

数学B「ベクトル」における概念変化に関する一考察

佐々木 文弥

上越教育大学大学院修士課程2年

1. はじめに

昨年度末, 小・中学校学習指導要領が改訂された。今回の改訂の基本方針の一つとして「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進が挙げられている。高等学校学習指導要領においてもこのような方向性のもと, 今年度末には改定される予定である。また, 平成28年5月に示された中央教育審議会教育課程学部会「算数・数学ワーキンググループにおけるこれまでの議論の取りまとめ」には, 「算数・数学では, 既習の数学に関わる事象や, 日常生活や社会に関わる事象について, 数学的な見方・考え方を働かせ, 数学的活動を通して, 新しい概念を形成したり, より良い方法を見出したりするなど, 新たな知識・技能を身に付け, 知識の構造や思考, 態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる」(p.11)と記述されている。しかし, 「深い学び」を実現するときには様々な障害があること等の指摘もある。diSessa(1982)は, 学習者が, 概念を理解する過程で, 構築すべき概念とは異なった概念を有することがあることを指摘している。また, 瀬尾(2011)は, 教員養成過程の大学生に対し, 比例概念の理解についての調査を行い, 「 x が増加すると y も増加する場合は比例であり, x が増加すると y は減少する場合は反比例である」という概念が比例概念を学習した学習者の中には存在することを示している。学習者が有す

るこのような概念を, 素朴概念(naive conception)や, 誤概念(misconception)(村山, 2011)という。そのような誤概念の存在や, その修正についての指摘がなされている。

算数・数学において, 「新しい概念の形成」や, 「知識の構造や思考, 態度が変容する」ことが「深い学び」を実現するための重要な要因であることから, 「概念変化」の研究が大きく関わる場が存在するのではないだろうか。例えば, 数の拡張という場面で見た場合, 小学校では自然数から始まり, 中学校にかけて分数や, 負の数, 無理数と拡張されていく。数に対する大きな「概念変化」がおこるのは言うまでもない。数学の学習の様々な局面において, 「概念変化」が大きく関わることを考えられる。筆者は「概念変化」を捉えるため, これまでの概念変化研究を歴史的な視座から捉えることや, 算数・数学学習における「概念変化」の捉え方について取り組んでいる。

本稿は, これまでの主要な概念変化研究を比較・整理し, 高等学校の数学学習における「概念変化」の捉えを明確にする。具体的な事例として数学B「ベクトル」における「概念変化」についての考察をすることが目的である。

2. 概念変化研究

概念変化について捉えるにあたり, 概念変化研究の起源を次に記述していく。

2.1. 概念変化研究の背景

「1970年代半ばから後半にかけて、大学の初等物理教育にて、教えたはずの基本的な内容が正しく理解されていないという事実が報告され、その原因が教える前から持っていた知識であることが明らかにされた(diSessa, 1982). この問題の本質は、学習者が教育内容を誤解しているのではなく、教える前から学習者が持っていた知識が教育によっても変わらなかったことである、と考えられるようになった。このような知識は様々な名称で呼ばれ、「素朴概念 (naive conception)」、「誤概念 (misconception)」、「前概念 (preconception)」、「自然発生的理論 (spontaneous theory)」、「代替的枠組み (alternative frameworks)」などがある。(村山, 2011, p.218)本研究では、村山(2011)を基に考察を進めていくため、表記を素朴概念に統一する。

素朴概念の発見に伴い、素朴概念をどう克服するかという方向へ発展し、また同時に素朴概念はどのようにして形成されるかについての研究もなされるようになった。日本においても、これまで、概念変化についての研究が少なからず行われ、生物学、心の理論、物理学、数などの領域や自生的な概念変化(概念発達)の研究や、教授・学習場面でのより高度で直観に反するようなフォーマルな概念を学習する際の困難さを説明するものとして概念変化の研究が行われてきた(湯澤・稲垣,2011). 本稿は、数学学習における概念変化について考察していくため、概念変化研究の歴史的な視座から概念変化の捉えを明確にする。

