上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.1-10

１次方程式の学習に見られる変数的な扱い

布川　和彦　　　　　　　　青柳　潤
上越教育大学　上越教育大学附属中学校

１．はじめに

方程式の学習においては、求める数量の値を x と置いて方程式を立て、その方程式を解いて解を求めることが行われる。この時 x は、具体的にいくつかはまだわからないが、問題文に与えられた条件を満たす数量の値を表している。他方において、例えばある教科書の中学校１年で文字式を導入する部分では、ストローで作る正方形を並べた時に、正方形の個数と必要なストローの本数を考え、正方形の個数はいろいろな値をとるのでそれを文字で表すとしている。この時の文字は、値の変わりうる数量の値を表している。前者の文字は未知数 (unknown number)、後者の文字は変量 (varying quantity)を表していると考えることができよう(例えば Arcavi ら, 2017)。

基本的には方程式の学習では未知数を表すものとして x が用いられ、 関数の学習では変量の値を表すものとして、つまり変数として x が用いられることが多いと考えられる [1]。しかし中学校２年で１次関数の学習と併せて、２元１次方程式と１次関数の関係を学習することを想起すると、x などの文字が整合性をもって扱われる指導が必要とも考えられる。

本稿は、両者の関係を考える手がかりを得るために、実際の中学校１年「１次方程式」単元の授業を考察し、変数と関わる場面や生徒の反応として、どのようなものが見られるのかを検討することを目的とする。

２．方程式と変数

中学校２年の連立方程式の学習では、最初に２元１次方程式が扱われるが、その際には $3x+y=27$ といった方程式が取り上げられ、この方程式を満たす x、y の値の組はすべてこの方程式の解とされる。他方において x、y はいろいろな値をとりうる文字なので、中学校１年で学習する変数の定義に従えば変数と考えることができる。教科書では問題場面の性格上、x、y の値として自然数が扱われることが多いが、$3x+y=27$ という等式を満たすという条件だけであれば、x、y は任意の実数をその値としてとることができる。

こうした文字の扱い方は、１元１次方程式でも可能である。布川 (2017)は、昭和 40 年代の中学校の教科書の検討から、こうした扱い方が当時のわが国の教科書には多く見られたことを示している。例えば、方程式を「変数をふくんだ等式」として定義をし、方程式の有効性を述べる際に「x の変域の値について、いちいち調べるのは、手数がかかって実際的でない」と説明したり、解の吟味についても「選んだ変数 x のとる値に制限がついている場合がある」と説明したりする教科書が見られる。またグラフを用いた解法についても、現行の教科書のように連立２元１次方程式の解法を扱うだけでなく、２次方程式や１元１次方程式についてもグラフを用いた解法を取り上げている場合が見られたとしている。例えば、$ax+b=0$ の解が $y=ax+b$ のグラフと x 軸との交点の x 座標に等しいことや、式 $ax+b=c$ の根は直線 $y=ax+b$ と直線 $y=c$ との交点の x 座標に等しいことを学習している。さらに方程式 $ax+b=cx+d$ を取り上げ、これの解を

$y=ax+b$ のグラフと $y=cx+d$ のグラフの交点として求めることを扱っている教科書があったとも述べている。

こうした扱い方は、Kieran ら (1996) による代数の学習に対する関数的アプローチ (a functional approach to algebra) に通じるものがある。そこでは、文字を変数として見るとともに、方程式を立てる場合には、問題場面の数量間の一般的な関数関係を言葉の式で表現することが想定されている。そして式中の数量にいくつかの数を代入し「問題文の感じをつかもうとする」(p. 259) ことを重視している。ある数量を文字式で表した場合、文字の値を変化させた時の式の値の変化を考えると、式の値は文字の値の関数となる (Doorman & Drijvers, 2010, p. 126)。

関数的アプローチを採用したとする Farmaki (2004) の学習活動では、方程式 $2x+4=3x$ で表される問題場面を考える場合、最初からこの方程式を立てることを求めるのではなく、$y=2x+4$ と $y=3x$ のグラフや表により量の変わり方を考えさせている。

こうした先行する取り組みを見ると、方程式の学習において文字を意識的に変数として扱うことは、関数への接続との関係から重要なだけでなく、問題場面を把握し、方程式を立てるためにも有効であるとも考えられる。現行の中学校 1 年の教科書では、方程式の学習で変数への明確な言及はないが、前項で述べたように、文字式の学習においては変数的な扱いが見られることから、方程式の学習でも文字が変数的に扱われる場面の現れる可能性がある。そこで、実際の中学校 1 年のクラスにおける授業を検討し、そうした側面が見られるのかを考察することとする。

