上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.21-32

現実性のある場面における
子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について

—相互作用による model の自己発達に着目して—

藤川　亮一
上越教育大学大学院修士課程３年

1. はじめに

小数の乗法及び除法の学習には様々な教育的意義が含まれている。例えば，小数の乗法及び除法は現実場面と連関させれば，子どもが現実場面から自ら知識を形成していくという学習の有り様をもたらしたり，子どもが乗法及び除法を整数の範囲から小数の範囲へ拡張することを通して「拡張の考え」を理解することができたりする(eg., 中村，1996；板垣，2002)。一方，子どもにとって小数の乗法及び除法の学習は，整数の乗法及び除法の学習に数としての小数の複雑さが絡んだり(高橋裕樹，2003)，整数の範囲から小数の範囲へと意味の拡張をしたりする(松原，1985)という点で難しい。

小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るため，高橋裕樹(2003)は，現実的数学教育(Realistic Mathematics Education，略称 RME)理論に基づき，子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を明らかにした。他方で，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を，model の自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し，それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにする必要がある。そのことは，子どもが，自身のこれまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識を関連づけ心的に構造化したもの(以下，informal knowledge と呼ぶ)と学校などで提示する数学的な知識とを結び付けつつそれを獲得していくような，子どもの数学的な知識の形成過程に寄り添う授業の実現への示唆を得ることにつながるためである。

上記を踏まえ，筆者の修士論文において子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を緻密にかつ局所的に捉えたところ，子どもが，自らの小数の乗法及び除法の知識形成を informal なものから formal なものへと発達させていく際に働く，「比較」による転換というものを知見として得た。

他方で，数量に関する子どもの informal knowledge を支えるものの一つとして他者との関わり(高橋等，1994)があり，また子どものもつ数学的知識に含まれる幾つかの特徴のうちの一つとして他者との関連がある(高橋等，2007)という双方の知見を鑑みると，子どもは他者との相互作用の過程で自らの数学的知識を形成していくと言えるだろう。修士論文においても，子どもが，友人との相互作用の過程で双方の model を比較し，小数の乗法及び除法の知識形成を informal なものから formal なものへと発達させるという活動を記述した。

そこで，本稿の目的を，現実性のある場面から出発する子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を相互作用による model の自己発達という視点か

ら明らかにすることとする。

本稿では，まず，筆者の修士論文における要旨を以下の四つに分けて示す。一つ目は，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件である。二つ目は本研究における「現実性」の定義づけについてである。三つ目は，RME 理論を視座とした Gravemeijer et al.(2000)や Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の心的構成物である model の自己発達の考察についてである。四つ目は，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みを精緻化し発展させることにより構築した，子どもの数学的な知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みについてである。その後，Blumer(1991)や中村(1989)を基に本研究における「相互作用」の定義づけをする。それらを踏まえて，最後に，相互作用による model の自己発達という視点から，教授実験における子どもの学習過程の分析，考察を行う。

２．小数の乗法及び除法における先行研究の考察

小数の乗法の意味の拡張に関して，中村(1996)は，乗数が整数のときには「同数累加」で捉え，乗数が小数になったときには「割合による意味付け」で捉える立場から，数直線を用いた指導を提案している。さらに中村(2007)では，子どもが小数の乗法の意味をどのように捉え，表現しているのかに着目し，子どもは，数直線を用いて乗法の意味を割合で捉え，整数倍から小数倍へと乗法の意味を拡張させていることを明らかにしている。他方で，子どもが数量関係を数直線へと表していくまでの過程を明らかにする必要がある。

白石(2005)は，除法の「意味の拡張」とは「１」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとし，それを子どもたちに導入する際には，数直線を用いることが有効であることを示している。他方，子どもの小数の除法の知識形成において，小数の乗法の知識がどのように関わるのかといったことを考慮する必要がある。

高橋裕樹(2003)は子どものもつ心的構成物であるmodelの発達と形成過程に着目し，小数の乗法及び除法の単元と授業を構想，実施し，子どもの学習過程を解釈，考察することで，modelの発達を明らかにした。知見として高橋裕樹(2003)では，子どもは問題場面に応じて解決のための単位を様々に設定し，状況に応じたmodelを用いて解決に臨むとともに，その後0.1を単位とする解決を行うようになると，0.1から１へと単位を変換して式の比較を行い，自ら１を単位とする割合の考えに基づくmodelを構成したことを明らかにしている。

上記より，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成するには，ｉ)子どもが整数の乗法及び除法の知識を生かしながら，解決のために用いる単位や，それと対になる単位量をどのように形成していくのか，ⅱ)数直線や図などでの単位量の利用により，どのように比例の考えを発達させていくのか，ⅲ)子どもの小数の乗法の知識が，どのように小数の除法の知識形成に関わるのか，あるいは，小数の除法の知識形成がどのように小数の乗法の知識の洗練に関わってくるのか，を単元の構想，子どもの活動の分析及び考察の際に考慮する必要があることを示した。

３．本研究における「現実性」の定義づけ

Freudenthal(1991)は，子ども一人ひとりの現実性を生かし，ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言した。

その中で Freudenthal（1991）は次のように述べている：

Reality is historically, culturally, environmentally, individually, and subject-tively determined.

