除法の知識形成がどのように小数の乗法の知識の洗練に関わってくるのか、である。二つ目は子どもの小数の乗法及び除法の知識が、informalなものからformalなものへと発達していく過程を、modelの自己発達という視点から明らかにすることである。

3. 本研究における「現実性」の定義づけ

Freudenthal(1991)は、子ども一人ひとりの現実性を生かし、ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言し、「現実性は、歴史的に、文化的に、環境的に、個別的に、そして主観的に決定される。」とも述べている。つまり現実性は、学習者の発達や学習状況、あるいは共同体での文化と密接に関連するものと言えるだろう。実際の授業における子どもの現実性をみると、吉田(2000)は、子どもの内に構成された現実性が発展し算数をつくり上げるという立場から、具体的な活動を通して構成する活動的現実性を起点とした、算数の文脈において構成する数学的現実性への発展について言及した。結果として吉田(2000)は、活動と記号との相補的な関係を契機として、あるいは子どもが扱う言葉を媒介として現実性が促進する様相を明らかにした。さらに吉田(2000)は、常に日常的な場面を用意することで活動的な現実性が促進するとは言い切れず、減算モデルが数学的に意味することを捉えるための活動が重要になったりすると述べている。双方の現実性に対する考察より、

現実性とは学習者によって変わるものであり、実感を伴うものが現実的であると言える。例えば、数学者にとっては、記号の世界で表される数学そのものが現実的であり、親しみのある場面である。

他方で、子どもたちが活動と記号との行き来を繰り返すことで現実性を捉えていくためには、何かしらの扱う対象、例えば具体物や、自らが表した図や式などの model が存在するはずである。問題場面における子どもたちの現実性を、授業者が捉えるためには、それらの対象がどのように扱われているのかを把握する必要がある。中村(2000)は、小学校の重さの授業場面における子どもの活動をみることで、対象とそれを操作すること、そしてそれらが関係することで数学が発展することに数学的な現実性の一つの側面があることを示し、さらに捉える対象には対象とそれを操作する方法があることを言及した。吉田(1998)と中村(2000)とを踏まえると、子どもが現実性を捉えていくためには、活動をする中で何らかの操作を経験したり活動と記号との関係を見直したりすることで、ある数学的な対象をつくり出す、という過程を繰り返すことが重要だと言えるだろう。

一方で、現実世界は子どもにとって親しみのある場面であり、多くの場合、日常的な現実性をもつものである(高橋等, 2003)と示されるように、現実性と日常生活とのつながりは切り離せないものである。問題場面と現実性に関して、池田(2013)では、児童・生徒にとって本当に現実的であるのか、あるいは児童生徒にとって馴染みのある場面であるかどうか、問題を解く必然性があるかどうか等を論点とした上で、問題の現実さについて言及している。すなわち、問題場面の現実性という視点では、子どもが親しみを感じたり、馴染みを覚えたりするような、子どもの日常生活に即した状況

を問題の文脈に考慮することが大切である。

先行研究の考察より、本研究における現実性を定義づけるに当たって、i) 現実性とは学習者によって変わるものであり、実感を伴うものが現実的であるという視点、ii) 活動と記号との相補的な関係を契機とするような、活動的現実性を起点として構成する数学的現実性への発展という視点、iii) 活動をする中で何らかの操作を経験したり、活動と記号との関係を見直したりすることで、ある数学的対象をつくり出すという視点、iv) 問題場面と現実性に関して、子どもが親しみを感じたり、馴染みを覚えたりするような、子どもの日常生活に即した状況という視点、の4つを考慮する必要がある。

したがって、本研究における現実性を「子どもが、自分の経験や知識と環境（問題場面）とを照らし合わせてそれらの類似性を把握したり、活動をすることで数学的対象を自らつくり出したり、環境に対して親しみを感じたりすること」と定める。なお、ここでいう親しみとは、学習者の発達や学習状況、あるいは共同体での文化と密接に関連するものとする。

