上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.43-52

「教育内容としての数学的方法」に関する研究

― 数学的概念の「質的な高まり」を実現する学習過程に着目して ―

秋山　拓也
上越教育大学大学院修士課程２年

1. 本研究の背景と目的

高等学校数学教育の目標と教科内容は，教育の目的である「人格の助成」を根本に据えながら，時代とともに変化し続けてきた。現行の高等学校学習指導要領における高等学校数学科の目標は，「数学的活動を通して，以下略」(文部科学省，2009，p.5)と明記され，活動としての数学が教科全体に位置づいている。また現実世界への活用力の育成を意図として，「数学的活動」のモデル(図1)が高等学校学習指導要領内に示された。

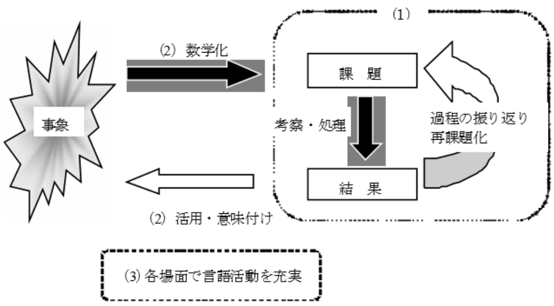

図1:数学的活動(文部科学省,2009,p.68)

このように現実の問題を解決する活動が重視されつつある高等学校数学科において，岩崎ら(2017)は，「(活動としての数学の)強調は，高校数学への理念と高校数学の実態の乖離を示すことになっているのではないであろうか」(p.1)(括弧内は筆者による)と警鐘を鳴らしている。また図1で示されている数学的活動を見ると「現実の事象の問題解決」が強調されていることがわかる。これらのことから筆者は，現在の高等学校数学教育において「現実の問題解決を意図とした活動の焦点化による「教科内容」への希薄化」が生じているといるのではないかと考える。

このような喫緊の課題に対して数学教育における内容研究では,「方法知」に対する関心が高まってきている(例えば，村田(2015)，清水(2015))。「方法知」とは，ライル(1987)が提唱した知識の一種である。氏は，「内容知」(knowing-that)と「方法知」(knowing-how)を区別する。内容知は，真偽で評価し得る知識であるのに対して，方法知は，いつどんな風に振る舞うかに関する知識の総体である(p.27)。本稿では，方法知を特に数学における「教育内容」という認識の下で用いていくため,「教育内容としての数学的方法」と改め，用いていくこととする。

特に平成29年3月に告示された小中学校学習指導要領には,「教育内容としての数学的

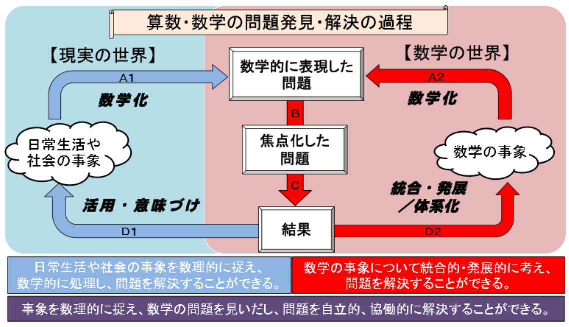

図2:算数・数学の問題発見・解決の過程
(中央教育審議会,2016)

方法」の一層の強調が示されている。次期学習指導要領で明示された中学校数学科の目標は,「数学的な見方・考え方を働かせ…」と打ち出され，それに伴い，図 2 のような「算数・数学の問題発見・解決の過程」(以下，次期問題解決モデルと略す)が示された。

このような関心の高まりの中で,本稿では,数学的世界の問題解決過程における数学的概念の質的な高まりに着目して,「教育内容としての数学的方法」を考察していくこととする。概念形成を行う過程をどのように生起させ，どのようにその過程を推進させていくのか，ということを「教育内容としての数学的方法」という視点より特定する。本稿において，数学の世界の問題解決過程において「教育内容としての数学的方法」がどのように生起し，次の数学的方法へとどのように作用し，学びが深まり発展していくのかを明らかにしていきたい。

