

人間がつくった最初の数

－分数の起こりを考える数学的活動をつくる－

伊達文治
上越教育大学

1. はじめに

「整数（自然数）は神様のつくったものだが、他は人間のつくったものである。」（Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.）

これは、ドイツの数学者であるレオポルト・クロネッカー（Leopold Kronecker, 1823-1891）が夕食後の会話の中で語ったという有名な言葉である（科学者人名事典編集委員会, 1997, p. 205）。

“Die ganzen Zahlen”は、辞書を引くと「整数」という訳語が出てくるが、数の歴史を見ると、「自然数」、つまり「正整数」を意味していたと考えるのが妥当のように思われる。クロネッカーの冒頭の言を支持するならば、人間は自らの経験を通して、まず神のつくった自然数（の概念）を獲得し、次に、自然数を基にして自然数ではない正の有理数をつくり出した、ということになる。本稿のタイトルにした「人間のつくった最初の数」は、自然数ではない正の有理数に他ならない。自然数ではない正の有理数の表現としては、分数表現と小数表現とがある。これ以降、分数表現で表される数を単に「分数」、小数表現で表される数を単に「小数」ということにする。

本稿は、「人間のつくった最初の数」は、どのような必要性から、どのようにつくられたのか、という問いに向かって探究しようとするものである。この探究を、分数の起こりを考える数学的活動をつくるという方向で進めて

いきたい。

本稿を、稿末に挙げている引用・参考文献、主には大矢真一氏、片野善一郎氏の著を総合的に参考にしながら、記述していきたい。両氏の著を参考にする場合は著者名等を特に示さないが、両氏以外の文献を引用・参考にする場合は、著者名・発行年・頁を明記することとする。なお、分数の起こりを考える数学的活動をつくるために設けた文中の〔問〕及びそれに答えている箇所は筆者によるものである。

2. 分数・小数の基にある考え方

人間が未開であった時代には、人々は、一つ、二つ、三つ、……というような数、すなわち自然数で事足りていたであろう。次第に文化が発達していき、社会が複雑になっていくにしたがって、1より小さい数を考える必要が出てきたのではないだろうか。1より小さい数を自然数を用いて表そうとすると、まず2通りの考え方が出るであろう。一つは、1を二つ集めたものを2、1を三つ集めたものを3、…としていくのと同じように、1を二つ集めたものを $\frac{1}{2}$ 、1を三つ集めたものを $\frac{1}{3}$ 、…のよ

うに表す方法である。これが分数の起こりであろう。ここには位という考えは入っていない。これに対して1より小さい数を表すのに、位の考えを持ち込む方法がある。

1 を（現代表記の）10 集めたものを十，十を 10 集めたものを百，…のようにしていき，これらを使って例えば（現代表記の）234 という数を 2 百 3 十 4 とするのと同じように，1 を 10 に分けたものを分，分を 10 に分けたものを厘，…のようにしていき，これらを使って例えば（現代表記の）0.234 という数を 2 分 3 厘 4 毛のように表す方法である。1 より上に位の考えがあるのと同じように，1 より小さい方にも位の考えを導入するのである。これが小数である。したがって，分数と小数は，別の考え方から出発したものであると言える。

10 進法に基づく小数がはっきりと現れたのは，中国では元の朱世傑の『算学啓蒙』（1299）であり，ヨーロッパではオランダのシモン・ステヴィンの『10 進分数（小数）論』（1585）が最初である。しかし，小数の考え方を最初に使ったのは，古代バビロニアの人達である。古代バビロニアでは 60 進法によって 1 より大きい数を書いていたが，その方法が 1 より小さい数の表し方にも適用されている。古代バビロニアの 60 進法は今日，時間や角度を表す際に，その痕跡を残している。これは 60 進法が天文学上の必要から生まれたことを示すものである。古代バビロニアも当初は 10 進法であったようであるが，恐らく天文学上の要求からであろう，後に 60 進法に改められた。10 進法から 60 進法に改められる際に，基数とする 60 が比較的に大きい数であることに伴う記数法上の困難性を軽減するためであろう，位取りの原則が導入されたのではないかと考えられる。室井(2000)によると，古代バビロニアの数学は，その萌芽は紀元前 24 世紀頃の粘土板にも見て取れ，他の古代文明の数学よりも起源が古く，世界最古の数学とってよい。古代バビロニアで数学や天文学に使われた数は，10 進法と 60 進法の混合体系で