4. 子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

4. 1. Gravemeijer et al. (2000)における model の自己発達

Gravemeijer et al. (2000)は、図1に示すように、informal knowledgeがformal knowledgeへと向かうための起点であるべきだとする、modelの自己発達というRMEの鍵となる理論を提示した。図1において、situationsは現実世界であり、算数の授業では、現実性をもつ問題場面に相当する。model-ofはsituationsのもとで、心的にモデル化されたものであり、situationに依存したmodelである。このmodelがformal knowledgeに向かう

ことにより、model-forとなり、最後に、数学的に標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

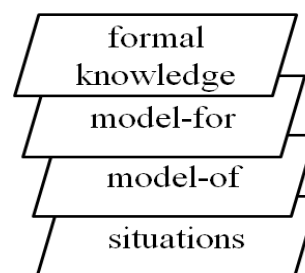


図1 Gravemeijer et al. (2000)の図式

4. 2. Van den Heuvel-Panhuizen (2003)の model の自己発達

Gravemeijer et al. (2000)では、modelとは、生徒自身がつくる心的構成物のことであり、問題を解決する際にformal knowledgeに向かって発達するものであることが示されていた。他方、Van den Heuvel-Panhuizen (2003)はmodelの表れ方に関して以下のように言及している：

RMEにおいて、modelは問題状況の表現として見られ、またはその問題状況に関連する数学的概念と構造の不可欠な様相を反映するが、種々の現れ方をする。これは「model」という用語が過度に文字通り用いられないことを意味している。道具、視覚的スケッチ、典型的な状況、スキーマ、図表、記号さえもmodelとして目的に適う。

(Van den Heuvel-Panhuizen, 2003, p.13)

すなわち「model」とは、子どもたちにとっての算数や数学、その他の関係からなる心的な構成物、あるいは知的な構造体であり、問題場面から数学的な関係を抽出した状態で表れたり、問題場面を把握し表現するために表れたり、様々な様相を反映するものであると捉えることができる。

Van den Heuvel-Panhuizen (2003)は、

Gravemeijer et al. (2000)のmodelの自己発達をさらに発展させ、model-ofからmodel-forへの移行の段階にさらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図2にのように示している。Van den Heuvel-Panhuizen (2003)はこの転換に関して、文脈に結びつく水準でinformalな解釈を記号化したmodelが、局所的かつ連続的発達を伴い、最終的には一般的で形式的な解決のためのmodelになることを示している。

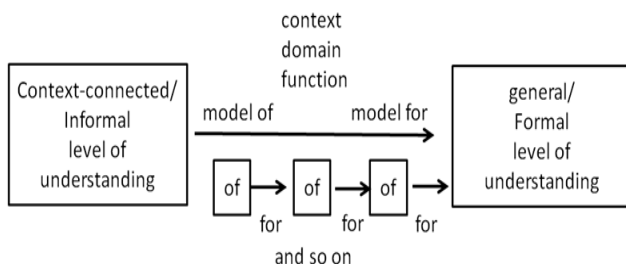


図2 Van den Heuvel-Panhuizen (2003)の図式

Van den Heuvel-Panhuizen (2003)は図2の図式を用いて、子どもの百分率の学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行を分析し、以下の三つの転換を明らかにした。

4. 2. 1. 「文脈」による転換

前の文脈で記号化された方法が次の文脈を表現するために用いられる際に生じる転換である。Van den Heuvel-Panhuizen (2003)は、この転換を、劇場の占有の度合いを記号化する方法が、次の文脈での花の1/4が赤だということを表すために用いられたことから見出している(図3)。

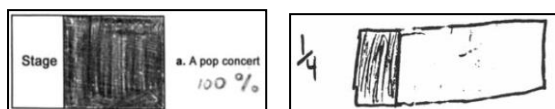


図3 劇場の占有具合(左)と花々の25%の表現(右)