2. 数学的概念の「質的な高まり」

清水(2017)は，次期問題解決モデルにおける「問題解決」の特質について次のように述べ，図 3 を示している。

> 「日常世界の問題解決は，モデルを切り替えたり，他の事象で同様の考え方を取り入れたりして，平面的に何周もこの過程を回していく。それに対して，数学の世界での問題解決は,得られた結果を発展的に考え,拡張したり一般化したりして次のサイクルを螺旋的に回していく。(中略)《次期問題解決モデルで》示されている資質・能力でも D2 に「統合的・発展的に考える力」とあり，A2 に「得られた結果を基に拡張・一般化する力」とあるように 2 週目のサイクルでの数学的に考える力が示されており，日常世界の問題解決との違いがここにあると考えられる。」(清水,2017,p.153)
>
> (≪　≫内は筆者による)

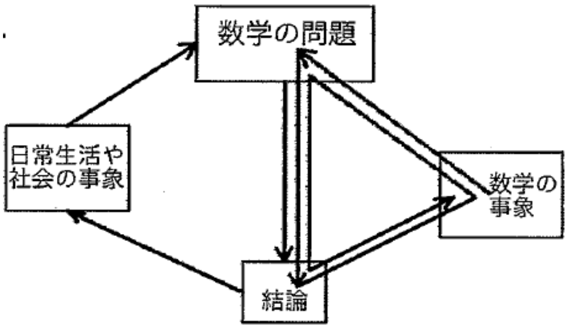

図 3:日常世界と数学の世界の解決の過程
(清水,2017,p.153)

清水(2017)は，それぞれのモデルの特質をそのサイクルの回り方に着目し,述べている。日常生活(現実の世界)の問題解決サイクルは,モデルの切り替え等により「平面的な循環」が行われ,「現実の世界の広がり」が強調される。対する数学の世界の問題解決サイクルでは，統合化・発展的な考えや一般化や拡張化により「螺旋的な循環」が行われ,「数学的概念の高まり」が強調される。氏の主張より，2 つの問題解決過程は，その世界におけるサイクルの循環の性質に相違点が存在していることがわかる。

ここで,「数学的概念の高まり」を目的とする数学の世界の問題解決サイクルの特質である“螺旋”という言葉について吟味していく。『旺文社 国語辞典(第十一版)』では,「①巻貝の殻のように渦巻き状に回っていること。②ねじ」(p.1540)であるとされている。言い換えると，螺旋とは，空間曲線であり，平面上には表現できないものであることが読み取れる。ここで今一度，図 3 の数学の世界のサイクルを氏の主張より，螺旋(空間曲線)として捉え直す。この数学の世界の問題解決サイクルが段階や段階移行プロセスを経て循環するとその軌跡は，螺旋を描き，図 3 の読み手側に次第に高まっていく。この高まりは，数学の世界の問題解決の主目的である学習者の「数学的概念の形成・発展」を表わしていると言えるであろう。そしてその軌跡が途切れ

ることなく，各段階を経て高まり，継続的な数学的概念の形成・発展を行うことから，その数学的概念が「質的に高まる」と解釈することができよう。つまり，次期問題解決モデルの数学の世界での問題解決は,概念の形成・発展を階段のよう段組みで構成するのではなく，各段階を介することで坂道のように徐々に高まっていく「数学的概念の質的な高まり」を表現している。

この氏の言及を秋山(2017)の「大局的な視点としての数学的方法」および「局所的な視点としての数学的方法」より考察する(表 1)。

表 1:「教育内容としての数学的方法」の捉え方

①大局的な視点としての数学的方法 問題解決を通して問題解決能力そのものを育成する方法 **②局所的な視点としての数学的方法** 問題解決を数学学習の方法と位置づけ，問題解決内で発揮する能力を育成する方法

(秋山, 2017, pp. 24-25)より筆者作成

表 1 は,「教科内容としての数学的方法」としてカリキュラム上に明示された「中心概念」を起点理念とし，教授・学習の場を前提とした今日的な「教育内容としての数学的方法」の捉え方である。「①大局的な視点としての数学的方法」は，問題解決過程そのものを数学的方法として位置づけ，その過程内の各段階移行プロセスを促進させる数学的方法を「②局所的な視点としての数学的方法」としている。これらは,《②⊂①》の包含関係にあり，互いが影響し合う相補的関係にもある。①には,主として「現実の世界に関する問題解決」と「数学の世界における問題解決」があることを前提とすると，②は「各世界特有の数学的なプロセス」および「数学の世界と現実の世界の 2 つの世界に跨る数学的なプロセス」が存在することを特定している(p.)。