現実性は，歴史的に，文化的に，環境的に,個別的に,そして主観的に決定される。
（Freudenthal，1991，p.17：筆者訳）

つまり現実性は，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものと言えるだろう。算数授業において子どもがつくり出す現実性について，吉田（2000）は，子どもが活動と記号との相補的な関係を契機として，あるいは言葉を媒介として，自ら現実性をつくり出していく様相を明らかにした。双方の現実性に対する考察より，現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であると言える。例えば，数学者にとっては，記号の世界で表される数学そのものが現実的であり，親しみのある場面である。一方で，算数授業においては，子どもたちにとって何かしらの扱う対象，例えば具体物や，自らが表した図や式などの model の操作により，実感を伴う場面がつくり出されていく。中村(2000)は，小学校の重さの授業場面における子どもの活動をみることで，対象とそれを操作すること，そしてそれらが関係することで数学が発展することに数学的な現実性の一つの側面があることを示し，さらに捉える対象には対象とそれを操作する方法があることについて言及した。吉田（1998）と中村（2000）とを踏まえると,子どもが現実性を捉えていくためには,活動の過程で何らかの操作を経験したり活動と記号との関係を見直したりすることで,ある数学的な対象をつくり出す，という過程を繰り返すことが重要だと言える。

一方で，現実世界は子どもにとって親しみのある場面であり，日常的な現実性をもつものである（高橋等，2003）と示されるように，現実性と日常生活とのつながりは切り離せないものである。問題場面と現実性に関して，池田（2013）では，児童・生徒にとって本当に現実的であるのか，あるいは子どもにとって馴染みのある場面であるかどうか等を論点とした上で，問題の現実さについて言及している。

先行研究の考察より，本研究における現実性を定義づけるに当たって，ⅰ）現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であるという視点，ⅱ）活動と記号との相補的な関係を契機とするような，活動的現実性を起点として構成する数学的現実性への発展という視点，ⅲ）問題場面と現実性に関して，子どもが親しみを感じたり，馴染みを覚えたりするような，子どもの日常生活に即した状況という視点，の三つを考慮する必要がある。

したがって,本研究における現実性を「子どもが，自分の経験や知識と環境（問題場面）とを照らし合わせてそれらの類似性を把握したり，活動によって数学的対象を構成したり，環境に対して親しみを感じたりすること」と定める。ここでの親しみとは，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものとする。

４．子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

４．１．Gravemeijer et al.(2000)における model の自己発達

Gravemeijer et al.（2000）は，図１に示すように，informal knowledgeがformal knowledgeへと向かうための起点であるべきだとする，modelの自己発達というRMEの鍵となる理論を提示した。

modelに関してFreudenthal(1991)は次のように述べている：

Moreover, with regard to schematising there is a tendency to identify schemas with such things as solving formulas and procedures within formalised mathe- matics. Nowadays the term “schema”, in the broad sense, seems to have been su- perseded by more topical “model” -- a valuable term, but unfortunately devalu- ated by thoughtless use and misuse.

さらに言えば,体系化することに関して,それは，数式を解くことや公式化された数学における手順として，そのようなこととしての各々のスキーマを識別する傾向にある。今日では,その用語をスキーマといい,広い意味で,もっと局所的にmodelよって置き換えられてきた，貴重な用語である，しかし不運にも思慮深い使用と悪用によって評価されていない。
(Freudenthal，1991，pp. 31-32：筆者訳)

すなわち，数学の体系化において，スキーマとは心的構成物であり，数式を解くことや，数学的知識の形成過程に表れる。言わば，子どもがこれまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識が関連し，心的に構造化されたものであると捉えることができる。さらにこのスキーマは「model」という用語で表され，数学的知識の形成において重要な役割を果たす。