村山(2011)は、概念変化研究において、Posner(1982)の概念変化モデル、Chi(1992)のカテゴリーシフト論、Vosniadou(1994)のフレームワーク理論、diSessa(1982)の p-prims 理論の4つの理論が主要な概念変化研究の理論であると述べている。本研究では、村山(2011)の記述を基に、3つの理論について比較・検討をしていく。なお、p-prims 理論は、力学現

象を中心とする自然現象に対する推論と、自然科学の学習によるその変化を幅広く扱っているが数学については対象としていない。本稿の目的は数学学習における概念変化について焦点を当てるため、p-prims 理論は、本稿においては取り扱わないこととした。

2.2. 概念変化についての3つの理論

以下は、村山(2011)の関係する記述であり、概念変化の先行研究についての概略を次に述べる。

2.2.1. Posner(1982)の概念変化モデル

Posner らが設定した問題は、「学習者は如何にしてある概念 C1(素朴概念)からそれにとって代わる概念 C2(科学的概念)へと移行するか」というものである(図1)。

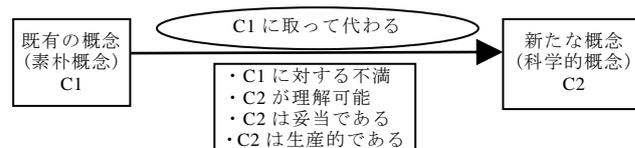


図1: Posner の概念変化モデル(筆者による)

既存の概念 C1 が存在している状況で、新たな概念 C2 が導入された場合、C2 は、①拒否される、②丸暗記される、③C1 にとって代わる、④C1 に取り込まれる、の4パターンが考えられる。その中でも概念変化は、③にあたる。Posner らのモデルでは、概念変化のための4つの条件が挙げられている。1.既存の概念に対する不満が存在する、2.新しい概念は理解可能である、3.新しい概念は妥当である、4.新しい概念は生産的である。Posner らのモデルでの教授方法は、素朴概念を攻撃するだけでなく、科学的概念と素朴概念と対比した上で、科学的概念が妥当性と生産性において勝っていることを示さなければならない。

2.2.2. Chi(1992)のカテゴリーシフト論

Chi は素朴概念の概念変化の難易度について

述べている。強固な素朴概念の存在によって重要な科学的概念の学習が困難を極めることがある一方で、教育によって容易に生じる概念変化もあれば、意図的・組織的な教育なしでも生じる概念変化もある。このように、素朴概念には変化しやすいものと変化しにくいものがある。何がこの違いを生み出しているのかを説明するのが、Chiの目的である。

Chiは、概念変化が必要になるのは、学習すべき概念と対立する既有知識を持つ場合であると捉えている。しかし、概念変化の難易度について考える場合、その概念が正しいか誤っているかという区別をするだけでは、不十分である。そこで、Chiは既有概念に存在する誤解を3つのレベルに分けて考える。それは、個人の信念、メンタルモデル、カテゴリーである(図2)。

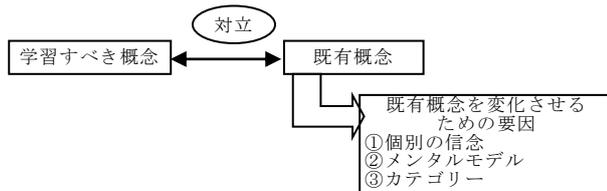


図2: Chi (1992) の概念変化の捉え(筆者による)

既有概念を変化させる要因についての詳細な説明は省略する。

2.2.3. Vosniadou(1994)のフレームワーク理論

Vosniadouの理論が扱っているのは、教育によって生じる概念変化である。反直観的な科学概念が教示されたとき、それがどう受け入れられるか、素朴概念にどのような変化が生じるか、を問題にしている。幼児期の理解は物理・生物・心など幾つかの領域に分けられており、個々の対象に対する理解はその領域固有な理論の中に埋め込まれている。Vosniadouはこの理論をフレームワーク理論と呼び、物理、心理、数学、言語の4領域を想定している。