清水(2017)の言及に関する議論に戻る。この氏の言及は「大局的な視点としての数学的方法」に関するものである。氏の主張は，前提としてサイクルの循環があり，循環すると「数学的概念が質的に高まる」という利点が得られる，という論展開となっている。しかし，そこに問題解決過程を促進させるための「局所的な視点としての数学的方法」に関する記述は見られない。具体的には「サイクルがどのように生じるか(生起要因)」や「どのようにサイクルを循環させるか(循環要因)」ということである。そこで清水(2017)の循環による「質的な高まり」を実現するためには「大局的な視点としての数学的方法」を前提とし，その数学的方法内におけるサイクルを生じさせるための「生起要因」およびサイクルを円滑に循環させるための「循環要因」を「局所的な視点としての数学的方法」の視点から考察していき，それぞれの要因を特定することが必要である。これは，本研究の目的における「どのように数学的方法が生起するのか」(生起要因)および「数学的方法が次の数学的方法へどのように作用するのか」(循環要因)に関わる議論である。

次節以降では，この「数学的概念の質的高まり」に焦点化した数学の世界における問題解決サイクルの生起要因と循環要因を特定すべく，問題解決と概念形成をひとつの問題解決モデルとして記述した飯田(1990)の「数学的活動の類型」について考察を行う。

3. 飯田(1990)の問題解決モデル

(1)飯田(1990)の問題解決モデルの概要

飯田(1990)は,「数学教育における概念形成と問題解決とは非常によく似た特質を持っている。それは，ともにシツエーションからの抽象化の過程を含んでいる点である」(p. 152)とし，以下の図 4 を示している。

氏によると，①-③を「シツエーションの抽象化(数学化)」と呼んでいる。シツエーショ

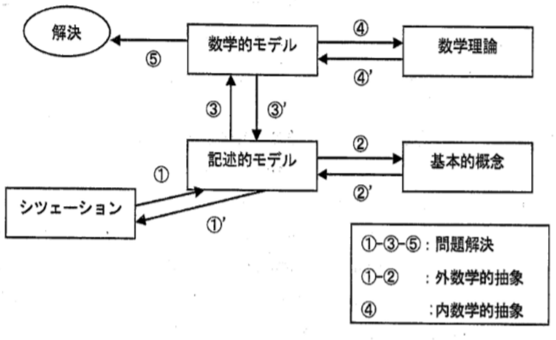

図 4:数学的活動の類型(飯田,1990,p.152)

ンの内訳としては,「現実のシツェーション」と教科書に示されているような「疑似現実的シツェーション」とされている。その中でも「疑似現実的シツェーション」に関して飯田(1992)は，シツェーションの探究ということを，その方法論も含めて，最も顕著に強調しているのは，ブラウン(1990)であると指摘している。そしてブラウンのいうシツェーションについて，以下のような解釈をしている。

> 「Gattegnoの数学的シツェーションが，物的対象物としての教具をもとにしているのに対し，Brown のいうシツェーションは，三平方の定理や素数の定義などの抽象物をも含め，より自由なものとして捉えられている」(飯田，1992，p.263)

つまり，疑似現実的シツェーションには，数学の定理・定義等も考慮されていることが分かる。概念形成を中心とする抽象化においては，図4が参考になる。図における「外数学的抽象」とはシツェーションの抽象であり，その典型として図形概念や数概念の抽象がある。平林(1970)の区分にしたがい，前者を「対象からの抽象」,後者を「操作からの抽象」としている。飯田は，外数学的抽象が概念形成の出発地点であると述べたのちに，算数教育における外数学的抽象の適応可能性を示唆している。また「内数学的抽象」とは数学内の抽象であり，数学的概念を対象とする抽象である。この2つの抽象を述べたうえで飯田は,数学的モデル化の二面性を指摘する。1つ目は,①-③の過程によって作られる数学的モデル「シツェーションからの抽象モデル」，2つ目は，④’の過程によって作られるモデル「理論からの具体モデル」である。両者はどちらも時として「数学的モデル化」と呼ばれる。これら二つのモデルを提示した上で，飯田は,「シツェーションから抽象モデルを構成し(この過程が狭義の数学化)，それと概念と理論からの具体モデルとが連結されて初めて内数学的抽象が可能となる。」(p.164)
と概念形成を中心とする数学的活動をまとめている。先に述べた「シツェーションからの抽象モデル」と「理論からの具体モデル」が連結することで内数学的抽象が可能となる。つまり，氏のモデルには，数学的モデル化過程が2通り存在し，その両者がそれぞれの対象を数学的モデル化し，数学的モデルを構成して初めて数学的概念(図4中では，「数学理論」)が形成されるという。つまり，数学的概念を形成するプロセスを促進させるためには，2つのプロセスで明示された「数学的モデル化」を連結させ，内数学的抽象を可能とすることが必要であるとしている。