図１において，situationsは複数の連続した類似の問題であり，算数の授業では，現実性をもつ問題場面に相当する。model-ofはsituationsのもとで心的にモデル化されたものであり，situationsに依存したmodelである。このmodelがformal knowledgeに向かうことにより，model-forとなり，最後に，数学的に標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

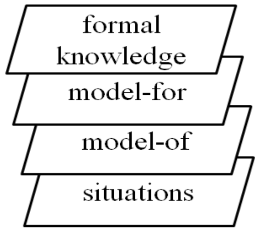

図１　Gravemeijer et al.(2000)の図式

４．２．Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の model の自己発達

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，modelの表れ方に関して以下のように述べる：

Within RME, models are seen as representations of problem situations, which necessarily reflect essential aspects of mathematical concepts and structures that are relevant for the problem situation, but that can have different manifestations. This means that the term ‘model’ is not taken in a very literal way. Materials, visual sketches, paradigmatic situations, schemes, diagrams and even symbols can serve as models.

RMEにおいて，modelは問題状況の表現として見られ，またはその問題状況に関連する数学的概念と構造の不可欠な様相を反映するが，種々の現れ方をする。これは「model」という用語が過度に文字通り用いられないことを意味している。道具，視覚的スケッチ，典型的な状況，スキーマ，図表，記号さえもmodelとして目的に適う。
(Van den Heuvel-Panhuizen，2003，p.13，筆者訳)

すなわち，「model」は，問題場面から数学的な関係を抽出した状態で表れたり，問題場面を把握し表現するために表れたりと，様々な様相を反映するものである。

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は，Gravemeijer et al.（2000）のmodelの自己発達をさらに発展させ，model-ofからmodel-forへの移行の段階にさらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図２のように示している。Van den Heuvel-Panhuizen（2003）は図２の図式を視座として子どもの百分率の学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行を分析し，文脈に結びつく水準でinformalな解釈を記号化したmodelが，「文脈」，「領域」及び「機能」による三つの転換を伴いつつ，局所的かつ連続的発達を経て，最終的には一般的で形式的な解決のためのmodelになることを示した。

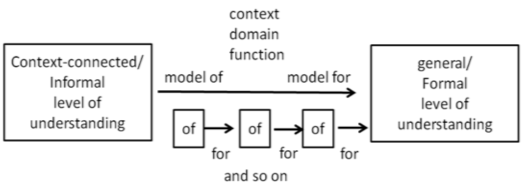

図２ Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の図式

４．３．Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の理論的枠組みの精緻化

Van den Heuvel-Panhuizen（2003）の子どもの活動の分析・考察の結果では，model-ofからmodel-forへの転換が生じる際には，複数の明確なsituationの設定があったり，子どもが領域ごとのつながりを意識したりすることが示された。この複数の明確なsituationというのは一つのformal knowledgeに対して設定されるものであり，領域ごとのつながりというのは各単元におけるformal knowledge間のつながりのことである。

我が国の算数・数学教育実践を鑑みると，一つのformal knowledgeに対し，複数の明確なsituationからformal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり，formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の系統があったりする。

そこで，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の子どもの学習過程の分析を踏まえて，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式に複数の明確なsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練の過程を明示化することで，理論的枠組みを精緻化した(図３)。なお，Gravemeijer et al.（2000）の図式においてsituationsと明記されているものを，新たに構築した理論的枠組みにおいては複数の明確なsituationと明記したのは，多数の類似の問題場面に子どもが取り組むことによってmodelの転換がなされるというVan den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式を，立体的に捉え直し精緻化を図るためである。

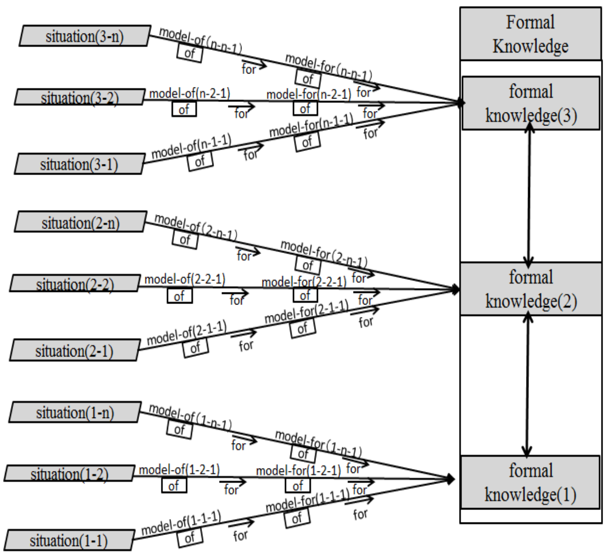

図３　新たに構築した理論的枠組み

図３において，situation（1−1）（括弧の中の一番目の番号はsituation間の区別をする順番を，二番目の番号はformal knowledge（1）に対するsituationの順番を表す）は，formal knowledge（1）（括弧の中の番号は到達したformal knowledgeの順番を表す）に対しての最初のsituationである。model-of（1−1−1）（括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す）は，situation（1−1）に基づいた最初のmodelであり，そこからは，formal knowledge（1）へと向かってVan den