２．授業の概要

本稿で取り上げる授業は、国立大学附属中学校の 1 年生 1 クラスで行われた「1 次方程式」単元全 15 時間である。授業は教科書を基本としながら、多様な考え方を促すために教師により進め方は適宜修正された。

この 15 時間の授業を 1 台の手持ちのビデオカメラで記録したものが、本稿で考察の対象となるデータである。

なお以下では紙幅の関係から、15 時間の授業の様子を全て記述した後に考察を加える形を採らず、変数的な扱い方が見られた学習活動の種類に応じて節を設定し、各節ごとに関連する授業や学習の記述をまず行い、次にそれについての考察を加えることとする。

３．方程式導入時に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

この中学校で用いられていた教科書では、方程式単元の冒頭でいくつかのアメと 1 円玉の組み合わせを上皿天秤にのせ、その時の天秤の様子を等式や不等式で表現するという課題が扱われていた。第 1 時にこの課題に取り組むと、アメの重さを x g と表すことが生徒からすぐに提案され、理由を尋ねると「重さが分からないから」と答えた。教師はどのようなアメを入れるかにより重さは変化すると説明を加えた。４つの状態から、次の４つの式が作られた：$3x+2<5x+3$; $x+10>2x+4$; $2x+4<5x+3$; $3x+2=x+10$。アメの重さを 4 g と求めた生徒もいたので、教師は「アメが小さかったり大きかったりして重さが変化したりすることもあるよと言ったんだけど」と前置きをした上で、最後の等式について 4 g の時に両辺の値が等しくなることを x に 4 を代入して確認した。さらに「アメがもうちょっと重くなって例えば 5 g になったとしたら」として、$x=5$ の時は $3x+2=17$、$x+10=15$ であり $17>15$ となることを示した。これらの確認を受けて方程式を次のように定義した：「アメが小さかったり大きくなったりしてアメの重さ変化するわけだけど、今、アメが 4 g だったら左右の重さドンピシャ同じになると言えるわけで、x の値によってですね、イコールになっ

たり、いやこの不等式になったりっていうような状態を表している式のことを方程式と言うんですね、x の値によって等式になったり、不等式になったり」。

その後、数量関係を等式や不等式で表す問いに取り組んだが、教師は途中で「余裕があったら、等式を成り立たせる時の文字の値っていくつなのかなあって考えてみて下さい」と補足した。第1時の最後に教師は再び $3x+2=x+10$ について、アメが 4 g だったら等式が成り立つが 5 g だったら等式が成り立たないことに触れ、さらに 6 g、7 g、8 g、9 g とアメがだんだん重くなっていった時に等号が成り立つ場合がいつか現れる時が来ると思うかを尋ねた。生徒から「来ない」との声も出るが、終業のチャイムが鳴ったため、教師が「これが成り立つのはアメが 4 g の時しかないってことが言えたら、勝利の方程式と意味合いが近いかもしれない、この人しかいない」と話をして授業が終わった。

第２時で前時の問いの確認をし、「3600 m の距離を分速 x m で走ると、かかる時間は 15 分未満だった」という数量の関係を不等式 $3600/x<15$ と表した際、教師は分速 1 m の時には 3600 分、分速 2 m の時には 1800 分かかることを確認した後、「つまりこの x がだんだん大きくなっていくと、かかる時間ってどうなる」と問いかけ、「x がだんだんだんだん大きくなっていくと、かかる時間はだんだんだんだん短くなっていく」ことを確認した。

等式の入った不等号 (≦) の導入の際には、教師は「x が 3 以上の数を表しているもの」だとして、その時に x と 1 のどちらが大きいか、x と 2 のどちらが大きいかを考えさせた。生徒はいずれもすぐに判断することができた。さらに x と 3 のどちらが大きいかを問うと、生徒は同じかまたは x の方が大きいかであると考えた。

第２時の後半では等式の表す関係を読み取る学習をしたが、その導入で教師は黒板に三角形を１つと $a+b+c=180$ という式を書いた。そしてこの式が内角の和が 180°であることを表していると読めたり、３辺の長さの和が 180 であると読めたりすることを確認した。

第２時最後で次時の予告をした際 $a+b+c=180$ の式を指しながら、「これ、どんどん変化していった時に、これがイコールになる時とイコールにならない時があるってことは、前に１円玉とアメの場面でやったんですけど、どんな時にこのイコールが成り立つのかなあっていったことを次の時間考えていきたいと思っています」と説明した。