Posnerらの最初の概念変化モデルでは、概念C1(素朴概念)とC2(新たな概念)がそれぞ

れ独立に存在し、最終的にどちらかが選択されるものであった。そこでは、C1とC2の相互作用は考慮されていなかった。しかし、理解の困難な科学的概念の教授場面では、C2が何の誤解もなく理解されてC1と競合するということはまれである。C1によってC2が誤って解釈されたり、C1がC2を取り込むように変化したりと、C1とC2の2つがそのままの形で共存しないことのほうが多い(図3)。

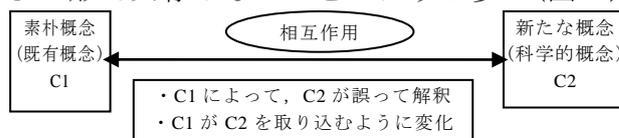


図3: Vosniadou(1994)の概念変化の捉え(筆者による)

これがどのようなプロセスであり、どのようにして科学的概念の理解に至るかが、Vosniadouの理論が答えようとする問題である。

2.3. 3つの理論の比較

PosnerとChiは、概念変化の対象についての明確な記述はないが、Vosniadouは物理、心理、数学、言語の4領域を想定している。また、PosnerとChi、Vosniadouの理論を比較すると、概念変化の捉え方が異なっていることが分かる。Posnerは素朴概念が新たな概念に「取って代わる」ことを概念変化であると捉えている。ChiとVosniadouは、素朴概念の変化や、新しい概念との対立に焦点をあてており、素朴概念が新たな概念を「取り込むように変化すること」を概念変化と捉えている。これらの概念変化の捉え方の違いを踏まえた上で、算数・数学学習において適用可能であるか検討する必要がある。そのため、次節では算数・数学学習における概念変化の先行研究を概観する。

3. 算数・数学科における概念変化の捉え

この節では算数・数学学習における概念変化を捉える。以下、藤村(2011)、真野(2010)

の記述である。

3.1. 藤村(2011)の先行研究

藤村(2011)の概念変化の捉えは、単なる知識の増加や累積ではなく、多様な知識が関連付けられていることによる知識構造の質的変化のプロセスと捉えており、それが算数・数学領域における概念変化にあたると考えている。藤村(2011)は、実際に小学校算数科において、単位量あたりの大きさを事例として、概念変化について研究している。導入・展開・事後テストにおいて、児童が用いた学習方略と、方略の変化についてまとめており、単位量あたりの大きさの概念を理解している子どももつ既有的方略が、授業場面で形式的に数式に当てはめただけの子どもが示した方略の利用の仕方を意味づけ、それが授業後の理解に影響すると言った流れ(理解の漸進的プロセス)の示唆もしている。

3.2. 真野(2010)の先行研究

真野(2010)は、“conceptual change”を「概念変化」ではなく「概念変容」という。概念変容をもたらす授業構成の原理において、構成原理(Design Principles)を次のように捉えている：

「DP1：算数・数学の学習を、知識の累積的成長として捉えるのではなく、先行知識が新しい知識と相互作用とし、全面的に再構成される過程として捉える〈構成主義的学習観の原理〉(真野, 2010, p.249)。

上の2つの算数・数学科における概念変化の捉え方の特徴として、概念変化をある相互作用による知識構造の質的な変化と捉えていることに注目したい。このことは前節で挙げたPosnerの概念変化の捉え方と大きく異なる部分である。Posnerの概念変化の捉え方は、素朴概念が新しい概念に「取って代わる」こ

とであった。ChiとVosniadouの概念変化の捉え方は、素朴概念と新しい概念の「対立」または「相互作用」を考慮したものであり、特にVosniadouにおいては素朴概念が新しい概念を「取り込むように変化」することだと捉えている。このことは藤村(2011)の「知識構造の質的変化」や、真野(2010)の「全面的に再構成される過程」と類似している点であるだろう。この捉え方を基に次節では、素朴概念と新しい概念が相互作用をすることの捉え方として、概念構造に着目し、問題解決の過程について述べられているVinner(1991)の「概念イメージ」を参考にする。