飯田のモデルにおいて数学の世界の中心となる部分は,「数学理論」である。この「数学理論」に着くことで学習者は，数学的概念の形成および既習概念の発展に至る。つまり，学習者に内在する数学的概念の「質的な変化」は,この「数学理論」を介したときに起こる，ということが言える。この「数学理論」を介するプロセスは,「数学的モデル→数学理論→数学的モデル→…」のプロセスの循環により行われる。その循環がなされ,「数学理論」が質的に高まることで,それを対象とする「④’数学的モデル化」も抽象度があがり，形成される「数学的モデル」も質的に高まる。つまり,世界の質的高まりにより,対象となる「数学的モデル」が高まる，ということである。

つまり，飯田のモデルにおいて「数学的概念の質的な高まり」を捉えるためには，局所的な視点としての数学的方法「数学的モデル化」およびそのプロセスにより形成される「数学的モデル」，そして概念形成の終点である「数学理論」がポイントとなる。

またこの飯田のモデルで評価できる部分は，「問題解決」と「概念形成」が似た特質を持っている，としながらも相違的なものであるとしてモデルに明示している点である。それぞれシツェーションの抽象から始まり，数学的モデルを形成したのち，一方は「数学理論」へ(概念形成)，他方は「解決」へ(問題解決)と目指すべき方向が明確に明示されている。次期問題解決モデルにおいてこの区別が明確でないことより，この飯田(1990)のモデルは，非常に示唆的な視点であると考える。

(2)次期問題解決モデルとの比較

前項にて考察した飯田(1990)の「数学的活動の類型」(図 4)と「次期問題解決モデル」(図 2)の比較を行う。

飯田(1990)のモデルにおける「数学的概念の質的な高まり」のポイントとなっている「数学的モデル」と「数学理論」は，それぞれ図 2 の「数学的に表現した問題」と「数学の事象」に対応する。つまり，「A2:数学化」が「④’数学的モデル化」に当たり，「B → C → D2」のプロセスが「④内数学的抽象」に該当する。また氏のモデルにおける生起要因である「シツェーション」に該当する段階は，同様に「数学の事象」である。これは，どちらも問題解決の起点となっていることより断定した。ここでは，次期問題解決モデル(図 2)における「数学の事象」が飯田(1990)のモデルにおける「数学理論」および「シツェーション」の 2 面性を有していることが分かる。

また飯田は，「数学的モデル化の 2 面性」を主張し，その 2 つの「数学的モデル化」である「シツェーションからの抽象モデル」と「理論からの具体モデル」が連結し，はじめて「内数学的抽象」が機能することを述べている。この 2 つの「数学的モデル化」は，「シツェーション」と「数学理論」(「数学の事象」)を対象とすることから，「A2：数学化」に対応し，内数学的抽象は，次期問題解決モデルにおいてサイクルの半分以上を占める「B → C → D2」にそれぞれ該当する。次期問題解決モデルにおいては，この内数学的抽象(「B → C → D2」)が機能しないと，問題解決サイクルの円滑な循環は見込めないという解釈ができるであろう。つまり，「数学的モデル化の 2 面性」は，サイクルを循環させる上で最も重視すべき視点であり，そのサイクルの循環要因となることがわかる。

したがって，「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデル(図 2)における問題解決サイクルの生起要因・循環要因を「数学の事象」の 2 面性を前提とし，次の表 2 として示す。

表 2:概念形成過程における生起・循環要因

生起要因； 「数学の事象」に内在する“シツェーション”を対象とした「数学的モデル化」
循環要因； 生起要因における「数学的モデル化」と「数学の事象」に内在する“数学理論”を対象とした「数学的モデル化」を連結させる「数学的モデル化」