(2) 観察された変数的な扱い

方程式を「x の値により成り立ったり成り立たなかったりする等式」として定義することもあり、同じ２つの式 $3x+2$ と $x+10$ でも x の値により等式が成り立ったり成り立たなかったりすることを教師が説明した。その際に x に異なる値を代入し、式の値を求めていたが、x がいろいろな値をとるものとして語られているという意味で、ここでの x は変数的に扱われている。

また等式の導入にあたっては不等式との比較も行われたが、不等式の場合は x の値がある範囲にあれば成り立つことから、x の値が大きくなると $3600/x$ の値が小さくなることが補足された。ここで x は「x の値がだんだん大きくなる」といろいろな値をとるものとして語られており、変数的に扱われていると言える。

x と１や２の大小を考える場面では、教師は x が３以上の数だとしていた。この場合、３以上のある数と未知数的に語られた可能性も排除できない。ただし、その後、x と 3 の大小を考えた際には、生徒は同じかまたは x の方が大きいかであると考えており、x の値についていくつかの可能性があり得るとの前提で考えていたことになる。

第２時後半の式を読む場面では、三角形が１つだけ板書されたことから a、b、c はこの

書かれた三角形の内角や辺の長さとして扱われた可能性があり、変数的な扱いとは言い切れない。ただし次時の予告では各文字の値が変化した時に等式が成り立つ場合と成り立たない場合があることに言及しており、辺の長さに関してはいろいろな値をとりうることが示唆されていたとも考えられる。

４．解法の学習に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第３時では上皿天秤が釣り合った状態をもとにアメの重さを考えた。天秤はアメの重さを x とした時に $4x+2=2x+10$ で表される状態であった。アメや１円玉を両方の皿から適宜取り除いて、アメ２個と１円玉８個が釣り合うことを導くという、方程式の解法につながる考え方をした生徒も多かったが、天秤の状態を $4x+2=2x+10$ と式で表し、x に数を代入して等式を成り立たせる x の値を求める生徒や、$4x+2$ と $2x+10$ の値の表を作り、２つの式の値が等しくなる x の値を求める生徒も見られた。ある生徒は「あめの g を 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, …と重さを変えていきながら等しくなった g をさがす」と書いていた。

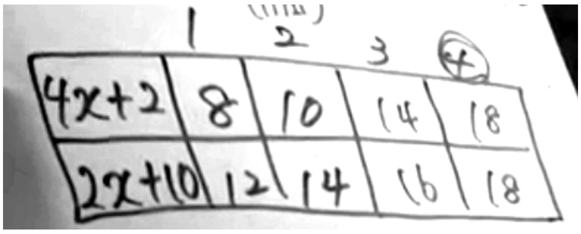

図１: 表を用いた解の求め方

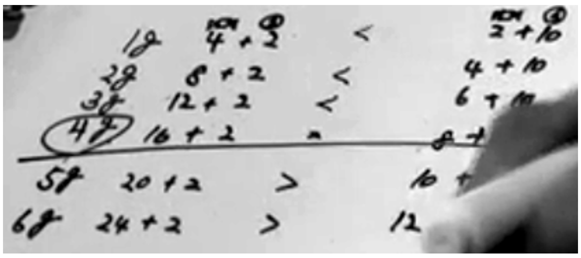

図２: 代入して大小を比較する考え方

第４時後半で等式の性質を用いて方程式を解く学習をする際、教師は前時の方程式 $4x+2=2x+10$ を提示しながら、「等式の性質を使うと、x っていろいろ変化する可能性があるんだけど、具体的にどれくらいの値なのかなってことがわかるわけです」と説明した。

第５時で $2x+2=10$ を解く際に教師は解法を二通り考えさせたが、両辺から 2 を引くか左辺の 2 を移項する以外の解法として、生徒は両辺を２で割ってから移項する解法、両辺を 10 で割ってから移項する解法を考えていた。教師は「x ってどんどんどんどん変化していくわけでしょ、1 でも 2 でも 3 でもいいし」「そうなった時にこれ[$2x+2$]たして 10 にすればいいんだから、これ何当てはまればいいんだろうとか考えたりしなかった？x 2 倍して 2 たしたら 10 になる数って何だろうかなあ、そうすると 1 入れたらいくつ 2 たす 2 で？2 入れたら 6、3 入れたら、ってことは次 4 入れたら、ああじゃあ 4 でいいんだなみたいな感じで考えた人いなかった？」と尋ねた。これに対し１名が挙手をした。さらに教師は、第３時でも x に値を代入して等式が成り立つ x の値を見出した生徒のいたことを想起させ、等式の性質を用いた解法は解き方の１つではあるが、それだけが解くことではないことを注意した。そして「1 から順番に x に当てはめていったら 4 の時成り立った、じゃあ解は 4 でいいんだな、これももちろん解くということ」と補足した。