位取りの原理を用いて次の表 1 のように表された。

表 1. 楔形文字の数（室井，2000，p.19）

1	2	3	4	5	6	7	8
				...		...	
9	10	11	12	...	20	...	30
...		...		...			
...	40	...	50	...	59	60	61
	...						
62	...	100					

分数については，基本的には 60 進法で表現されたが，日常生活でよく使われるものに対しては，次の表 2 のように特別な数字が用いられることも多かった。

表 2. 楔形文字の分数（室井，2000，p.19）

	シュメール語	アッカド語
	1/2: bar, ba ₇ , sa ₉ , maš	mišlum, bamtum
	1/3: šušana	šuššān
	2/3: šanabi	šinipu
	5/6: kingusila	parasrab

古代バビロニアの日常生活では，既に（単位分数ではない）普通の分数も使われていたことがうかがえる。これは，古代エジプトの単位分数よりも，そして古代バビロニアの小数よりも古いものであったであろう。ただ，それを探るには残されている資料は余りに乏しく，本稿においてはこれ以上古代バビロニアの分数と小数には踏み込まないこととする。

本稿では，「人間のつくった最初の数」として，古代エジプトの単位分数，そして異なる

単位分数の和として表される数を取り上げ、それらがどのような必要性から、どのようにつくられたのか、という問に向かって探究していくこととする。

3. 分数の起こり

人間は、その進歩の最も早い段階において分数の概念をもった。分数は初め一つのものをいくつかに分ける必要から起こった。一つのを二つに分ける、一つのを三つに分ける、そうした大きさが分数である。一つのを二つ集めると二、一つのを三つ集めるとサン、というように名付けるとき、そこにはもう元の一の名との関わりはないのと同様、一つのを二つに分け、一つのを三つに分けたときも、もう元の一の名との関わりはなくなる。

古代エジプトの分数は、(インド・アラビア数字で書くと、) $\dot{2}$, $\dot{3}$, $\dot{4}$, ……のように等分する数にある印を付けて表されていた。実際は下図(図1)のように表されていた。

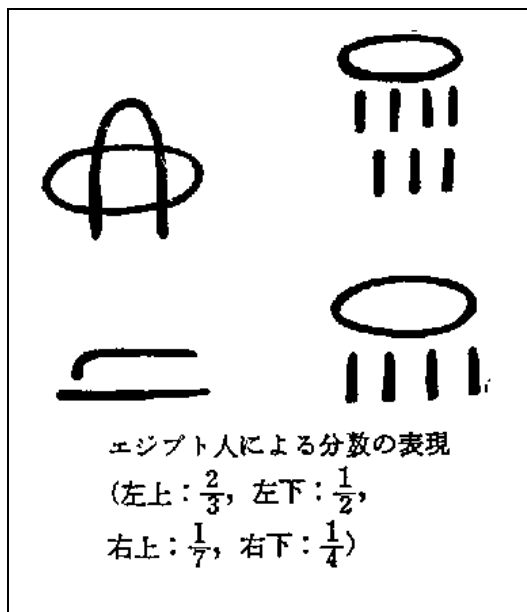


図1：古代エジプトの分数
(イー・ヤー・デップマン, 1986, p. 232)

今の $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, …… のように分母,

分子という二つの数の組合せで表されるものではなく、どこまでも一つの数であった。二つの数を組み合わせて一つを表すようになったのは、かなり後のことである。この1を分けたことを表す分数を、「単位分数」と呼ぶ。この単位分数1個では1より小さい全ての大きさを表すことはできない。したがってこれを幾つか組み合わせて必要な大きさを表すのである。古代エジプトでは、1より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表していた。B.C. 17世紀頃エジプトの僧侶アーメスによってパピルスに書かれた数学の巻物(幅 33 cm, 長さ 5.5m)「リンド・パピルス」が、イギリス大英博物館に保存されている。この本の初め第1節には、「2を奇数で割る表」として、(インド・アラビア数字で書くと)次のような分数表が書かれている。

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}, \quad \frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}, \quad \frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18},$$

$$\frac{2}{11} = \frac{1}{6} + \frac{1}{66}, \quad \frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}, \quad \dots\dots$$