問題解決サイクルの生起要因および循環要因には，「数学的モデル化の 2 面性」が大きく関わる。それに伴い，その「数学的モデル化」の対象となる「数学の事象」も“シツェーション”と“数学理論”という 2 側面を含意するものとして明示しなくてはならない。その反面，次期問題解決モデル(図 2)には「数学の事象」に関する明確な表記は無く，その出典元である小学校学習指導要領解説算数編(2017)および中学校学習指導要領解説数学編

(2017)にもその明示的な記述は見られない。つまり，飯田(1990)を基点として「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデル(図 2)を提案する上においては,「数学の事象」を“シツェーション”なるものと“数学理論”なるものに区分して表記することが必要である。次節においては，この捉えた生起要因および循環要因，そしてその対象となる「数学の事象」の 2 側面を顕在化した概念形成に焦点化した筆者による次期問題解決モデルの提案を行う。

4. 概念の質的高まりに焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル構築

前節で捉えた生起要因および循環要因をもとに「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデルを「教育内容としての数学的方法」のモデル(図 5)として提案を行う。

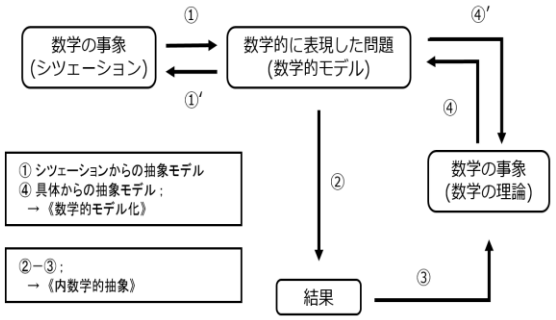

図 5:「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル

これは，次期問題解決モデル(図 2)の「数学の世界の問題解決」に前節での捉えを加筆したものとなっている。「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル(図 5)は，「数学の事象」を対象として形成される「数学的モデル」の形成，そして「内数学的抽象」を経て，新たな「数学の理論」の構築が行われる。飯田(1990)の特質を支持するとサイクルの大部分を占める「内数学的抽象」を機能させるための条件(言い換えるとサイクルの循環要因)として「①シツェーションからの抽象モデル」という名の「数学的モデル化」を行う必要がある。そこで，新たな「数学の事象」(シツェーションとなるもの，例えば“状況”や“文脈”)を用意し,「①シツェーションからの抽象モデル」を行えるような場を設定した。これは，教師から与えられるもの(外的要因)や学習者自らが見いだすもの(内的要因)とが考えられる。この①こそが，先に示した「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した問題解決サイクルの生起要因となる。そしてシツェーションを対象に「①シツェーションからの抽象モデル」が行われることで数学的モデルを構成し,「②理論からの抽象モデル」との連結が行われることで内数学的抽象が可能な数学的モデルが再構成される。前節で述べたが，この「数学的モデル化」の連結こそが，後に行われる「内数学的抽象」の機能条件であることより，サイクルの循環要件となりうる。

このようにこの「教育内容としての数学的方法」のモデルは，数学的モデル化を行った後に「内数学的抽象」が行われ，統合・発展／体系化を経て，新たな「数学の理論」が構成される，というものである。新たに用意した「数学の事象(シツェーション)」は，サイクルの循環(内数学的抽象)の中で既存の「数学の事象(数学の理論)」に包含され，シツェーションとして設定した「数学の事象」も数学的概念の一部となり,「数学の事象(理論)」が形成される。そしてこの形成された「数学の事象(理論)」が適応し得るような新たな「数学の事象(シツェーション)」が設定され，次のサイクルの循環が始まる。その際,「数学の事象」は，構成された理論を適応し得るようなものとする必要があり，前サイクルの「数学の事象」よりも，より理想的・限定的なものとなる。

したがって,「数学の事象」においてもその二面性(数学理論，シツェーション)を提示し，2分化してモデルに投影することで「数学的モデル化の二面性」を強調させることができ，より概念形成を視野に入れた次期問題解決モデル(図5)を提案することができる。そしてこの問題解決モデルそのものを「大局的な視点としての数学的方法」として対象化することで，学習者は概念形成を行うその過程をも意識化することができる。

5. 構築したモデルの実際

(1)調査授業の概要

先に構築した問題解決モデル(図 5)を実際の教授・学習の場に適応し，具体例を用いて考察していく。その分析対象を秋山(2017)において行った調査授業とした。以下はその概要である。