第６時でも移項を用いて方程式を解くことを学習するが、その中で $5x=-3x+24$ を解いた際に、教師は x に 1、2 を代入して、これらの時は左辺と右辺が等しくならないことを確認し、代入していっても求められそうではないかと問いかけた。また移項により $x=3$ という解を求めた後、$x=3$ を代入して左辺と右辺が等しくなることも確認した。

第７時、第８時と第９時前半では方程式を解くことを学習したが、解の見当をつけるためにも、解の確認のためにも、生徒が x に値を代入する様子は観察できなかった。

(2) 観察された変数的な扱い

等式の性質を用いた方程式の解法を学習する前は、x がいろいろな値をとるものとして左辺と右辺の式の値を考えて、条件を満たす x の値を求めようとする考え方が見られた。これは、第１時と第２時では x にいろいろな値を入れたり、x の値を変化させるという語り方がされたりしてきたこと、およびそうした導入も考慮して、教科書の当該箇所でも、図２のような考え方が記載されていたことも関係していたと考えられる。この段階では、方程式 $4x+2=2x+10$ の解を求める際に、x を変数的に扱うことも行われていたことになる。

その後、等式の性質を用いて解を求める方法を学習すると、教師は x を変数的に扱うような語り方を採り入れていたにも関わらず、生徒には変数的な扱いは見られなくなった。

５．等式の変形に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第４時で前時の天秤の操作を想起させながら等式の性質を説明し、A=B の両辺に同じ式を加えても等式が成り立つとした際、教師は $A+(3x+2)=B+(3x+2)$がなぜ成り立つのかを問うた。「この x って変化していく、ってことは？」と補足したが、生徒からの反応がないので、例えばとして x に３を代入し、同じ x なので x に値を代入した時に両辺の $3x+2$ が同じ値になり、両辺に同じ数をたしているのと同じことになり、だから両辺に同じ式をたしても等式が成り立つと説明した。

また $A/m=B/m$ に関わっては、m は 0 にならないことに触れて「m はいろんな数に変化するんだけど絶対に 0 にはなっちゃいけない」と補足した。

(2) 観察された変数的な扱い

等式の性質は黒板上では $A+m=B+m$ 、$A-m=B-m$、$A\times m=B\times m$ ($Am=Bm$)、$A\div m=B\div m$ ($A/m=B/m$)という式の形でまとめられた。その際、m が $3x+2$ という式の場合も問題としたが、式をたしても等式が成り立つことを理解するために、x に値を代入して $3x+2$ も１つの値にする方が生徒は納得しやすいと考え、x はいろいろな値をとりうること、いずれの値でも同じ $3x+2$ という式なので両辺に加えられる数は同じになることに生徒の注意を向けようとした。つまり、両辺に式を施すことの妥当性を両辺に数を施すことに帰着するために、x を変数的に扱う語り方がされていた。

同様に考えるならば、両辺に施された文字 m もいろいろな値をとることが前提にされている。この時 m は変化する量を表すというよりも 一般化された数を表すものと考えられるが、いろいろな値をとる文字という意味では変数として扱われていることになる。

６．方程式の利用に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第９時後半で次の年齢の問題を考えた：「A さんは 13 歳、B さんは 45 歳である。A さんの年齢を３倍した時に B さんの年齢と等しくなるのは何年後か」。教師はまず、今は 3 倍しても等しくないが、いつかは等しくなりそうか、あるいは絶対等しくならないかを尋ねた。少し近くの人と話し合わせた後で挙手をさせると、多くの生徒が等しくなると答えたが、等しくならないとする生徒も数名いた。問題を考えさせると、基本的には方程式 $3(13+x)=45+x$ を立て、移項により解を求めていたが、1 年後、2 年後、･･･の二人の年齢を表のように並べ、条件を満たす年数を求める生徒も多く見られた。教師は指名して解答を板書させる際に、表を用いた解答を板書させた。そしてそこに「13+1」「13+2」「13+3」などと書き込みをしながら説明をした(図３)。この時は方程式を用いた解答は全体では確認しなかった。