その後の第2節には、パンの分配に関する問題が7題出され、その解法も示されている。当時のエジプトでの乗除計算は全て、2倍と10倍だけで行われたようである。1より小さい数は単位分数で表わされたので、乗除計算の乗数として使われた数は、2, 4, 8, 16, 32, ……と $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{16}$,

$$\frac{1}{32}, \dots\dots, \text{そして, } 10, 100, 1000, \dots\dots$$

と $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, …… だけであったと考えられる。

では、ここで、分数の起こりに関する具体的な問題で考えよう。(これは算数教材としても十分活用できるものである。)

[問 1] 三つのパンを 5 人で等分に分けるとき、どのように分けたらよいか。その分け方を考えよう。

現代人の多くは、三つのパンを 5 人に分ける場合、まずそのパンを三つとも 5 等分に切り分けるであろう（切られたものは 15 個になる）。それを三つずつ分配すれば、全部が等分に分配されることになる。つまり今の表し方で言えば、1 人当たり $\frac{3}{5}$ ずつ分配されたことになる。

[問 2] ところが、古代エジプトの人達の分配の方法は、上の方法とは異なったものであった。その方法には、今風の一人分 $\frac{3}{5}$ を

異なる単位分数の和に直した、 $\dot{2} \dot{1} \dot{0}$ （すなわち、 $\frac{1}{2} + \frac{1}{10}$ ）が使われたことが考えられる。この単位分数の和を利用した分け方とはどのようなものであったか。

古代エジプトの人達はまず、できるだけ大きなピースを配れるように（できるだけ大きな単位分数を一つ目にするように）と考える。そこで、そのパンを三つとも半分（2 等分）にする。切られたものは 6 つになるからこれを 1 人に一つずつ分配する。すなわちまず 1 人当たり $\frac{1}{2}$ だけを分ける。次に残った 1 切れをまた 5 等分する。その一つは $\frac{1}{10}$ になる。これを 1 人に一つずつ配れば、全てが平等に分配されたことになる。

[問 3] 上に出てきたパンの分け方を、パンを切る回数で比較しよう。

現代人の多くの考えでは、三つのパンを 5 人に分ける場合、三つのパン全部をそれぞれ 5 等分して、各人に 3 個ずつ分配するが、そうするためには $4 \times 3 = 12$ 回パンを切らなければならない。これに対し、古代エジプトの人達は、一つのパンを二つ切りにしたものを 5 個、一つのパンを 10 切りにしたものを 5 個作ればよいことを知っていた。この場合、三つのパンをそれぞれ半分にし、半分一つをさらに 5 つに切るのである。古代エジプト人の人達にとって必要であったのは、たった 6 回（ $3 + 3$ ）切ることだったのである。

[問 4] ピラミッド建設などに多くの労働力を必要とした古代エジプトにおいて、多くの労働者へパンなどの食料を分配するときには、どのような考えが必要であったであろうか。

上のパンの分け方による切る回数の比較では、扱う数が小さいため、あまり差があるようには感じられないかもしれない。しかし、古代エジプトで巨大なピラミッドの建設に携わる労働者が 100 人、1000 人、・・・と大勢になった場合を考えたらどうだろう。パンを切る回数の差は看過できないものになる。古代エジプトの多くの労働者へのパンの平等な分配において、パンを切る回数をできるだけ少なくするという考えを必要としたことが、1 より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表す方法がつけられた背景にあったのではないだろうか。その方法は、多くの労働者へパンなどの食料を分配する際に非常に効力を発する考えであり、ピラミッド建設等に多くの労働力を必要とした古代エジプトにおいてこそ生まれた考えであったかもしれない。

しかし、単位分数は、古代エジプトだけではなく、時代こそ違え、ギリシアでも中国でも行われた。普通の分数については、ギリシアにおいても中国においても同じ時期に存在

していたようである。特に中国では、単位分数の痕跡と思われる記述が見受けられる。最古の数学書の一つである『九章算術』(1世紀ころ)に、1辺の長さが $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ 歩と言うように単位分数の和の形で記されている所

がある。ただ、原文には $\frac{1}{2}$ は二分之一、 $\frac{1}{3}$

は三分之一と記されており、明確に分母と分子が意識されているため、これは単位分数とは言えない。中国にもエジプトの単位分数が伝えられ、中国の従来分数と接触した結果、このような表し方になったものとも考えられている。

