上 越 数 学 教 育 研 究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 33 号

目　　次

1 次方程式の学習に見られる変数的な扱い……布川和彦・青柳潤… 1

人間がつくった最初の数
― 分数の起こりを考える数学的活動をつくる ―……伊達　文治… 11

現実性のある場面における
子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について……藤川　亮一… 21

中学校 1 年「文字式」の授業に見られる
数学不安を生じさせうる要因についての考察……児玉　誉也… 33

「教育内容としての数学的方法」に関する研究
― 数学的概念の「質的な高まり」を実現する学習過程に着目して ―……秋山　拓也… 43

数学授業における子どものメタディスコースに係わる理論……浦野　　正… 53

中学校数学科における
世界探究パラダイムに基づいた SRP についての研究……葛岡　賢二… 63

高等学校数学科課題学習における SRP の生息可能性……竹内　元宏… 75

数学 B「ベクトル」における概念変化に関する一考察……佐々木文弥… 83

中学生の数学学習における情意の様相について
― メタ情意とメタ認知に注目して ―……小林　祐希… 91

2018

上 越 教 育 大 学 数 学 教 室

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.1-10

1次方程式の学習に見られる変数的な扱い

布川　和彦　　青柳　潤
上越教育大学　上越教育大学附属中学校

1．はじめに

方程式の学習においては、求める数量の値を x と置いて方程式を立て、その方程式を解いて解を求めることが行われる。この時 x は、具体的にいくつかはまだわからないが、問題文に与えられた条件を満たす数量の値を表している。他方において、例えばある教科書の中学校1年で文字式を導入する部分では、ストローで作る正方形を並べた時に、正方形の個数と必要なストローの本数を考え、正方形の個数はいろいろな値をとるのでそれを文字で表すとしている。この時の文字は、値の変わりうる数量の値を表している。前者の文字は未知数 (unknown number)、後者の文字は変量 (varying quantity)を表していると考えることができよう(例えば Arcavi ら, 2017)。

基本的には方程式の学習では未知数を表すものとして x が用いられ、関数の学習では変量の値を表すものとして、つまり変数として x が用いられることが多いと考えられる[1]。しかし中学校2年で1次関数の学習と併せて、2元1次方程式と1次関数の関係を学習することを想起すると、x などの文字が整合性をもって扱われる指導が必要とも考えられる。

本稿は、両者の関係を考える手がかりを得るために、実際の中学校1年「1次方程式」単元の授業を考察し、変数と関わる場面や生徒の反応として、どのようなものが見られるのかを検討することを目的とする。

2．方程式と変数

中学校2年の連立方程式の学習では、最初に2元1次方程式が扱われるが、その際には $3x+y=27$ といった方程式が取り上げられ、この方程式を満たす x、y の値の組はすべてこの方程式の解とされる。他方において x、y はいろいろな値をとりうる文字なので、中学校1年で学習する変数の定義に従えば変数と考えることができる。教科書では問題場面の性格上、x、y の値として自然数が扱われることが多いが、$3x+y=27$ という等式を満たすという条件だけであれば、x、y は任意の実数をその値としてとることができる。

こうした文字の扱い方は、1元1次方程式でも可能である。布川 (2017)は、昭和40年代の中学校の教科書の検討から、こうした扱い方が当時のわが国の教科書には多く見られたことを示している。例えば、方程式を「変数をふくんだ等式」として定義をし、方程式の有効性を述べる際に「x の変域の値について、いちいち調べるのは、手数がかかって実際的でない」と説明したり、解の吟味についても「選んだ変数 x のとる値に制限がついている場合がある」と説明したりする教科書が見られる。またグラフを用いた解法についても、現行の教科書のように連立2元1次方程式の解法を扱うだけでなく、2次方程式や1元1次方程式についてもグラフを用いた解法を取り上げている場合が見られたとしている。例えば、$ax+b=0$ の解が $y=ax+b$ のグラフと x 軸との交点の x 座標に等しいことや、式 $ax+b=c$ の根は直線 $y=ax+b$ と直線 $y=c$ との交点の x 座標に等しいことを学習している。さらに方程式 $ax+b=cx+d$ を取り上げ、これの解を

$y=ax+b$ のグラフと $y=cx+d$ のグラフの交点として求めることを扱っている教科書があったとも述べている。

こうした扱い方は、Kieran ら (1996) による代数の学習に対する関数的アプローチ (a functional approach to algebra) に通じるものがある。そこでは、文字を変数として見るとともに、方程式を立てる場合には、問題場面の数量間の一般的な関数関係を言葉の式で表現することが想定されている。そして式中の数量にいくつかの数を代入し「問題文の感じをつかもうとする」(p. 259) ことを重視している。ある数量を文字式で表した場合、文字の値を変化させた時の式の値の変化を考えると、式の値は文字の値の関数となる (Doorman & Drijvers, 2010, p. 126)。

関数的アプローチを採用したとする Farmaki (2004) の学習活動では、方程式 $2x+4=3x$ で表される問題場面を考える場合、最初からこの方程式を立てることを求めるのではなく、$y=2x+4$ と $y=3x$ のグラフや表により量の変わり方を考えさせている。

こうした先行する取り組みを見ると、方程式の学習において文字を意識的に変数として扱うことは、関数への接続との関係から重要なだけでなく、問題場面を把握し、方程式を立てるためにも有効であるとも考えられる。現行の中学校 1 年の教科書では、方程式の学習で変数への明確な言及はないが、前項で述べたように、文字式の学習においては変数的な扱いが見られることから、方程式の学習でも文字が変数的に扱われる場面の現れる可能性がある。そこで、実際の中学校 1 年のクラスにおける授業を検討し、そうした側面が見られるのかを考察することとする。

２．授業の概要

本稿で取り上げる授業は、国立大学附属中学校の 1 年生 1 クラスで行われた「1 次方程式」単元全 15 時間である。授業は教科書を基本としながら、多様な考え方を促すために教師により進め方は適宜修正された。

この 15 時間の授業を 1 台の手持ちのビデオカメラで記録したものが、本稿で考察の対象となるデータである。

なお以下では紙幅の関係から、15 時間の授業の様子を全て記述した後に考察を加える形を採らず、変数的な扱い方が見られた学習活動の種類に応じて節を設定し、各節ごとに関連する授業や学習の記述をまず行い、次にそれについての考察を加えることとする。

３．方程式導入時に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

この中学校で用いられていた教科書では、方程式単元の冒頭でいくつかのアメと 1 円玉の組み合わせを上皿天秤にのせ、その時の天秤の様子を等式や不等式で表現するという課題が扱われていた。第 1 時にこの課題に取り組むと、アメの重さを x g と表すことが生徒からすぐに提案され、理由を尋ねると「重さが分からないから」と答えた。教師はどのようなアメを入れるかにより重さは変化すると説明を加えた。４つの状態から、次の４つの式が作られた：$3x+2<5x+3$; $x+10>2x+4$; $2x+4<5x+3$; $3x+2=x+10$。アメの重さを 4 g と求めた生徒もいたので、教師は「アメが小さかったり大きかったりして重さが変化したりすることもあるよと言ったんだけど」と前置きをした上で、最後の等式について 4 g の時に両辺の値が等しくなることを x に 4 を代入して確認した。さらに「アメがもうちょっと重くなって例えば 5 g になったとしたら」として、$x=5$ の時は $3x+2=17$、$x+10=15$ であり $17>15$ となることを示した。これらの確認を受けて方程式を次のように定義した：「アメが小さかったり大きくなったりしてアメの重さ変化するわけだけど、今、アメが 4 g だったら左右の重さドンピシャ同じになると言えるわけで、x の値によってですね、イコールになっ

たり、いやこの不等式になったりっていうような状態を表している式のことを方程式と言うんですね、x の値によって等式になったり、不等式になったり」。

その後、数量関係を等式や不等式で表す問いに取り組んだが、教師は途中で「余裕があったら、等式を成り立たせる時の文字の値っていくつなのかなあって考えてみて下さい」と補足した。第 1 時の最後に教師は再び $3x+2=x+10$ について、アメが 4 g だったら等式が成り立つが 5 g だったら等式が成り立たないことに触れ、さらに 6 g、7 g、8 g、9 g とアメがだんだん重くなっていった時に等号が成り立つ場合がいつか現れる時が来ると思うかを尋ねた。生徒から「来ない」との声も出るが、終業のチャイムが鳴ったため、教師が「これが成り立つのはアメが 4 g の時しかないってことが言えたら、勝利の方程式と意味合いが近いかもしれない、この人しかいない」と話をして授業が終わった。

第 2 時で前時の問いの確認をし、「3600 m の距離を分速 x m で走ると、かかる時間は 15 分未満だった」という数量の関係を不等式 $3600/x<15$ と表した際、教師は分速 1 m の時には 3600 分、分速 2 m の時には 1800 分かかることを確認した後、「つまりこの x がだんだん大きくなっていくと、かかる時間ってどうなる」と問いかけ、「x がだんだんだんだん大きくなっていくと、かかる時間はだんだんだんだん短くなっていく」ことを確認した。

等式の入った不等号 (≦) の導入の際には、教師は「x が 3 以上の数を表しているもの」だとして、その時に x と 1 のどちらが大きいか、x と 2 のどちらが大きいかを考えさせた。生徒はいずれもすぐに判断することができた。さらに x と 3 のどちらが大きいかを問うと、生徒は同じかまたは x の方が大きいかであると考えた。

第 2 時の後半では等式の表す関係を読み取る学習をしたが、その導入で教師は黒板に三角形を 1 つと $a+b+c=180$ という式を書いた。そしてこの式が内角の和が 180°であることを表していると読めたり、3 辺の長さの和が 180 であると読めたりすることを確認した。

第 2 時最後で次時の予告をした際 $a+b+c=180$ の式を指しながら、「これ、どんどん変化していった時に、これがイコールになる時とイコールにならない時があるってことは、前に 1 円玉とアメの場面でやったんですけど、どんな時にこのイコールが成り立つのかなあっていったことを次の時間考えていきたいと思っています」と説明した。

(2) 観察された変数的な扱い

方程式を「x の値により成り立ったり成り立たなかったりする等式」として定義することもあり、同じ 2 つの式 $3x+2$ と $x+10$ でも x の値により等式が成り立ったり成り立たなかったりすることを教師が説明した。その際に x に異なる値を代入し、式の値を求めていたが、x がいろいろな値をとるものとして語られているという意味で、ここでの x は変数的に扱われている。

また等式の導入にあたっては不等式との比較も行われたが、不等式の場合は x の値がある範囲にあれば成り立つことから、x の値が大きくなると $3600/x$ の値が小さくなることが補足された。ここで x は「x の値がだんだん大きくなる」といろいろな値をとるものとして語られており、変数的に扱われていると言える。

x と 1 や 2 の大小を考える場面では、教師は x が 3 以上の数だとしていた。この場合、3 以上のある数と未知数的に語られた可能性も排除できない。ただし、その後、x と 3 の大小を考えた際には、生徒は同じかまたは x の方が大きいかであると考えており、x の値についていくつかの可能性があり得るとの前提で考えていたことになる。

第 2 時後半の式を読む場面では、三角形が 1 つだけ板書されたことから a、b、c はこの

書かれた三角形の内角や辺の長さとして扱われた可能性があり、変数的な扱いとは言い切れない。ただし次時の予告では各文字の値が変化した時に等式が成り立つ場合と成り立たない場合があることに言及しており、辺の長さに関してはいろいろな値をとりうることが示唆されていたとも考えられる。

４．解法の学習に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第３時では上皿天秤が釣り合った状態をもとにアメの重さを考えた。天秤はアメの重さを x とした時に $4x+2=2x+10$ で表される状態であった。アメや１円玉を両方の皿から適宜取り除いて、アメ２個と１円玉８個が釣り合うことを導くという、方程式の解法につながる考え方をした生徒も多かったが、天秤の状態を $4x+2=2x+10$ と式で表し、x に数を代入して等式を成り立たせる x の値を求める生徒や、$4x+2$ と $2x+10$ の値の表を作り、２つの式の値が等しくなる x の値を求める生徒も見られた。ある生徒は「あめの g を 1 g, 2 g, 3 g, 4 g, …と重さを変えていきながら等しくなった g をさがす」と書いていた。

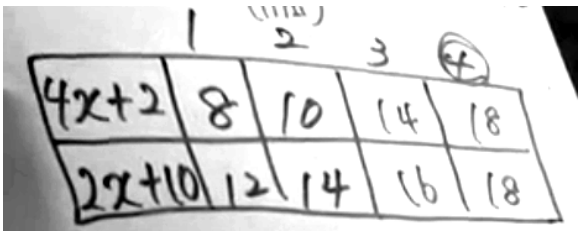


図１: 表を用いた解の求め方

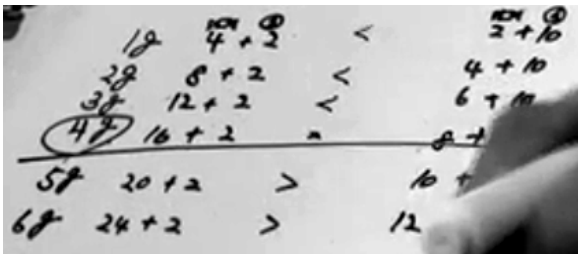


図２: 代入して大小を比較する考え方

第４時後半で等式の性質を用いて方程式を解く学習をする際、教師は前時の方程式 $4x+2=2x+10$ を提示しながら、「等式の性質を使うと、x っていろいろ変化する可能性があるんだけど、具体的にどれくらいの値なのかなってことがわかるわけです」と説明した。

第５時で $2x+2=10$ を解く際に教師は解法を二通り考えさせたが、両辺から 2 を引くか左辺の 2 を移項する以外の解法として、生徒は両辺を２で割ってから移項する解法、両辺を 10 で割ってから移項する解法を考えていた。教師は「x ってどんどんどんどん変化していくわけでしょ、1 でも 2 でも 3 でもいいし」「そうなった時にこれ[$2x+2$]たして 10 にすればいいんだから、これ何当てはまればいいんだろうとか考えたりしなかった？x 2 倍して 2 たしたら 10 になる数って何だろうかなあ、そうすると 1 入れたらいくつ 2 たす 2 で？2 入れたら 6、3 入れたら、ってことは次 4 入れたら、ああじゃあ 4 でいいんだなみたいな感じで考えた人いなかった？」と尋ねた。これに対し１名が挙手をした。さらに教師は、第３時でも x に値を代入して等式が成り立つ x の値を見出した生徒のいたことを想起させ、等式の性質を用いた解法は解き方の１つではあるが、それだけが解くことではないことを注意した。そして「1 から順番に x に当てはめていったら 4 の時成り立った、じゃあ解は 4 でいいんだな、これももちろん解くということ」と補足した。

第６時でも移項を用いて方程式を解くことを学習するが、その中で $5x=-3x+24$ を解いた際に、教師は x に 1、2 を代入して、これらの時は左辺と右辺が等しくならないことを確認し、代入していっても求められそうではないかと問いかけた。また移項により $x=3$ という解を求めた後、$x=3$ を代入して左辺と右辺が等しくなることも確認した。

第７時、第８時と第９時前半では方程式を解くことを学習したが、解の見当をつけるためにも、解の確認のためにも、生徒が x に値を代入する様子は観察できなかった。

(2) 観察された変数的な扱い

等式の性質を用いた方程式の解法を学習する前は、x がいろいろな値をとるものとして左辺と右辺の式の値を考えて、条件を満たす x の値を求めようとする考え方が見られた。これは、第１時と第２時では x にいろいろな値を入れたり、x の値を変化させるという語り方がされたりしてきたこと、およびそうした導入も考慮して、教科書の当該箇所でも、図２のような考え方が記載されていたことも関係していたと考えられる。この段階では、方程式 $4x+2=2x+10$ の解を求める際に、x を変数的に扱うことも行われていたことになる。

その後、等式の性質を用いて解を求める方法を学習すると、教師は x を変数的に扱うような語り方を採り入れていたにも関わらず、生徒には変数的な扱いは見られなくなった。

５．等式の変形に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第４時で前時の天秤の操作を想起させながら等式の性質を説明し、A=B の両辺に同じ式を加えても等式が成り立つとした際、教師は $A+(3x+2)=B+(3x+2)$ がなぜ成り立つのかを問うた。「この x って変化していく、ってことは？」と補足したが、生徒からの反応がないので、例えばとして x に３を代入し、同じ x なので x に値を代入した時に両辺の $3x+2$ が同じ値になり、両辺に同じ数をたしているのと同じことになり、だから両辺に同じ式をたしても等式が成り立つと説明した。

また $A/m=B/m$ に関わっては、m は 0 にならないことに触れて「m はいろんな数に変化するんだけど絶対に 0 にはなっちゃいけない」と補足した。

(2) 観察された変数的な扱い

等式の性質は黒板上では $A+m=B+m$ 、$A-m=B-m$、$A\times m=B\times m$ ($Am=Bm$)、$A\div m=B\div m$ ($A/m=B/m$)という式の形でまとめられた。その際、m が $3x+2$ という式の場合も問題としたが、式をたしても等式が成り立つことを理解するために、x に値を代入して $3x+2$ も１つの値にする方が生徒は納得しやすいと考え、x はいろいろな値をとりうること、いずれの値でも同じ $3x+2$ という式なので両辺に加えられる数は同じになることに生徒の注意を向けようとした。つまり、両辺に式を施すことの妥当性を両辺に数を施すことに帰着するために、x を変数的に扱う語り方がされていた。

同様に考えるならば、両辺に施された文字 m もいろいろな値をとることが前提にされている。この時 m は変化する量を表すというよりも 一般化された数を表すものと考えられるが、いろいろな値をとる文字という意味では変数として扱われていることになる。

６．方程式の利用に見られる変数的な扱い

(1) 授業と学習の様子

第９時後半で次の年齢の問題を考えた：「A さんは 13 歳、B さんは 45 歳である。A さんの年齢を３倍した時に B さんの年齢と等しくなるのは何年後か」。教師はまず、今は 3 倍しても等しくないが、いつかは等しくなりそうか、あるいは絶対等しくならないかを尋ねた。少し近くの人と話し合わせた後で挙手をさせると、多くの生徒が等しくなると答えたが、等しくならないとする生徒も数名いた。問題を考えさせると、基本的には方程式 $3(13+x)=45+x$ を立て、移項により解を求めていたが、1 年後、2 年後、･･･の二人の年齢を表のように並べ、条件を満たす年数を求める生徒も多く見られた。教師は指名して解答を板書させる際に、表を用いた解答を板書させた。そしてそこに「13+1」「13+2」「13+3」などと書き込みをしながら説明をした(図３)。この時は方程式を用いた解答は全体では確認しなかった。

次に、今の問題で３倍という条件を 2 倍や 4 倍に変えたらどうなるかを問うた。教師は途中で 2 倍の場合に「地道に表を作ると大変

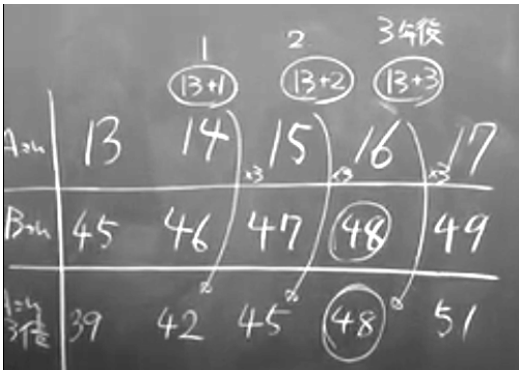


図３: 年齢問題の表を用いた考え方

じゃないですか」と話し、上の表の B さんの年齢の部分に「45+1」「45+2」「45+3」と書き加え、それと「13+1」などを 2 倍や 4 倍したものが等しくなると考えるとよいことを補足した。しかしこの補足の後でも、表を作って考える生徒が見られた。第 9 時の最後に表を用いた考え方と方程式を全体で確認した。方程式の確認の際に教師は表の 45+1、45+2、45+3 に続けて「･･･45+*x*」と書き加え、この 45+*x* が何を表しているかを問い、板書した生徒は「A さんの年齢を 2 倍した時に等しくなる時の B さんの年齢」と答えた。教師はそれを受けて、上の表の 45+1、45+2、45+3 を指しながら「1 年後 2 年後 3 年後、ダーッときて、いつか同じになるであろう時の B さんの年齢 45+*x*、*x* 年後なんですね、同じようにして A さんも[13+1 などを指し]1 年 2 年 3 年、*x* 年経ったら、[13+*x* と書き]13 たす *x* 年だと、でこれの今 2 倍が B さんの年齢と等しくなると考えているわけですね」と説明した。