次に、今の問題で３倍という条件を２倍や 4 倍に変えたらどうなるかを問うた。教師は途中で 2 倍の場合に「地道に表を作ると大変

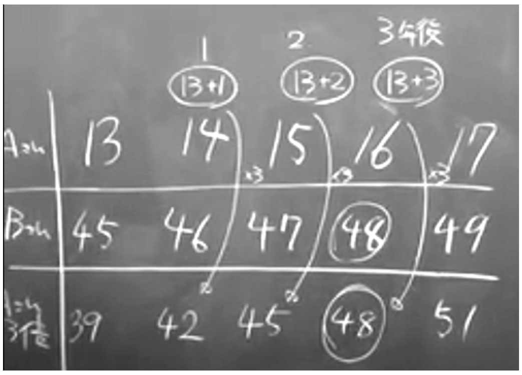

図３: 年齢問題の表を用いた考え方

じゃないですか」と話し、上の表の B さんの年齢の部分に「45+1」「45+2」「45+3」と書き加え、それと「13+1」などを 2 倍や 4 倍したものが等しくなると考えるとよいことを補足した。しかしこの補足の後でも、表を作って考える生徒が見られた。第 9 時の最後に表を用いた考え方と方程式を全体で確認した。方程式の確認の際に教師は表の 45+1、45+2、45+3 に続けて「･･･45+x」と書き加え、この 45+x が何を表しているかを問い、板書した生徒は「A さんの年齢を 2 倍した時に等しくなる時の B さんの年齢」と答えた。教師はそれを受けて、上の表の 45+1、45+2、45+3 を指しながら「1 年後 2 年後 3 年後、ダーッときて、いつか同じになるであろう時の B さんの年齢 45+x、x 年後なんですね、同じようにして A さんも[13+1 などを指し]1 年 2 年 3 年、x 年経ったら、[13+x と書き]13 たす x 年だと、でこれの今 2 倍が B さんの年齢と等しくなると考えているわけですね」と説明した。

第 10 時冒頭で教師は、年齢問題に対し表を作って考えた人もたくさんいたとして 3 倍の場合の表の考え方を提示し、その後、2 倍の場合の方程式 26+2x=45+x を提示して、この続きを考えるとした。そして 26+2x と 45+x が「それぞれ何を表しているのか」を近くの人と話し合わせた。ある生徒は左辺の 2x の下に「毎年」、45+x の下に「every year」と書いた。前にいた生徒が「今は、13 歳の時点だとこうなの」と言い、この生徒の方程式の等号の上に「＜」と書き加え、「で 3 年後[ママ]越しちゃうとこうなっちゃう」と言い、等号の下に「＞」を書き加えた。話し合い後に教師は「そもそもこの x って何を表している」と問い、図 3 の表を示しながら、「1 年経ったら 13 に 1 たして 14 歳、2 年経ったら 13 に 2 たして 15 歳、3 年経ったら 13 に 3 たして 16 歳、で最初の 13 に経った年数分だけたしていってあげてるわけですね、どんどん変化していると、まあいつ追いつくであろうところを x として 13+x ということを前回、みんなとやりとりして確認したんですけど、それで言うと、45+x、x っていうのは追いつくのが何年後かってことでいいかな」と確認した。さらに前時に方程式を板書した生徒に x が何を表すかを尋ねると、その生徒は「x は、今から何年後かっていうのを表している」と答えた。教師が「今から何年後かとは」と問い直すと「二人の年齢が等しくなる時にかかる年数、って言うんですかね」と答え、教師は「x ：２人の年齢が等しくなるまでの年数」と板書した。その後、26+2x が 2(13+x)であることを確認した後、方程式を解いて解を求めた。4 倍の場合についても方程式を立てて解いた。解が–7/4 となるので、何年前かという話になること、また最初の設定で既に A さんの年齢の 4 倍が B さんの年齢を越えていることを確認した。最後に、表を使って考えてもいいのだが、表を書くと大変な時もあるので方程式を使う方が有効な場合もあること、その場合、x が何を表すかを明確にすることが大切であることを説明した。

第 10 時の最後に、教科書の次の問題に各自で取り組んだ：「29 L 水の入った水槽 A から 10 L 水の入った水槽 B に水を汲んで移したら A の水の量が B の水の量の 2 倍になった。移した水の量を求めなさい」。あるグループでは「式はない、最大 28 じゃん、だから 1 L ずつ入れたら」と話していた。さらに後ろの生徒が図 4 の表を作って解いているのを見て、

その生徒に「やっぱり表を作った方が速いよね、方程式考える前に数えた方が速い」と話した。別

A	28	27	26
B	11	12	13
倍	22	24	26

図４: 水槽の表

のグループも「これ絶対方程式で解いちゃいけない」と話していた。最後に教師が解説をした際「x：A から B へ移す量」と板書し、$29-x$ と $10+x$ のどちらを 2 倍するのかを確認した。