元々、分母と分子という二つの数で一つの数を表すことは本当に困難な事であったであろう。ギリシアにも分数らしきものはあったが、それは2数の比として表されていた。例えば、今の $\frac{2}{3}$ に当たるものは $2:3$ という比で表していた。

私達の分数の読み方、例えば、2分の1、3分の1は、中国の分数の読み方、二分之一、三分之一に由来する。

一方、分数の書き方(例えば $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$)

はインドの割り算の形式に由来する。インドでは板の上に砂を撒き、その上に棒で数字を書いていた。数字を消したり直したりすることは簡単であった。 $93 \div 7$ という割り算を例にとろう。 $\begin{array}{r} 93 \\ 7 \end{array}$ のように被除数と除数を

縦に並べることから始めて、数字を消したり書き直したりしながら計算を進めていき、最後

後に答えを $\begin{array}{r} 2 \\ 7 \end{array}$ のように商、余り、除数を

縦に並べて示すのである。インドの割り算の形式は、中国古来の算木による割り算の形式

と同様である。算木も簡単に取り去ったり置き直したりできる点では、板の上の砂に数字を書くのと変わりがなかった。計算の用具の類似が計算法の類似をもたらした。中国でも割り算の結果を単独で呼ぶことはなく、必ず除数をつけて呼んでいる。例えば、私たちが $93 \div 7 = 13$ 余り 2 と書く割り算の答えを、中国では必ず、十三、七分之二 というように記したのである。前述のようにギリシアの分数は比であったが、これに対し、インドと中国では割り算の結果として生まれた新しい数であった。

中国の分数が日本に伝わってきたのは奈良時代よりは少し前の頃である。その頃の都の大学では当時の数学が学ばれ、その教科書として『九章算術』も重要なものとされ、中に中国の分数もあったのだが、これは日本に定着はしなかった。分数が日本の数学の中で、確かな地位を占めるようになったのは江戸時代に入ってからである。それまではずっと3分の2というのは、三つに割って二つ集めるというというように、単に操作を表すものでしかなかったのである。ここでは分数の起りの要点を述べるのに止めることにしたい。現在の数としての分数が完成され定着するには、まだまだかなりの年月を要することになるのである。

4. 異なる単位分数の和への分解

次に、古代エジプトでは1より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表したが、それを可能にしたのは、どのような考え方からなのか、ということに迫っていきたい。まず、「2を奇数で割る表」がどのようにつくられたのか、を考えていきたい。

次は、上越教育大学の学部2年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業での、ある受講生の感想文の一部を抜粋したものである。

$$\frac{2}{\text{奇}} = \frac{2}{2n-1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n(2n-1)}$$

$$\left(= \frac{2n-1+1}{n(2n-1)} \right)$$

で簡単に単位分数の和にできちゃうと、

$$\frac{2}{\text{奇}} \text{ は なかなか 思いつかなくて。}$$

〔問5〕文字式を知る現代人がまず思い付くのが、上のような分数式の恒等式である。これを参考に、次の分数を異なる単位分数の和に分解してみよう。

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{2}{35}$$

上の分数式の恒等式を使えば、次のようになる。

$$\frac{2}{5} = \frac{2}{2 \cdot 3 - 1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{2}{2 \cdot 4 - 1} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{35} = \frac{2}{2 \cdot 18 - 1} = \frac{1}{18} + \frac{1}{18 \cdot 35} = \frac{1}{18} + \frac{1}{630}$$

上の二つは「2で奇数を割る表」と同じ結果であるが、三つ目のものは「2を奇数で割る表」の結果 $\left(\frac{1}{32} + \frac{1}{42} \right)$ とは異なっている。

$\frac{2}{35}$ について、別の考え方を探してみよう。

ファン・デル・ヴェルデン著・加藤他訳(2006)によると、リンド・パピルスの時代よりはかなり下の古代ローマ初期のパピルス(BM10520)が、大英博物館に所蔵されている。

このBM1052という文献の4番目の問題では、 $\frac{2}{35}$ という分数がリンド・パピルスと同じよ

うに $\frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ で

表わされている。

更に、BM10520の記述者は、この単位分数の和への分解がどのように得られるかを、右のように記しているのである(ファン・デル・ヴェルデン著・加藤他訳, 2006, pp. 224-225)。

$$\begin{aligned} 35 &= 7 \times 5 \\ 7 + 5 &= 12 \\ 12 : 2 &= 6 \\ 6 \times 5 &= 30 \\ 7 \times 6 &= 42 \end{aligned}$$