第 10 時冒頭で教師は、年齢問題に対し表を作って考えた人もたくさんいたとして 3 倍の場合の表の考え方を提示し、その後、2 倍の場合の方程式 26+2*x*=45+*x* を提示して、この続きを考えるとした。そして 26+2*x* と 45+*x* が「それぞれ何を表しているのか」を近くの人と話し合わせた。ある生徒は左辺の 2*x* の下に「毎年」、45+*x* の下に「every year」と書いた。前にいた生徒が「今は、13 歳の時点だとこうなの」と言い、この生徒の方程式の等号の上に「＜」と書き加え、「で 3 年後[ママ]越しちゃうとこうなっちゃう」と言い、等号の下に「＞」を書き加えた。話し合い後に教師は「そもそもこの *x* って何を表している」と問い、図 3 の表を示しながら、「1 年経ったら 13 に 1 たして 14 歳、2 年経ったら 13 に 2 たして 15 歳、3 年経ったら 13 に 3 たして 16 歳、で最初の 13 に経った年数分だけたしていってあげてるわけですね、どんどん変化していると、まあいつ追いつくであろうところを *x* として 13+*x* ということを前回、みんなとやりとりして確認したんですけど、それで言うと、45+*x*、*x* っていうのは追いつくのが何年後かってことでいいかな」と確認した。さらに前時に方程式を板書した生徒に *x* が何を表すかを尋ねると、その生徒は「*x* は、今から何年後かっていうのを表している」と答えた。教師が「今から何年後かとは」と問い直すと「二人の年齢が等しくなる時にかかる年数、って言うんですかね」と答え、教師は「*x* ： 2 人の年齢が等しくなるまでの年数」と板書した。その後、26+2*x* が 2(13+*x*)であることを確認した後、方程式を解いて解を求めた。4 倍の場合についても方程式を立てて解いた。解が–7/4 となるので、何年前かという話になること、また最初の設定で既に A さんの年齢の 4 倍が B さんの年齢を越えていることを確認した。最後に、表を使って考えてもいいのだが、表を書くと大変な時もあるので方程式を使う方が有効な場合もあること、その場合、*x* が何を表すかを明確にすることが大切であることを説明した。

第 10 時の最後に、教科書の次の問題に各自で取り組んだ：「29 L 水の入った水槽 A から 10 L 水の入った水槽 B に水を汲んで移したら A の水の量が B の水の量の 2 倍になった。移した水の量を求めなさい」。あるグループでは「式はない、最大 28 じゃん、だから 1 L ずつ入れたら」と話していた。さらに後ろの生徒が図 4 の表を作って解いているのを見て、

その生徒に「やっぱり表を作った方が速いよね、方程式考える前に数えた方が速い」と話した。別のグループも「これ絶対方程式で解いちゃいけない」と話していた。最後に教師が解説をした際「x：A から B へ移す量」と板書し、$29-x$ と $10+x$ のどちらを 2 倍するのかを確認した。

A	28	27	26
B	11	12	13
倍	22	24	26

図４: 水槽の表

また水槽問題が終わって教科書の「52 円切手と 82 円切手を合わせて 10 枚買い 700 円であった時、それぞれ何枚買ったか」という問題も考えていた生徒は、$52x+82x=700$ という方程式を立てた上で右の表を書き、答えを 52 円切手 4 枚、82 円切手 6 枚としていた。

4	6
208	492

第 11 時冒頭で切手問題を考えた際、ある生徒は 5 枚ずつ買うと合計は 670 円となり 700 円にはあと 30 円足りないので 52 円切手を 1 枚減らし 82 円切手を 1 枚増やすという考え方を隣の生徒に説明していた。また方程式ではなく、$52\times4+82\times6=700$ の式を書いた生徒も見られた。全体での説明では 52 円切手を x 枚買ったことに関わり教師は「52 円切手を 1 枚買ったかもしれないし 2 枚買ったかもしれないし 3 枚買ったかもしれない、一番多くて何枚？」と確認した。また 82 円切手の枚数が $10-x$ と表されるとした時も、52 円切手を 1 枚買うと 82 円切手は 9 枚、2 枚買うと 8 枚と確認した。なお 82 円切手の枚数を $(700-52x)\div82$ と表した人がいることも紹介された。

第 12 時では教科書の過不足算の問題に取り組んだ：「栗を 9 個ずつ配ると 3 個足りず、8 個ずつ配ると 4 個余る時、人数と栗の個数を求めよ」。ある生徒は $9x-3$ と $8x+4$ の式を上下に並べ、その右側に「x=7」と書き「人数 7 人、くり 60 こ」と求めていたが、方程式を解いた跡が見られなかった。その代わり、別の場所に表のような記録が残されていた(図５)。また別の生徒は次のような図をかいて考えていた。

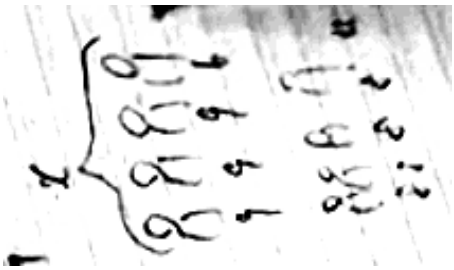


図５：過不足算の表

図６: 過不足算で 4 人の場合の図

教師は線分図を用いながら、$9x-3$ と $8x+4$ とがいずれも栗の個数を表していることを確認した。また最後に栗の個数を x と置いて方程式を立てることも考えた。

第 13 時で教科書の追いつき算の問題に取り組んだ：「1 km 離れた駅に分速 60m で歩く妹が出発してから 9 分後に兄が自転車で分速 240m で追いかける時、何分後に追いつくか」。多くの生徒は方程式を用いて解いたが、下のように妹と兄の進んだ距離を表のように整理して考えている生徒も複数名見られた。

		1分	2分	3分
60×9	540	600	660	720
	0	240	480	720

図７: 追いつき算の表

第 14 時は比例式の導入として、木の影が 12 m、高さ 2 m の鉄棒の影が 1.5 m の時の木の高さを求める問題に取り組んだ。比を用いて解いている生徒が多いが、高さと影の長さについて下のような表を用いて考えている生徒も複数名見られた。

木	2	4	6	8	10	16	
影	1.5	3.0	4.5	6.0	7.5	12	

図８：影の問題の表

この表を書いた生徒は、1.5 を 8 倍すると 12 になるので 2 を 8 倍して 16 とすればよいと近くの生徒に説明をしていた。

(2) 観察された変数的な扱い

第 9 時以降は問題場面が与えられ、条件を

満たす数量を求めるという学習が行われた。方程式の利用の学習でもあり、多くの生徒は問題の条件から方程式を立て、それを形式的に解いて条件を満たす数量を求めようとしていた。他方で、問題場面の様子を表などにまとめて条件を満たす数量を求めようとする生徒も少なからず見られた。

表などにまとめて解を求めることは、今回の授業の場合、問題の多くで解がそれほど大きくない自然数であったために可能になったと言え、教師も例えば第 10 時で、表を書くと大変で方程式を使う方が有効な場合もあることに触れている。しかし関数的アプローチで見られたように、問題場面中の数量についていくつかの値の場合を考えてみることで問題の感じをつかもうとするという意味では、解そのものが求まらなくとも、数量間の関係が具体的にイメージできれば有効とも言える(Nunokawa, 2000)。第 10 時で水槽問題を解いている際の生徒たちによる「やっぱり表を作った方が速い」「方程式考える前に数えた方が速い」「これ絶対方程式で解いちゃいけない」といった発話は、移す水の量を少しずつ変えて考える方が、生徒にとっては問題場面を把握しやすいことを示唆している。

また第 10 時で切手問題に対して $52x+82x=700$ という方程式を書いた生徒も、52 円切手 4 枚と 82 円切手 6 枚の時の値段を求めていることから、具体的な数値としては問題場面を適切に把握できていたと考えられる。

こうした問題把握の仕方は、第 9 時の年齢問題、第 10 時の水槽問題、第 13 時の追いつき算の問題など経過する年数、移す水、経過する時間といった変化する量を含んだ問題では、その変化を順に追うことで用いやすい。しかし、切手問題や第 12 時の過不足算の問題、第 14 時の影から高さを求める問題では、ある条件を満たす状態が最初からあり、その状態を求める問題となっており、変化する量が明示的には含まれていない。今回の授業においては、生徒はこうした問題であっても、切手の枚数や分ける人数、ものの高さについて、自分でいろいろな値の場合を想定していた。また実際は水槽問題も教科書の問題文では「[水槽]A から水をくんで B に移しかえたところ、A の水の量が B の水の量の 2 倍になりました」と、最終的な結果を提示し、その時の「移しかえた水の量」を求めるとされていた。しかし生徒は、1 L ずつ水を移していくという途中の状態を自ら作り出し、移しかえる量が変化するものとして場面を把握しようとしていた。

7．変数的な扱いと方程式の学習

前節まで見てきたように、本稿で取り上げた授業では、1 次方程式の学習の中に文字を変数的に扱ったり、文字で表される数量を変化させて考えることが、教師の側だけでなく生徒の側にも見られた。これらは図 1 の表からも示唆されるように、関数の学習との接続をしやすくすると期待されるが、それだけでなく、方程式の学習自体にも関連を持つと考えられる。本節ではそれらの点を検討する。

(1) 方程式の利用における場面の把握

前節で見たように、式中の x や問題場面の x で表される数量についていろいろな値の場合を考えることは、問題場面の把握にとって有効と考えられた(Kieran ら, 1996; Nunokawa, 2000)。水槽問題では $2(29–x)=10+x$ や $2(29+x)=10+x$ など不適切な方程式を立てる生徒も多く、教師は $29–x$ と $10+x$ のどちらを 2 倍にするかをクラス全体に確認していたが、図 4 の表では、水の増減や 2 倍の関係が適切に捉えられている。また切手問題では $52x+82x=700$ と誤った x の用い方をした方程式を書いた生徒が、実際には 2 種類の切手の枚数が異なることを把握し、正しく答えを求めていた。

ただし変数的な扱いをもとに場面を把握して方程式を立てることにつなげるためには、構造を残した数式により数量を表すことが必

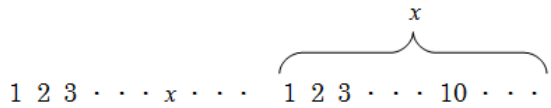
要となると考えられる(布川, 2016 a)。例えば図 6 の栗の問題であれば、この図から 1 人に 9 個ずつ 4 人に配る場合の栗の総数を 9+9+9+6 と表すと、場面の把握にはつながりにくくなる。6 を 9–3 と表し、9+9+9+(9–3)=9×4–3 とし、図中で人数を表す x と組み合わせることで $9x$–3 という式を得ることができる。

(2) 教師の語り方の問題

文字を未知数的に扱う場合、与えられた条件を満たす状態を想定し、そこでの数量間の関係を式で表現することで方程式を立てる。文字を変数的に扱う場合は、場面中の数量を文字式などで動的にとらえ、ある数量が変化した時の別の数量の変わり方といった関数関係や、条件を満たす状態になるまでの過程を検討し、その上で条件を満たす状態ではそれら数量を等しいと置き方程式を立てる。

逆にこうした点を視点として、教師の語り方などを吟味することができる。例えば、第 9 時で図 3 の表を板書させた後、教師は B の年齢 46、47、48 を 45+1、45+2、45+3 と書き直した後、これに続けて「･･･45+x」と書き加え、さらに「1 年後 2 年後 3 年後、ダーッときて、いつか同じになるであろう時の B さんの年齢 45+x、x 年後なんですね」と説明した。ここでは文字 x は条件を満たす時の年数を表しており、未知数的に扱われている。他方で x を含む式に「毎年」「every year」と説明をつけていた生徒では、x は変数的に扱われている。こうした変数的な扱いは、それ以前の授業における「x ってどんどんどんどん変化していく」とする教師の語り方と、むしろ整合している。過不足算の問題で 4 人の場合を描きながら人数を x とした図 6 も、同様の考え方を示している。図 3 への教師の書き込みとこの図 5 を参考にすると、これらの違いは図 9 のように表すことが出来る。

前者は数の系列のどこかにあるはずの条件を満たす値が x として語られ、後者はいろいろな値をとりうる数量を表すものとして x が語られる。文字に対するこれら異なる語り方が意識的に使い分けられているかは、語り方の一貫性に関わり、方程式の立て方を含め、生徒の理解にも影響を与える可能性がある(布川, 2016 b)。



(a) 未知数的扱い　　(b) 変数的扱い

図９：文字の語り方の違い

(3) 変数的な扱いと解の存在

文字の変数的な扱いは、方程式の利用だけでなく、方程式の理解にも影響を与えうる。

第 7 時では、$8x$–3=5+$6x$ という方程式について、その解き方を隣の人どうしで互いに説明させ、また求まった解 x=4 を元の方程式に代入して両辺が 29 となり等式が成り立つことを確認した後に、教師は x=4 以外の場合を話題にした：「x っていうのは、まあ 1, 2, 3, 4 ばばばって変化していくような、そんなものなんですけど、みんなもしこれが 4 じゃなくて、4 じゃない数になったとしたら、この左右[$8x$–3 と 5+$6x$]ってどうなると思う？」。生徒からは「釣り合わない」「違う」といった意見がすぐに出された。例えばとして x=5 を代入して左辺を 37、右辺を 35 と求め、両辺が等しくならないことを確かめた。

さらに教師は x=4 以外に両辺が等しくなるものがないのか、等式が成り立つのは x=4 しかないのかを問うた。何か計算をしているような生徒もいたが、先ほどのように明確な意見がすぐには出なかったので、x=4 以外にも等式が成り立つことがあるかどうかを挙手させた。x=4 以外に等式が成り立つ x の値があるとした生徒はおらず、解は 4 しかないとする人が 3 分の 2 程度いたが、他にあるかないか悩むという人も 3 分の 1 程度いた。ここから、1 次方程式の解を式変形により求めることができても、その求めた解以外に等式を成

り立たせる x の値があるのかについて自信がない者も少なからずいることが示唆される。

これに対しては、方程式に移項等を施して得られた式が、解である x の値が満たすべき必要条件であることから、解の一意性を説明することもできよう。しかしこれとは別に、x を変数的に扱うことで解の一意性を考えることもできる。今の方程式 $8x-3=5+6x$ であれば、このクラスで行われたように $x=4$ の時は両辺が 29、$x=5$ の時は左辺が 37、右辺が 35 と考えていくことで、x の値が 4 から大きくなるにつれ左辺と右辺の差が大きくなることに気づくことで、感覚的ではあるが 4 より大きい解が存在しないことを確認できる。

文字を変数的に扱うことは、1 元 1 次方程式においても解の存在を考える 1 つの方法を与えるものとして、方程式の学習に関係するものと言えよう。

8．おわりに

1 元 1 次方程式の学習において、導入部分や活用の学習では、文字を変数的に扱うことが生徒によっても自然に行われていた。他方で、方程式を式変形に基づき解く際には、解の見当をつけたり確認をするという形でも、変数的な扱いは見られなくなった。こうした現状や、文字式や関数領域の学習との接続も考慮しながら、文字の扱い方について検討していく必要があろう。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 変数を表す際に用いられる variable という用語は、いろいろな仕方で用いられるとされ、例えば以下の諸側面があげられる (Arcavi ほか, 2017, pp. 12-13)：プレースホルダー；未知数；変量；一般化された数 (generalized number)；パラメータ。しかし本稿においては、わが国の中学校 1 年で学習する通り、いろいろな値をとる文字を変数と呼ぶことにする。

Arcavi, A., Drijvers, P., & Stacey, K. (2017). *The Learning and teaching of algebra: Ideas, Insights, and Activities*. Abingdon, UK: Routledge.

Doorman, M. & Drijvers, P. (2011). Algebra in function. In P. Drijvers (Ed.), *Secondary Algebra Education: Revising topics and themes and exploring the unknown* (pp. 119–135). Rotterdam, The Netherland: Sense Publishers.

Farmaki, V. (2004). From functions to equations: Introduction of algebraic thinking to 13 year-old students. In M. J. Høines& A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 4, pp. 393-400). Bergen, Norway.

Kieran, C., Boileau, A., & Garancon, M. (1996). Introducing algebra by means of a technology-supported, functional approach. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 257-194). Springer.

Nunokawa, K. (2000). Heuristic strategies and probing problem situations. In Jose Carrillo & Luis C. Contreras (Eds.), *Problem-solving in the beginning of the 21st century: An international overview from multiple perspectives and educational levels* (pp. 81-117). Huelva, Spain: Hergue.

布川和彦. (2016a). 生徒の姿から指導を考える. 学校図書.

布川和彦. (2016b). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *4*, 49-56.

布川和彦. (2017). 昭和 40 年代の中学校教科書に見られる方程式と関数とを関連づける記述について. 上越数学教育研究, *32*, 1-10.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.11-20

人間がつくった最初の数

－分数の起こりを考える数学的活動をつくる－

伊達文治
上越教育大学

１．はじめに

「整数（自然数）は神様のつくったものだが、他は人間のつくったものである。」(Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.)

これは，ドイツの数学者であるレオポルト・クロネッカー (Leopold Kronecker, 1823-1891) が夕食後の会話の中で語ったという有名な言葉である（科学者人名事典編集委員会，1997，p.205)。

"Die ganzen Zahlen"は，辞書を引くと「整数」という訳語が出てくるが，数の歴史を見るとき，「自然数」，つまり「正整数」を意味していたと考えるのが妥当のように思われる。クロネッカーの冒頭の言を支持するならば，人間は自らの経験を通して，まず神のつくった自然数（の概念）を獲得し，次に，自然数を基にして自然数ではない正の有理数をつくり出した，ということになる。本稿のタイトルにした「人間のつくった最初の数」は，自然数ではない正の有理数に他ならない。自然数ではない正の有理数の表現としては，分数表現と小数表現とがある。これ以降，分数表現で表される数を単に「分数」，小数表現で表される数を単に「小数」ということにする。

本稿は，「人間のつくった最初の数」は，どのような必要性から，どのようにつくられたのか，という問に向かって探究しようとするものである。この探究を，分数の起こりを考える数学的活動をつくるという方向で進めていきたい。

本稿を，稿末に挙げている引用・参考文献，主には大矢真一氏，片野善一郎氏の著を総合的に参考にしながら，記述していきたい。両氏の著を参考にする場合は著者名等を特に示さないが，両氏以外の文献を引用・参考にする場合は，著者名・発行年・頁を明記することとする。なお，分数の起こりを考える数学的活動をつくるために設けた文中の［問］及びそれに答えている箇所は筆者によるものである。

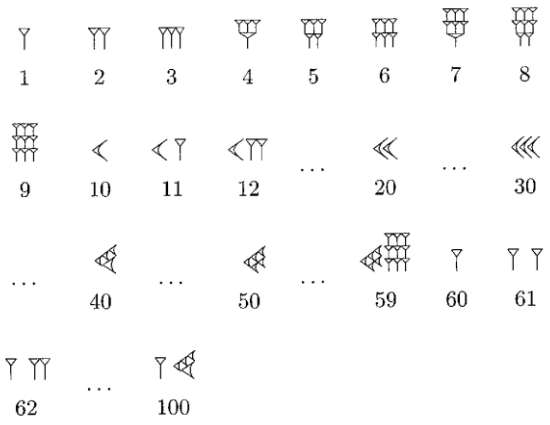
２．分数・小数の基にある考え方

人間が未開であった時代には，人々は，一つ，二つ，三つ，･････というような数，すなわち自然数で事足りていたであろう。次第に文化が発達していき，社会が複雑になっていくにしたがって，1 より小さい数を考える必要が出てきたのではないだろうか。1 より小さい数を自然数を用いて表そうとするとき，まず 2 通りの考え方が出るであろう。一つは，1 を二つ集めたものを 2，1 を三つ集めたものを 3，･･･としていくのと同じように，1 を二つ集めたものを $\dot{2}$，1 を三つ集めたものを $\dot{3}$，･･･のように表す方法である。これが分数の起こりであろう。ここには位という考えは入ってこない。これに対して 1 より小さい数を表すのに，位の考えを持ち込む方法がある。

1を（現代表記の）10集めたものを十，十を10集めたものを百，･･･のようにしていき，これらを使って例えば（現代表記の）234という数を2百3十4とするのと同じように，1を10に分けたものを分，分を10に分けたものを厘，･･･のようにしていき，これらを使って例えば（現代表記の）0.234という数を2分3厘4毛のように表す方法である。1より上に位の考えがあるのと同じように，1より小さい方にも位の考えを導入するのである。これが小数である。したがって，分数と小数は，別の考え方から出発したものであると言える。

10進法に基づく小数がはっきりと現れたのは，中国では元の朱世傑の『算学啓蒙』(1299)であり，ヨーロッパではオランダのシモン・ステヴィンの『10進分数（小数）論』(1585)が最初である。しかし，小数の考え方を最初に使ったのは，古代バビロニアの人達である。古代バビロニアでは60進法によって1より大きい数を書いていたが，その方法が1より小さい数の表し方にも適用されている。古代バビロニアの60進法は今日，時間や角度を表す際に，その痕跡を残している。これは60進法が天文学上の必要から生まれたことを示すものであろう。古代バビロニアも当初は10進法であったようであるが，恐らく天文学上の要求からであろう，後に60進法に改められた。10進法から60進法に改められる際に，基数とする60が比較的に大きい数であることに伴う記数法上の困難性を軽減するためであろう，位取りの原則が導入されたのではないかと考えられる。室井(2000)によると，古代バビロニアの数学は，その萌芽は紀元前24世紀頃の粘土板にも見て取れ，他の古代文明の数学よりも起源が古く，世界最古の数学といってよい。古代バビロニアで数学や天文学に使われた数は，10進法と60進法の混合体系で位取りの原理を用いて次の表1のように表された。

表1．楔形文字の数（室井，2000，p.19）



分数については，基本的には60進法で表現されたが，日常生活でよく使われるものに対しては，次の表2のように特別な数字が用いられることも多かった。

表2．楔形文字の分数（室井，2000，p.19）

		シュメール語	アッカド語
	1/2：	bar, ba$_7$, sa$_9$, maš	*mišlum, bamtum*
	1/3：	šušana	*šuššān*
	2/3：	šanabi	*šinipu*
	5/6：	kingusila	*parasrab*