また水槽問題が終わって教科書の「52 円切手と 82 円切手を合わせて 10 枚買い 700 円であった時、それぞれ何枚買ったか」という問題も考えていた生徒は、$52x+82x=700$ という方程式を立てた上で右の表を書き、答えを 52 円切手 4 枚、82 円切手 6 枚としていた。

4	6
208	492

第 11 時冒頭で切手問題を考えた際、ある生徒は 5 枚ずつ買うと合計は 670 円となり 700 円にはあと 30 円足りないので 52 円切手を 1 枚減らし 82 円切手を 1 枚増やすという考え方を隣の生徒に説明していた。また方程式ではなく、$52\times4+82\times6=700$ の式を書いた生徒も見られた。全体での説明では 52 円切手を x 枚買ったことに関わり教師は「52 円切手を 1 枚買ったかもしれないし 2 枚買ったかもしれないし 3 枚買ったかもしれない、一番多くて何枚？」と確認した。また 82 円切手の枚数が $10-x$ と表されるとした時も、52 円切手を 1 枚買うと 82 円切手は 9 枚、2 枚買うと 8 枚と確認した。なお 82 円切手の枚数を $(700-52x)\div82$ と表した人がいることも紹介された。

第 12 時では教科書の過不足算の問題に取り組んだ：「栗を 9 個ずつ配ると 3 個足りず、8 個ずつ配ると 4 個余る時、人数と栗の個数を求めよ」。ある生徒は $9x-3$ と $8x+4$ の式を上下に並べ、その右側に「$x=7$」と書き「人数 7 人、くり 60 こ」

6	15	24	33	42
12	20	28	36	44
	8	60		
		60		

図５：過不足算の表

と求めていたが、方程式を解いた跡が見られなかった。その代わり、別の場所に表のような記録が残されていた(図５)。また別の生徒は次のような図をかいて考えていた。

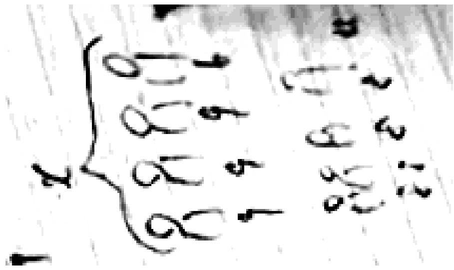

図６: 過不足算で４人の場合の図

教師は線分図を用いながら、$9x-3$ と $8x+4$ とがいずれも栗の個数を表していることを確認した。また最後に栗の個数を x と置いて方程式を立てることも考えた。

第 13 時で教科書の追いつき算の問題に取り組んだ：「1 km 離れた駅に分速 60m で歩く妹が出発してから 9 分後に兄が自転車で分速 240m で追いかける時、何分後に追いつくか」。多くの生徒は方程式を用いて解いたが、下のように妹と兄の進んだ距離を表のように整理して考えている生徒も複数名見られた。

		1分	2分	3分
60×9	540	600	660	720
	0	240	480	720

図７: 追いつき算の表

第 14 時は比例式の導入として、木の影が 12 m、高さ 2 m の鉄棒の影が 1.5 m の時の木の高さを求める問題に取り組んだ。比を用いて解いている生徒が多いが、高さと影の長さについて下のような表を用いて考えている生徒も複数名見られた。

木	2	4	6	8	10	16	
影	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	12	

図８：影の問題の表

この表を書いた生徒は、1.5 を 8 倍すると 12 になるので 2 を 8 倍して 16 とすればよいと近くの生徒に説明をしていた。

(2) 観察された変数的な扱い

第 9 時以降は問題場面が与えられ、条件を

満たす数量を求めるという学習が行われた。方程式の利用の学習でもあり、多くの生徒は問題の条件から方程式を立て、それを形式的に解いて条件を満たす数量を求めようとしていた。他方で、問題場面の様子を表などにまとめて条件を満たす数量を求めようとする生徒も少なからず見られた。

表などにまとめて解を求めることは、今回の授業の場合、問題の多くで解がそれほど大きくない自然数であったために可能になったと言え、教師も例えば第 10 時で、表を書くと大変で方程式を使う方が有効な場合もあることに触れている。しかし関数的アプローチで見られたように、問題場面中の数量についていくつかの値の場合を考えてみることで問題の感じをつかもうとするという意味では、解そのものが求まらなくとも、数量間の関係が具体的にイメージできれば有効とも言える(Nunokawa, 2000)。第 10 時で水槽問題を解いている際の生徒たちによる「やっぱり表を作った方が速い」「方程式考える前に数えた方が速い」「これ絶対方程式で解いちゃいけない」といった発話は、移す水の量を少しずつ変えて考える方が、生徒にとっては問題場面を把握しやすいことを示唆している。