〔問6〕上のBM10520の記述者の方法は、どのようにしたものだろうか。

次のような方法であると考えられる。

- ① 35を5と7に分解
- ② 5と7の和は12
- ③ その半分は6
- ④ 6を5と7の両方に掛けると
30と42
- ⑤ これより、 $\frac{2}{35} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$ が得られる。

この方法を現代的な表記でかくと、

$$\frac{2}{35} = \frac{2}{5 \times 7} = \frac{1}{5 \times \frac{5+7}{2}} + \frac{1}{7 \times \frac{5+7}{2}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{42}$$

となる。

〔問7〕上の〔問6〕の方法が正しいことを説明してみよう。

次のように〔問6〕の方法が正しいことが説明できる。

奇数 n が因数 a と b に分解できると
すると、 $n=ab$

$a+b=2c$ となる c を考える。

両辺を abc で割ると、

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ac} = \frac{2}{ab}$$

よって、

$$\frac{2}{ab} = \frac{1}{ac} + \frac{1}{bc}$$

[問 8] 上の [問 6] の方法に倣って、次の
分数を異なる単位分数の和に分解してみよう。

$$\frac{2}{5} \quad \frac{2}{7} \quad \frac{2}{9}$$

上の [問 6] の方法に倣うと、次のように
なる。

- ① 5 を 1 と 5 に分解
- ② 1 と 5 の和は 6
- ③ その半分は 3
- ④ 3 を 1 と 5 の両方に掛けると
3 と 15
- ⑤ これより、 $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ が
得られる。

- ① 7 を 1 と 7 に分解
- ② 1 と 7 の和は 8
- ③ その半分は 4
- ④ 4 を 1 と 7 の両方に掛けると
4 と 28
- ⑤ これより、 $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ が
得られる。

- ① 9 を 1 と 9 に分解
- ② 1 と 9 の和は 10
- ③ その半分は 5
- ④ 5 を 1 と 9 の両方に掛けると
5 と 45
- ⑤ これより、 $\frac{2}{9} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45}$ が
得られる。

上の二つは「2 で奇数を割る表」と同じ結
果であるが、三つ目のものは「2 を奇数で割
る表」の結果 ($\frac{1}{6} + \frac{1}{18}$) とは異なっている。

リンド・パピルスの方法は、この BM10520 の
記述者の方法とも異なっていると考えられる。

[問 9] 「2 を奇数で割る表」の結果
($\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$) はどのようにして得ら
れたのだろうか。

エジプトの人達は、図 1 に示したように、
唯一単位分数ではない $\frac{2}{3}$ だけはそのままに
使っているが、 $\frac{2}{9} = \frac{1}{6} + \frac{1}{18}$ の両辺を 3 倍
すれば、 $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ が得られるから、

$\frac{2}{3}$ に対する答 (異なる単位分数の和への分解)

も知っていたのではないかと考えられる。

次に、(現代の) 分子が 2 ではない分数の場
合を考えてみよう。

[問 10] 次の分子が 2 ではない分数を異なる
単位分数の和に分解してみよう。

$$\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5}$$

古代エジプトの人達は、「2で奇数を割る表」等を使って、(現代の) 分子が2以上のどんな数になる場合でも、異なる単位分数の和に分解することができたという。そうだとすると、例えば $\frac{3}{5}$ や $\frac{4}{5}$ を異なる単位分数の和に分解する場合にも「2で奇数を割る表」を利用する方法があるはずである。 $\frac{3}{5}$ の場合、まず

$\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}$ とし、この $\frac{2}{5}$ の所へ「2で奇数を割る表」の中にある $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ を代

入し $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ が得られる。また

$\frac{4}{5}$ の場合は、まず $\frac{4}{5} = \frac{2}{5} \times 2$ とし、この $\frac{2}{5}$ の所へ「2で奇数を割る表」の中にある

$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ を 代 入 し て

$\frac{4}{5} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{15}\right) \times 2$, す な わ ち

$\frac{4}{5} = \frac{2}{3} + \frac{2}{15}$ とし、「2で奇数を割る表」か

ら得られる $\frac{2}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ と $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ を代