Heuvel-Panhuizen(2003)の図式と同じようにmodel-ofとmodel-forが繰り返される。model-of(1-1-1)の次にmodel-for(1-1-1)(括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す)，model-of(1-1-2)，model-for(1-1-2)，…，model-of(1-1-n)，model-for(1-1-n)と徐々にmodelが発達していくことを想定する。situation(1-2)は，formal knowledge(1)に対しての第二のsituationである。situation(1-2)からformal knowledge(1)に至るまでの過程は，situation(1-1)の場合と同様である。つまり，formal knowledge(1)に対してsituation(1-1)，situation(1-2)，…，situation(1-n)と複数の明確なsituationを設定するのである。formal knowledge(2)は，formal knowledge(1)に対して更に洗練されたformal knowledgeであり，同様にformal knowledge(3)，…，formal knowledge(n)と次々とformal knowledgeが洗練されていくのである。つまり，formal knowledge の洗練とはformal knowledgeのネットワーク化であり，子どもが様々なsituationに取り組む過程においてformal knowledgeが互いに関連づけられ，構造を保ちながらシステムとして成長するものであると捉えられる。

他方，それぞれのsituation は，子どもがformal knowledge間を関連づけることを意図したものではないため，子どもが形成するformal knowledge間の関係は薄弱であることが予想される。そのため，子どもがformal knowledge間の関係を強固かつ柔軟なものへと変化させたFormal Knowledgeを形成することを支えるものとして，formal knowledge間の関連づけを意図したSituationが設定される。

５．相互作用の定義づけ

Blumer(1991)のシンボリック相互作用論や中村(1989，2005)を基に，算数・数学授業における子どもの相互作用を定義づける。

Blumer(1991)によれば，シンボリック相互作用論は，人間は，ものごとが自分に対して持つ意味にのっとって，そのものごとに対して行為するということ，このようなものごとの意味は，個人がその仲間と一緒に参加する社会的相互作用から導き出され，発生するということ，このような意味は，個人が，自分の出合ったものごとに対処するなかで，その個人が用いる解釈の過程によって扱われたり，修正されたりすること，の三つの明快な前提に立脚しているという。Blumer(1991)は，上記の三つの前提を基に，個人が他者の行為に対して，その行為の解釈をして反応する時に生じるものをシンボリック相互作用であると記述した。

Blumer(1991)によれば，人々はシンボリックな相互作用によって，それぞれの個人に対して意味をもつ対象をつくりだしていくという。その対象の性質について，Blumer(1991)は，あらゆる対象の性質は，それがある個人に対して対象として存在するとき，それが個人に対して持つ意味からなりたつと示す。例えば，算数の授業において，教師と子ども，子ども同士での関わりによりつくられた数直線図であっても，或る子どもはそれを問題場面の数量の関係を捉えるものとして扱ったり，一方で他の子どもは立式のための有効な道具として扱ったりするだろう。すなわち，数直線図という共通の対象であっても，それに対する子どもの意味づけの仕方の違いによって，個人によって異なる意味をもつ対象となる。

中村(2005)は，算数・数学授業において，教師と子ども，子ども同士の間で暫定的に存在しているとして扱っているものを数学的対象と呼んでいる。この数学的対象は，それを表現する記号や言葉とともに，それを扱う方法，それにかかわって生ずる情報などの総体からなっているという(中村，

1989）。例えば，縦の長さが 4 cm，横の長さが 3 cmの長方形の面積については，記号として3×4=12（cm^2），扱う方法としては 1 cm^2のますの個数を数える，それにかかわって生ずる情報としては長方形の面積は縦の長さ×横の長さで求めることができる，などが挙げられる。中村（2005）によれば，数学的対象は授業での相互行為を通して作り出されるものであり，相互行為を促進するものであるという。つまり，数学的対象は，授業での教師と子ども，子ども同士がお互いに関与しながら作られていくものであり，相互行為を活性化させるものである。

一方で，授業において数学的対象がつくられていく際には，教師と子ども，子ども同士の間でどのような相互作用の過程が存在するのであろうか。中村（1989）は，相互作用ということを前提として授業の全体と教師と個々の子どもについて考察していくための相として，共有するということに着目している。中村（1989）は共有するということについて以下のように述べる：