題材：数列概念の拡張(階差数列の導入)
日時：平成29年6月22日第5，6校時(100分)
対象：新潟県立高等学校第2学年数学B選択者8名
本時の課題：
$\boxed{1}$ 次の数列にはどのような“規則性”があるか
$\{a_n\}$: 3,4,6,9,13,⋯, $\{b_n\}$: −30,−29,−25,−16,0,⋯
$\boxed{2}$ $\boxed{1}$の数列 $\{a_n\}$ の第20項目を求めよう

(秋山,2017,p.25)より筆者作成

(2)「数学的モデル化」の2面性

次は，調査における問題$\boxed{1}$の数列$\{a_n\}$の規則性を求めている場面のプロトコルの一部である。

50	T	どうやって考えたかをノートに書いてください。
51	Y	{an}はわかった。
52	T	では，{bn}を考えてもらってもいいですか？
53	T	じゃあ{an}はわかりましたか？
54	A	うーん，わからんなー。
55	K	これ，さっきみたいに図でかいたらわかるよ
56	A	(図をかく　→)ああ，そういうことか。
57	M	ここが「＋１」になる。
58	A	違うよ，それＭさ…，あ，これあれだよね。等差と等比じゃないよね。
59	M	え，何で？
60	A	だって，等差と等比って同じ数ずつ増えていくじゃん。

上記のプロトコルは,「数学的モデル」が形成されるまでの過程を示している。①のモデル化においては，与えられた「数学の事象(シツェーション)」である問題(2)を対象として数学的モデル化を行い，数学的モデル「隣接2項間の関係図」を形成している。また④のモデル化では，前時までに学習した数学理論である「等差数列」,「等比数列」を対象とし，具体的にモデル化した「公差(公比)が一定である」が考察に用いられている。その際にこの①および④の過程を推進させた要因の一つとして「学習者同士の相互作用」が挙げられる。No.54で問題解決に困難を示したAに対してKは，図の活用を促し，その後No.56にてAは，数学的モデル化を遂行し，モデルの形成に至っている。また④のモデル化においても数学理論からの具体的なモデル化を行う際，No.58より理論が欠如しているMに対してAは，その補足を行っている様子が見られる。つまり，このサイクルにおける「数学の事象」を対象とした「数学的モデル化」は,「学習者同士の相互作用」によって促進され,「数学的モデル」を形成するに至っていることがわかる。

(3)数学的モデルの再構成活動

次は，問題$\boxed{2}$を解決している場面のプロトコルの一部である。問題$\boxed{1}$の解決場面においてサイクルが1周しており，この場面は，問題解決サイクルの2周目にあたる。

108	Y	やり方というか考え方はあってそう？
109	O	え？なんかやば。(笑)
110	AR	なんか違うよ。(笑)
111	I	こんな感じですか？
112	T	ふむふむ…。なるほどね。
113	I	でどうなんですか？(笑)
114	T	もっといい方法考えてみなよ。そうしたらその答えが正しいかが自分で分かるんじゃない？
115	I	ケチだなー(笑)，分かりました、考えますよ。
118	A	第6項目で足されているのが5回だから，第20項目だと足されているのは19回だなー。19回足されていることを知っておけば，えーっと，1，2，3，4，5，6，…，19で，それを18までとすると…18まで足しているとすると，左右の頭からくっつけていくと何になるんだ…
119	K	でも奇数だから1個余るよ。
120	A	そうなんだよ。でも9組だから…
121	K	9組作って余りを足しちゃえば？
122	A	いや，8組作って…いや9組できて何も余らないよ。19で9組作れるんよ。だって，19でしょ。19回上がるってことじゃん。19を捨てて18と考えると，頭と手前くっつけて18÷2で9セットできるんだよ。19×9か…9×9で81，あれ？ああ，171＋…
123	K	外側からどんどんやっていくんでしょ？真ん中のやつが最後なんでしょ？
124	A	そうそう。171＋19だから190で，最初の3が足されるから193だ！先生，193だ！