入して、 $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$ と する
ことができる。

現代的な方法としては、次に示すような商と余りの関係を利用する方法も考えられる。

1 より小さい任意の既約分数 $\frac{a}{b}$ を異なる単位分数の和に分解する場合を考える。まず、 $\frac{a}{b} < 1$ だから $a < b$ である。 b を a で割ったとき、商が q で余りが r であったとすると、 $b = qa + r$ ($0 < r < a$) となる。

このとき、次の式が成り立つ。(証明は、読

者にお任せしたい。)

$$\frac{a}{b} = \frac{1}{q+1} + \frac{a-r}{b(q+1)}$$

この式は、 $\frac{a}{b}$ を一つの単位分数と、(現代の) 分子が a より小さい分数の和に直せたことを示している。したがって、残りの(現代の) 分子が a より小さい分数を、更に単位分数と(現代の) 分子が元のそれより小さい分数の和に分解する計算を続けていけば、終には、初めの分数を異なる単位分数の和に分解することができるのである。

この方法を $\frac{3}{5}$ や $\frac{4}{5}$ に適用すると、次のようになる。

$$\frac{3}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{10}, \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

この結果は、パピルスの結果と異なるが、これは、与えられた分数を異なる単位分数の和に分解する方法は色々であることを示している。上の二つの方法の他にもまだ色々と考えられそうである。ここまで、(現代の) 分子が2ではない分数の場合を考えてきたが、なお、最初の疑問「2を奇数で割る表」はどのようにしてつくられたのかという疑問は残されたままである。

和算の遺題継承ではないが、読者のみなさんに、次の[問 11](遺題)を記して、この節を閉じることにしたい。

[問 11] 次に示したのは、リンド・パピルスに記されている、「2を奇数で割る表」の中の $\frac{2}{35}$ をどのようにして異なる単位分数の和に分解したのかを説明した部分である。この方法はどのようなものかを読み解いてみよう。(古代エジプトの人達は、全ての計算を2倍と10倍の二つの算法で処理していたことが知られている。)

2を35で割る

(35の) $\frac{1}{30}$ は $1\frac{1}{6}$. (35の) $\frac{1}{42}$ は $\frac{2}{3} \frac{1}{6}$. (そこで答は $\frac{1}{30} \frac{1}{42}$.)

(解法. $\frac{1}{35}$ の2倍は $\frac{1}{30} \frac{1}{42}$. なぜなら $\frac{1}{35}$ を210に応用すれば) 6. (そして6の2倍は12, すなわち) 7と5. (それらは210の $\frac{1}{30} \frac{1}{42}$ となるから.)

(1)	35
$\setminus \frac{1}{30}$	$1\frac{1}{6}$
$\setminus \frac{1}{42}$	$\frac{2}{3} \frac{1}{6}$

(平田監修・吉成訳, 1985, I - p. 35)

5. 算数・数学教育における「数学史の活用」

算数・数学教育では、何より「なぜ、どうして」を重視する。子供が授業の中で見せるどのような些細な疑問も、教師が見逃さずにしっかり捉えることは大切であろう。もし子供から上のような質問が出たら、教師は十分納得のいく説明をしてやらなければならない。また、その質問を基にして教室での納得いくまでの話し合いに持ち込むことができれば、この上ないことである。このような質問に答える（応える）には、どうしても数学史の知識が、そして数学史を活用するということが必要となる。

数学史を活用するということで、まず思い浮かぶのが、数学史にあるトピックを取り上げて教室で話したり、演習に持ち込んだりということである。数学史のトピックを単発的な教材として扱った学習だけであれば、これまで学校数学の至る所でなされてきたことかもしれない。これではその時に子供の興味・関心を引くことはできても、一時的なものに終わってしまうことも少なくないであろう。このようなトピックの利用も「数学史の活用」の一つではあるが、実は他に、算数・数学教育における「数学史の活用」の重要なものとして大きく次の二つがある。

一つ目は、世界の数学の展開のダイナミズム、その各断層からのものとしてトピックを選定し、それを、その数学史全体の流れの中

で、さらに現在の学校数学との関係から考えさせようとするところにある。例えば、今私達が何気なく使っている10進位取り記数法のよさについて、漢数字やローマ数字による表記や計算と比較しながら、見直させる。また、古代エジプトの単位分数の話題では、分数表があったという事実や異なる単位分数の和に直すことを提示するだけではなく、なぜ異なる単位分数の和に直したのかという文化的背景にまで迫らせるといようなことである。