4. 2. 2. 「領域」による転換

内容領域における転換である。Van den Heuvel-Panhuizen (2003)は、この転換を、分数を表すための帯図のmodelが、分数に加

えて、百分率のために用いられたことから見出している(図4)。

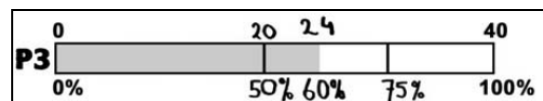


図4 百分率のために用いられる帯図

4. 2. 3. 「機能」による転換

最初はただ文脈を表すための図や表が、答えを導くために用いられる際に生じる転換である。Van den Heuvel-Panhuizen (2003)は、この転換を、最初は数量の関係を把握するための帯図のmodelが、百分率を見積もるために、あるいは、新たに値引きされた値段からもとの値段を計算するために用いられたことから見出している(図5)。

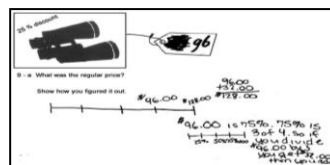


図5 もとの値段を計算するために用いられる帯図

4. 3. Van den Heuvel-Panhuizen (2003)の理論的枠組みの精緻化

上記で示したVan den Heuvel-Panhuizen (2003)の子どもの活動の分析・考察の結果では、model-ofからmodel-forへの転換が生じる際には、複数のsituationの設定があったり、子どもが領域ごとのつながりを意識したりすることが示された。この複数のsituationというのは一つのformal knowledgeに対して設定されるものであり、領域ごとのつながりというのは各単元におけるformal knowledge間のつながりのことであると解釈できる。したがって、Van den Heuvel-Panhuizen (2003)の子どもの活動の分析・考察の結果より、子どものmodelの自己発達を精緻に捉えていくためには、子どもの活動を捉えるための理論的枠組みを、一つのformal knowledgeに対して設定され

る複数のsituationと、formal knowledgeの洗練の過程という視点から精緻化する必要があると考える。我が国の算数・数学教育実践においても、一つのformal knowledgeに対し、複数のsituationからformal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり、formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の系統があったりする。そこで筆者は、Van den Heuvel-Panhuizen (2003) の子ども活動の分析結果を基に、Van den Heuvel-Panhuizen (2003) の図式に複数のsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練の過程を明示化することで、理論的枠組みの精緻化を行った(図6)。

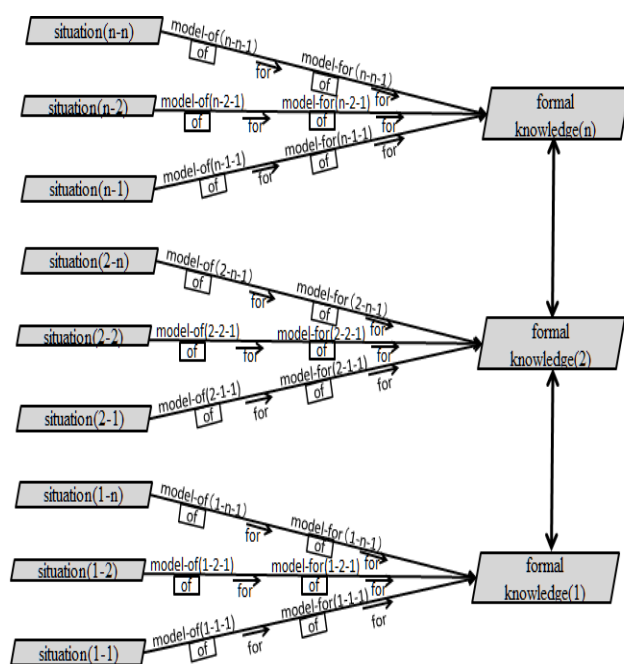


図6 新たに構築した理論的枠組み

図6において、situation(1-1)(括弧の中の一番目の番号はsituation間の区別をする順番を、二番目の番号はformal knowledge(1)に対するsituationの順番を表す)は、formal knowledge(1)(括弧の中の番号は到達したformal knowledgeの順番を表す)に対しての最初のsituationである。model-of(1-1-1)(括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順