古代バビロニアの日常生活では，既に（単位分数ではない）普通の分数も使われていたことがうかがえる。これは，古代エジプトの単位分数よりも，そして古代バビロニアの小数よりも古いものであったであろう。ただ，それを探るには残されている資料は余りに乏しく，本稿においてはこれ以上古代バビロニアの分数と小数には踏み込まないこととする。

本稿では，「人間のつくった最初の数」として，古代エジプトの単位分数，そして異なる

単位分数の和として表される数を取り上げ，それらがどのような必要性から，どのようにつくられたのか，という問に向かって探究していくこととする。

３． 分数の起こり

人間は，その進歩の最も早い段階において分数の概念をもった。分数は初め一つのものをいくつかに分ける必要から起こった。一つのものを二つに分ける，一つのものを三つに分ける，そうした大きさが分数である。一つのものを二つ集めるとニ，一つのものを三つ集めるとサン，というように名付けるとき，そこにはもう元の一の名との関わりはないのと同様，一つのものを二つに分け，一つのものを三つに分けたときも，もう元の一の名との関わりはなくなる。

古代エジプトの分数は，（インド・アラビア数字で書くと，）$\dot{2}$，$\dot{3}$，$\dot{4}$，・・・・・のように等分する数にある印を付けて表されていた。実際は下図（図 1）のように表されていた。

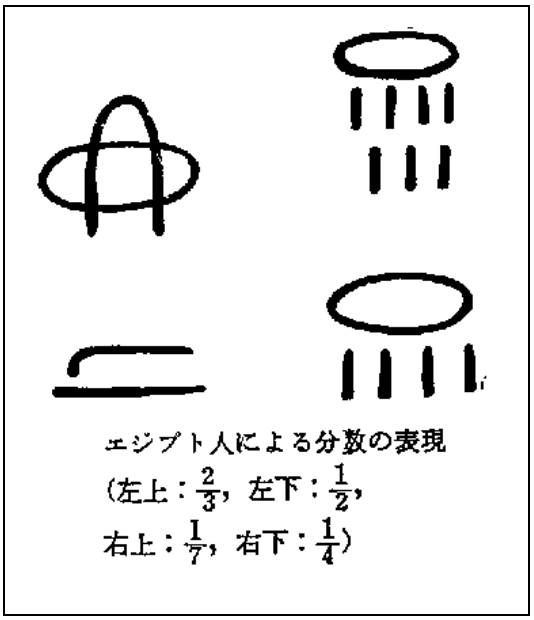


図 1：古代エジプトの分数
（イー・ヤー・デップマン，1986，p.232）

今の $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，・・・・・ のように分母，分子という二つの数の組合せで表されるものではなく，どこまでも一つの数であった。二つの数を組み合わせて一つの数を表すようになったのは，かなり後のことである。この 1 を分けたことを表す分数を，「単位分数」と呼ぶ。この単位分数 1 個では 1 より小さい全ての大きさを表すことはできない。したがってこれを幾つか組み合わせて必要な大きさを表すのである。古代エジプトでは，１より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表していた。B.C.17 世紀頃エジプトの僧侶アーメスによってパピルスに書かれた数学の巻物（幅 33 ㎝，長さ 5.5m）「リンド・パピルス」が，イギリス大英博物館に保存されている。この本の初め第 1 節には，「２を奇数で割る表」として，（インド・アラビア数字で書くと）次のような分数表が書かれている。

$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$，$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$，$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$，

$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}+\frac{1}{66}$，$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}$，・・・・・

その後の第 2 節には，パンの分配に関する問題が 7 題出され，その解法も示されている。当時のエジプトでの乗除計算は全て，2 倍と 10 倍だけで行われたようである。1 より小さい数は単位分数で表わされたので，乗除計算の乗数として使われた数は，2, 4, 8, 16, 32, ・・・・・と $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{16}$，$\frac{1}{32}$，・・・・・，そして，10，100，1000，・・・・・と $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，・・・・・ だけであったと考えられる。

では，ここで，分数の起こりに関する具体的な問題で考えよう。（これは算数教材としても十分活用できるものである。）

［問 1］三つのパンを５人で等分に分けるとき，どのように分けたらよいか。その分け方を考えよう。

現代人の多くは，三つのパンを５人に分ける場合，まずそのパンを三つとも５等分に切り分けるであろう（切られたものは１５個になる)。それを三つずつ分配すれば，全部が等分に分配されることになる。つまり今の表し方で言えば，１人当たり $\frac{3}{5}$ ずつ分配されたことになる。

［問２］ところが，古代エジプトの人達の分配の方法は，上の方法とは異なったものであった。その方法には，今風の一人分 $\frac{3}{5}$ を異なる単位分数の和に直した，$\dot{2}\dot{1}0$（すなわち，$\frac{1}{2}+\frac{1}{10}$）が使われたことが考えられる。この単位分数の和を利用した分け方とはどのようなものであったか。

古代エジプトの人達はまず，できるだけ大きなピースを配れるように（できるだけ大きな単位分数を一つ目にするように)と考える。そこで，そのパンを三つとも半分（２等分）にする。切られたものは６つになるからこれを１人に一つずつ分配する。すなわちまず１人当たり $\frac{1}{2}$ だけを分ける。次に残った１切れをまた５等分する。その一つは $\frac{1}{10}$ になる。これを１人に一つずつ配れば，全てが平等に分配されたことになる。

［問３］上に出てきたパンの分け方を，パンを切る回数で比較しよう。

現代人の多くの考えでは，三つのパンを５人に分ける場合，三つのパン全部をそれぞれ５等分して，各人に３個ずつ分配するが，そうするためには４×３＝１２回パンを切らなければならない。これに対し，古代エジプトの人達は，一つのパンを二つ切りにしたものを５個，一つのパンを１０切りにしたものを５個作ればよいことを知っていた。この場合，三つのパンをそれぞれ半分にし，半分一つをさらに５つに切るのである。古代エジプト人の人達にとって必要であったのは，たった６回（３＋３）切ることだったのである。

［問４］ピラミッド建設などに多くの労働力を必要とした古代エジプトにおいて，多くの労働者へパンなどの食料を分配するときには，どのような考えが必要であったであろうか。

上のパンの分け方による切る回数の比較では，扱う数が小さいため，あまり差があるようには感じられないかもしれない。しかし，古代エジプトで巨大なピラミッドの建設に携わる労働者が 100 人，1000 人，･･･と大勢になった場合を考えたらどうだろう。パンを切る回数の差は看過できないものになる。古代エジプトの多くの労働者へのパンの平等な分配において，パンを切る回数をできるだけ少なくするという考えを必要としたことが，１より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表す方法がつくられた背景にあったのではないだろうか。その方法は，多くの労働者へパンなどの食料を分配する際に非常に効力を発する考えであり，ピラミッド建設等に多くの労働力を必要とした古代エジプトにおいてこそ生まれた考えであったかもしれない。

しかし，単位分数は，古代エジプトだけではなく，時代こそ違え，ギリシアでも中国でも行われた。普通の分数については，ギリシアにおいても中国においても同じ時期に存在

していたようである。特に中国では，単位分数の痕跡と思われる記述が見受けられる。最古の数学書の一つである『九章算術』(1 世紀ころ) に，1 辺の長さが $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ 歩と言うように単位分数の和の形で記されている所がある。ただ，原文には $\frac{1}{2}$ は二分之一，$\frac{1}{3}$ は三分之一と記されており，明確に分母と分子が意識されているため，これは単位分数とは言えない。中国にもエジプトの単位分数が伝えられ，中国の従来の分数と接触した結果，このような表し方になったものとも考えられている。

元々，分母と分子という二つの数で一つの数を表すことは本当に困難な事であったであろう。ギリシアにも分数らしきものはあったが，それは 2 数の比として表されていた。例えば，今の $\frac{2}{3}$ に当たるものは 2 : 3 という比で表していた。

私達の分数の読み方，例えば，２分の１，３分の１は，中国の分数の読み方，二分之一，三分之一に由来する。

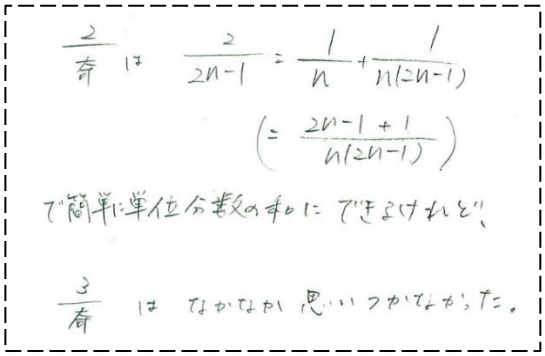
一方，分数の書き方（例えば $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$）はインドの割り算の形式に由来する。インドでは板の上に砂を撒き，その上に棒で数字を書いていた。数字を消したり直したりすることは簡単であった。93÷7　という割り算を例にとろう。 $\frac{93}{7}$ のように被除数と除数を縦に並べることから始めて，数字を消したり書き直したりしながら計算を進めていき，最後に答えを $\frac{13}{2\ \ 7}$　のように商，余り，除数を縦に並べて示すのである。インドの割り算の形式は，中国古来の算木による割り算の形式と同様である。算木も簡単に取り去ったり置き直したりできる点では，板の上の砂に数字を書くのと変わりがなかった。計算の用具の類似が計算法の類似をもたらした。中国でも割り算の結果を単独で呼ぶことはなく，必ず除数をつけて呼んでいる。例えば，私たちが 93÷7＝13 余り 2 と書く割り算の答えを，中国では必ず，十三，七分之二　というように記したのである。前述のようにギリシアの分数は比であったが，これに対し，インドと中国では割り算の結果として生まれた新しい数であった。

中国の分数が日本に伝わってきたのは奈良時代よりは少し前の頃である。その頃の都の大学では当時の数学が学ばれ，その教科書として『九章算術』も重要なものとされ，中に中国の分数もあったのだが，これは日本に定着はしなかった。分数が日本の数学の中で，確かな地位を占めるようになったのは江戸時代に入ってからである。それまではずっと 3 分の 2 というのは，三つに割って二つ集めるというというように，単に操作を表すものでしかなかったのである。ここでは分数の起こりの要点を述べるのに止めることにしたい。現在の数としての分数が完成され定着するのには，まだまだかなりの年月を要することになるのである。

４．　異なる単位分数の和への分解

次に，古代エジプトでは１より小さいあらゆる大きさを異なる単位分数の和で表したが，それを可能にしたのは，どのような考え方からなのか，ということに迫っていきたい。まず，「２を奇数で割る表」がどのようにつくられたのか，を考えていきたい。

次は，上越教育大学の学部 2 年生を対象にした選択科目「数学的経験と学習過程」の授業での，ある受講生の感想文の一部を抜粋したものである。



［問５］文字式を知る現代人がまず思い付くのが，上のような分数式の恒等式である。これを参考に，次の分数を異なる単位分数の和に分解してみよう。

$$\frac{2}{5} \qquad \frac{2}{7} \qquad \frac{2}{35}$$

上の分数式の恒等式を使えば，次のようになる。

$$\frac{2}{5}=\frac{2}{2\cdot3-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3\cdot5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$$

$$\frac{2}{7}=\frac{2}{2\cdot4-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4\cdot7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{35}=\frac{2}{2\cdot18-1}=\frac{1}{18}+\frac{1}{18\cdot35}=\frac{1}{18}+\frac{1}{630}$$

上の二つは「２で奇数を割る表」と同じ結果であるが，三つ目のものは「２を奇数で割る表」の結果（$\frac{1}{32}+\frac{1}{42}$）とは異なっている。$\frac{2}{35}$ について，別の考え方を探ってみよう。ファン・デル・ヴェルデン著・加藤他訳(2006)によると，リンド・パピルスの時代よりはかなり下る古代ローマ初期のパピルス(BM10520)が,大英博物館に所蔵されている。

この BM1052 という文献の 4 番目の問題では，$\frac{2}{35}$ という分数がリンド・パピルスと同じように $\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ で表わされている。

$$35=7\times5$$
$$7+5=12$$
$$12:2=6$$
$$6\times5=30$$
$$7\times6=42$$

更に，BM10520 の記述者は，この単位分数の和への分解がどのように得られるかを，右のように記しているのである（ファン・デル・ヴェルデン著・加藤他訳，2006，pp.224-225)。

［問６］上の BM10520 の記述者の方法は，どのようにしたものだろうか。

次のような方法であると考えられる。

① 35 を 5 と 7 に分解
② 5 と 7 の和は 12
③ その半分は 6
④ 6 を 5 と 7 の両方に掛けると
30 と 42
⑤ これより，$\frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$ が得られる。

この方法を現代的な表記でかくと，

$$\frac{2}{35}=\frac{2}{5\times7}=\frac{1}{5\times\frac{5+7}{2}}+\frac{1}{7\times\frac{5+7}{2}}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42}$$

となる。

［問７］上の［問６］の方法が正しいことを説明してみよう。

次のように［問６］の方法が正しいことが説明できる。

奇数 n が因数 a と b に分解できるとすると，　n＝ab

a＋b＝2c となる c を考える。

両辺を abc で割ると，

$$\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{2}{ab}$$

よって，

$$\frac{2}{ab}=\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$$

［問８］上の［問６］の方法に倣って，次の分数を異なる単位分数の和に分解してみよう。

$\frac{2}{5}$　　$\frac{2}{7}$　　$\frac{2}{9}$

上の［問６］の方法に倣うと，次のようになる。

① 5 を 1 と 5 に分解
② 1 と 5 の和は 6
③ その半分は 3
④ 3 を 1 と 5 の両方に掛けると
3 と 15
⑤ これより，$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ が得られる。

① 7 を 1 と 7 に分解
② 1 と 7 の和は 8
③ その半分は 4
④ 4 を 1 と 7 の両方に掛けると
4 と 28
⑤ これより，$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}+\frac{1}{28}$ が得られる。

① 9 を 1 と 9 に分解
② 1 と 9 の和は 10
③ その半分は 5
④ 5 を 1 と 9 の両方に掛けると
5 と 45
⑤ これより，$\frac{2}{9}=\frac{1}{5}+\frac{1}{45}$ が得られる。

上の二つは「２で奇数を割る表」と同じ結果であるが，三つ目のものは「２を奇数で割る表」の結果（$\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$）とは異なっている。リンド・パピルスの方法は，この BM10520 の記述者の方法とも異なっていると考えられる。

［問９］「２を奇数で割る表」の結果（$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$）はどのようにして得られたのだろうか。

エジプトの人達は，図１に示したように，唯一単位分数ではない $\frac{2}{3}$ だけはそのままに使っているが，$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$ の両辺を 3 倍すれば，$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$　が得られるから，$\frac{2}{3}$ に対する答（異なる単位分数の和への分解）も知っていたのではないかと考えられる。

次に，（現代の）分子が２ではない分数の場合を考えてみよう。

［問 10］次の分子が 2 ではない分数を異なる単位分数の和に分解してみよう。

$\frac{3}{5}$　　$\frac{4}{5}$

古代エジプトの人達は,「２で奇数を割る表」等を使って,（現代の）分子が２以上のどんな数になる場合でも，異なる単位分数の和に分解することができたという。そうだとすると，例えば $\frac{3}{5}$ や $\frac{4}{5}$ を異なる単位分数の和に分解する場合にも「２で奇数を割る表」を利用する方法があるはずである。$\frac{3}{5}$ の場合，まず $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$ とし，この $\frac{2}{5}$ の所へ「２で奇数を割る表」の中にある $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ を代入し $\frac{3}{5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ が得られる。また $\frac{4}{5}$ の場合は，まず $\frac{4}{5}=\frac{2}{5}\times 2$ とし，この $\frac{2}{5}$ の所へ「２で奇数を割る表」の中にある $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$ を代入して $\frac{4}{5}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{15}\right)\times 2$，すなわち $\frac{4}{5}=\frac{2}{3}+\frac{2}{15}$ とし,「２で奇数を割る表」から得られる $\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$ と $\frac{2}{15}=\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ を代入して，$\frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}$ とすることができる。

現代的な方法としては，次に示すような商と余りの関係を利用する方法も考えられる。

１より小さい任意の既約分数 $\frac{a}{b}$ を異なる単位分数の和に分解する場合を考える。まず，$\frac{a}{b}<1$ だから $a<b$ である。b を a で割ったとき，商が q で余りが r であったとすると，$b=qa+r \quad (0<r<a)$ となる。

このとき，次の式が成り立つ。（証明は，読者にお任せしたい。）

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{q+1}+\frac{a-r}{b(q+1)}$$

この式は，$\frac{a}{b}$ を一つの単位分数と，（現代の）分子が a より小さい分数の和に直せたことを示している。したがって，残りの（現代の）分子が a より小さい分数を，更に単位分数と（現代の）分子が元のそれより小さい分数の和に分解する計算を続けていけば，終には，初めの分数を異なる単位分数の和に分解することができるのである。

この方法を $\frac{3}{5}$ や $\frac{4}{5}$ に適用すると，次のようになる。

$$\frac{3}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{10}, \quad \frac{4}{5}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{20}$$

この結果は，パピルスの結果と異なるが，これは，与えられた分数を異なる単位分数の和に分解する方法は色々とあることを示している。上の二つの方法の他にもまだ色々と考えられそうである。ここまで,（現代の）分子が２ではない分数の場合を考えてきたが，なお，最初の疑問「２を奇数で割る表」はどのようにしてつくられたのかという疑問は残されたままである。

和算の遺題継承ではないが，読者のみなさんに，次の［問 11］（遺題）を記して，この節を閉じることにしたい。

［問 11］次に示したのは，リンド・パピルスに記されている,「２を奇数で割る表」の中の $\frac{2}{35}$ をどのようにして異なる単位分数の和に分解したのかを説明した部分である。この方法はどのようなものかを読み解いてみよう。（古代エジプトの人達は，全ての計算を 2 倍と 10 倍の二つの算法で処理していたことが知られている。）

2を35で割る

(35の) 1/30は1 1/6. (35の) 1/42は2/3 1/6. (そこで答は1/30 1/42.)

(解法. 1/35の2倍は1/30 1/42. なぜなら1/35を210に応用すれば) 6. (そして6の2倍は12, すなわち) 7と5. (それらは210の1/30 1/42となるから.)

(1) 35

\1/30 1 1/6

\1/42 2/3 1/6

(平田監修・吉成訳, 1985, Ⅰ- p. 35)

５．算数･数学教育における「数学史の活用」

算数・数学教育では，何より「なぜ，どうして」を重視する。子供が授業の中で見せるどのような些細な疑問も，教師が見逃さずにしっかり捉えることは大切であろう。もし子供から上のような質問が出たら，教師は十分納得のいく説明をしてやらなければならない。また，その質問を基にして教室での納得いくまでの話し合いに持ち込むことができれば，この上ないことである。このような質問に答える（応える）には，どうしても数学史の知識が，そして数学史を活用するということが必要となる。

数学史を活用するということで，まず思い浮かぶのが，数学史にあるトピックを取り上げて教室で話したり，演習に持ち込んだりということである。数学史のトピックを単発的な教材として扱った学習だけであれば，これまで学校数学の至る所でなされてきたことかもしれない。これではその時に子供の興味・関心を引くことはできても，一時的なものに終わってしまうことも少なくないであろう。このようなトピックの利用も「数学史の活用」の一つではあるが，実は他に，算数・数学教育における「数学史の活用」の重要なものとして大きく次の二つがある。

一つ目は，世界の数学の展開のダイナミズム，その各断層からのものとしてトピックを選定し，それを，その数学史全体の流れの中で，さらに現在の学校数学との関係から考えさせようとすることにある。例えば，今私達が何気なく使っている 10 進位取り記数法のよさについて，漢数字やローマ数字による表記や計算と比較しながら，見直させる。また，古代エジプトの単位分数の話題では，分数表があったという事実や異なる単位分数の和に直すことを提示するだけではなく，なぜ異なる単位分数の和に直したのかという文化的背景にまで迫らせるというようなことである。

二つ目は，「数学史の活用」を通して，教師の「(固定的) 数学観」を次のような「文化的数学観」に変容させることにある。数学は，先人達が自分の文化の中で，問題を自分の問題として捉え，試行錯誤を繰り返しつくり上げ，今も，世界各地，社会の中，教室の中，各個人の中で，そして，各文化の中で，つくられ発展しているものである。そのような「文化的数学観」への意識変容を図る方策が必要である。文化としての数学を学ぶことのできる教育内容や教材の見直しがなされなければならない。他教科では得られない数学のよさ・面白み・美しさ・楽しさ・有用性という「数学の本質的な価値」を感得できるような，教育内容の創造と教育方法の工夫という取り組みも大切となる。アーネスト『数学教育学の哲学』は，教師の数学観とその指導法との間には一貫性が観察され，数学に対する教師の見方，信念，好みがその教育実践に強く影

響すると言う。教師の数学観は日々の授業実践の成果に大きく深く関わる。教師の「文化的数学観」があってこそ，子供の「文化的数学観」への意識変容をも可能にできると言えよう。これらの取り組みによって，生徒の「数学観」も「文化的数学観」へと変容し，情意的学力も向上し，学習意欲を育てることができ，生涯数学を学び続ける力にすることができると考える。このような実践がわが国の学校数学全体を通して実現できたら，学習者の数学観はどれほど豊かなものになるであろう。子ども達の数学に対する思いや心に描く像はより豊かなものになるに違いない。

６．おわりに

前の節において，算数・数学教育における「数学史の活用」の重要なものとして大きく二つを述べたが，一つ目のものは「数学史の局所的活用」，二つ目のものは「数学史の大局的活用」と言える。「数学史の大局的活用」は，「数学史の局所的活用」の積み重ねによって実現されると言えよう。

本稿においてつくろうとした「分数の起こりを考える数学的活動」による探究は，「数学史の局所的活用」のほんの一例に過ぎないかもしれないが，これを一つの出発点とし，これからも「数学史の大局的活用」を目指し，学校数学の各領域における「数学史の局所的活用」の開発研究を推進していきたい。

引用・参考文献

Ernest,P.　(1991),“The Philosophy of Mathematics Education”, Oxon : Routledge Falmer.