また第 10 時で切手問題に対して $52x+82x=700$ という方程式を書いた生徒も、52 円切手 4 枚と 82 円切手 6 枚の時の値段を求めていることから、具体的な数値としては問題場面を適切に把握できていたと考えられる。

こうした問題把握の仕方は、第 9 時の年齢問題、第 10 時の水槽問題、第 13 時の追いつき算の問題など経過する年数、移す水、経過する時間といった変化する量を含んだ問題では、その変化を順に追うことで用いやすい。しかし、切手問題や第 12 時の過不足算の問題、第 14 時の影から高さを求める問題では、ある条件を満たす状態が最初からあり、その状態を求める問題となっており、変化する量が明示的には含まれていない。今回の授業においては、生徒はこうした問題であっても、切手の枚数や分ける人数、ものの高さについて、自分でいろいろな値の場合を想定していた。また実際は水槽問題も教科書の問題文では「[水槽]A から水をくんで B に移しかえたところ、A の水の量が B の水の量の 2 倍になりました」と、最終的な結果を提示し、その時の「移しかえた水の量」を求めるとされていた。しかし生徒は、1 L ずつ水を移していくという途中の状態を自ら作り出し、移しかえる量が変化するものとして場面を把握しようとしていた。

7．変数的な扱いと方程式の学習

前節まで見てきたように、本稿で取り上げた授業では、１次方程式の学習の中に文字を変数的に扱ったり、文字で表される数量を変化させて考えることが、教師の側だけでなく生徒の側にも見られた。これらは図 1 の表からも示唆されるように、関数の学習との接続をしやすくすると期待されるが、それだけでなく、方程式の学習自体にも関連を持つと考えられる。本節ではそれらの点を検討する。

(1) 方程式の利用における場面の把握

前節で見たように、式中の x や問題場面の x で表される数量についていろいろな値の場合を考えることは、問題場面の把握にとって有効と考えられた(Kieran ら, 1996; Nunokawa, 2000)。水槽問題では $2(29-x)=10+x$ や $2(29+x)=10+x$ など不適切な方程式を立てる生徒も多く、教師は $29-x$ と $10+x$ のどちらを 2 倍にするかをクラス全体に確認していたが、図４の表では、水の増減や 2 倍の関係が適切に捉えられている。また切手問題では $52x+82x=700$ と誤った x の用い方をした方程式を書いた生徒が、実際には２種類の切手の枚数が異なることを把握し、正しく答えを求めていた。

ただし変数的な扱いをもとに場面を把握して方程式を立てることにつなげるためには、構造を残した数式により数量を表すことが必

要となると考えられる(布川, 2016 a)。例えば図６の栗の問題であれば、この図から１人に9 個ずつ４人に配る場合の栗の総数を 9+9+9+6 と表すと、場面の把握にはつながりにくくなる。6 を 9–3 と表し、9+9+9+(9–3)=9×4–3 とし、図中で人数を表す x と組み合わせることで $9x–3$ という式を得ることができる。

(2) 教師の語り方の問題

文字を未知数的に扱う場合、与えられた条件を満たす状態を想定し、そこでの数量間の関係を式で表現することで方程式を立てる。文字を変数的に扱う場合は、場面中の数量を文字式などで動的にとらえ、ある数量が変化した時の別の数量の変わり方といった関数関係や、条件を満たす状態になるまでの過程を検討し、その上で条件を満たす状態ではそれら数量を等しいと置き方程式を立てる。

逆にこうした点を視点として、教師の語り方などを吟味することができる。例えば、第９時で図３の表を板書させた後、教師は B の年齢 46、47、48 を 45+1、45+2、45+3 と書き直した後、これに続けて「･･･45+x」と書き加え、さらに「1 年後 2 年後 3 年後、ダーッときて、いつか同じになるであろう時の B さんの年齢 45+x、x 年後なんですね」と説明した。ここでは文字 x は条件を満たす時の年数を表しており、未知数的に扱われている。他方で x を含む式に「毎年」「every year」と説明をつけていた生徒では、x は変数的に扱われている。こうした変数的な扱いは、それ以前の授業における「x ってどんどんどんどん変化していく」とする教師の語り方と、むしろ整合している。過不足算の問題で４人の場合を描きながら人数を x とした図６も、同様の考え方を示している。図３への教師の書き込みとこの図５を参考にすると、これらの違いは図９のように表すことが出来る。