番を表す)は、situation(1-1)に基づいた最初のmodelであり、そこからは、formal knowledge(1)へと向かってVan den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式と同じようにmodel-ofとmodel-forが繰り返される。具体的に示すとmodel-of(1-1-1)の次にmodel-for(1-1-1)(括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す)、model-of(1-1-2)、model-for(1-1-2)、…、model-of(1-1-n)、model-for(1-1-n)と徐々にmodelが発達していくことを想定する。situation(1-2)は、formal knowledge(1)に対しての第二のsituationである。situation(1-2)からformal knowledge(1)に至るまでの過程は、situation(1-1)の場合と同様である。すなわち、formal knowledge(1)に対してsituation(1-1)、situation(1-2)、…、situation(1-n)と複数のsituationを設定するのである。formal knowledge(2)は、formal knowledge(1)に対して更に洗練されたformal knowledgeであり、同様にformal knowledge(3)、formal knowledge(4)、…、formal knowledge(n)と次々とformal knowledgeが洗練されていく。

5. 教授実験

5. 1. 教授実験の概要

2016年2月12日～3月15日までの間に、新潟県公立小学校の4年生2人を調査参加者(NaoとKeiと呼ぶ)として、1回50分の授業を計6回実施した。データをビデオカメラ3台による撮影、調査参加者の筆記記録によって収集した。データからプロトコルを作成し、プリントの記述を参考にNaoとKeiの学習過程を捉えることとした。なお、本稿ではNaoの学習過程について分析、考察する。また、インタビューアーは筆者であり、Tと略記する。

5. 2. 調査の概要

単元構想においては、高橋裕樹(2003)を

参考に、表 1 に示すように小数の乗法、包含除、等分除の順に小単元を配置し、最後に、比の三用法の場面を用意した。

表 1 調査で扱った situation

Situation	
(1-1)	2 m で 170 円の赤のリボンがあります。このリボン 14m の代金はいくらですか。
(1-2)	1 m で 80 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン 3.2m の代金はいくらですか。
(2-1)	青いリボンが 15m あります。一人に 2.5m ずつ配ると何人に配ることができますか。
(3-1)	2.5m で 200 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン 3 m の代金はいくらですか。
(3-2)	2 l で 390 円の牛乳と 1.6 l で 360 円の牛乳があります。この 2 つのうち、どちらの牛乳がお得ですか。
(4-1)	親ライオンは 63kg です。これは、子ライオンの体重をもとにすると、1.5 倍にあたります。子ライオンは何 kg ですか。

6. Nao の学習過程の分析

situation(1-1)では、formal knowledge(1) ($170 \div 2 \times 14 = 1190$ (円))の形成が目指されていた。Nao は、以下のように発言する中で、 170×4 を立式し 680 を求める。

Nao：あっそっかー、7 だった。4 にしちゃったよ、 170×4 にしちゃったよ。

T：なんで 4 にしたの？

Nao：えー、わかんない。14m だから 4 にしたのかな。勝手に 4 になっちゃった。

Nao は、14m の 4 に着目することで、 170×4 を立式するが、その式に戸惑う様子を見せた。その後 Nao は、Kei の考え (170×7) を受けたり、2 m のリボンが何個分ある