上記のプロトコルは，問題$\boxed{1}$と同様の数学的手法(隣接2項間の関係図の利用)で問題$\boxed{2}$を考える場面から始まる。2周目のサイクルでは，主として「④理論からの具体モデル」により数学的モデル「隣接2項間の関係図」の形成が行われている。2周目のサイクルであることより，1周目のサイクルにおいて理論化された“シツエーション(数列$\{a_n\}$の規則性)”が「数学の事象(数学理論)」に含意され，それを具体化することで「数学的モデル」の形成が行われている(No.103,No.108-111)。つまり，調査授業における2周目のサイクルでは，1周目のサイクルより「④理論からの具体モデル」が強調され，「数学的モデル」の形成に至ることが教授・学習の場より見いだせる。これは，あくまでも1周目と同様に「隣接2項間の関係図」を対象として内数学的抽象を行う場合に見出せるものであり，数学的モデルが変更する場合には一概にいえない。その例として，No.115における学習者の「数学的モデルの変更」が挙げられる。これは，「④理論からの具体モデル」より作成した数学的モデル「隣接2項間の関係図」を用いて数列$\{a_n\}$の第20項目を求めようとしたIが，その困難さを指摘するとともに教師の働きかけにより，関係図ではない別のモデルを形成しようと試みている場面である。その後Aは，No.118-124にかけて数学的モデル「等差数列の和」と再構成し，内数学的抽象を経て正答に辿り着いている。ここで，顕在化される事柄は，「数学的モデルの再構成活動」というモデルの再構成を行う活動である。形成された数学的モデルでは，解決が困難な場合，一度①’の過程を経て，シツエーションに戻り，再度①のモデル化を行う。つまり，2周目以降のサイクルでは，2パターンのモデル構成活動が見いだせる。1つ目は，「当該サイクル以前のシツエーションを含意した「数学の事象(数学理論)」を対象とし，「④理論からの具体モデル」においてモデル構成を行う活動」，2つ目は，「当該サイクル以前のサイクルにおける「数学の事象(数学理論)」を踏まえたうえで，シツエーションの探究より数学的モデルを再構成する活動」である。

前者は，対象化される「数学の事象(数学理論)」は，当該サイクル以前のサイクルにおけるシツエーションを含意しているため，形成

される数学的モデルは，1 周目と不変である。この場合，1 周目では，「①シツエーションからの抽象モデル」が強調されるため，内数学的抽象によりその①が対象化され,「数学の事象(数学理論)」に含意される。しかし，2 周目以降は，1 周目で①を含意した「④理論からの具体モデル」に焦点が置かれ，形成されるモデルも不変であることから，対象化される方法は，1 周目と変わらない。つまり，方法の多様化は生まれず，1 つの方法に固執した問題解決になる恐れがある。

その反面,後者は「シツエーションの探究」を行い，新たな視点より数学的モデルを再構成するため，前サイクルの数学的モデルとは違うモデルとなる。つまり,「④理論からの具体モデル」を背景に持ちつつ，与えられた(見いだした)問題(シツエーション)を改めて探究し,「①シツエーションからの抽象モデル」に焦点を当てることで，多様な方法を対象化することができであろう。したがって,「数学的モデルの再構成活動」は，サイクルが循環する中で多様な方法を見いだし，それを教育内容として対象化することができる活動として積極的に取り入れていくべきであると考える。今回の調査では見いだせなかったが同様の再構成活動として「数学理論の探究(④と④’の往還)」も重要な視点であろう。

これらの再構成活動を取り入れるためには,調査授業でも顕在化している学習者の外的要因がポイントとなる。先にも述べたが,No. 114 において，学習者 A に対して教師は，前サイクルにおける数学的方法とは違う方法を見いだすことを働きかけている。この場面における「数学的モデルの再構成活動」を推進させている事項は,発問による「教師の働きかけ」であった。その他の外的要因としては，学習者同士の相互作用が期待される。もちろん学習者個人の内的要因にて再構成活動を行うことが,主体的な活動として望ましい。しかし,高等学校数学科のように抽象度が高いシツエーションを扱う場合には，外的要因にもその重点が置かれるべきであると考える。

6. モデル分析の総合的考察

前節にて構築したモデルを実際の教授・学習の場の分析・考察を行った。本節では，それらを踏まえて総合的に考察していく。

問題解決サイクルの 1 周目，2 周目共々，サイクルが循環する中で「数学的モデル化の 2 面性」が数学的モデルの形成により連結し，新たな「数学の事象(数学理論)」の形成に至っている様子が見られた。その際に，飛躍的に概念形成が行われたわけでなく，各段階および各段階移行プロセスを経ることで，徐々に理論が形作られている様子からも「数学的概念の質的な高まり」を見いだす，という視点において一定の価値があると考える。