Franceschetti,D.R.(ed.)(1999),“Biographical Encyclopedia of Mathematicians (vol.2)”, N.Y. : Marshall Cavendish, p.318.

Klein,F.(1924),“Elementar Mathematik vom Höheren Standpunkte aus Ⅰ”, Dritte Auflage Verlag von Julius Springer Berlin.

イー・ヤー・デップマン著／藤川誠訳(1986),『算数の文化史』,現代工学社.

ファン・デル・ヴェルデン（B.L.van der Waerden)著／加藤文元 他 訳(2006),『ファン・デル・ヴェルデン　古代文明の数学』, 日本評論社.

フェリックス・クライン（Felix Klein）著／遠山啓監訳(1959),『高い立場からみた初等数学』, 商工出版社.

伊東俊太郎(1987),「序説　比較数学史の地平」, 伊東俊太郎編『中世の数学』, 共立出版, pp.1-29.

稲葉三男(1931),『数学発達史』, 三笠書房.

大矢真一(1957),『分数と小数』, 啓林館.

大矢真一(1964),『比較数学史（事項別)』, 富士短期大学出版部.

大矢真一・片野善一郎（1978),『数字と数学記号の歴史』, 裳華房.

科学者人名事典編集委員会(1997),『科学者人名事典』, 丸善.

片野善一郎(1964),『問題形式による数学史』, 富士短期大学出版部.

片野善一郎(1982),『算数授業に役立つ数学の話』, 明治図書.

伊達文治(2010),「学生にみる文化的数学観への変容」,『上越数学教育研究 第25号』上越教育大学数学教室, pp.19-26.

伊達文治(2013),『日本数学教育の形成』, 溪水社.

平田寛監修・吉成薫訳(1985),『リンド数学パピルス』, 朝倉書店.

室井和男(2000),『バビロニアの数学』, 東京大学出版会.

中村幸四郎(1980),『近世数学の歴史　微積分の形成をめぐって』, 日本評論社.

吉田光由(1623)著, 佐藤健一(2006)訳,『塵劫記』(初版本), 研成社.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.21-32

現実性のある場面における
子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について
―相互作用による model の自己発達に着目して―

藤川　亮一
上越教育大学大学院修士課程３年

1. はじめに

小数の乗法及び除法の学習には様々な教育的意義が含まれている。例えば，小数の乗法及び除法は現実場面と連関させれば，子どもが現実場面から自ら知識を形成していくという学習の有り様をもたらしたり，子どもが乗法及び除法を整数の範囲から小数の範囲へ拡張することを通して「拡張の考え」を理解することができたりする(eg., 中村，1996；板垣，2002)。一方，子どもにとって小数の乗法及び除法の学習は，整数の乗法及び除法の学習に数としての小数の複雑さが絡んだり(高橋裕樹，2003)，整数の範囲から小数の範囲へと意味の拡張をしたりする(松原，1985)という点で難しい。

小数の乗法及び除法の指導改善への有益な示唆を得るため，高橋裕樹(2003)は，現実的数学教育（Realistic Mathematics Education，略称 RME)理論に基づき，子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を明らかにした。他方で，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を，model の自己発達という視点から細かな経路を辿って考察し，それらの経路にどのような転換点があったのかを明らかにする必要がある。そのことは，子どもが，自身のこれまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識を関連づけ心的に構造化したもの(以下，informal knowledge と呼ぶ)と学校などで提示する数学的な知識とを結び付けつつそれを獲得していくような，子どもの数学的な知識の形成過程に寄り添う授業の実現への示唆を得ることにつながるためである。

上記を踏まえ，筆者の修士論文において子どもの小数の乗法及び除法における知識形成過程を緻密にかつ局所的に捉えたところ，子どもが，自らの小数の乗法及び除法の知識形成を informal なものから formal なものへと発達させていく際に働く，「比較」による転換というものを知見として得た。

他方で，数量に関する子どもの informal knowledge を支えるものの一つとして他者との関わり(高橋等，1994)があり，また子どものもつ数学的知識に含まれる幾つかの特徴のうちの一つとして他者との関連がある(高橋等，2007)という双方の知見を鑑みると，子どもは他者との相互作用の過程で自らの数学的知識を形成していくと言えるだろう。修士論文においても，子どもが，友人との相互作用の過程で双方の model を比較し，小数の乗法及び除法の知識形成を informal なものから formal なものへと発達させるという活動を記述した。

そこで，本稿の目的を，現実性のある場面から出発する子どもの小数の乗法及び除法の知識形成が，informal なものから formal なものへと発達していく過程を相互作用による model の自己発達という視点か

ら明らかにすることとする。

本稿では，まず，筆者の修士論文における要旨を以下の四つに分けて示す。一つ目は，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成していくために必要な要件である。二つ目は本研究における「現実性」の定義づけについてである。三つ目は，RME 理論を視座とした Gravemeijer et al.(2000)や Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の心的構成物である model の自己発達の考察についてである。四つ目は，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みを精緻化し発展させることにより構築した，子どもの数学的な知識形成の過程を捉えるための理論的枠組みについてである。その後，Blumer(1991)や中村(1989)を基に本研究における「相互作用」の定義づけをする。それらを踏まえて，最後に，相互作用による model の自己発達という視点から，教授実験における子どもの学習過程の分析，考察を行う。

２．小数の乗法及び除法における先行研究の考察

小数の乗法の意味の拡張に関して，中村(1996)は，乗数が整数のときには「同数累加」で捉え，乗数が小数になったときには「割合による意味付け」で捉える立場から，数直線を用いた指導を提案している。さらに中村(2007)では，子どもが小数の乗法の意味をどのように捉え，表現しているのかに着目し，子どもは，数直線を用いて乗法の意味を割合で捉え，整数倍から小数倍へと乗法の意味を拡張させていることを明らかにしている。他方で，子どもが数量関係を数直線へと表していくまでの過程を明らかにする必要がある。

白石(2005)は，除法の「意味の拡張」とは「１」へのアプローチを，これまでの「累加，累減」の方法から「倍関係」を使った方法に拡張することであるとし，それを子どもたちに導入する際には，数直線を用いることが有効であることを示している。他方，子どもの小数の除法の知識形成において，小数の乗法の知識がどのように関わるのかといったことを考慮する必要がある。

高橋裕樹(2003)は子どものもつ心的構成物であるmodelの発達と形成過程に着目し，小数の乗法及び除法の単元と授業を構想，実施し，子どもの学習過程を解釈，考察することで，modelの発達を明らかにした。知見として高橋裕樹(2003)では，子どもは問題場面に応じて解決のための単位を様々に設定し，状況に応じたmodelを用いて解決に臨むとともに，その後0.1を単位とする解決を行うようになると，0.1から１へと単位を変換して式の比較を行い，自ら１を単位とする割合の考えに基づくmodelを構成したことを明らかにしている。

上記より，子どもが自らの知識を基に小数の乗法及び除法の知識を形成するには，ⅰ)子どもが整数の乗法及び除法の知識を生かしながら，解決のために用いる単位や，それと対になる単位量をどのように形成していくのか，ⅱ)数直線や図などでの単位量の利用により，どのように比例の考えを発達させていくのか，ⅲ)子どもの小数の乗法の知識が，どのように小数の除法の知識形成に関わるのか，あるいは，小数の除法の知識形成がどのように小数の乗法の知識の洗練に関わってくるのか，を単元の構想，子どもの活動の分析及び考察の際に考慮する必要があることを示した。

３．本研究における「現実性」の定義づけ

Freudenthal(1991)は，子ども一人ひとりの現実性を生かし，ある特定の共同体においてつくられる共通の感覚を基盤に据えた学習の展開の重要性を提言した。

その中で Freudenthal(1991)は次のように述べている：

Reality is historically, culturally, environmentally, individually, and subject-tively determined.

現実性は，歴史的に，文化的に，環境的に，個別的に，そして主観的に決定される。
(Freudenthal，1991，p.17:筆者訳)

つまり現実性は，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものと言えるだろう。算数授業において子どもがつくり出す現実性について，吉田(2000)は，子どもが活動と記号との相補的な関係を契機として，あるいは言葉を媒介として，自ら現実性をつくり出していく様相を明らかにした。双方の現実性に対する考察より，現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であると言える。例えば，数学者にとっては，記号の世界で表される数学そのものが現実的であり，親しみのある場面である。一方で，算数授業においては，子どもたちにとって何かしらの扱う対象，例えば具体物や，自らが表した図や式などの model の操作により，実感を伴う場面がつくり出されていく。中村(2000)は，小学校の重さの授業場面における子どもの活動をみることで，対象とそれを操作すること，そしてそれらが関係することで数学が発展することに数学的な現実性の一つの側面があることを示し，さらに捉える対象には対象とそれを操作する方法があることについて言及した。吉田(1998)と中村(2000)とを踏まえると，子どもが現実性を捉えていくためには，活動の過程で何らかの操作を経験したり活動と記号との関係を見直したりすることで，ある数学的な対象をつくり出す，という過程を繰り返すことが重要だと言える。

一方で，現実世界は子どもにとって親しみのある場面であり，日常的な現実性をもつものである(高橋等，2003)と示されるように，現実性と日常生活とのつながりは切り離せないものである。問題場面と現実性に関して，池田(2013)では，児童・生徒にとって本当に現実的であるのか，あるいは子どもにとって馴染みのある場面であるかどうか等を論点とした上で，問題の現実さについて言及している。

先行研究の考察より，本研究における現実性を定義づけるに当たって，ⅰ)現実性とは学習者によって変わるものであり，実感を伴うものが現実的であるという視点，ⅱ)活動と記号との相補的な関係を契機とするような，活動的現実性を起点として構成する数学的現実性への発展という視点，ⅲ)問題場面と現実性に関して，子どもが親しみを感じたり，馴染みを覚えたりするような，子どもの日常生活に即した状況という視点，の三つを考慮する必要がある。

したがって，本研究における現実性を「子どもが，自分の経験や知識と環境(問題場面)とを照らし合わせてそれらの類似性を把握したり，活動によって数学的対象を構成したり，環境に対して親しみを感じたりすること」と定める。ここでの親しみとは，学習者の発達や学習状況，あるいは共同体での文化と密接に関連するものとする。

４．子どもの数学的な知識の形成過程を捉えるための理論的枠組みについて

４．１．Gravemeijer et al.(2000)における model の自己発達

Gravemeijer et al.(2000)は，図１に示すように，informal knowledgeがformal knowledgeへと向かうための起点であるべきだとする，modelの自己発達というRMEの鍵となる理論を提示した。

modelに関してFreudenthal(1991)は次のように述べている：

Moreover, with regard to schematising there is a tendency to identify schemas with such things as solving formulas and procedures within formalised mathe- matics. Nowadays the term “schema”, in the broad sense, seems to have been su- perseded by more topical “model” -- a valuable term, but unfortunately devalu- ated by thoughtless use and misuse.

さらに言えば, 体系化することに関して, それは，数式を解くことや公式化された数学における手順として，そのようなこととしての各々のスキーマを識別する傾向にある。今日では, その用語をスキーマといい, 広い意味で, もっと局所的にmodelよって置き換えられてきた，貴重な用語である，しかし不運にも思慮深い使用と悪用によって評価されていない。
(Freudenthal，1991，pp. 31−32：筆者訳)

すなわち，数学の体系化において，スキーマとは心的構成物であり，数式を解くことや，数学的知識の形成過程に表れる。言わば，子どもがこれまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識が関連し，心的に構造化されたものであると捉えることができる。さらにこのスキーマは「model」という用語で表され，数学的知識の形成において重要な役割を果たす。

図１において，situationsは複数の連続した類似の問題であり，算数の授業では，現実性をもつ問題場面に相当する。model-ofはsituationsのもとで心的にモデル化されたものであり，situationsに依存したmodelである。このmodelがformal knowledgeに向かうことにより，model-forとなり，最後に，数学的に標準的に記述された形式的知識であるformal knowledgeに至る。

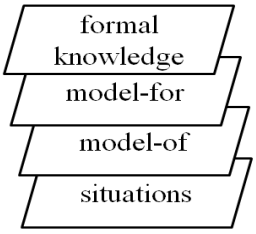


図１　Gravemeijer et al.(2000)の図式

４．２．Van den Heuvel-Panhuizen(2003)のmodelの自己発達

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，modelの表れ方に関して以下のように述べる：

Within RME, models are seen as representations of problem situations, which necessarily reflect essential aspects of mathematical concepts and structures that are relevant for the problem situation, but that can have different manifestations. This means that the term ‘model’ is not taken in a very literal way. Materials, visual sketches, paradigmatic situations, schemes, diagrams and even symbols can serve as models.

RME において，model は問題状況の表現として見られ，またはその問題状況に関連する数学的概念と構造の不可欠な様相を反映するが，種々の現れ方をする。これは「model」という用語が過度に文字通り用いられないことを意味している。道具，視覚的スケッチ，典型的な状況，スキーマ，図表，記号さえも model として目的に適う。
(Van den Heuvel-Panhuizen，2003，p.13，筆者訳)

すなわち,「model」は，問題場面から数学的な関係を抽出した状態で表れたり，問題場面を把握し表現するために表れたりと，様々な様相を反映するものである。

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は，Gravemeijer et al.(2000)のmodelの自己発達をさらに発展させ，model-ofからmodel-forへの移行の段階にさらに小さなmodel-ofからmodel-forへの漸進的な発達があることを図２のように示している。Van den Heuvel-Panhuizen(2003)は図２の図式を視座として子どもの百分率の学習過程におけるmodel-ofからmodel-forへの移行を分析し，文脈に結びつく水準でinformalな解釈を記号化したmodelが，「文脈」，「領域」及び「機能」による三つの転換を伴いつつ，局所的かつ連続的発達を経て，最終的には一般的で形式的な解決のためのmodelになることを示した。

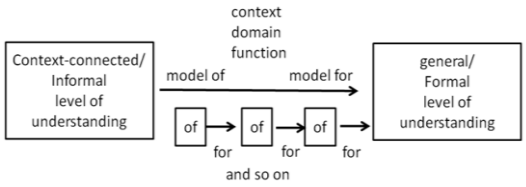


図２Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式

４．３．Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の理論的枠組みの精緻化

Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の子どもの活動の分析・考察の結果では，model-ofからmodel-forへの転換が生じる際には，複数の明確なsituationの設定があったり，子どもが領域ごとのつながりを意識したりすることが示された。この複数の明確なsituationというのは一つのformal knowledgeに対して設定されるものであり，領域ごとのつながりというのは各単元におけるformal knowledge間のつながりのことである。

我が国の算数・数学教育実践を鑑みると，一つのformal knowledgeに対し，複数の明確なsituationからformal knowledgeを洗練させるための活動を何回か繰り返したり，formal knowledgeを更に数学的に洗練させるような単元間の系統があったりする。

そこで，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の子どもの学習過程の分析を踏まえて，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式に複数の明確なsituationから出発するmodelの自己発達やformal knowledgeの洗練の過程を明示化することで，理論的枠組みを精緻化した(図３)。なお，Gravemeijer et al.(2000)の図式においてsituationsと明記されているものを，新たに構築した理論的枠組みにおいては複数の明確なsituationと明記したのは，多数の類似の問題場面に子どもが取り組むことによってmodelの転換がなされるというVan den Heuvel-Panhuizen(2003)の図式を，立体的に捉え直し精緻化を図るためである。

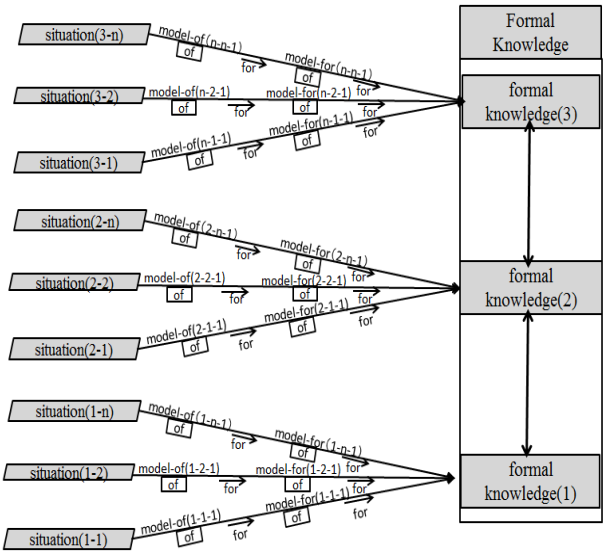


図３　新たに構築した理論的枠組み

図３において，situation(1−1)(括弧の中の一番目の番号はsituation間の区別をする順番を，二番目の番号はformal knowledge(1)に対するsituationの順番を表す)は，formal knowledge(1)(括弧の中の番号は到達したformal knowledgeの順番を表す)に対しての最初のsituationである。model-of(1−1−1)(括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す)は，situation(1−1)に基づいた最初のmodelであり，そこからは，formal knowledge(1)へと向かってVan den

Heuvel-Panhuizen(2003)の図式と同じようにmodel-ofとmodel-forが繰り返される。model-of(1-1-1)の次にmodel-for(1-1-1)(括弧の中の三番目の番号はmodelの出現の順番を表す)，model-of(1-1-2)，model-for(1-1-2)，…，model-of(1-1-n)，model-for(1-1-n)と徐々にmodelが発達していくことを想定する。situation(1-2)は，formal knowledge(1)に対しての第二のsituationである。situation(1-2)からformal knowledge(1)に至るまでの過程は，situation(1-1)の場合と同様である。つまり，formal knowledge(1)に対してsituation(1-1)，situation(1-2)，…，situation(1-n)と複数の明確なsituationを設定するのである。formal knowledge(2)は，formal knowledge(1)に対して更に洗練されたformal knowledgeであり，同様にformal knowledge(3)，…，formal knowledge(n)と次々とformal knowledgeが洗練されていくのである。つまり，formal knowledge の洗練とはformal knowledgeのネットワーク化であり，子どもが様々なsituationに取り組む過程においてformal knowledgeが互いに関連づけられ，構造を保ちながらシステムとして成長するものであると捉えられる。

他方，それぞれのsituation は，子どもがformal knowledge間を関連づけることを意図したものではないため，子どもが形成するformal knowledge間の関係は薄弱であることが予想される。そのため，子どもがformal knowledge間の関係を強固かつ柔軟なものへと変化させたFormal Knowledgeを形成することを支えるものとして，formal knowledge間の関連づけを意図したSituationが設定される。

５．相互作用の定義づけ

Blumer(1991)のシンボリック相互作用論や中村(1989，2005)を基に，算数・数学授業における子どもの相互作用を定義づける。

Blumer(1991)によれば，シンボリック相互作用論は，人間は，ものごとが自分に対して持つ意味にのっとって，そのものごとに対して行為するということ，このようなものごとの意味は，個人がその仲間と一緒に参加する社会的相互作用から導き出され，発生するということ，このような意味は，個人が，自分の出合ったものごとに対処するなかで，その個人が用いる解釈の過程によって扱われたり，修正されたりすること，の三つの明快な前提に立脚しているという。Blumer(1991)は，上記の三つの前提を基に，個人が他者の行為に対して，その行為の解釈をして反応する時に生じるものをシンボリック相互作用であると記述した。

Blumer(1991)によれば，人々はシンボリックな相互作用によって，それぞれの個人に対して意味をもつ対象をつくりだしていくという。その対象の性質について，Blumer(1991)は，あらゆる対象の性質は，それがある個人に対して対象として存在するとき，それが個人に対して持つ意味からなりたつと示す。例えば，算数の授業において，教師と子ども，子ども同士での関わりによりつくられた数直線図であっても，或る子どもはそれを問題場面の数量の関係を捉えるものとして扱ったり，一方で他の子どもは立式のための有効な道具として扱ったりするだろう。すなわち，数直線図という共通の対象であっても，それに対する子どもの意味づけの仕方の違いによって，個人によって異なる意味をもつ対象となる。

中村(2005)は，算数・数学授業において，教師と子ども，子ども同士の間で暫定的に存在しているとして扱っているものを数学的対象と呼んでいる。この数学的対象は，それを表現する記号や言葉とともに，それを扱う方法，それにかかわって生ずる情報などの総体からなっているという(中村，

1989)。例えば，縦の長さが４cm，横の長さが３cmの長方形の面積については，記号として3×4=12(cm^2)，扱う方法としては１cm^2のますの個数を数える,それにかかわって生ずる情報としては長方形の面積は縦の長さ×横の長さで求めることができる，などが挙げられる。中村(2005)によれば，数学的対象は授業での相互行為を通して作り出されるものであり，相互行為を促進するものであるという。つまり,数学的対象は，授業での教師と子ども，子ども同士がお互いに関与しながら作られていくものであり，相互行為を活性化させるものである。