かについて「あれ、 $14 \div 2$ だった。これで 2 m のリボンが何個分か分かった」と発言したりする中で、自らも 170×7 を立式し 14m の代金 1190 円を求めた。これは、2 m の代金 170 円を 1 とみなす model-of(1-1-1) である。次に Nao は、リボンを折ったり切ったりすることで、2 m の半分の 1 m に着目した。Nao は、「1 m が 14 個で 14m だから」と発言し、 85×14 を立式することで 1190(円)を求めた。これは、85 を 1 として、14 にあたる数はいくつになるかを表した model-for(1-1-1) である。

situation(1-2)では、formal knowledge(1) ($80 \times 3.2 = 256$ (円))の形成が目指されていた。Nao は、既習の(小数) $\times$ (整数)の考えに基づいて 3.2×80 を立式し、2560 を求める。その後、Nao は Kei の考え ($3.2 \times 80 = 256$) を受け、2560 の誤りに気付く、2560 の 0 を斜線で消した。これは、既習の(小数) $\times$ (整数)の考えに基づいた model-of(1-2-1) である。次に Nao は、Kei の考えを受けたり、実際にリボンに印をつけたりすることで、3.2m を 3 m と 0.2m に分けて考え、 80×0.2 を立式することで 16 円を求めた。最後に Nao は、3 m の代金 240 円と 0.2m の代金 16 円を足し合わせ 3.2m の代金 256 円を求めた。これは、小数を整数と純小数に分けて捉える model-for(1-2-1) である。

Nao がリボンを表す図を描いていたため、T は数直線シートを導入した。Nao は、比例的な考え (1 m は 80 円、2 m は 160 円、3 m は 240 円) を基に数直線シートに線を引き、さらに 3.2m の上に 256 を記入した。これは、図としての model-of(1-2-2) である。

T が Nao と Kei に 3.2m は 1 m の何倍であるかを尋ねると、Nao は 3.2m の代金が 1 m の代金の 3.2 倍であることに気付いた。そして Nao は、図に倍関係を表す矢印を記入(図 7)した後、 80×3.2 を立式した。これは、80 を 1 として、3.2 にあたる数がい

くつになるかを表した model-for(1-2-2)である。さらに、Nao が導いた $80 \times 3.2 = 256$ は、formal knowledge(1)である。

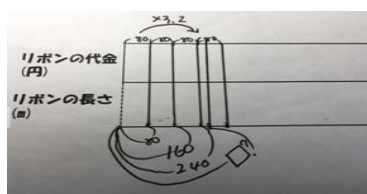


図 7 Nao が描いた図

situation(2-1)では、formal knowledge(2) ($15 \div 2.5 = 6$ (人))の形成が目指されていた。Nao は、2.5 を四捨五入し 3 とし、 $15 \div 3$ を立式し仮商 5 をたてた。これは、既習の(整数) $\div$ (整数)に基づいた model-of(2-1-1)である。その後 Nao は、「 2.5×5 をして 12.5 になって、でそしたら 12.5 ならもう一回足せばいいんだって 15 になりました。」と発言し、 2.5×6 を立式し 15 を導いた。これは、2.5 を 1 として、次々と足し合わせていく model-for(2-1-1)である。Nao は、 2.5×6 の式をしばらく眺めた後、「これでも計算できる」と発言し $150 \div 25$ を立式し 6 を求めた。この立式の背景には、乗法の逆が除法であるという考えや、既習の(整数) $\div$ (整数)の考えがある。これは既習の(整数) $\div$ (整数)の考えに基づく model-of(2-1-2)である。次に、Nao は、Kei の考え($15 \div 2.5 = 6$)と $150 \div 2.5$ を比べることで除数と被除数を 10 倍しても答えは同じであることに気づき、 $15 \div 2.5 = 6$ をノートに記述した。

situation(4-1)では、これまでに形成した formal knowledge を活用し柔軟に用いることが目指される。Nao は、始め「1.5 倍とか 63 とかが意味分らない」と発言するなど、しばしば考え込む様子を見せた。T は、Kei の「いつものように図にしたらいい」という発言を受け、数直線シートを提示した。Nao は、T の説明を受けながら、数直線シートに 63kg で 1.5 倍と $\square$ kg とを記入し、続けて 1.5 倍の矢印を記入した(図 8)。