共有するということは，個々の子供の個人的・経験・知識を公的なものへ，さらに，数学的なものへと発展させていくために，教師と子どもが，子どもどうしがそれらについて比較・検討していく相互作用を行うことが可能となるような基盤を確立することである。　　　　（中村，1989，p8）

すなわち，共有するということは，子どもが，これまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識を，他の子どものそれと比較・検討しうる共通の基盤をつくることである。

ここで，中村（1989）における個々の子供の個人的・経験・知識を，RMEモデル論におけるmodelとして捉えてみよう。すると，授業での相互作用の際に，子どもたちが互いのmodelを共有し合うことによって，ある数学的対象が構成されると言えるだろう。例えば授業において，或る子どもが自らのmodelをもう一方の子どもに提示した際に，その一部でも共有された場合には，数学的対象が構成されたとみなすことができる。一方で，或る子どもが自らのmodelをもう一方の子どもに提示した際に，一方の子どもにとってその意味が全く分からず，modelの共有がなされない場合もあり，これは数学的対象が成立し得ない場合である。そうした場合には，授業においてmodelを比較・検討していくことは困難となるだろう。なぜなら，modelが共有されないということは，比較・検討していく相互作用を行うための基盤が成立しないためである。これらの例を踏まえると，modelの共有による数学的対象の構成という視点から授業での相互作用をみることで，どのようにmodelが比較・検討されているのかを捉えることができよう。

他方，子どもは，対象をどのように問題状況に関連のある意味のあるものとして捉えるのであろうか。Blumer（1991）によれば，行為者による意味の使用は，ひとつの解釈の過程を通して生じるものであり，その解釈の過程にはふたつの明確な段階があるという。それらはBlumer（1991）によれば，第一に，行為者は，意味をもつものごとを，自分に対して指示しなくてはならないということであり，それは行為者が自分自身と相互作用するということであること，第二に，自分自身とのコミュニケーションの過程によって，解釈は，意味を扱うということの問題になり，行為者は，自分が置かれた状況と自分の行為の方向という見地から，意味を選択したり，検討したり，再グループ分けしたり，変形したりするということ，である。つまり，自己との相互作用を通して，数学的対象を状況に関連する意味のあるものと捉えるのだろう。算数・数学の授

業場面で言えば，ある状況において，子どもは，状況に即した意味のある対象を自分自身に対して指示する。そして，子どもは，問題解決の進行状況や自分がどのように問題解決したいのかという方向性という見地から，数学的対象を選択したり，検討したり，変形したりするだろう

以上の議論より，本研究における相互作用を，「他者のmodelを解釈し，自分自身のmodelを形成し他者へ指示すること」とする。ここでの他者とは，Blumer(1991)の人間は，自分自身と相互作用することが可能であり，この相互作用は社会的なものであるという立場に準じ，自分自身も含むものとする。modelを解釈するとは，子どもが，自らのそれまでの生活体験や学習経験を通じて蓄積してきた経験・知識をもとに，modelを自らにとって意味のあるものとして捉えていくことであるとする。さらに，modelの共有による数学的対象の構成という視点を踏まえ，授業における相互作用を捉えていく。算数・数学授業での相互作用に，modelの共有による数学的対象の構成と，それに伴う個人のmodelの自己発達という視点とを付与することで，どのような相互作用の過程によって，どのような観点からの比較が生じたのかを記述できるだろう。

６．教授実験

６．１．教授実験の概要

2016年２月12日～３月15日までの間に，新潟県公立小学校の４年生２人を調査参加者(Nao と Kei と呼ぶ)として，１回 50 分の授業を計６回実施した。データをビデオカメラ３台による撮影，子どもの筆記記録によって収集した。データからプロトコルを作成し,プリントの記述を参考に Nao と Kei の学習過程を捉えることとした。インタビューアーは筆者であり，T と略記する。

６．２．調査の概要

単元構想においては，高橋裕樹(2003)を参考に，表１に示すように小数の乗法，包含除，等分除の順に小単元を配置し，最後に，比の三用法の場面を用意した。なお，本稿においては，situation(1-2) と situation(2-1)における Kei の学習過程の分析，考察について示す。