一方で，授業において数学的対象がつくられていく際には，教師と子ども，子ども同士の間でどのような相互作用の過程が存在するのであろうか。中村(1989)は，相互作用ということを前提として授業の全体と教師と個々の子どもについて考察していくための相として，共有するということに着目している。中村(1989)は共有するということについて以下のように述べる:

> 共有するということは，個々の子供の個人的・経験・知識を公的なものへ，さらに，数学的なものへと発展させていくために，教師と子どもが，子どもどうしがそれらについて比較・検討していく相互作用を行うことが可能となるような基盤を確立することである。　　（中村，1989，p8）

すなわち，共有するということは，子どもが，これまでの生活体験や算数・数学の学習で蓄積してきた経験や知識を，他の子どものそれと比較・検討しうる共通の基盤をつくることである。

ここで，中村(1989)における個々の子供の個人的・経験・知識を，RMEモデル論におけるmodelとして捉えてみよう。すると，授業での相互作用の際に，子どもたちが互いのmodelを共有し合うことによって,ある数学的対象が構成されると言えるだろう。例えば授業において，或る子どもが自らのmodelをもう一方の子どもに提示した際に，その一部でも共有された場合には，数学的対象が構成されたとみなすことができる。一方で,或る子どもが自らのmodelをもう一方の子どもに提示した際に，一方の子どもにとってその意味が全く分からず，modelの共有がなされない場合もあり，これは数学的対象が成立し得ない場合である。そうした場合には,授業においてmodelを比較・検討していくことは困難となるだろう。なぜなら,modelが共有されないということは,比較・検討していく相互作用を行うための基盤が成立しないためである。これらの例を踏まえると,modelの共有による数学的対象の構成という視点から授業での相互作用をみることで，どのようにmodelが比較・検討されているのかを捉えることができよう。

他方，子どもは，対象をどのように問題状況に関連のある意味のあるものとして捉えるのであろうか。Blumer(1991)によれば,行為者による意味の使用は，ひとつの解釈の過程を通して生じるものであり，その解釈の過程にはふたつの明確な段階があるという。それらはBlumer(1991)によれば，第一に，行為者は，意味をもつものごとを，自分に対して指示しなくてはならないということであり，それは行為者が自分自身と相互作用するということであること，第二に，自分自身とのコミュニケーションの過程によって，解釈は，意味を扱うということの問題になり，行為者は，自分が置かれた状況と自分の行為の方向という見地から,意味を選択したり，検討したり，再グループ分けしたり,変形したりするということ,である。つまり，自己との相互作用を通して，数学的対象を状況に関連する意味のあるものと捉えるのだろう。算数・数学の授

業場面で言えば，ある状況において，子どもは，状況に即した意味のある対象を自分自身に対して指示する。そして，子どもは，問題解決の進行状況や自分がどのように問題解決したいのかという方向性という見地から，数学的対象を選択したり，検討したり，変形したりするだろう

以上の議論より，本研究における相互作用を，「他者のmodelを解釈し，自分自身のmodelを形成し他者へ指示すること」とする。ここでの他者とは，Blumer(1991)の人間は，自分自身と相互作用することが可能であり，この相互作用は社会的なものであるという立場に準じ，自分自身も含むものとする。modelを解釈するとは，子どもが，自らのそれまでの生活体験や学習経験を通じて蓄積してきた経験・知識をもとに，modelを自らにとって意味のあるものとして捉えていくことであるとする。さらに，modelの共有による数学的対象の構成という視点を踏まえ，授業における相互作用を捉えていく。算数・数学授業での相互作用に，modelの共有による数学的対象の構成と，それに伴う個人のmodelの自己発達という視点とを付与することで，どのような相互作用の過程によって，どのような観点からの比較が生じたのかを記述できるだろう。

６．教授実験

６．１．教授実験の概要

2016年２月12日～３月15日までの間に，新潟県公立小学校の４年生２人を調査参加者(Nao と Kei と呼ぶ)として，１回50分の授業を計６回実施した。データをビデオカメラ３台による撮影，子どもの筆記記録によって収集した。データからプロトコルを作成し，プリントの記述を参考に Nao と Kei の学習過程を捉えることとした。インタビューアーは筆者であり，T と略記する。

６．２．調査の概要

単元構想においては，高橋裕樹(2003)を参考に，表１に示すように小数の乗法，包含除，等分除の順に小単元を配置し，最後に，比の三用法の場面を用意した。なお，本稿においては，situation(1-2) と situation(2-1)における Kei の学習過程の分析，考察について示す。

表１ 調査で扱った situation

Situation	
(1-1)	２m で 170 円の赤のリボンがあります。このリボン 14m の代金はいくらですか。
(1-2)	１m で 80 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン 3.2m の代金はいくらですか。
(2-1)	青いリボンが 15m あります。一人に 2.5m ずつ配ると何人に配ることができますか。
(3-1)	2.5m で 200 円の黄色のリボンがあります。この黄色のリボン３m の代金はいくらですか。
(3-2)	２ℓ で 390 円の牛乳と 1.6ℓ で 360 円の牛乳があります。この２つのうちどちらの牛乳がお得ですか。
Situation	親ライオンは 63kg です。これは，子ライオンの体重をもとにすると，1.5 倍にあたります。子ライオンは何 kg ですか。

７．Kei の学習過程の分析

situation(1-2)では，formal knowledge(1)(80×3.2＝256(円))の形成が目指されていた。Kei は，はじめに，3.2×80 を立式し筆算によって 2560 を求めるが，自らが求めた 2560 という答えが，本当に正しいのかどうかの判断がつかないようであった。Kei が表した 3.2×80=2560 の model には，既習の

(小数)×(整数)の考えに基づいた model が関係しているだろう。その後 Kei は，自らが表した 3.2×80=2560 という model の妥当性の判断のために Nao とお互いの model を確認し合った。そして，Kei は３m で 240 円と比べて，自らが表した 2560 円は高いという判断のもと，2560 の 0 を斜線で消した。つまり，Kei は筆算の仕方の誤りには気付いていないものの，直感的に自らの model の誤りに気付き，model を修正したと見られる。これは，(小数)×(整数)の model 基づく見かけ上修正された model-of(1-2-1)である。次に，Kei は，Nao の 0.2m の代金は 80×0.2 という model を受けて，0.2m の代金を求めるために 0.2×80 を立式し 16 を求めた。おそらく，Kei は未習である 80×0.2 の計算に戸惑いがあったため，これ自分にとってなじみのある既習の(小数)×(整数)の model を用いたのだろう。

situation(2-1)では，formal knowledge(2)(15÷2.5＝6(人))の形成が目指されていた。Kei は，15÷2.5 の筆算より，0.6 を導き出した(図４)。 Kei は，おそらく，未習の 15÷2.5 という計算に戸惑いがあったため，15 を 150 と 2.5 を 25 と捉え直し，そして 150÷25 より６を求めた後に，15.0 の小数点を商にそのまま立てたのだろう。つまり，これは，既習の(小数)÷(整数)の model に基づく model-of(2-1-1)である。一方で Kei は，自らが導いた 0.6 という数が本当に正しいかのどうかについて不安な様子を見せた。0.6 人いう小数の答えになったことに対して違和感を覚えたのだろう。

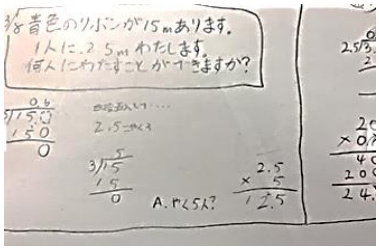


図４ Kei が表した図

T は，15m に見立てたリボンを 2.5m ずつ区切っていく活動を Kei に例示した。Kei は，この T の例示を受けて，2.5 を６個足し合わせて 15 と記述した。そして，Kei は「0.6 なわけないじゃん。15m だよ。」と発し，0.6 人が答えとして誤りであることに気付き，15÷2.5=6 と記述した。

Kei は，Nao と T との関わりにより，2.5×6=15 という model の妥当性を判断する。

Nao：2.5×5 をして 12.5 になって，で，そしたら 12.5 ならもう一回足せばいいんだって 15 になりました。

T　:12.5＋2.5 をしたの。それが 15 なんだね。

Nao :あと５に１を足した。

Kei　:そうそう，6 個たしたら 15 になった。

Kei は，Nao の 15÷2.5 の除数と被除数を 10 倍するという model を受けて，自らも 15÷2.5 と 150÷25 の関係に目を向ける。

T　:なるほど，10 倍しても 100 倍しても答えは一緒になると。

Kei :しかも，答えも一緒になってるね。

T　:Nao さんが出してくれた 15÷2.5 と 150÷25 を比べるとどうですか？

Kei :同じだね。わり算ってそのまま？

Kei は，上記の T との関わりの後，ノートに 15÷2.5=6 と記述した。おそらく，Kei は，「わり算ってそのままだっけ？」の発言にみられるように，これまでの学習経験を辿り，除法の性質に係る model を踏まえた上で，15÷2.5=6 と 150÷25=6 の数学的な関係を捉えたのだろう。

８． Kei の学習過程の考察

ここでは，７章の分析を基に，小数の乗法及び除法の学習における子どもの相互作用の過程を緻密に辿ることで，どのような相互作用が働き，それに伴って如何なる比較が生じたのかを明らかにする。

８．１．直感的に正しい model であるかど

うかという観点からの比較

situation(1-2)では，Kei は，はじめに，自分自身との相互作用により，3.2×80=2560 という(小数)×(整数)の model に基づいた model を構築した。Kei の自分自身との相互作用の過程を辿ってみる。すると，(整数)×(小数)の model は未習であり馴染みがなかったため，これまでの学習経験を辿り，既習であり自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model に基づいて 3.2×80=2560 を表す Kei の姿が見られる。つまり，Kei は，(小数)×(整数)の model を自分自身にとって意味のあるものごととして指示したのである。おそらく，Kei は，未習である(整数)×(小数)の situation に直面したために，(小数)×(整数)の model を意味のある対象として捉えたのであろう。

次に，Kei が，Nao の 80×3=240 という model を解釈し，3.2×80=2560 という見かけ上修正された model を構築するという相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。Kei が，Nao の 80×3=240 という model を解釈する際には，Nao の model を既習の(整数)×(整数)に関連づけて解釈したということが挙げられる。その後，Kei は，自らが解釈した 80×3=240 という model と自らの 3.2×80=2560 という model を比較し，見かけ上修正された 3.2×80=2560 という model を構築した。この比較が生じる背景に着目してみる。一つには，80×3=240 という model が自らにとって馴染みのある model であったということがある。そのことが，80×3=240 という model を比較しうる意味のある対象として認めることにつながったのだろう。もう一つには，直感的に大きさを比較できたということが挙げられる。自らが表した 3.2×80=2560 という model と 80×3=240 という model の大きさを直感的に比較できるということが，双方の model を比較するということにつながったのだろう。つまり，この相互作用は，Kei が直感的に比較できる双方の model を構築しているという状況において働いたため，直感的に正しいのかどうかという観点からの比較が生じたのだと言えよう。

８．２．馴染みのある model であるかどうかという観点からの比較

situation(1-2)では，Kei が，Nao の 80×0.2=16 という model を解釈し，馴染みのある model と関係する 0.2×80 という model を構築するという相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。すると，Kei は，80×0.2=16 という model を自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model と関連づけて解釈し，0.2×80 という model を表している。Kei が，0.2×80 という model を表すに至るまでには，80×0.2=16 という model と 0.2×80 という model との比較がある。つまり，Kei は，双方の model の比較の結果，0.2×80 という model を自らにとって意味のある対象として捉え，表している。この背景に目を向けてみる。一つには，0.2×80 という model が，自らにとって馴染みのある(小数)×(整数)の model と関連したものであったということが挙げられる。自らにとって妥当性のある model の選択を求められた Kei は，馴染みのある model を選択したのだろう。もう一つには，双方の model が数学的な関係にある model であったということが挙げられる。既習の乗法の性質に基づいて双方の model の関係を捉えられることが，Kei が双方の model を比較しうる対象として認めることにつながったのであろう。つまり，この相互作用は，Kei が数学的な関係にある双方の model を捉えている状況において働いたため，どちらの model が自らにとって馴染みのある model であるのかという観点からの比較が生じたのだろう。

８．３．数学的な関係に基づいた比較

situation(2-1)では，15÷2.5=0.6 という model を表している Kei が，T の 15m に見立てたリボンを 2.5m ずつ区切っていくという model を解釈し，新たに 2.5×6=15 という model を構築する相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。Kei が，T の model を自らにとって意味のあるものごととして捉える背景には三つのことがあるだろう。一つ目として，Kei が 15÷2.5=0.6 という model の妥当性を確かめたかったということが挙げられる。Kei が自らの 15÷2.5=0.6 という model に違和感を覚えている様子からも，自らの model の妥当性の判断のために，T の model を自らにとって意味のあるものごととして捉える様子がうかがえる。二つ目として，T の model を自らにとって馴染みのある整数の除法の model と関連づけて捉えられたということが挙げられる。Kei は，T の包含除に係る model を，自らの整数の除法の model と関連づけたのだろう。三つ目として，Kei が，既習の乗法の model と除法の model の数学的な関係を辿ったということが挙げられる。これは，T の包含除に係る model を，2.5×6=15 という小数の乗法の model として捉え直している Kei の姿からうかがえる。

次に，Kei が，15÷2.5=0.6 という model と 2.5×6=15 という model の双方の model を解釈し，新たに 15÷2.5=6 という model を構築する自己との相互作用が見られた。この相互作用の過程を辿ってみる。すると，Kei は，双方の model を解釈する過程で，双方の model の比較している。この比較が生じる背景には三つのことがあるだろう。それらは，一つ目は，双方の model は自らがこれまでの経験を基に解釈した結果表されたものであり，自らにとって意味のあるものであるということ，二つ目は，15÷2.5=0.6 という model の妥当性が求められる場面であったということ，そして三つ目は，双方の model は乗法と除法との数学的な関係に基づくものであり，双方の model は Kei にとって比較しうる対象であるということ，である。そして，双方の model の比較の結果，Kei は，新たに 15÷2.5=6 という model を構築する。この背景には，Kei は，15÷2.5=0.6 という model と 2.5×6=15 という model の双方の関係に基づき比較しているということがあるだろう。つまり，15÷2.5=0.6 の割合(倍)にあたる数である 0.6 と，2.5×6=15 のいくつ分にあたる数である 6 とに着目して比較している。

９．結語

我が国の算数・数学授業では，自力解決の後に比較・検討や練り上げがあり，子ども同士，あるいは子どもと教師の相互作用を通して，集団としての数学を創っていこうとする。言い換えると，RME 理論では model の自己発達と記述されているが，他者との相互作用が日常的に発生する日本の算数・数学授業においては，常に「比較」するという子どもの活動があり，子どもは自らの model を大胆に発達させていく。

本稿においては，修士論文において示された「比較」による転換の内実を明らかにすべく，相互作用による model の自己発達という視点から，子どもの小数の乗法及び除法の知識形成の過程を緻密に辿った。結果，「比較」による転換の内実の一端として，どのような相互作用が働き，それに伴って如何なる転換が生じるのかを明らかにした。その一つには，子どもが自らの誤謬を含んだ model を，他者との相互作用により他者の model の妥当性を認めることによって，大胆に転換させていく様相がある。他方で，何れの場合においても，他者の model を自らにとって馴染みのある model と関連づけて解釈し，共有し，そして model 同士を比

較するという子どもの活動が見られた。

今後の課題は以下の二点である。第一に，model の自己発達の細かな経路を長期的な視点から捉えていくことで，子どもにとって馴染みのある model が，どのような転換点を経て一般性のあるものへと発達していくのかを明らかにすることである。第二に，本研究の知見が，算数・数学の一斉授業においてどのように表れるのかを緻密に検討することで，その場ではどのような相互作用が働き，それに伴って如何なる比較が生じるのかを明らかにすることである。

引用・参考文献

Freudenthal,H.（1991）. *Revisting Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers.

藤川亮一．（2018）．現実性のある場面における子どもの小数の乗法及び除法の知識形成過程について-model の自己発達に着目して-．上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

Gravemeijer.K., Cobb.P. & Bowers.J., White nack,J.(2000).Symbolizing,Modeling, and InstructionalDesign. In Cobb,P., Yackel., & McClain,K(eds.),Symbolizing and Communicating in MathematicsClassroom (pp.225-273). Mahwah NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

H.ブルーマー.(1991).シンボリック相互作用論:パースペクティブと方法.勁草書房.

池田敏和．（2013）．モデルに焦点を当てた数学的活動に関する研究の世界的傾向とそれらの関連性.日本数学教育学会誌，95(5)，2-12.

板垣賢治.(2002)．連続量（小数・分数）の乗除．日本数学教育学会誌，84(8)，38-44.

松原元一.(1982).算数「子どもの考え方・教師の導き方」.国士社.

中村享史．（1996）．小数の乗法の割合による意味づけ．日本数学教育学会誌，78(10)，7-13.

中村享史．（2007）．小数の乗法に関する記述表現の分析-乗法の意味づけの児童のノート記述を中心に-.第40回数学教育論文発表会論文集，361-366.

中村光一.(1989).算数・数学の授業における 共有プロセスに関する考察.数学教育学論究 51，3 - 23.

中村光一.(2000).授業にみられる数学的なリアリティと数学的対象．上越教育学研究，15，1-8.

中村光一.(2005).授業における数学的対象に 関する考察：数学的価値観の観点.第38回 数学教育論文発表会，463 - 468.

白石信子．（2005）．子どもの理解に基づいた小数のわり算の指導について-数直線への比例的な見方を通した意味の拡張-:.上越数学教育研究，20，163-174.

高橋等.(1994)．数量に関する子どものinformal knowledge を支えるものの存在-Resnick(1991)を手掛かりとして-.第27回数学教育論文発表会論文集,149-154.

高橋等.(2007)．縦断的に見た或る子どものもつ数学的知識に含まれる幾つかの特徴.第 40 回数学教育論文発表会論文集,799-804.

高橋裕樹.(2003).小数の乗法と除法とにおける子どもの知識の構成過程について-子どもが比の三用法を活用していくまで-上越教育大学大学院学校教育研究科修士論文(未公刊).

Van den Heuvel-Panhuizen, M.(2003) The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory. *Educational Studies in Mathematics* , *54,* 9-35.