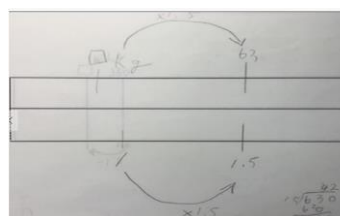


図 8 Nao が描いた図

Nao は、「下(1 と 1.5 の関係)と同じように上($\square$ と 63 の関係)も」と発言し、 $\square \times 1.5 = 63$ を立式した。これは、既習の小数の乗法の考えに基づいた model-of(4-1-1)である。Nao は $\square \times 1.5 = 63$ の解決に悩んだあと、 $630 \div 15$ を立式し 42 を求めた。これは、包含除的な考えに基づいた model-for(4-1-1)である。Nao は、Kei の考えを受け、再び解決に当たった。

Nao : 4.2kg はやせすぎだよ…、ちょっとまって(4.2×1.5 と 42×1.5 とを立式)。

T : この計算は確かめるためにしたの？

Nao : 確かめ算なのかな…だって 4.2kg はやせすぎだもん。

Nao は、立式した $\square \times 1.5 = 63$ と $630 \div 15 = 42$ とをしばらく見比べた後、 4.2×1.5 と 42×1.5 とを立式し 6.3kg と 63kg とを求めることで、6.3kg が誤りであることに気付いた。Nao は、乗法の model を用いて捉えなおしたり、等分除の model を用いたりすることで解決に至った。

7. Nao の学習過程の考察

Nao の学習過程の分析によって二つの知見を得た。一つ目は、model-of から model-for への転換と formal knowledge 間の転換の双方で働く「比較」による転換を見出したことである。このことは、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)が示した三つの転換に加えて、「比較」による転換という分類が必要なことを示すものである。二つ目は、model-of から model-for への転換について、Van den Heuvel-Panhuizen(2003)が示した「文脈」による転換に含まれる「具体物を

用いた活動」による転換と、「領域」による転換に含まれる「formal knowledge」による転換とを見出したことである。

7. 1. 「比較」による転換

7. 1. 1. formal knowledge 間の転換

situation(4-1)で Nao は、まず formal knowledge(1)に基づき、model-of(4-1-1)として $\square \times 1.5 = 63$ を立式した。その後、Nao は、formal knowledge(3)に基づき model-for(4-1-1)として $630 \div 15$ を立式することで、親ライオンの体重 42kg を導いた。次に Nao は、Kei の考え(子ライオンの体重は 4.2kg)を受け、 $\square \times 1.5 = 63$ と $630 \div 15 = 42$ を見比べた後、4.2kg と 42kg を model-of(4-1-1)で表された立式の $\square$ に当てはめることで、 $4.2 \times 1.5 = 6.3$ と $42 \times 1.5 = 63$ とを導いた。この一連の過程を、図式(図 9)に表す場合、formal knowledge(1)としての A があり、それと formal knowledge(3)としての B を比較することで、A と B の双方を行き来できる状態に至ったとみることができる。

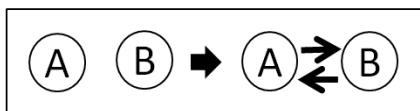


図 9 「比較」による転換の図式

7. 1. 2. model-of から model-for への転換

situation(2-1)において Nao は $150 \div 25$ を立式し 6 を求めた model-of(2-1-2)と、Kei の考えである $15 \div 2.5 = 6$ とを比較することで、除数と被除数を 10 倍しても答えが同じであることに気付いた。この過程を図 9 に表すと、 $150 \div 25$ を立式した model-of(2-1-2)としての A があり、それと B としての $15 \div 2.5 = 6$ とを比較することで、A と B の双方を柔軟に行き来できる状態へと転換したとみることができる。