4. 数学学習における「概念イメージ」

Vinner(1991)は、数学学習において、「概念定義」(concept definition)、「概念イメージ」(concept image)という語を用いて説明している。「概念イメージ」とは、学習者が認知課題を与えられた時に心のなかで生起する非言語的な概念名、または図や印象である。それらは学習者の経験によって概念名と結び付けられ、言葉の形に変換できるものである。

Vinner(1991)は、「関数」において「概念イメージ」の具体的な例示をしている：

「関数」という言葉を聞いたとき、あなたは「 $y = f(x)$ 」や、視覚的な関数のグラフや $y = x^2$, $y = \sin x$ や $y = \log x$ のような特定の関数を思い浮かべるだろう。このことは、概念イメージは、個人の経験との関連のみである」(Vinner, 1991, p.68) (和訳は筆者による)。

「関数」という言葉を聞いたとき、学習者は数学的に関数の定義を述べることよりもむしろ、上記に示した「概念イメージ」を持つことをVinner(1991)は示している。

Vinner(1991)は、望ましい問題解決過程として、次の図4を示している。図4は、Vinner(1991)が示す望ましい問題解決過程で

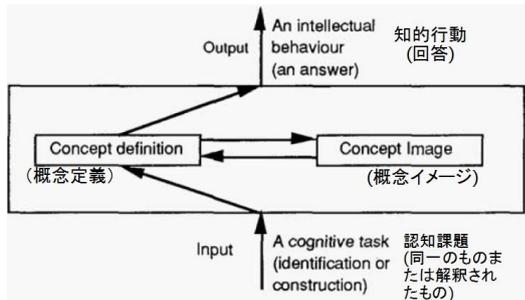


図4：理想的な問題解決の過程
(Vinner, 1991, p. 71) (和訳は筆者)

あるが、概念イメージを形作るときであつても、認知構造を考えるとときでも、実際に行う課題に対して、定義を強制的に学ばせることは難しいため、Vinner (1991)は実際の学習活動において、図5のような学習になっていると考えている。

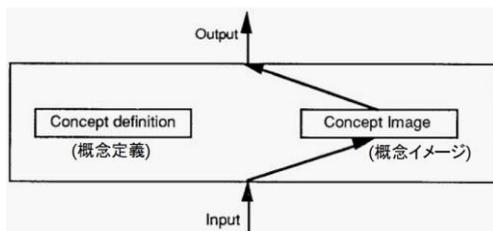


図5：直観的対応
(Vinner, 1991, p. 73) (和訳は筆者)

学習者の概念定義の有無にかかわらず、概念イメージのみで回答することが殆どである。このことは、学習者が習慣的に公式の定義を調べる必要性を感じていないことから起こる。

5. 「概念変化」についてのまとめ

第2節から第4節にかけて、概念変化、概念変容、概念イメージについての先行研究を述べた。ここでは、本研究における「概念変化」の扱いについて、先行研究から立場を明らかにしていく。

概念変化研究は、科学の分野において生まれ、最初に理論枠組みを構築したのはPosner (1982)である。Posnerは、既存の概念が新たな概念に「取って代わる」ものを概念変化と定義し、元々持っていた概念は棄却される。Chi (1992)や Vosniadou (1994)は Posner

の概念変化の捉え方とは異なり、素朴概念が新たな概念と対立したり、相互作用が起きたりすることを述べている。特に Vosniadou は既存の概念が新たな概念に「取り込むように変化」することだと捉えている。

算数・数学学習において、概念変化の理論を適用させたのが藤村 (2011)や真野 (2010)である。概念変化を単なる知識の累積的な成長として捉えず、素朴概念が新しい概念と相互作用し、全面的に再構成されることであると述べている。このことは、特に Vosniadou の捉え方と類似している。これらの捉え方は、Vinner (1991)の概念イメージの考え方に大きく関わるだろう。Vinner の概念イメージと、Vosniadou と真野 (2010)が記述する素朴概念と新しい概念の間での相互作用を取り入れた上で、本稿においての高等学校の数学学習における「概念変化」の捉え方を明確にする。概念イメージには、素朴概念による概念イメージと、新しい概念による概念イメージが考えられる。概念定義を通じた相互作用を経ることによって素朴概念による概念イメージが新しい概念による概念イメージに取り込まれるように変化し、全面的に再構成されることを「概念変化」と本研究においては捉えることとする。図4、図5と本研究における「概念変化」の定義を基にすると、数学学習において次の図6が考えられる。