表１　調査で扱った situation

Situation	
(1-1)	２m で 170 円の赤のリボンがあります。このリボン 14m の代金はいくらですか。
(1-2)	１m で 80 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン 3.2m の代金はいくらですか。
(2-1)	青いリボンが 15m あります。一人に 2.5m ずつ配ると何人に配ることができますか。
(3-1)	2.5m で 200 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン３m の代金はいくらですか。
(3-2)	２ℓ で 390 円の牛乳と 1.6ℓ で 360 円の牛乳があります。この２つのうちどちらの牛乳がお得ですか。
Situation	親ライオンは 63kg です。これは，子ライオンの体重をもとにすると，1.5 倍にあたります。子ライオンは何 kg ですか。

７．Kei の学習過程の分析

situation(1-2)では，formal knowledge(1)(80×3.2＝256(円))の形成が目指されていた。Kei は，はじめに，3.2×80 を立式し筆算によって 2560 を求めるが，自らが求めた 2560 という答えが，本当に正しいのかどうかの判断がつかないようであった。Kei が表した 3.2×80=2560 の model には，既習の

(小数)×(整数)の考えに基づいた model が関係しているだろう。その後 Kei は，自らが表した 3.2×80=2560 という model の妥当性の判断のために Nao とお互いの model を確認し合った。そして，Kei は３m で 240 円と比べて，自らが表した 2560 円は高いという判断のもと，2560 の 0 を斜線で消した。つまり，Kei は筆算の仕方の誤りには気付いていないものの，直感的に自らの model の誤りに気付き，model を修正したと見られる。これは，(小数)×(整数)の model 基づく見かけ上修正された model-of(1-2-1)である。次に，Kei は，Nao の 0.2m の代金は 80×0.2 という model を受けて，0.2m の代金を求めるために 0.2×80 を立式し 16 を求めた。おそらく，Kei は未習である 80×0.2 の計算に戸惑いがあったため，これ自分にとってなじみのある既習の(小数)×(整数)の model を用いたのだろう。

situation(2-1)では，formal knowledge(2)(15÷2.5＝6(人))の形成が目指されていた。Kei は，15÷2.5 の筆算より，0.6 を導き出した(図４)。 Kei は，おそらく，未習の 15÷2.5 という計算に戸惑いがあったため，15 を 150 と 2.5 を 25 と捉え直し，そして 150÷25 より 6 を求めた後に，15.0 の小数点を商にそのまま立てたのだろう。つまり，これは，既習の(小数)÷(整数)の model に基づく model-of(2-1-1)である。一方で Kei は，自らが導いた 0.6 という数が本当に正しいかのどうかについて不安な様子を見せた。0.6 人いう小数の答えになったことに対して違和感を覚えたのだろう。

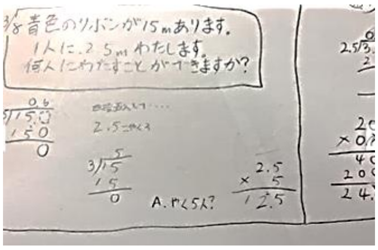

図４　Kei が表した図

T は，15m に見立てたリボンを 2.5m ずつ区切っていく活動を Kei に例示した。Kei は，この T の例示を受けて，2.5 を６個足し合わせて 15 と記述した。そして，Kei は「0.6 なわけないじゃん。15m だよ。」と発し，0.6 人が答えとして誤りであることに気付き，15÷2.5=6 と記述した。

Kei は，Nao と T との関わりにより，2.5×6=15 という model の妥当性を判断する。

Nao：2.5×5 をして 12.5 になって，で，そしたら 12.5 ならもう一回足せばいいんだって 15 になりました。

T　：12.5＋2.5 をしたの。それが 15 なんだね。

Nao：あと５に１を足した。

Kei　：そうそう，６個たしたら 15 になった。

Kei は，Nao の 15÷2.5 の除数と被除数を 10 倍するという model を受けて，自らも 15÷2.5 と 150÷25 の関係に目を向ける。

T　：なるほど，10 倍しても 100 倍しても答えは一緒になると。

Kei：しかも，答えも一緒になってるね。

T　：Nao さんが出してくれた 15÷2.5 と 150÷25 を比べるとどうですか？

Kei：同じだね。わり算ってそのまま？

Kei は，上記の T との関わりの後，ノートに 15÷2.5=6 と記述した。おそらく，Kei は，「わり算ってそのままだっけ？」の発言にみられるように，これまでの学習経験を辿り，除法の性質に係る model を踏まえた上で，15÷2.5=6 と 150÷25=6 の数学的な関係を捉えたのだろう。

８． Kei の学習過程の考察

ここでは，７章の分析を基に，小数の乗法及び除法の学習における子どもの相互作用の過程を緻密に辿ることで，どのような相互作用が働き，それに伴って如何なる比較が生じたのかを明らかにする。