7. 2. 「具体物を用いた活動」による転換

situation(1-1)において Nao は、 170×7 を立式する model-of(1-1-1)を表した後、リボンを折ったり切ったりすることで、 85×14 を立式する model-for(1-1-1)を形成した。situation(2-1)においても Nao は、2.5cm を 1 とみてリボンをシートに貼っていくことから、 2.5×5 を次々と足し合わせていく model-for(2-1-1)を形成している。すなわち、具体物であるリボンを用いることによって、model-of から model-for への転換が生じている。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は、「文脈」による転換を示しているけれども、situation によって子どもの活動や、あるいは子どもが用いる具体物が異なるという点から、「具体物を用いた活動」による転換は、「文脈」による転換に含まれるとみることができる。

7. 3. 「formal knowledge」による転換

situation(2-1)において Nao は、 $15 \div 3$ を立式し仮商をたてる model-of(2-1-1)を表した後、formal knowledge(1)の考えに基づき 2.5cm を 1 として次々と足し合わせていく model-for(2-1-1)を形成した。situation(3-1)においても Nao は、(整数) $\div$ (整数)の考えに基づいた model-of(3-1-1)を表し、formal knowledge(2)の考えに基づき 2.5m に 0.5m が 5 つ含まれることに気付くことで、0.5 を単位とする model-for(3-1-1)を形成した。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は、「領域」による転換を示すが、formal knowledge が異なる内容領域間をつなぐ役割をもつ点から、「formal knowledge」による転換は、「領域」による転換に含まれるとみることができる。

8. 結語

子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程を分析、考察した結果、得られた知見は以下の二点である。

第一に、授業場面において、子どもが純粋な考えに基づく状況に依拠したmodelを自ら発展・洗練させるためには、自らが形成したmodel相互を比較したり、友達のmodelと比較したりといった子どもたちの活動を教師が見逃さず、modelを比較できるような場の用意や、あるいは支援を大切にしている点である。

第二に、子どもの小数の乗法及び除法のformal knowledgeの洗練過程には、formal knowledge間の比較という子どもの活動があるため、教師は、領域におけるformal knowledgeが何かを適切に見極め、それらを比較できるような場を複数用意したり、子どもたちがお互いのformal knowledgeを比較できるような場を設定したりすることを大切にしている点である。

引用・参考文献

- Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.
- Gravemeijer, K., Cobb, P. & Bowers, J., White, J. (2000). Symbolizing, Modeling, and Instructional Design. In Cobb, P., Yackel, & McClain, K. (eds.), *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classroom* (pp. 225-273). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- 国立教育政策研究所. (2012). 平成26年度全国学力・学習状況調査：調査結果のポイント. 小学校算数. 文部科学省. (http://www.nier.go.jp/08chousakekka/01chousakekka_point.pdf).
- 池田敏和. (2013). モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性. 日本数学教育学会誌, 95(5), 2-12.
- 松原元一. (1982). 算数「子どもの考え方・教師の導き方」. 国土社.
- 中村光一. (2000). 授業にみられる数学的リアリティと数学的対象. 上越教育研究, 15, 1-8.
- 中村享史. (1996). 小数の乗法の割合による意味づけ. 日本数学教育学会誌, 78(10), 7-13.
- 中村享史. (2007). 小数の乗法に関する記述表現の分析-乗法の意味づけの児童のノート記述を中心に-. 第40回数学教育論文発表会論文集, 361-366.
- 白石信子. (2005). 子どもの理解に基づいた小数のわり算の指導について-数直線への比例的な見方を通じた意味の拡張-. 上越数学教育研究, 20, 163-174.
- 白石信子. (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究. 数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して. 上越数学教育研究, 第21号, 69-80.
- 高橋等. (2003). 子どもの算数・数学的活動を大事にする, 湧き出させる. 上越数学教育研究, 18, 31-48.
- 高橋等. (2009). 勝雄の割合の知識の形成過程における表象の変容と関係性. 上越数学教育研究, 24, 13-20.
- 高橋久誠. (2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-. 上越数学教育研究, 15, 85-94.
- 高橋裕樹. (2003). 小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).
- Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics*, 54, 9-35.
- 吉田亨. (2000). 算数の授業における子どものリアリティの構成とその発展. 日本数学教育学会誌, 68(10), 45-50.