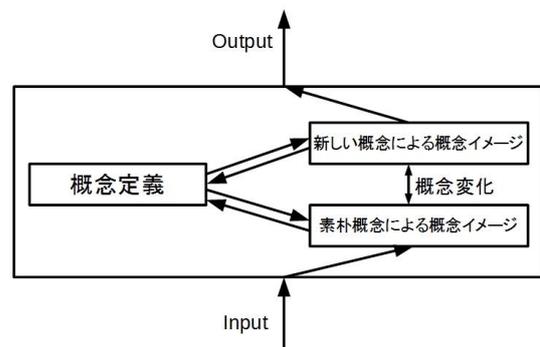


図6：本研究における「概念変化」

概念イメージは、素朴概念と新しい概念に分けられるものであると捉える。すると、次の3つの相互作用が考えられる。一つ目は概

念定義が素朴概念による概念イメージと相互作用すること、二つ目は概念定義が新しい概念による概念イメージと相互作用すること、最後に素朴概念による概念イメージと新しい概念による概念イメージが相互作用することである。その中でも、概念イメージ同士の相互作用を概念変化として捉えることが出来るだろう。その過程の中で、概念イメージ同士の相互作用により、Vosniadou の「素朴概念が新しい概念を取り込むように変化」し、真野(2010)の「素朴概念が新しい概念と相互作用し、全面的に再構成される」過程であると捉えることが出来るだろう。

本節で定めた定義を基に、次節では高等学校の数学学習において、概念イメージの具体的な内容をアンケート調査により同定した。

6. アンケート調査の結果と分析

前節で定義した本稿における「概念変化」の枠組みのもと、数学 B「ベクトル」における大学生の概念イメージを同定することを目的とした調査を行った。大学生を対象としたアンケート調査を作成・実施し、その結果の分析を行った。アンケート調査の概要を次に述べる。

6.1. アンケート調査の内容

大学生に対するアンケート調査の概要は以下の通りである。

調査場所：新潟県内の国立大学
日 時：平成 30 年 1 月 16 日
調査時間：約 10 分
対 象：大学 2 年生～大学院 3 年生
人 数：33 名
記録内容：学生によるアンケート調査用紙への記入

アンケート調査は個人で回答するものとし、周りや相談したり、参考書を見たりせずに指示したものである。このアンケート調査ではベクトルの困難性、学習者が持つ概念イメ

ジを回答から見る事ができる。

アンケート調査の内容については、学年・コース名および高校生の時の数学の履修状況を質問しており、その後問題 1、問題 2、問題 3 を出題している。なお、対象とした学生は全員「ベクトル」の単元を高校生のときに履修済みであった。

6.2. アンケート調査の結果と分析

アンケート調査より、問題 1 と問題 2 を分析をする。以下、実際に扱った問題とその結果と分析である。

6.2.1. 問 1 の結果と分析

問 1(1)(2) の実際の問題は図 7 の通りである。

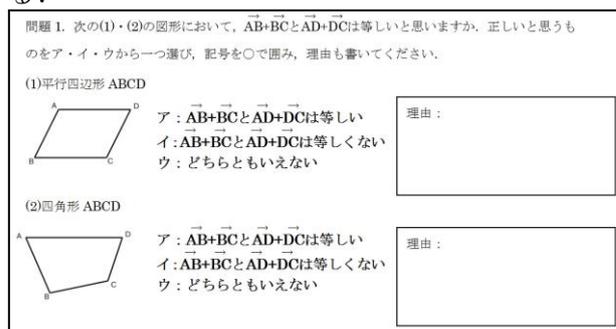


図 7: アンケート調査問題. 問題 1(1)(2)