吉田亨．(2000)．算数の授業における子どものリアリティの構成とその発展．日本数学教育学会誌，68(10)，45-50.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.33-42

中学校１年「文字式」の授業に見られる数学不安を生じさせうる要因についての考察

児玉　誉也
上越教育大学大学院　修士課程 3 年

１．問題の所在

筆者は中学生に数学を指導していく中でよく生徒からの次のような声を耳にした．「明日の学校の授業についていけるか不安である」，「中学校で定期テストがあるが，数学で悪い点数を取ってしまわないか不安である」といった声だ．なぜそのように不安を感じるのか尋ねると「授業に対する理解度の低さ」が挙げられた．授業内容を理解できないため，結果的に家で勉強をしない．そして，次の授業を受ける際に不安になるといったケースが多いようであった．

実際， Skemp (1979) は数学不安のメカニズムについて次のように述べている．「理解ができなかった経験に対して，過度に不安を感じることによって，努力が困難となり，理解が悪くなり，不安が増していく」 (p. 111)．さらに，「この経験を何度も味わえば，授業そのものが不安の条件刺激となっていく」 (p. 111) と指摘している．

また，OECD生徒の学習到達度調査 (国立教育政策研究所, 2012)では，全国の高等学校，中等教育学校後期課程，高等専門学校のうち 200 校の 1 年生を対象に数学不安に対する調査を行っている．

その結果，日本は「数学の授業についていけないのではないかと心配になる」という回答が70%であった．また，「数学不安に対する指標」の平均値を見ると， 2012 年の日本の値は0.36で，調査に参加した 17 カ国中最も大きかった．この調査から，日本の生徒は他国よりも数学不安を感じている割合が大きいという実態が明らかとなった．

そして，こうした生徒の不安を解消するには，その要因を探り，指導の手立てを考えることが必要である．

また，数学不安は，筆者が中学生から耳にした声と Skemp (1979) の指摘より，授業の理解から起こると推測された．このことから，生徒の数学不安を生じさせる要因を明らかにするためには，授業の学習内容における理解との関わりで検討する必要があると考えられる．

そこで，本研究では，生徒の授業での理解に焦点を当て，数学不安を生じさせる要因を明らかにする．

２．数学不安に関する先行研究

上では，数学不安を生じさせる要因について明らかにするため，授業場面での理解に焦点を当てる必要があることについて述べた．

ここでは，数学不安に関する先行研究から，数学不安に対して近年までに得られている知見を明らかにしていく．

(1) 中学生の数学不安における実態調査

鎌田(1983)は，Richardson & Suinn (1972) が作成した The Mathematics Anxiety

Rating Scale (MARS) のような数学不安の測定用具を翻訳して文化・社会の違う我が国において使用することは妥当性に問題が生じるとした．そこで，我が国における数学不安の尺度として独自の 30 項目を作成している．

佐々木(1990)もMARSの中から中学生に適切であると思われる 29 項目と事前調査によって独自に取り入れた 24 項目の計 53 項目からなる数学不安の尺度を作成した．

そして，この尺度を用いて，中学校 1 年生から 3 年生を対象に数学不安の因子構造を明らかにするための調査を行った．その結果，以下に示す 4 つの因子が得られ，アメリカにおいて因子として抽出されていない授業不安因子が得られたことを報告している．

授業不安

授業時の学習内容が理解でき，授業についていけるかを危惧する不安

能力不安

テストを予期したり，難しい学習内容の理解や問題解決に取り組んだりしている際，自己の数学学習能力を認識し，行き詰る時に生じる不安

生活計算不安

簡単な計算をしたり，それを日常生活に活用したりするときに生じる不安

問題解決不安

問題を解けるかどうかを危惧する場合に生じる不安

佐々木(1990)の研究から，数学不安の因子は「授業不安」，「能力不安」，「生活計算不安」，「問題解決不安」の 4 つがあることが明らかとなった．特に，「授業不安」の因子が見出されたことから，日本の中学生の中には数学の授業に対して不安を抱えている生徒がいると推測された．

この研究から，筆者が接した中学生と同じように，授業や問題解決場面で不安を抱えている生徒がいることが明らかとなった．

(2) 数学不安と数学パフォーマンスの関連性

上では，佐々木(1990)の研究から，授業や問題解決場面で不安を抱える生徒がいることについて述べた．

このような生徒がいたことから，数学における問題解決と数学不安は関連があると考えられる．そこで，問題解決を含む数学パフォーマンスと数学不安の関連するのかについて，近年の先行研究から，得られている知見を明らかにしていく．

Mark & Jeremy (2007) は大学生 80 名を対象に数学不安を査定し，数学不安の度合いを高不安，中不安，低不安に分類した．その上で，それぞれの不安者にWide Range Achievement Test (WRAT)を実施し，WRATの難易度と正答率との関係を調べる調査を行った．なお，WRATとは「標準的な数学的達成テストであり，その難易度は Line1 から Line8 まで存在する」 (p. 245) としている．

この調査の結果，次の 2 点を報告している．

- Line1 の問題において，数学不安の度合いによる正答率の差を発見することはなかった．
- Line4 ， Line5 にかけて各グループ (低不安者・中不安者・高不安者) のパフォーマンスが分岐し始め，最も難易度の高いテスト (Line8) においては高不安者グループの平均が 5 つの問題においてグループの平均よりも低かった．

これらのことから，課題の難易度が上がるにしたがって，数学高不安者の数学パフォーマンスは低不安者，中不安者に比べ悪化することが示された．

また， Micke & Mateo (2011)はシカゴ大学，ルーズベルト大学の学生 73 名 (男： 29 名，女： 44 名) を作業記憶能力の高低と数学不安の高低で分類した．その上で，作業記憶能力，数学不安と数学パフォーマンスとの関係を調べる調査を行った．なお，作業記憶，数学不安，数学パフォーマンスは次のように定

義されている．

作業記憶

「課題に関連した情報の限界量の保持，統制，支配に関わる短期システムのことである」（p. 1000）と定義し，作業記憶能力を Participants' performance on the automated Reading Span (RSPAN) を用いて測定した．また，問題解決の際，作業記憶に強く依存するものを高作業記憶者，依存しないものを低作業記憶者であるとした．

数学不安

「数学不安は数学や数学を行うことに対する不都合な感情である」(p.1000) と定義し，MARSにより測定した．

数学パフォーマンス

数学パフォーマンスを合同算術の正誤判定の正確性で測定している．問題は X≡Y (mod Z)という形で出題した． x, y は 2 から 98 ，z は 2 から 9 までの自然数であり， x は y よりも大きくなるようにするとしている．そして，被験者には 71≡23 (mod 3) のような合同式の正誤判定をさせた．

この調査の結果，次の 2 点を報告している．

・低作業記憶者の数学パフォーマンスは数学不安の高低により影響を受けない．
・高作業記憶者の数学パフォーマンスは数学不安の高低により影響を受ける．高不安者の数学パフォーマンスは低不安者のものよりも有意に低かった．

これらの点を整理すると，以下の表 1 のようになる．

表 1　作業記憶能力，数学不安の高低と数学パフォーマンスの関係性
（論文もとに引用者が作成）

WM / MA	High	Low
High	Performance↘	Performance→
Low	Performance↗	Performance→

WM…作業記憶能力　　MA…数学不安

↘…数学不安の高低で数学パフォーマンスを比べた際，他方よりも有意に低い
↗…数学不安の高低で数学パフォーマンスを比べた際，他方よりも有意に高い
→…数学不安の高低で数学パフォーマンスを比べた際，有意差なし

Mark & Jeremy (2007) の研究から，数学課題の難易度が上がるにしたがって数学高不安者の数学パフォーマンスは低，中不安者よりも下がることが挙げられた．

また， Micke & Mateo (2011) の研究から，特に高作業記憶者の数学パフォーマンスにおいて，高不安者の数学パフォーマンスは低不安者よりも下がることが示された．

これらの研究から，数学課題の難易度が上がったり，作業記憶をより多く必要をされる問題を解いたりする際，数学不安の影響を受けやすい可能性があることが明らかとなった．

3．認知と情意の関係に関する先行研究

上では，近年までの数学不安における先行研究から，中学生の数学不安における因子，数学不安と数学パフォーマンスとの関連性について述べた．しかし，いずれの先行研究でも授業場面での理解から数学不安を生じさせる要因は示されていなかった．

これを受け，本節では，中学校数学での認知と情意の関係について考察している先行研究から，数学不安を生じさせる要因について検討していく．

(1) 中学校数学における認知と情意の因果的な関係

湊，鎌田(1994)は，秋田県北部に位置する 4 校の中学生を被験者とし，被験者を中学校入学時の知能検査の結果により， L 群（偏差値 40-49) と H 群（偏差値 55-64) に分類した．そして，被験者が 1 学年時から 3 学年時までを調査対象期間とし，図 1 のように①～⑤の

測定時期から2時点を組み合わせて1～6の6通りの比較の仕方を設定した.

そして，図1で設定した2時点を基に，時間的経過に伴う認知的学力と情意的学力との因果的な関係を明らかにすることを目的とした調査を行った.

なお，被験者の認知的学力と情意的学力を図2のように測定したとしている.

1学年時
① 9月下旬から10月上旬にかけての4日間
② 3月上旬から下旬にかけての4日間
2学年時
③ 6月下旬から7月中旬にかけての3日間
④12月上旬から中旬にかけての3日間
3学年時
⑤ 6月下旬から7月中旬にかけての3日間

1．①と②を2時点とする場合
2．②と③を2時点とする場合
3．③と④を2時点とする場合
4．④と⑤を2時点とする場合
5．①と③を2時点とする場合
6．③と⑤を2時点とする場合

図1：調査における測定時期と設定した2時点

認知的学力
数と式(N)，図形(G)，数量関係(Q)を測定する問題を開発し，N,G,Qおよびこれら全体からなる総合(CA)を測定する.
次に，測定された総合(CA)を能力別に分類して知識・理解(U)・技能(S)，数学的な考え方(MT)を得る.
情意的学力
被験者を問わず妥当性と信頼性とがみられるSD型MSD尺度を用いて，総合MSD，評価性MSD(E)，力量性MSD(P)，明快性MSD(C)を，リッカート型FA尺度によって数学に対する好意性を測定する.

図2：認知的学力と情意的学力の測定方法

この調査の結果，次の点を報告している.

・設定した1~5の2時点から，両学力の測定時点1を中学1年2学期中頃(①)に設定したとき，L群，H群とも両学力間の因果的な優越関係は多く存在し，両群とも認知的学力が情意的学力に影響を及ぼすという方向が、その逆よりも一貫して強いという規則性が見られる.

このことから，認知的学力と情意的学力の関係を整理すると，図3のようになる.

中学校1年時～2年時
認知的学力 → 情意的学力
(1年時2学期) (2年時)

図3：認知的学力と情意的学力の関係
(論文をもとに引用者が作成)

図3より，L群，H群ともに中学校1年2学期中頃の認知的学力が中学校2年時の情意的学力に影響を及ぼすと考えられる．つまり，中学校1年時2学期の認知的学力が2年時の情意的学力を形成する要因となる可能性がある.

(2) 中学生の文字式の理解と数学不安の因果的な関係

上では，中学校1年時2学期の数学の学習内容の理解が数学に対する情意面を形成する要因となる可能性があることについて述べた.

また，中学校数学科では，中学校1年時2学期における1次方程式や関数の学習の素地となる単元として1年時1学期に文字式の単元が位置付けられている．このことから，中学校1年時1学期の文字式の単元の理解が中学校1年時2学期の1次方程式や関数の単元の理解に大きく影響を及ぼすと考えられる.

ここでは，中学校1年時1学期の文字式の単元に焦点化し，文字式の理解と数学不安との関係を考察している先行研究から，数学不安を生じさせる要因をさらに明確にしていく.

鈴木(1994)は秋田市内の公立中学校1学年

254 名（男子 128 名，女子 126 名）を対象に，文字の理解 (L) と数学不安(AX)との間の因果的関係を分析すること，並びにその性関連差に関する知見を得ることを目的とした調査を行った．

この調査では，第 1 学年の 3 学期の測定を時点 1 、第 2 学年の 2 学期の測定を時点 2 とし，文字の理解と数学不安を測定したとしている．このときの，各時点における測定用具と測定方法，測定時期については以下に示す通りである．

時点 1

L1 の測定用具

中学校学習指導要領(1977)の数と式領域の第 1 、 2 学年の内容から 50 項目

L1 の測定方法

45 分の調査を 2 回

L1 の測定時期

2 月 20 日～ 3 月 9 日

AX1の測定用具

Likert型測定用具AX(鎌田, 1988)

AX1調査実施日

2 月 14 日～ 2 月 18 日

時点 2

L2 の測定用具

時点 1 で使用した 50 項目と予備調査で留保した 19 項目の計 69 項目の問題

L2 の測定方法

難易度を考慮し、 69 項目を 2 つに分け、 45 分の調査を 2 回実施

L2 の測定時期

9 月 2 日～ 9 月 6 日

AX2の測定用具

Likert型測定用具 AX

AX2調査実施日

8 月 30 日～ 9 月 2 日

この調査の結果，次の 2 点を報告している．

・男子、女子とも文字の理解が原因となって数学不安が形成されるという因果的方向性が見られる．

・男子より女子の方が文字の学習が分かるか否かによって，数学不安の強弱に影響を及ぼす度合いが大きい

これらのことから，文字の理解と数学不安の関係を整理すると図 4 のようになる．

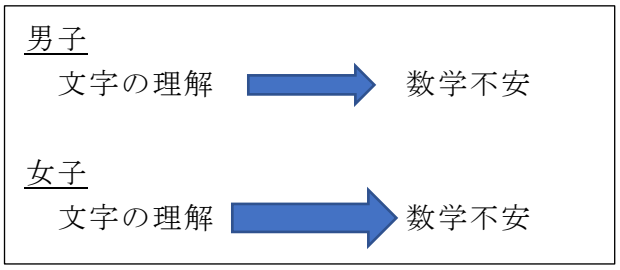


図 4 ：文字の理解と数学不安の関係性
（論文をもとに引用者が作成）

図 4 より，男子，女子ともに文字の理解が要因となって数学不安が形成されている可能性がある．つまり，中学校 1 年時における「文字式」の理解が数学不安を生じさせる要因になると考えられる．

湊，鎌田(1994)の研究から，中学校 1 年時 2 学期の数学の学習内容の理解がその後の情意面を形成することが見出された．

さらに，鈴木(1994)の研究から中学校 1 年時における文字式の理解が数学不安を形成する要因となることが明らかとなった．

しかし，鈴木の研究では，文字式の調査問題に対する生徒の解答が示されていなかった．そのため，文字式単元の中でも，どのような理解の問題が数学不安を生じさせる要因になるのか結論付けられていない．また，上で示した筆者の経験と Skemp (1979) の知見から，生徒の数学不安は授業場面での理解から起こると推測された．

これを受け，次では，文字式の学習に関する実態調査を行い，授業場面で生徒が抱えている「文字式の理解の問題」を検討する．そして，「文字式の理解の問題」を明らかにすることで，数学不安を生じさせる要因についさらに具体化することを試みる．

４．文字式の学習に関する実態調査

文字式の理解の問題を明らかにするため，実態調査を実施する．調査の概要は以下に示す通りである．

(1) 調査の概要

①実態調査の目的

生徒がどのような文字式の理解の問題を抱えているのかを明らかにし，数学不安を生じさせる要因についての示唆を得る．

②対象，実施時期，方法

(a) 対象：新潟県公立中学校１年生 30 名

(b) 時期：平成 28 年６月下旬～９月上旬

(c) 方法：文字式単元全 18 時間をビデオカメラで記録し，生徒の発話やノート記述を分析した．特に，文字式の理解の問題を明らかにするため，生徒が「分からない」と発話するなど理解の問題が見えやすい場面に注目した．

(2) 調査学級の生徒の授業の様子

調査学級生徒の授業の様子を記述する．以下の記述において，「教師」は調査学級で数学の授業担当の教師を，「補助教員」とはティーチングアシスタントを行っている数学を専門としない教師を表す．また，「O」などのアルファベットは生徒を表し，「観察者」とは授業を観察している筆者を表す．

①文字式２時間目

正方形が a 個の時のストローの本数を求める式を確認する場面において，教師は図５のような板書を行った．

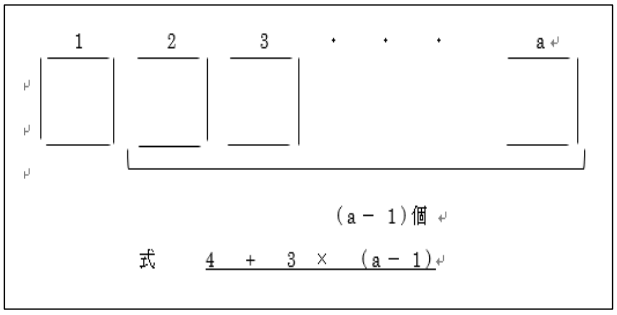


図５：文字式２時間目で教師が行った板書

ここで，教師は１個目の正方形で使われているストローの本数が４本であること，２個目以降の正方形で使われているストローの本数が３本でその箇所が (a—1) 個であることを確認した．そして，これらのことから，正方形 a 個の時，ストローの本数を求める式が 4+3×(a—1) となることを説明した．その後，「ペアや近くの人となぜこの式になるのか話し合ってみよう」と促した．

この話し合いで，O は隣の生徒である YY に「(a—1) で個数になるのかが分からない」と尋ねた． YY から「全体の正方形の数が a 個でそこから１個少ないんだから (a—1) 個になるんだよ」と説明を受けた．しかし，「うーん、分からない」と呟く様子があった．

その後，教師がクラス全体に「なぜ，(a—1) になるのか理由を説明できた人」と問いかけた．すると， TK と YY が手を挙げ，共に「初めストローが４本の部分で正方形を１個使っているのだから (a—1) となる」と理由を発表した．教師が「分かった人は手を挙げて」とクラス全体に促したが，O はこの場面で手を挙げなかった．

最後に，教師がクラス全体に「では，ここまでノートを書きましょう」と指示した．O は図５で教師が行った板書をノートに写し，この授業が終了した．

②文字式３時間目

１個a kgの荷物５個の重さを求める場面において，教師は図６のような板書を行った．

例　１個a kg の荷物５個の重さは？
式　a　×　5　　求めるもの
　文字式
　　A．(a × 5)　kg

図６：文字式３時間目で教師が行った板書

図６のように，教師はこの問題において求めるものは重さであり，求める式の a×5 は文字式であると確認した．さらに，文字式は求める式でもあり，答えでもあるため，答えが

(a×5)kg と書けることを説明した．

その後，教師は「じゃあ，今確認したことを使い，実際に問題をやってみよう」とクラス全体に促し，図 7 に示すような問 6 を演習する場面に移った．

問 6　次の数量を、文字式で表しなさい
(1)1 個 x 円の品物 8 個を買ったときの代金
(2) 千円札 1 枚で a 円の品物を買ったときのおつり
(3) 長さ x m のテープを 4 等分したときの 1 本分の長さ

図 7 ：問 6 の問題

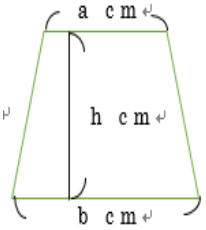
問 6 を演習する場面において，O は (1) で求める式を「x×8」と自身のノートに記述し，手を止めていた．(1) と類似した内容である図 7 が板書に残っていたが，答えを書くことができずにいた．

その後，補助教員が机間巡視をした際，「この答えってどのように書くの」と尋ねる姿が見られた．補助教員は O に「O さん，さっきやったと思うんだけれど，文字式って求める式と答えがどのような関係になっているんだっけ」と問いかけた．すると，O は「あ，同じだ」と答える様子が見られ，(1) については答えを「(x×8) 円」と記述することができた．しかし，O は (2)，(3) については問題文を眺めるだけで手を動かすことができず，問題演習の時間が終了した．

③文字式 8 時間目

本時で，上底 a cm ，下底 b cm ，高さ h cm の台形の面積を文字式で表す場面において，教師は台形の面積の求め方，式，答えを図 8 のように板書した．

○いろいろな数量を文字式で表そう！
例) 台形
復習 (上底＋下底) ×高さ÷ 2



式　(a+b)× h ÷ 2

A．$\frac{(a+b)h}{2}$ cm²　，　$\frac{1}{2}$ (a+b)h　cm²

図 8 ：文字式 8 時間目で教師が行った板書

教師が面積の答えを確認した後，MS が「ちょっと分からないところがある」と観察者に声を掛けた．その際，MS と観察者により行われた対話を図 9 に示す．

ＭＳ ：先生ちょっと来て．
筆者：どうしたの．
ＭＳ ：($\frac{(a+b)h}{2}$ を指し) あれで答えにして良いんですか．
筆者：(底辺 a cm，高さ h cm の三角形の面積の答えとして書いた $\frac{ah}{2}$ を指し) これは答えにして良いの．
ＭＳ ：うん．
筆者：なんで，$\frac{ah}{2}$ はオッケーで $\frac{(a+b)h}{2}$ はダメなの．
ＭＳ ：え，だって＋が入ってるじゃん．

図 9 ： MS と観察者により行われた対話

図 9 に示すように，MS は $\frac{ah}{2}$ を三角形の面積の答えとすることは認めていた．しかし，$\frac{(a+b)h}{2}$ を台形の面積の答えとすることを「＋が入っている」という理由で認めていなかった．

④文字式 12 時間目

生徒が文字式のルール，文字式を使って数量を表すこと，式の値の学習を終えた段階で観察者により「文字式小テスト」が実施された．ここでは，Oの小テストの答案とテストの解答を確認する場面での発話を記述する．

文字式を使って数量を表すことに関する問題3においては，考え方を図 10 のように記述し，「＝ 1000 －」を書いた時点で手を止めていた．解答時間が5分という制約があったため，そこで解答終了となった．

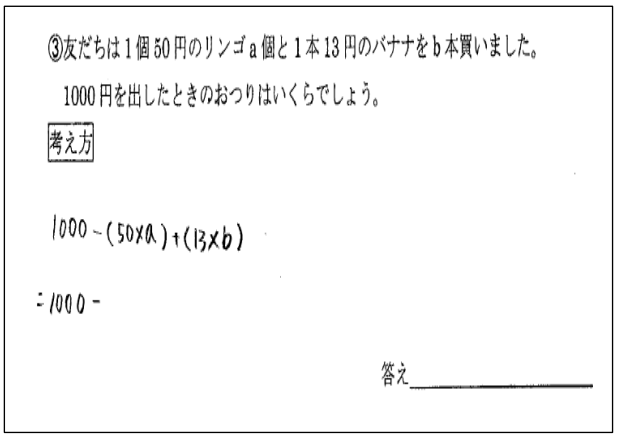


図 10 ：問題3におけるOの答案

その後，教師から小テスト1の解答が配られた．Oは解答で問題3の答えが「{1000 －(50a+13b)}円」と記されている解答を見て，「問題3が分からなかったけれど，おつりの答えってこんなに長いの」と発話していた．

⑤文字式 14 時間目

本時において，教師は図 11 のような板書を行った．そして，「妹のリボンの長さは何 cm になるだろう．文字式を使って表してみよう」と問いかけた．

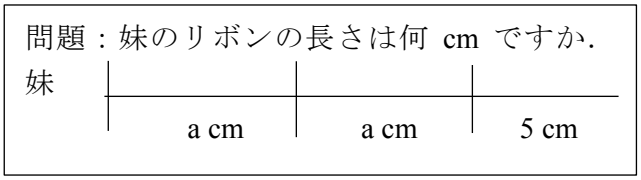


図 11 ：文字式 15 時間目で教師が行った板書

この「リボンの長さを文字式で表す場面」で， NC はリボンの長さを文字式で表すことができず，観察者に「先生ちょっと来て」と発話した．その後， NC と観察者によって行われた対話を図 12 に示す．

NC ：妹のリボンが何 cm になるか分かりません．
筆者：ここからここまで(5cm以外の部分を指して) a cm2 個分の長さは．
ＮＣ ：a2
筆者： a × 2 だよね．
ＮＣ ：あ，2aです．
筆者：うん．ここは 2a cm ．プラスまだ 5cm あるから
ＮＣ ：... うん．
筆者： 2a cm に加えて 5cm まだあるから．
ＮＣ ： 2a+ ...
筆者：5 cm加わるから．
ＮＣ ： 2a+ ... 5 ．
筆者：うん，こうなるよ．
2a+5が妹のリボンの長さ．
ＮＣ ：えー，これが長さですか．
難しいわー．
筆者：どんなところが．
ＮＣ ：文字が入るとわけわからん．

図 12 ： NC と観察者により行われた対話

この問題において， NC は妹のリボンの長さを文字式で表すことができなかった．そして，筆者が妹のリボンの長さは2a+5 cm と表せることを説明すると，「えー，これが長さですか．難しいわー」と発話していた．

(3) 方程式単元での授業の様子

方程式の学習では文字式が用いられることから，文字式の理解が影響を与えることが予想される．例えば，牧野(1997)は次のように述べている：「文字式における操作・対象の二面性の見方は実際に方程式の解法に必要な方略（両辺に同じ数を加えたり，ひいたり，かけたり，割ったりする）の理解にとって欠

くことのできないものである」(p.94).