また「数学的モデル化」を行う場面において多様な方法を生み出し，それを対象化するためには,局所的な数学的方法に該当する「数学的モデルの再構成活動」（①と①’，④と④’）の往還)が重要であることが実際の教授・学習場面から見いだされた。これは，言い換えると,「シツエーション(数学理論)の探究活動」である。その局面は,「解決に障害が発生した場合」と「サイクルの循環により理論が形成されたうえで，他の方略を考える場合」に生じる。これは，飯田(1990)のモデルにおいては，考慮されていない視点である。「数学的モデルの再構成活動」が多様に行われるためには，顕在化する数学的モデルが多様に形成されるようなシツエーションを設定することが望ましいと考えられる。さらに,これらの「局所的な数学的方法」を促進させるための要因として,学習者の外的要因(学習者同士の相互作用･教師からの働きかけ等)の存在を確認することができた。

7. 本稿のまとめと今後の課題

本稿では,「数学的概念の質的な高まり」に

焦点化した学習過程を「教育内容としての数学的方法」という方法知の立場より考察を行った結果，次の 2 点の知見を得た。「流動性を数学的世界の問題解決サイクルとして位置付け，その生起・循環要因を特定」，「それらを包含するモデルの構築および着眼すべき主焦点(数学的モデル化の 2 面性・数学的モデルの再構成活動)の特定」である。

現実的事象からの希薄化が明瞭な高等学校数学科において，数学的発展の中で「教育内容としての数学的方法」を身に付けるための新たな視点を設けるとともに,「概念形成を主とした大局的な視点として教育を行っていく」という今後焦点化すべき 1 つの数学教育の在り方を提案した。

今後の課題は，構築したモデルに準じた授業を構想･実践し,分析および考察を通して，サイクルの各要因の具体を見いだすとともに，構築したモデルの加筆・修正を繰り返し，その精緻化を行うことである。また「教育内容としての数学的方法」の評価方法の開発も課題として挙げられる。「内容知」に重きが置かれている後期中等教育において，学習者が数学的発展の中で「方法知」，即ち「教育内容としての数学的方法」を見いだし，それを身に付けていく活動を主として行えるような学習過程の基盤整備およびさらなる提案を目指した研究と実践をさらに推進していきたい。

引用・参考文献

秋山拓也(2017).「教育内容としての数学的方法に関する研究－高等学校数学科における「中心概念」を起点として-」. 日本数学教育学会.『第 50 回秋期研究大会発表集録』, 23-26.

阿部好貴(2010).『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』，博士論文(未公刊)，広島大学大学院教育研究科.

飯田慎司(1990).「シツェーションからの数学的活動における創造性の開発について」，『数学教育学のパースペクティブ』，pp. 151-171，聖文社.

飯田慎司(1992).「数学教育における問題解決の批判的検討ーシツェーションの探究の重要性についてー」，岩合一男先生 退官記念出版会(編)，『数学教育学の新展開』，pp. 256-268，聖文堂.

岩崎秀樹・杉野本勇気・大滝孝治・岩知道秀樹(2017).「数学教育研究としての教材開発のあり方ー中等教育を一貫する論証指導のためにー」，『全国数学教育学会誌. 数学教育学研究』，23(2)，pp. 1-13.

清水宏幸(2017).「全国学力･学習状況調査「活用」の問題作成の枠組みの検討」. 日本数学教育学会.『第 5 回春期研究大会論文集』, pp. 149-154.

中央教育審議会(2016).『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ』. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf （2018. 2. 14 最終確認）

S. I. ブラウン ＆ M. I. ワルター(1990).『いかにして問題をつくるか：問題設定の技術』. 平林一榮(監訳). 東洋館.

文部科学省(2009).『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』，実教出版.

文部科学省(2017).『小学校学習指導要領解説算数編』. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387017_4_1_1.pdf（2018. 2. 14最終確認）

文部科学省(2017).『中学校学習指導要領解説数学編』. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387018_4_1.pdf(2018. 2. 14 最終確認）

山口明穂・和田利政・池田和臣(2013).『国語辞典』，第十一版. 旺文社.

ライル, G. (1987). 坂本百大・宮下治子・服部裕幸(訳)『心の概念』. みすず書房.