問題 1 の結果として、(1) と (2) の回答は、「どちらも \vec{AC} と表せるから」、「平行四辺形だから」、「移動経路が一緒だから」の 3 通りに大別した。それぞれの回答者数は図 8 の通りである。

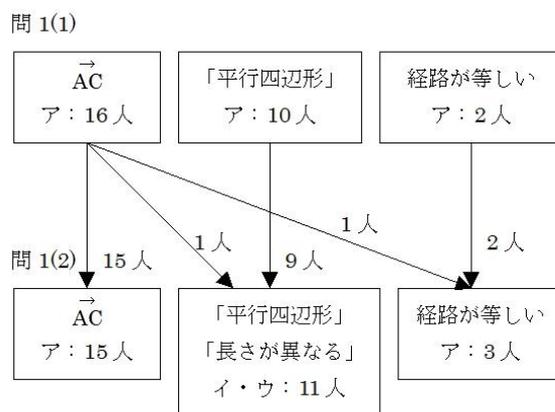


図 8: 問 1(1)(2)における主な回答と人数

図 8 から、問 1 の(1)と(2)において、(1)の理由を(2)においても同じ理由で回答している回答者が多いことから、ベクトルの和に関する概念イメージとして、次の3つが同定することができるだろう。

- ①ベクトルの演算から、 $\vec{AB} + \vec{BC}$ と $\vec{AD} + \vec{DC}$ はどちらも \vec{AC} と表わすことができ、その2つは等しい。
- ②ベクトルの和としての移動経路は関係なく、移動先が同じ場所になる。
- ③ベクトルの和は、2つのベクトルが2組で平行四辺形となったときに等しいといえる。

①と②が獲得すべき概念イメージであり、③は誤った概念イメージである。この問題から、ベクトルの和において、①は静的に見る概念イメージ、②は動的に見る概念イメージ、③は図形として認識する概念イメージだと見出すことができ、「平行四辺形」など、ベクトルの和における適用範囲の限界がある捉え方をしている学習者がいることが発見できた。この問題の課題として、に記載された $\vec{AB} + \vec{BC}$ と $\vec{AD} + \vec{DC}$ のベクトルが離れている場合は回答がどのように変化するかさらなる調査が必要である。

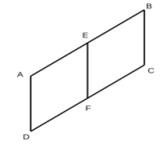
6.2.2. 問 2 の結果と分析

問 2(1)(2)の実際の問題は図 9 の通りである。問 2 (1)の回答の理由には「中点とは限らない」、「平行四辺形・平行の関係」の2つが多く見られ、(2)の回答の中には(1)の回答と「向きが異なる」という理由を用いた学生が多く見られた。それぞれの回答者数を図 10 に示す。問 2 の回答として、(1)、(2)の両方の回答理由として多くの回答者が「中点とは限らない」と答えていた。このことは、問題文に、EF は AB の中点であることを明記しなかったことが考えられる。そのため、(1)における正答はイ又はウを選び「中点とは限らな

問 2. 右図の平行四辺形 ABCD において、線分 EF は AD と平行です。次の問題に回答してください。

(1) \vec{AE} と \vec{FC} は等しいと思いますか。正しいと思うものをア・イ・ウから一つ選び、記号を○で囲み、理由も書いてください。

ア: \vec{AE} と \vec{FC} は等しい
イ: \vec{AE} と \vec{FC} は等しくない。
ウ: どちらともいえない



理由:

(2) \vec{EB} と \vec{FD} は等しいと思いますか。正しいと思うものをア・イ・ウから一つ選び、記号を○で囲み、理由も書いてください。

ア: \vec{EB} と \vec{FD} は等しい
イ: \vec{EB} と \vec{FD} は等しくない
ウ: どちらともいえない

理由:

図 9 : アンケート調査問題. 問 2

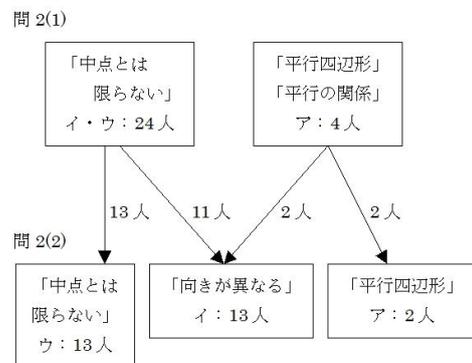


図 10 : 問 2(1)(2)における主な回答と人数

い」となる。しかし、(2)においては、 \vec{EB} と \vec{FD} はベクトルの向きが異なるため、正答はイを選択し「向きが異なるから」であることに留意したい。図 10 から、問 2 の(2)において、理由として「中点とは限らない」と「向きが異なる」と回答している人数が多いことが分かる。(1)で回答した理由を(2)でも同じ理由として回答している人数が多いことから以下の2つのベクトルの相等に関する概念イメージを同定することができるだろう。

- ①大きさが等しくても、向きが異なれば、異なるベクトルである。
 - ②ベクトルは大きさが関係しており、向きに関してはあまり問題視しない。
- ①が獲得すべき概念イメージであり、②は誤った概念イメージである。このことから、

ベクトルの相等に関して、学習者の中には、ベクトルの大きさに目を向けることは出来るが、向きにはあまり着目しないという概念イメージがあるだろう。正しいベクトルの相等に関する概念定義を学んだときに、大きさの概念は向きの概念よりも学習者に強く残りやすいことが示唆される。ベクトルの相等の概念イメージに関して、今回の調査問題では大きさが等しいことを問題に明記していなかったため、今後、ベクトルの大きさは等しく、向きが異なるような調査問題を作成し、検証する必要がある。

7. まとめと今後の課題

本稿では、これまでの概念変化研究を比較、整理することを Vinner (1991) の考えを基に「概念イメージ」と「概念変化」の関係を見出すことを通して、本稿における「概念変化」の捉え方を確定した。その上で、数学 B「ベクトル」のアンケート調査において、学生のベクトルの和、ベクトルの相等における概念イメージを同定した。今後の課題は、素朴概念による概念イメージと概念定義の相互作用、新たな概念による概念イメージと概念定義の相互作用、素朴概念による概念イメージと新たな概念による概念イメージの相互作用がどのように行われるかを見極め、高等学校の数学学習における概念変化の様相を明らかにしていくことである。

引用・参考文献

Chi, M. T. H. (1992). Conceptual change within and across ontological categories : Examples from learning and discovery in science: Vol.15. In R. Giere, & H. Feigl (eds.), *Cognitive models of science* (pp.129-186). Minnerapolis, MN : University of Minnesota Press.

diSessa, A. A. (1982). Aristotelian physics: A study of knowledge-based learning . *Cognitive*

Science, 6, 37-75.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A. (1982). Accommodation of a scientific conception : Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D, Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. pp.65 – 81. Dordrecht:KluwerAcademic Publishers.

Vosniadou, S. (1994). Universal and culture-specific properties of children's mental models of the earth. In L.A. Hieschfeld & S.A. Gelman (Eds.) , *Mapping the mind : Domain specificity in cognition and ulture* (pp.412-430) . New York : Cambridge University Press.

真野祐輔 (2010) . 算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究—「数」領域の展開を中心に—. 広島大学. 学位論文(未公刊).

瀬尾美紀子 (2011) . 比例概念の理解と素朴概念—『増えると比例, 減ると反比例?』—. 日本教育心理学会総会発表論文集. 53, 358.

中央教育審議会(2016). 算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ.

http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/_icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf (2018.2.15. 最終確認)

藤村宣之 (2011) . 教授・学習活動を通じた数学的概念の変化 . 心理学評論 . 54,3,296-311.

村山功 (2011) . 「概念変化についての諸理論」. 心理学評論. 54(3), 218-231.

湯澤正通, 稲垣佳世子 (2011). 日本における概念変化研究『概念変化研究』の特集にあたって. 心理学評論. 54, 3, 201-205.