そこで，文字式の理解の問題が方程式単元で実際に起こるのかを調べるため，方程式の解法，方程式の文章題の授業について観察を行った.

以下では， 10 月上旬に行われた「1 次方程式の利用」でのOの様子を記述する．本時で扱われた問題は図 13 に示す通りである.

> へいを利用して，長方形のウサギ小屋を作ります．長さ 24m の金網を全部使って横が縦より 3m 長い小屋をつくるには，縦の長さを何 m にすればよいですか.

図 13 ：本時の問題

教師は，図 13 の問題を 1 人の生徒に読ませ，横の長さは縦の長さよりも 3m 長いこと，求める数量は縦の長さで x m と表せることを確認した．そして，「横の長さはどのように表したら良いか考えてみよう」と促した.

この時，Oは YT に「ねぇ，どうやって表すの」と尋ねていた． YT は「縦が x で横は 3m 長いって言ってるんだから， (x+3)m でしょ」と答えると，Oは「え、それなの」と呟きながら， (x+3)m とノートに記述した.

その後，Oは教師が板書した「2x+(x+3)=24」，「 x+x+(x+3)=24 」，「3x+3=24」という 3 つの方程式とこれらの方程式に対する「x=7」という解を自身のノートに写し，この時間が終了した.

5．授業場面における考察

上では，生徒の理解の問題が見えやすい場面に注目し，生徒の発話やノートの記述を見てきた.

ここでは，多くの場面で理解の問題が観察された生徒Oを中心に授業場面を考察することで，生徒が抱える文字式の理解の問題を明らかにする.

第 2 時で正方形が a 個の時，ストローの本数を求める式を確認する場面において， Oは YY に「(a－1)個で個数になるのかが分からない」と発話し， (a—1) が個数を表すことに納得していなかった．このことから，Oは(a－1)が個数という 1 つの数値を表すことについての理解が文字式学習の当初から十分でないと考えられた.

こうした状態はその後の学習にも引き続き見られ，第 3 時では，代金の答えを「 (x×8)円」と表すことができなかった．そして，補助教員に「この答えってどのように書くの」と尋ねる姿が見られた．このことから，Oは (x×8) が，代金という 1 つの数値を表すことについての理解が十分でないと考えられる.

また，第 12 時に実施した「文字式小テスト」において，Oは問題 3 でおつりを文字式で表すことができなかった．解答を確認した際，「問題 3 が分からなかったけれど，おつりの答えってこんなに長いの」と発話する様子が見られた．このことから，Oは 1000 －(50a+13b) がおつりという 1 つの数値を表すことについての理解が十分でないと言える.

以上のことから，Oは演算記号を含む文字式が 1 つの数値を表すことについての理解が文字式単元を通じて十分でなかったと考えられる．よって，Oは，牧野(1997)も指摘した文字式を計算の過程だけでなく， 1 つの数と見ることができない「文字式の二面性の理解の問題」を抱えていたと推察される.

このような理解の問題はO以外の生徒にも観察された．第 8 時で MS は$\frac{(a+b)h}{2}$ の文字式を「＋が入っている」という理由で台形の面積という 1 つの数値として認識することができなかった．加えて，第 14 時で NC は 2a+5 の文字式をリボンの長さという 1 つの数値であると認識することができなかった.

このように調査学級内にはOと同様に「文字式の二面性の理解の問題」を抱えていると推察される生徒がいた．特に， NC は 14 時間目にこの問題が見られると考えられたこと

から，文字式単元が進んでも理解の問題は改善されなかったと推察される．

また，「１次方程式の利用」の場面では，Oは横の長さを (x+3)m と表せることに理解を示していなかった．

この場面で，文字式を式だけでなく，１つの数という二面的な見方で見ることできないことが，横の長さを (x+3)m と捉えることへの理解を阻害し，結果として正しい方程式を立てることを難しくしたと考えられる．

よって，「文字式の二面性の理解の問題」は「１次方程式の利用」等，方程式単元の理解においても影響を及ぼしたと推察される．

６．結論

実態調査から，複数名の生徒は「文字式の二面性の理解の問題」を抱えていると推察された．さらに，その問題は中学校１年時２学期の「１次方程式の利用」といった学習内容の理解に対しても影響を及ぼすと考えられた．

数学不安や情意面を形成する要因については，湊，鎌田(1994)の知見から「中学校１年時２学期の認知的学力が２年時の情意面を形成する」ことや鈴木(1994)の知見から「文字の理解が原因となって数学不安が形成される」ことが見出された．

これらの先行研究では，中学校１年時の認知的学力や文字の理解が数学不安，情意面に影響を与えるという知見に留まっていた．しかし，今回の調査において，「文字式の二面性の理解の問題」が文字式単元の理解や方程式単元の理解に影響を及ぼすと考えられた．

このことから，「文字式の二面性の理解の問題」が文字式単元を通じて文字式の理解に影響を及ぼすため，生徒の数学不安を生じさせる要因となる可能性があると言える．

引用・参考文献

鎌田次男. (1983). 中学生の数学に対する不安の分析．日本数学教育学会誌, *65*, 258-264.

鎌田次男. (1988). リッカート型用具によって測定された我国中学生の数学不安について．日本教科教育学会誌, *13* (1), 9-17.

国立教育政策研究所. (2012). OECD 生徒の学習到達度調査 (PISA) 2012 年調査国際結果報告書．明石書店．

牧野眞裕. (1997). 文字式に関する認知的ギャップ．全国数学教育学会誌，数学教育学研究，*3*, 91-97.

Mark. H. A. & Jeremy. A. K. (2007). Working memory， math performance and math anxiety. Psychonom*ic Bulletin & Review*, *14* (2), 243-248.

Micke. A. M.& Mateo. J. (2011). Choke or thrive? the relation between salivary cortisol and math performance depends on individual differences in working memory and math-anxiety. *Emotion*, *11* (4), 1000-1005.

湊三郎．鎌田次男. (1994). 生徒の知能水準と中学校数学における認知と情意に関する因果的優越性との関係．日本科学教育学会研究会研究報告, *8* (6), 7-14.

Richardson. F. C. & Suinn. R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale: *Psychometric data. Journal of Counseling Psychology*, *19*, 551-554.

佐々木公久．(1990)．中学生における数学不安の研究．日本数学教育学会誌， *72* (5)，2-16.

Skemp, R. R. (1979). 数学学習の心理学（藤永保，銀林浩訳). 新曜社．

鈴木勇幸 (1994)．中学生の文字の理解と数学不安との間の因果的な関係．日本数学教育学会誌, *76 (5)*, 106-112.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.43-52

「教育内容としての数学的方法」に関する研究

― 数学的概念の「質的な高まり」を実現する学習過程に着目して ―

秋山　拓也
上越教育大学大学院修士課程２年

1. 本研究の背景と目的

高等学校数学教育の目標と教科内容は，教育の目的である「人格の助成」を根本に据えながら，時代とともに変化し続けてきた。現行の高等学校学習指導要領における高等学校数学科の目標は，「数学的活動を通して，以下略」（文部科学省，2009，p.5）と明記され，活動としての数学が教科全体に位置づいている。また現実世界への活用力の育成を意図として，「数学的活動」のモデル（図 1）が高等学校学習指導要領内に示された。

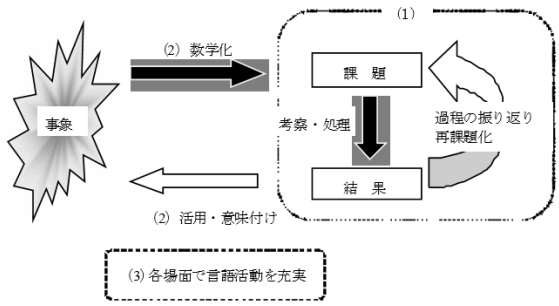


図 1：数学的活動（文部科学省，2009，p.68）

このように現実の問題を解決する活動が重視されつつある高等学校数学科において，岩崎ら（2017）は，「（活動としての数学の）強調は，高校数学への理念と高校数学の実態の乖離を示すことになっているのではないであろうか」（p.1）（括弧内は筆者による）と警鐘を鳴らしている。また図 1 で示されている数学的活動を見ると「現実の事象の問題解決」が強調されていることがわかる。これらのことから筆者は，現在の高等学校数学教育において「現実の問題解決を意図とした活動の焦点化による「教科内容」への希薄化」が生じているといるのではないかと考える。

このような喫緊の課題に対して数学教育における内容研究では，「方法知」に対する関心が高まってきている（例えば，村田（2015），清水（2015））。「方法知」とは，ライル（1987）が提唱した知識の一種である。氏は，「内容知」（knowing-that）と「方法知」（knowing-how）を区別する。内容知は，真偽で評価し得る知識であるのに対して，方法知は，いつどんな風に振る舞うかに関する知識の総体である（p.27）。本稿では，方法知を特に数学における「教育内容」という認識の下で用いていくため，「教育内容としての数学的方法」と改め，用いていくこととする。

特に平成 29 年 3 月に告示された小中学校学習指導要領には，「教育内容としての数学的

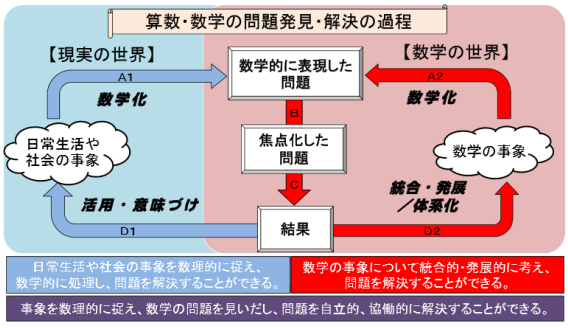


図 2：算数・数学の問題発見・解決の過程
（中央教育審議会，2016）

方法」の一層の強調が示されている。次期学習指導要領で明示された中学校数学科の目標は,「数学的な見方・考え方を働かせ…」と打ち出され，それに伴い，図 2 のような「算数・数学の問題発見・解決の過程」(以下，次期問題解決モデルと略す)が示された。

このような関心の高まりの中で,本稿では,数学的世界の問題解決過程における数学的概念の質的な高まりに着目して,「教育内容としての数学的方法」を考察していくこととする。概念形成を行う過程をどのように生起させ，どのようにその過程を推進させていくのか，ということを「教育内容としての数学的方法」という視点より特定する。本稿において，数学の世界の問題解決過程において「教育内容としての数学的方法」がどのように生起し，次の数学的方法へとどのように作用し，学びが深まり発展していくのかを明らかにしていきたい。

2. 数学的概念の「質的な高まり」

清水(2017)は，次期問題解決モデルにおける「問題解決」の特質について次のように述べ，図 3 を示している。

> 「日常世界の問題解決は，モデルを切り替えたり，他の事象で同様の考え方を取り入れたりして，平面的に何周もこの過程を回していく。それに対して，数学の世界での問題解決は,得られた結果を発展的に考え，拡張したり一般化したりして次のサイクルを螺旋的に回していく。(中略)《次期問題解決モデルで》示されている資質・能力でも D2 に「統合的・発展的に考える力」とあり，A2 に「得られた結果を基に拡張・一般化する力」とあるように 2 週目のサイクルでの数学的に考える力が示されており，日常世界の問題解決との違いがここにあると考えられる。」(清水, 2017, p. 153)
>
> (≪　≫内は筆者による)

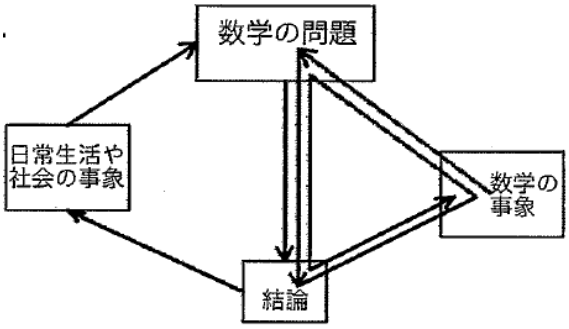


図 3:日常世界と数学の世界の解決の過程
(清水, 2017, p. 153)

清水(2017)は，それぞれのモデルの特質をそのサイクルの回り方に着目し,述べている。日常生活(現実の世界)の問題解決サイクルは,モデルの切り替え等により「平面的な循環」が行われ,「現実の世界の広がり」が強調される。対する数学の世界の問題解決サイクルでは，統合化・発展的な考えや一般化や拡張化により「螺旋的な循環」が行われ,「数学的概念の高まり」が強調される。氏の主張より，2 つの問題解決過程は，その世界におけるサイクルの循環の性質に相違点が存在していることがわかる。

ここで,「数学的概念の高まり」を目的とする数学の世界の問題解決サイクルの特質である“螺旋”という言葉について吟味していく。『旺文社 国語辞典(第十一版)』では,「①巻貝の殻のように渦巻き状に回っていること。②ねじ」(p. 1540)であるとされている。言い換えると，螺旋とは，空間曲線であり，平面上には表現できないものであることが読み取れる。ここで今一度，図 3 の数学の世界のサイクルを氏の主張より，螺旋(空間曲線)として捉え直す。この数学の世界の問題解決サイクルが段階や段階移行プロセスを経て循環するとその軌跡は，螺旋を描き，図 3 の読み手側に次第に高まっていく。この高まりは，数学の世界の問題解決の主目的である学習者の「数学的概念の形成・発展」を表わしていると言えるであろう。そしてその軌跡が途切れ

ることなく，各段階を経て高まり，継続的な数学的概念の形成・発展を行うことから，その数学的概念が「質的に高まる」と解釈することができよう。つまり，次期問題解決モデルの数学の世界での問題解決は,概念の形成・発展を階段のよう段組みで構成するのではなく，各段階を介することで坂道のように徐々に高まっていく「数学的概念の質的な高まり」を表現している。

この氏の言及を秋山(2017)の「大局的な視点としての数学的方法」および「局所的な視点としての数学的方法」より考察する(表 1)。

表 1:「教育内容としての数学的方法」の捉え方

①大局的な視点としての数学的方法 問題解決を通して問題解決能力そのものを育成する方法
②局所的な視点としての数学的方法 問題解決を数学学習の方法と位置づけ，問題解決内で発揮する能力を育成する方法

(秋山, 2017, pp. 24-25)より筆者作成

表 1 は,「教科内容としての数学的方法」としてカリキュラム上に明示された「中心概念」を起点理念とし，教授・学習の場を前提とした今日的な「教育内容としての数学的方法」の捉え方である。「①大局的な視点としての数学的方法」は，問題解決過程そのものを数学的方法として位置づけ，その過程内の各段階移行プロセスを促進させる数学的方法を「②局所的な視点としての数学的方法」としている。これらは,《②⊂①》の包含関係にあり,互いが影響し合う相補的関係にもある。①には,主として「現実の世界に関する問題解決」と「数学の世界における問題解決」があることを前提とすると，②は「各世界特有の数学的なプロセス」および「数学の世界と現実の世界の 2 つの世界に跨る数学的なプロセス」が存在することを特定している(p.)。

清水(2017)の言及に関する議論に戻る。この氏の言及は「大局的な視点としての数学的方法」に関するものである。氏の主張は，前提としてサイクルの循環があり，循環すると「数学的概念が質的に高まる」という利点が得られる，という論展開となっている。しかし，そこに問題解決過程を促進させるための「局所的な視点としての数学的方法」に関する記述は見られない。具体的には「サイクルがどのように生じるか(生起要因)」や「どのようにサイクルを循環させるか(循環要因)」ということである。そこで清水(2017)の循環による「質的な高まり」を実現するためには「大局的な視点としての数学的方法」を前提とし，その数学的方法内におけるサイクルを生じさせるための「生起要因」およびサイクルを円滑に循環させるための「循環要因」を「局所的な視点としての数学的方法」の視点から考察していき，それぞれの要因を特定することが必要である。これは，本研究の目的における「どのように数学的方法が生起するのか」(生起要因)および「数学的方法が次の数学的方法へどのように作用するのか」(循環要因)に関わる議論である。

次節以降では，この「数学的概念の質的高まり」に焦点化した数学の世界における問題解決サイクルの生起要因と循環要因を特定すべく，問題解決と概念形成をひとつの問題解決モデルとして記述した飯田(1990)の「数学的活動の類型」について考察を行う。

3. 飯田(1990)の問題解決モデル

(1)飯田(1990)の問題解決モデルの概要

飯田(1990)は,「数学教育における概念形成と問題解決とは非常によく似た特質を持っている。それは，ともにシツェーションからの抽象化の過程を含んでいる点である」(p. 152)とし，以下の図 4 を示している。

氏によると，①-③を「シツェーションの抽象化(数学化)」と呼んでいる。シツェーショ

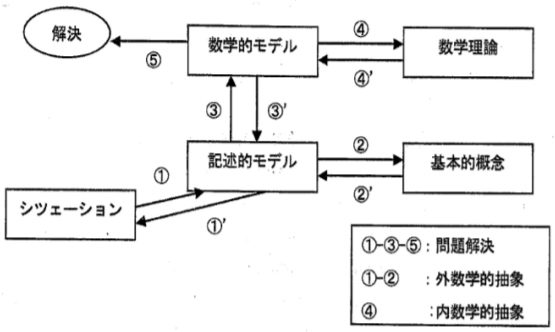


図 4:数学的活動の類型(飯田,1990,p.152)

ンの内訳としては,「現実のシツェーション」と教科書に示されているような「疑似現実的シツェーション」とされている。その中でも「疑似現実的シツェーション」に関して飯田(1992)は，シツェーションの探究ということを，その方法論も含めて，最も顕著に強調しているのは，ブラウン(1990)であると指摘している。そしてブラウンのいうシツェーションについて，以下のような解釈をしている。

> 「Gattegno の数学的シツェーションが，物的対象物としての教具をもとにしているのに対し，Brown のいうシツェーションは，三平方の定理や素数の定義などの抽象物をも含め，より自由なものとして捉えられている」(飯田，1992，p.263)

つまり，疑似現実的シツェーションには，数学の定理・定義等も考慮されていることが分かる。概念形成を中心とする抽象化においては，図 4 が参考になる。図における「外数学的抽象」とはシツェーションの抽象であり，その典型として図形概念や数概念の抽象があがる。平林(1970)の区分にしたがい，前者を「対象からの抽象」,後者を「操作からの抽象」としている。飯田は，外数学的抽象が概念形成の出発地点であると述べたのちに，算数教育における外数学的抽象の適応可能性を示唆している。また「内数学的抽象」とは数学内の抽象であり，数学的概念を対象とする抽象である。この 2 つの抽象を述べたうえで飯田は,数学的モデル化の二面性を指摘する。1 つ目は,①-③の過程によって作られる数学的モデル「シツェーションからの抽象モデル」，2 つ目は，④’の過程によって作られるモデル「理論からの具体モデル」である。両者はどちらも時として「数学的モデル化」と呼ばれる。これら二つのモデルを提示した上で，飯田は,「シツェーションから抽象モデルを構成し(この過程が狭義の数学化)，それと概念と理論からの具体モデルとが連結されて初めて内数学的抽象が可能となる。」(p.164)
と概念形成を中心とする数学的活動をまとめている。先に述べた「シツェーションからの抽象モデル」と「理論からの具体モデル」が連結することで内数学的抽象が可能となる。つまり，氏のモデルには，数学的モデル化過程が 2 通り存在し，その両者がそれぞれの対象を数学的モデル化し，数学的モデルを構成して初めて数学的概念(図 4 中では,「数学理論」)が形成されるという。つまり，数学的概念を形成するプロセスを促進させるためには，2 つのプロセスで明示された「数学的モデル化」を連結させ，内数学的抽象を可能とすることが必要であるとしている。

飯田のモデルにおいて数学の世界の中心となる部分は,「数学理論」である。この「数学理論」に着くことで学習者は，数学的概念の形成および既習概念の発展に至る。つまり，学習者に内在する数学的概念の「質的な変化」は,この「数学理論」を介したときに起こる,ということが言える。この「数学理論」を介するプロセスは,「数学的モデル→数学理論→数学的モデル→…」のプロセスの循環により行われる。その循環がなされ,「数学理論」が質的に高まることで,それを対象とする「④’数学的モデル化」も抽象度があがり，形成される「数学的モデル」も質的に高まる。つまり,世界の質的高まりにより,対象となる「数学的モデル」が高まる，ということである。