８．１．直感的に正しい model であるかど

うかという観点からの比較

situation(1-2)では，Kei は，はじめに，自分自身との相互作用により，3.2×80=2560 という(小数)×(整数)の model に基づいた model を構築した。Kei の自分自身との相互作用の過程を辿ってみる。すると，(整数)×(小数)の model は未習であり馴染みがなかったため，これまでの学習経験を辿り，既習であり自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model に基づいて 3.2×80=2560 を表す Kei の姿が見られる。つまり，Kei は，(小数)×(整数)の model を自分自身にとって意味のあるものごととして指示したのである。おそらく，Kei は，未習である(整数)×(小数)の situation に直面したために，(小数)×(整数)の model を意味のある対象として捉えたのであろう。

次に，Kei が，Nao の 80×3=240 という model を解釈し，3.2×80=2560 という見かけ上修正された model を構築するという相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。Kei が，Nao の 80×3=240 という model を解釈する際には，Nao の model を既習の(整数)×(整数)に関連づけて解釈したということが挙げられる。その後，Kei は,自らが解釈した 80×3=240 という model と自らの 3.2×80=2560 という model を比較し，見かけ上修正された 3.2×80=2560 という model を構築した。この比較が生じる背景に着目してみる。一つには，80×3=240 という model が自らにとって馴染みのある model であったということがある。そのことが，80×3=240 という model を比較しうる意味のある対象として認めることにつながったのだろう。もう一つには，直感的に大きさを比較できたということが挙げられる。自らが表した 3.2×80=2560 という model と 80×3=240 という model の大きさを直感的に比較できるということが，双方の model を比較するということにつながったのだろう。つまり，この相互作用は，Kei が直感的に比較できる双方の model を構築しているという状況において働いたため，直感的に正しいのかどうかという観点からの比較が生じたのだと言えよう。

８．２．馴染みのある model であるかどうかという観点からの比較

situation(1-2)では，Kei が，Nao の 80×0.2=16 という model を解釈し，馴染みのある model と関係する 0.2×80 という model を構築するという相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。すると，Kei は，80×0.2=16 という model を自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model と関連づけて解釈し，0.2×80 という model を表している。Kei が，0.2×80 という model を表すに至るまでには，80×0.2=16 という model と 0.2×80 という model との比較がある。つまり，Kei は，双方の model の比較の結果，0.2×80 という model を自らにとって意味のある対象として捉え，表している。この背景に目を向けてみる。一つには，0.2×80 という model が，自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model と関連したものであったということが挙げられる。自らにとって妥当性のある model の選択を求められた Kei は,馴染みのある model を選択したのだろう。もう一つには，双方の model が数学的な関係にある model であったということが挙げられる。既習の乗法の性質に基づいて双方の model の関係を捉えられることが，Kei が双方の model を比較しうる対象として認めることにつながったのであろう。つまり，この相互作用は，Kei が数学的な関係にある双方の model を捉えている状況において働いたため，どちらの model が自らにとって馴染みのある model であるのかという観点からの比較が生じたのだろう。

８．３．数学的な関係に基づいた比較

situation(2-1)では，15÷2.5=0.6 という model を表している Kei が，T の 15m に見立てたリボンを 2.5m ずつ区切っていくという model を解釈し，新たに 2.5×6=15 という model を構築する相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。Kei が，T の model を自らにとって意味のあるものごととして捉える背景には三つのことがあるだろう。一つ目として，Kei が 15÷2.5=0.6 という model の妥当性を確かめたかったということが挙げられる。Kei が自らの 15÷2.5=0.6 という model に違和感を覚えている様子からも，自らの model の妥当性の判断のために，T の model を自らにとって意味のあるものごととして捉える様子がうかがえる。二つ目として，T の model を自らにとって馴染みのある整数の除法の model と関連づけて捉えられたということが挙げられる。Kei は，T の包含除に係る model を，自らの整数の除法の model と関連づけたのだろう。三つ目として，Kei が，既習の乗法の model と除法の model の数学的な関係を辿ったということが挙げられる。これは，T の包含除に係る model を，2.5×6=15 という小数の乗法の model として捉え直している Kei の姿からうかがえる。