前者は数の系列のどこかにあるはずの条件を満たす値が x として語られ、後者はいろいろな値をとりうる数量を表すものとして x が語られる。文字に対するこれら異なる語り方が意識的に使い分けられているかは、語り方の一貫性に関わり、方程式の立て方を含め、生徒の理解にも影響を与える可能性がある(布川, 2016 b)。

$1\ 2\ 3\ \cdot\cdot\cdot\ x\ \cdot\cdot\cdot$　　$\overbrace{1\ 2\ 3\ \cdot\cdot\cdot\ 10\ \cdot\cdot\cdot}^{x}$

(a) 未知数的扱い　　(b) 変数的扱い

図９：文字の語り方の違い

(3) 変数的な扱いと解の存在

文字の変数的な扱いは、方程式の利用だけでなく、方程式の理解にも影響を与えうる。

第７時では、$8x–3=5+6x$ という方程式について、その解き方を隣の人どうしで互いに説明させ、また求まった解 x=4 を元の方程式に代入して両辺が 29 となり等式が成り立つことを確認した後に、教師は x=4 以外の場合を話題にした：「x っていうのは、まあ 1, 2, 3, 4 ばばばって変化していくような、そんなものなんですけど、みんなもしこれが 4 じゃなくて、4 じゃない数になったとしたら、この左右[$8x–3$ と $5+6x$]ってどうなると思う？」。生徒からは「釣り合わない」「違う」といった意見がすぐに出された。例えばとして x=5 を代入して左辺を 37、右辺を 35 と求め、両辺が等しくならないことを確かめた。

さらに教師は x=4 以外に両辺が等しくなるものがないのか、等式が成り立つのは x=4 しかないのかを問うた。何か計算をしているような生徒もいたが、先ほどのように明確な意見がすぐには出なかったので、x=4 以外にも等式が成り立つことがあるかどうかを挙手させた。x=4 以外に等式が成り立つ x の値があるとした生徒はおらず、解は 4 しかないとする人が３分の２程度いたが、他にあるかないか悩むという人も３分の１程度いた。ここから、１次方程式の解を式変形により求めることができても、その求めた解以外に等式を成

り立たせる x の値があるのかについて自信がない者も少なからずいることが示唆される。

これに対しては、方程式に移項等を施して得られた式が、解である x の値が満たすべき必要条件であることから、解の一意性を説明することもできよう。しかしこれとは別に、x を変数的に扱うことで解の一意性を考えることもできる。今の方程式 $8x-3=5+6x$ であれば、このクラスで行われたように $x=4$ の時は両辺が 29、$x=5$ の時は左辺が 37、右辺が 35 と考えていくことで、x の値が 4 から大きくなるにつれ左辺と右辺の差が大きくなることに気づくことで、感覚的ではあるが 4 より大きい解が存在しないことを確認できる。

文字を変数的に扱うことは、１元１次方程式においても解の存在を考える１つの方法を与えるものとして、方程式の学習に関係するものと言えよう。

８．おわりに

１元１次方程式の学習において、導入部分や活用の学習では、文字を変数的に扱うことが生徒によっても自然に行われていた。他方で、方程式を式変形に基づき解く際には、解の見当をつけたり確認をするという形でも、変数的な扱いは見られなくなった。こうした現状や、文字式や関数領域の学習との接続も考慮しながら、文字の扱い方について検討していく必要があろう。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 変数を表す際に用いられる variable という用語は、いろいろな仕方で用いられるとされ、例えば以下の諸側面があげられる (Arcavi ほか, 2017, pp. 12-13)：プレースホルダー；未知数；変量；一般化された数 (generalized number)；パラメータ。しかし本稿においては、わが国の中学校１年で学習する通り、いろいろな値をとる文字を変数と呼ぶことにする。

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and teaching of algebra: Ideas, Insights, and Activities*. Abingdon, UK: Routledge.

Doorman, M. & Drijvers, P. (2011). Algebra in function. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revising topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119–135). Rotterdam, The Netherland: Sense Publishers.

Farmaki, V. (2004). From functions to equations: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. In M. J. Høines& A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 393-400). Bergen, Norway.

Kieran, C., Boileau, A., & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 257-194). Springer.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic strategies and probing problem situations. In Jose Carrillo & Luis C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century: An international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 81-117). Huelva, Spain: Hergue.

布川和彦. (2016a). 生徒の姿から指導を考える. 学校図書.

布川和彦. (2016b). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *4*, 49-56.

布川和彦. (2017). 昭和 40 年代の中学校教科書に見られる方程式と関数とを関連づける記述について. 上越数学教育研究, *32*, 1-10.