二つ目は、「数学史の活用」を通して、教師の「(固定的) 数学観」を次のような「文化的数学観」に変容させることにある。数学は、先人達が自分の文化の中で、問題を自分の問題として捉え、試行錯誤を繰り返してつくり上げ、今も、世界各地、社会の中、教室の中、各個人の中で、そして、各文化の中で、つづられ発展しているものである。そのような「文化的数学観」への意識変容を図る方策が必要である。文化としての数学を学ぶことのできる教育内容や教材の見直しがなされなければならない。他教科では得られない数学のよさ・面白み・美しさ・楽しさ・有用性という「数学の本質的な価値」を感得できるような、教育内容の創造と教育方法の工夫という取り組みも大切となる。アーネスト『数学教育学の哲学』は、教師の数学観とその指導法との間には一貫性が観察され、数学に対する教師の見方、信念、好みがその教育実践に強く影

響すると言う。教師の数学観は日々の授業実践の成果に大きく深く関わる。教師の「文化的数学観」があつてこそ、子供の「文化的数学観」への意識変容をも可能にできると言えよう。これらの取り組みによって、生徒の「数学観」も「文化的数学観」へと変容し、情意的学力も向上し、学習意欲を育てることができ、生涯数学を学び続ける力にすることができると考える。このような実践がわが国の学校数学全体を通して実現できたら、学習者の数学観はどれほど豊かなものになるであろう。子ども達の数学に対する思いや心に描く像はより豊かなものになるに違いない。

6. おわりに

前の節において、算数・数学教育における「数学史の活用」の重要なものとして大きく二つを述べたが、一つ目のものは「数学史の局所的活用」、二つ目のものは「数学史の大局的活用」と言える。「数学史の大局的活用」は、「数学史の局所的活用」の積み重ねによって実現されると言えよう。

本稿においてつくろうとした「分数の起こりを考える数学的活動」による探究は、「数学史の局所的活用」のほんの一例に過ぎないかもしれないが、これを一つの出発点とし、これからも「数学史の大局的活用」を目指し、学校数学の各領域における「数学史の局所的活用」の開発研究を推進していきたい。

引用・参考文献

- Ernest, P. (1991), "The Philosophy of Mathematics Education", Oxon : Routledge Falmer.
- Franceschetti, D. R. (ed.) (1999), "Biographical Encyclopedia of Mathematicians (vol. 2)", N.Y. : Marshall Cavendish, p. 318.
- Klein, F. (1924), "Elementar Mathematik vom Höheren Standpunkte aus I", Dritte Auflage Verlag von Julius Springer Berlin.
- イー・ヤー・デップマン著／藤川誠訳(1986),『算数の文化史』, 現代工学社.
- ファン・デル・ヴェルデン (B.L. van der Waerden) 著／加藤文元 他 訳(2006),『ファン・デル・ヴェルデン 古代文明の数学』, 日本評論社.
- フェリックス・クライン (Felix Klein) 著／遠山啓監訳(1959),『高い立場からみた初等数学』, 商工出版社.
- 伊東俊太郎(1987),「序説 比較数学史の地平」, 伊東俊太郎編『中世の数学』, 共立出版, pp. 1-29.
- 稲葉三男(1931),『数学発達史』, 三笠書房.
- 大矢真一(1957),『分数と小数』, 啓林館.
- 大矢真一(1964),『比較数学史(事項別)』, 富士短期大学出版部.
- 大矢真一・片野善一郎(1978),『数字と数学記号の歴史』, 裳華房.
- 科学者人名事典編集委員会(1997),『科学者人名事典』, 丸善.
- 片野善一郎(1964),『問題形式による数学史』, 富士短期大学出版部.
- 片野善一郎(1982),『算数授業に役立つ数学の話』, 明治図書.
- 伊達文治(2010),「学生にみる文化的数学観への変容」,『上越数学教育研究 第25号』上越教育大学数学教室, pp. 19-26.
- 伊達文治(2013),『日本数学教育の形成』, 溪水社.
- 平田寛監修・吉成薫訳(1985),『リンド数学パピルス』, 朝倉書店.
- 室井和男(2000),『バビロニアの数学』, 東京大学出版会.
- 中村幸四郎(1980),『近世数学の歴史 微積分の形成をめぐって』, 日本評論社.
- 吉田光由(1623)著, 佐藤健一(2006)訳,『塵劫記』(初版本), 研成社.