次に，Kei が，15÷2.5=0.6 という model と 2.5×6=15 という model の双方の model を解釈し，新たに 15÷2.5=6 という model を構築する自己との相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。すると，Kei は，双方の model を解釈する過程で，双方の model の比較している。この比較が生じる背景には三つのことがあるだろう。それらは，一つ目は，双方の model は自らがこれまでの経験を基に解釈した結果表されたものであり，自らにとって意味のあるものであるということ，二つ目は，15÷2.5=0.6 という model の妥当性が求められる場面であったということ，そして三つ目は，双方の model は乗法と除法との数学的な関係に基づくものであり，双方の model は Kei にとって比較しうる対象であるということ，である。そして，双方の model の比較の結果，Kei は，新たに 15÷2.5=6 という model を構築する。この背景には，Kei は，15÷2.5=0.6 という model と 2.5×6=15 という model の双方の関係に基づき比較しているということがあるだろう。つまり，15÷2.5=0.6 の割合(倍)にあたる数である 0.6 と，2.5×6=15 のいくつ分にあたる数である６とに着目して比較している。

９．結語

我が国の算数・数学授業では，自力解決の後に比較・検討や練り上げがあり，子ども同士，あるいは子どもと教師の相互作用を通して，集団としての数学を創っていこうとする。言い換えると，RME 理論では model の自己発達と記述されているが，他者との相互作用が日常的に発生する日本の算数・数学授業においては，常に「比較」するという子どもの活動があり，子どもは自らの model を大胆に発達させていく。

本稿においては，修士論文において示された「比較」による転換の内実を明らかにすべく，相互作用による model の自己発達という視点から，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の過程を緻密に辿った。結果,「比較」による転換の内実の一端として，どのような相互作用が働き，それに伴って如何なる転換が生じるのかを明らかにした。その一つには，子どもが自らの誤謬を含んだ model を，他者との相互作用により他者の model の妥当性を認めることによって，大胆に転換させていく様相がある。他方で，何れの場合においても，他者の model を自らにとって馴染みのある model と関連づけて解釈し，共有し，そして model 同士を比

較するという子どもの活動が見られた。

今後の課題は以下の二点である。第一に，model の自己発達の細かな経路を長期的な視点から捉えていくことで，子どもにとって馴染みのある model が，どのような転換点を経て一般性のあるものへと発達していくのかを明らかにすることである。第二に，本研究の知見が，算数・数学の一斉授業においてどのように表れるのかを緻密に検討することで，その場ではどのような相互作用が働き，それに伴って如何なる比較が生じるのかを明らかにすることである。

引用・参考文献

Freudenthal,H.（1991）. *Revisting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

藤川亮一.（2018）. 現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について-model の自己発達に着目して-. 上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

Gravemeijer.K., Cobb.P. & Bowers.J., White nack,J.(2000).Symbolizing,Modeling, and InstructionalDesign. In Cobb,P., Yackel., & McClain,K(eds.),Symbolizing and Communicating in MathematicsClassroom (pp.225-273). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

H.ブルーマー.(1991).シンボリック相互作用論:パースペクティブと方法.勁草書房.

池田敏和.（2013）. モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性.日本数学教育学会誌, 95(5), 2-12.

板垣賢治.(2002). 連続量（小数・分数）の乗除. 日本数学教育学会誌, 84(8), 38-44.

松原元一.(1982).算数「子どもの考え方・教師の導き方」.国士社.

中村享史.（1996）. 小数の乗法の割合による意味づけ. 日本数学教育学会誌, 78(10), 7-13.

中村享史.（2007）. 小数の乗法に関する記述表現の分析-乗法の意味づけの児童のノート記述を中心に-.第40回数学教育論文発表会論文集, 361-366.

中村光一.(1989).算数・数学の授業における 共有プロセスに関する考察.数学教育学論究 51, 3 - 23.

中村光一.(2000).授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象. 上越教育学研究, 15, 1-8.

中村光一.(2005).授業における数学的対象に 関する考察：数学的価値観の観点.第38回 数学教育論文発表会, 463 - 468.

白石信子.（2005）. 子どもの理解に基づいた小数のわり算の指導について-数直線への比例的な見方を通した意味の拡張-:.上越数学教育研究, 20, 163-174.

高橋等.(1994). 数量に関する子どもの informal knowledge を支えるものの存在 -Resnick(1991)を手掛かりとして-.第27回数学教育論文発表会論文集,149-154.

高橋等.(2007). 縦断的に見た或る子どものもつ数学的知識に含まれる幾つかの特徴.第 40 回数学教育論文発表会論文集,799-804.

高橋裕樹.(2003).小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

Van den Heuvel-Panhuizen, M.(2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics* , *54,* 9-35.

吉田亨.（2000）. 算数の授業における子どものリアリティの構成とその発展. 日本数学教育学会誌, 68(10), 45-50.