つまり，飯田のモデルにおいて「数学的概念の質的な高まり」を捉えるためには，局所的な視点としての数学的方法「数学的モデル化」およびそのプロセスにより形成される「数学的モデル」，そして概念形成の終点である「数学理論」がポイントとなる。

またこの飯田のモデルで評価できる部分は，「問題解決」と「概念形成」が似た特質を持っている，としながらも相違的なものであるとしてモデルに明示している点である。それぞれシツェーションの抽象から始まり，数学的モデルを形成したのち，一方は「数学理論」へ(概念形成)，他方は「解決」へ(問題解決)と目指すべき方向が明確に明示されている。次期問題解決モデルにおいてこの区別が明確でないことより，この飯田(1990)のモデルは，非常に示唆的な視点であると考える。

(2)次期問題解決モデルとの比較

前項にて考察した飯田(1990)の「数学的活動の類型」(図 4)と「次期問題解決モデル」(図 2)の比較を行う。

飯田(1990)のモデルにおける「数学的概念の質的な高まり」のポイントとなっている「数学的モデル」と「数学理論」は，それぞれ図 2 の「数学的に表現した問題」と「数学の事象」に対応する。つまり，「A2:数学化」が「④’数学的モデル化」に当たり，「B → C → D2」のプロセスが「④内数学的抽象」に該当する。また氏のモデルにおける生起要因である「シツェーション」に該当する段階は，同様に「数学の事象」である。これは，どちらも問題解決の起点となっていることより断定した。ここでは，次期問題解決モデル(図 2)における「数学の事象」が飯田(1990)のモデルにおける「数学理論」および「シツェーション」の 2 面性を有していることが分かる。

また飯田は，「数学的モデル化の 2 面性」を主張し，その 2 つの「数学的モデル化」である「シツェーションからの抽象モデル」と「理論からの具体モデル」が連結し，はじめて「内数学的抽象」が機能することを述べている。この 2 つの「数学的モデル化」は，「シツェーション」と「数学理論」(「数学の事象」)を対象とすることから，「A2：数学化」に対応し，内数学的抽象は，次期問題解決モデルにおいてサイクルの半分以上を占める「B → C → D2」にそれぞれ該当する。次期問題解決モデルにおいては，この内数学的抽象(「B → C → D2」)が機能しないと，問題解決サイクルの円滑な循環は見込めないという解釈ができるであろう。つまり，「数学的モデル化の 2 面性」は，サイクルを循環させる上で最も重視すべき視点であり，そのサイクルの循環要因となることがわかる。

したがって，「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデル(図 2)における問題解決サイクルの生起要因・循環要因を「数学の事象」の 2 面性を前提とし，次の表 2 として示す。

表 2:概念形成過程における生起・循環要因

生起要因；
「数学の事象」に内在する“シツェーション”を対象とした「数学的モデル化」
循環要因；
生起要因における「数学的モデル化」と「数学の事象」に内在する“数学理論”を対象とした「数学的モデル化」を連結させる「数学的モデル化」

問題解決サイクルの生起要因および循環要因には，「数学的モデル化の 2 面性」が大きく関わる。それに伴い，その「数学的モデル化」の対象となる「数学の事象」も“シツェーション”と“数学理論”という 2 側面を含意するものとして明示しなくてはならない。その反面，次期問題解決モデル(図 2)には「数学の事象」に関する明確な表記は無く，その出典元である小学校学習指導要領解説算数編(2017)および中学校学習指導要領解説数学編

(2017)にもその明示的な記述は見られない。つまり，飯田(1990)を基点として「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデル(図 2)を提案する上においては,「数学の事象」を“シツェーション”なるものと“数学理論”なるものに区分して表記することが必要である。次節においては，この捉えた生起要因および循環要因，そしてその対象となる「数学の事象」の 2 側面を顕在化した概念形成に焦点化した筆者による次期問題解決モデルの提案を行う。

4. 概念の質的高まりに焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル構築

前節で捉えた生起要因および循環要因をもとに「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した次期問題解決モデルを「教育内容としての数学的方法」のモデル(図 5)として提案を行う。

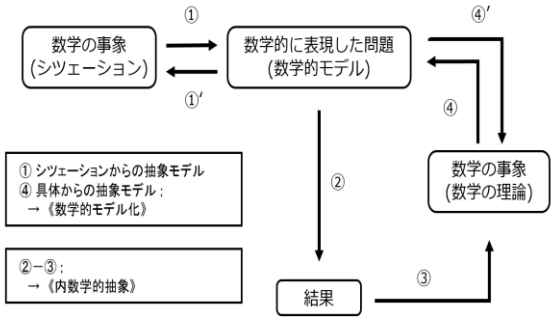


図 5:「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル

これは，次期問題解決モデル(図 2)の「数学の世界の問題解決」に前節での捉えを加筆したものとなっている。「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した「教育内容としての数学的方法」のモデル(図 5)は,「数学の事象」を対象として形成される「数学的モデル」の形成，そして「内数学的抽象」を経て，新たな「数学の理論」の構築が行われる。飯田(1990)の特質を支持するとサイクルの大部分を占める「内数学的抽象」を機能させるための条件(言い換えるとサイクルの循環要因)として「①シツェーションからの抽象モデル」という名の「数学的モデル化」を行う必要がある。そこで，新たな「数学の事象」(シツェーションとなるもの，例えば“状況”や“文脈”)を用意し,「①シツェーションからの抽象モデル」を行えるような場を設定した。これは，教師から与えられるもの(外的要因)や学習者自らが見いだすもの(内的要因)とが考えられる。この①こそが，先に示した「数学的概念の質的な高まり」に焦点化した問題解決サイクルの生起要因となる。そしてシツェーションを対象に「①シツェーションからの抽象モデル」が行われることで数学的モデルを構成し,「②理論からの抽象モデル」との連結が行われることで内数学的抽象が可能な数学的モデルが再構成される。前節で述べたが，この「数学的モデル化」の連結こそが，後に行われる「内数学的抽象」の機能条件であることより，サイクルの循環要件となりうる。

このようにこの「教育内容としての数学的方法」のモデルは，数学的モデル化を行った後に「内数学的抽象」が行われ，統合・発展／体系化を経て，新たな「数学の理論」が構成される，というものである。新たに用意した「数学の事象(シツェーション)」は，サイクルの循環(内数学的抽象)の中で既存の「数学の事象(数学の理論)」に包含され，シツェーションとして設定した「数学の事象」も数学的概念の一部となり,「数学の事象(理論)」が形成される。そしてこの形成された「数学の事象(理論)」が適応し得るような新たな「数学の事象(シツェーション)」が設定され，次のサイクルの循環が始まる。その際,「数学の事象」は，構成された理論を適応し得るようなものとする必要があり，前サイクルの「数学の事象」よりも，より理想的・限定的なものとなる。

したがって，「数学の事象」においてもその二面性(数学理論，シツェーション)を提示し，2 分化してモデルに投影することで「数学的モデル化の二面性」を強調させることができ，より概念形成を視野に入れた次期問題解決モデル(図 5)を提案することができる。そしてこの問題解決モデルそのものを「大局的な視点としての数学的方法」として対象化することで，学習者は概念形成を行うその過程をも意識化することができる。

5. 構築したモデルの実際

(1)調査授業の概要

先に構築した問題解決モデル(図 5)を実際の教授・学習の場に適応し，具体例を用いて考察していく。その分析対象を秋山(2017)において行った調査授業とした。以下はその概要である。

題材：数列概念の拡張(階差数列の導入)
日時：平成 29 年 6 月 22 日第 5，6 校時(100 分)
対象：新潟県立高等学校第 2 学年数学 B 選択者 8 名
本時の課題：
1 次の数列にはどのような“規則性”があるか
$\{a_n\}$: 3,4,6,9,13,…, $\{b_n\}$: −30,−29,−25,−16,0,…
2 1 の数列 $\{a_n\}$ の第 20 項目を求めよう

(秋山, 2017, p. 25)より筆者作成

(2)「数学的モデル化」の 2 面性

次は，調査における問題 1 の数列$\{a_n\}$の規則性を求めている場面のプロトコルの一部である。

50	T	どうやって考えたかをノートに書いてください。
51	Y	{an}はわかった。
52	T	では，{bn}を考えてもらってもいいですか？
53	T	じゃあ{an}はわかりましたか？
54	A	うーん，わからんなー。
55	K	これ，さっきみたいに図でかいたらわかるよ
56	A	(図をかく　→)ああ，そういうことか。
57	M	ここが「＋1」になる。
58	A	違うよ，それ M さ…，あ，これあれだよね。等差と等比じゃないよね。
59	M	え，何で？
60	A	だって，等差と等比って同じ数ずつ増えていくじゃん。

上記のプロトコルは,「数学的モデル」が形成されるまでの過程を示している。①のモデル化においては，与えられた「数学の事象(シツェーション)」である問題(2)を対象として数学的モデル化を行い，数学的モデル「隣接 2 項間の関係図」を形成している。また④のモデル化では，前時までに学習した数学理論である「等差数列」,「等比数列」を対象とし，具体的にモデル化した「公差(公比)が一定である」が考察に用いられている。その際にこの①および④の過程を推進させた要因の一つとして「学習者同士の相互作用」が挙げられる。No. 54 で問題解決に困難を示した A に対して K は，図の活用を促し，その後 No. 56 にて A は，数学的モデル化を遂行し，モデルの形成に至っている。また④のモデル化においても数学理論からの具体的なモデル化を行う際，No. 58 より理論が欠如している M に対して A は，その補足を行っている様子が見られる。つまり，このサイクルにおける「数学の事象」を対象とした「数学的モデル化」は，「学習者同士の相互作用」によって促進され，「数学的モデル」を形成するに至っていることがわかる。

(3)数学的モデルの再構成活動

次は，問題 2 を解決している場面のプロトコルの一部である。問題 1 の解決場面においてサイクルが 1 周しており，この場面は，問題解決サイクルの 2 周目にあたる。

108	Y	やり方というか考え方はあってそう？
109	O	え？なんかやば。(笑)
110	AR	なんか違うよ。(笑)
111	I	こんな感じですか？
112	T	ふむふむ…。なるほどね。
113	I	でどうなんですか？(笑)
114	T	もっといい方法考えてみなよ。そうしたらその答えが正しいかが自分で分かるんじゃない？
115	I	ケチだなー(笑)，分かりました、考えますよ。
118	A	第 6 項目で足されているのが 5 回だから，第 20 項目だと足されているのは 19 回だなー。19 回足されていることを知っておけば，えーっと，1，2，3，4，5，6，…，19 で，それを 18 までとすると…18 まで足しているとすると，左右の頭からくっつけていくと何になるんだ…
119	K	でも奇数だから 1 個余るよ。
120	A	そうなんだよ。でも 9 組だから…
121	K	9 組作って余りを足しちゃえば？
122	A	いや，8 組作って…いや 9 組できて何も余らないよ。19 で 9 組作れるんよ。だって，19 でしょ。19 回上がるってことじゃん。19 を捨てて 18 と考えると，頭と手前くっつけて 18÷2 で 9 セットできるんだよ。19×9 か…9×9 で 81，あれ？ああ，171＋…
123	K	外側からどんどんやっていくんでしょ？真ん中のやつが最後なんでしょ？
124	A	そうそう。171＋19 だから 190 で，最初の 3 が足されるから 193 だ！先生，193 だ！

上記のプロトコルは，問題[1]と同様の数学的手法(隣接 2 項間の関係図の利用)で問題[2]を考える場面から始まる。2 周目のサイクルでは，主として「④理論からの具体モデル」により数学的モデル「隣接 2 項間の関係図」の形成が行われている。2 周目のサイクルであることより，1 周目のサイクルにおいて理論化された“シツェーション(数列 $\{a_n\}$ の規則性)”が「数学の事象(数学理論)」に含意され,それを具体化することで「数学的モデル」の形成が行われている(No. 103, No. 108-111)。つまり，調査授業における 2 周目のサイクルでは，1 周目のサイクルより「④理論からの具体モデル」が強調され,「数学的モデル」の形成に至ることが教授・学習の場より見いだせる。これは，あくまでも 1 周目と同様に「隣接 2 項間の関係図」を対象として内数学的抽象を行う場合に見出せるものであり，数学的モデルが変更する場合には一概にいえない。その例として，No. 115 における学習者の「数学的モデルの変更」が挙げられる。これは，「④理論からの具体モデル」より作成した数学的モデル「隣接 2 項間の関係図」を用いて数列 $\{a_n\}$ の第 20 項目を求めようとした I が，その困難さを指摘するとともに教師の働きかけにより，関係図ではない別のモデルを形成しようと試みている場面である。その後 A は，No. 118-124 にかけて数学的モデル「等差数列の和」と再構成し，内数学的抽象を経て正答に辿り着いている。ここで，顕在化される事柄は,「数学的モデルの再構成活動」というモデルの再構成を行う活動である。形成された数学的モデルでは，解決が困難な場合，一度①’の過程を経て，シツェーションに戻り，再度①のモデル化を行う。つまり，2 周目以降のサイクルでは，2 パターンのモデル構成活動が見いだせる。1 つ目は,「当該サイクル以前のシツェーションを含意した「数学の事象(数学理論)」を対象とし,「④理論からの具体モデル」においてモデル構成を行う活動」, 2 つ目は,「当該サイクル以前のサイクルにおける「数学の事象(数学理論)」を踏まえたうえで，シツェーションの探究より数学的モデルを再構成する活動」である。

前者は，対象化される「数学の事象(数学理論)」は，当該サイクル以前のサイクルにおけるシツェーションを含意しているため，形成

される数学的モデルは，1 周目と不変である。この場合，1 周目では，「①シツェーションからの抽象モデル」が強調されるため，内数学的抽象によりその①が対象化され,「数学の事象(数学理論)」に含意される。しかし，2 周目以降は，1 周目で①を含意した「④理論からの具体モデル」に焦点が置かれ，形成されるモデルも不変であることから，対象化される方法は，1 周目と変わらない。つまり，方法の多様化は生まれず，1 つの方法に固執した問題解決になる恐れがある。

その反面,後者は「シツェーションの探究」を行い，新たな視点より数学的モデルを再構成するため，前サイクルの数学的モデルとは違うモデルとなる。つまり,「④理論からの具体モデル」を背景に持ちつつ，与えられた(見いだした)問題(シツェーション)を改めて探究し,「①シツェーションからの抽象モデル」に焦点を当てることで，多様な方法を対象化することができであろう。したがって,「数学的モデルの再構成活動」は，サイクルが循環する中で多様な方法を見いだし，それを教育内容として対象化することができる活動として積極的に取り入れていくべきであると考える。今回の調査では見いだせなかったが同様の再構成活動として「数学理論の探究(④と④’の往還)」も重要な視点であろう。

これらの再構成活動を取り入れるためには,調査授業でも顕在化している学習者の外的要因がポイントとなる。先にも述べたが,No.114 において，学習者 A に対して教師は，前サイクルにおける数学的方法とは違う方法を見いだすことを働きかけている。この場面における「数学的モデルの再構成活動」を推進させている事項は,発問による「教師の働きかけ」であった。その他の外的要因としては，学習者同士の相互作用が期待される。もちろん学習者個人の内的要因にて再構成活動を行うことが,主体的な活動として望ましい。しかし，高等学校数学科のように抽象度が高いシツェーションを扱う場合には，外的要因にもその重点が置かれるべきであると考える。

6. モデル分析の総合的考察

前節にて構築したモデルを実際の教授・学習の場の分析・考察を行った。本節では，それらを踏まえて総合的に考察していく。

問題解決サイクルの 1 周目，2 周目共々，サイクルが循環する中で「数学的モデル化の 2 面性」が数学的モデルの形成により連結し，新たな「数学の事象(数学理論)」の形成に至っている様子が見られた。その際に，飛躍的に概念形成が行われたわけでなく，各段階および各段階移行プロセスを経ることで，徐々に理論が形作られている様子からも「数学的概念の質的な高まり」を見いだす，という視点において一定の価値があると考える。

また「数学的モデル化」を行う場面において多様な方法を生み出し，それを対象化するためには,局所的な数学的方法に該当する「数学的モデルの再構成活動」(①と①’，④と④’)の往還)が重要であることが実際の教授・学習場面から見いだされた。これは，言い換えると,「シツェーション(数学理論)の探究活動」である。その局面は,「解決に障害が発生した場合」と「サイクルの循環により理論が形成されたうえで，他の方略を考える場合」に生じる。これは，飯田(1990)のモデルにおいては，考慮されていない視点である。「数学的モデルの再構成活動」が多様に行われるためには，顕在化する数学的モデルが多様に形成されるようなシツェーションを設定することが望ましいと考えられる。さらに，これらの「局所的な数学的方法」を促進させるための要因として,学習者の外的要因(学習者同士の相互作用･教師からの働きかけ等)の存在を確認することができた。

7. 本稿のまとめと今後の課題

本稿では,「数学的概念の質的な高まり」に

焦点化した学習過程を「教育内容としての数学的方法」という方法知の立場より考察を行った結果，次の 2 点の知見を得た。「流動性を数学的世界の問題解決サイクルとして位置付け，その生起・循環要因を特定」，「それらを包含するモデルの構築および着眼すべき主焦点（数学的モデル化の 2 面性・数学的モデルの再構成活動）の特定」である。

現実的事象からの希薄化が明瞭な高等学校数学科において，数学的発展の中で「教育内容としての数学的方法」を身に付けるための新たな視点を設けるとともに，「概念形成を主とした大局的な視点として教育を行っていく」という今後焦点化すべき 1 つの数学教育の在り方を提案した。

今後の課題は，構築したモデルに準じた授業を構想・実践し，分析および考察を通して，サイクルの各要因の具体を見いだすとともに，構築したモデルの加筆・修正を繰り返し，その精緻化を行うことである。また「教育内容としての数学的方法」の評価方法の開発も課題として挙げられる。「内容知」に重きが置かれている後期中等教育において，学習者が数学的発展の中で「方法知」，即ち「教育内容としての数学的方法」を見いだし，それを身に付けていく活動を主として行えるような学習過程の基盤整備およびさらなる提案を目指した研究と実践をさらに推進していきたい。

引用・参考文献

秋山拓也（2017）.「教育内容としての数学的方法に関する研究－高等学校数学科における「中心概念」を起点として-」. 日本数学教育学会.『第 50 回秋期研究大会発表集録』, 23-26.

阿部好貴（2010）.『数学教育におけるリテラシーの育成に関する研究』, 博士論文（未公刊）, 広島大学大学院教育研究科.

飯田慎司（1990）.「シツェーションからの数学的活動における創造性の開発について」,『数学教育学のパースペクティブ』, pp. 151-171, 聖文社.

飯田慎司（1992）.「数学教育における問題解決の批判的検討－シツェーションの探究の重要性について－」, 岩合一男先生 退官記念出版会（編）,『数学教育学の新展開』, pp. 256-268, 聖文堂.

岩崎秀樹・杉野本勇気・大滝孝治・岩知道秀樹（2017）.「数学教育研究としての教材開発のあり方－中等教育を一貫する論証指導のために－」,『全国数学教育学会誌. 数学教育学研究』, 23（2）, pp. 1-13.

清水宏幸（2017）.「全国学力・学習状況調査「活用」の問題作成の枠組みの検討」. 日本数学教育学会.『第 5 回春期研究大会論文集』, pp. 149-154.

中央教育審議会（2016）.『算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ』. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf（2018. 2. 14 最終確認）

S. I. ブラウン & M. I. ワルター（1990）.『いかにして問題をつくるか：問題設定の技術』. 平林一榮（監訳）. 東洋館.

文部科学省（2009）.『高等学校学習指導要領解説数学編理数編』, 実教出版.

文部科学省（2017）.『小学校学習指導要領解説算数編』. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387017_4_1_1.pdf（2018. 2. 14 最終確認）

文部科学省（2017）.『中学校学習指導要領解説数学編』. http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/07/25/1387018_4_1.pdf（2018. 2. 14 最終確認）

山口明穂・和田利政・池田和臣（2013）.『国語辞典』, 第十一版. 旺文社.

ライル, G.（1987）. 坂本百大・宮下治子・服部裕幸（訳）『心の概念』. みすず書房.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.53-62

数学授業における子どものメタディスコースに係わる理論

浦野　正
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

教育現場では，「言語活動の充実」（文部科学省，2008），「主体的・対話的で深い学び」（文部科学省，2016）等のキーワードのもとに教育改革が進められている．これらの背景には，「キーコンピテンシー」や「21 世紀型スキル」といった資質・能力の教育研究がある（国立教育政策研究所，2016）．21 世紀を生き抜くために他者と協力し，社会とかかわり合いながら自らの考えを広げ深める資質・能力は世界規模の評価に影響を及ぼし，その育成を図ることが教科教育の場でも求められている．一方，数学という教科性を加味した際，コミュニケーションや相互作用といった活動的な側面が生徒の概念形成にどのような影響を与えているか明らかにならないことは多い．そもそも言語活動や対話的とはどんなことを指すのかという疑問さえ生じる．

これらの問いに解決策を与える研究として，数学をディスコース（discourse）として捉える研究が行われてきた(e.g.，関口，1995；大滝，2014；日野，2016)．ディスコースとは，「談話」「言説」「対話」等に和訳されるものの，学問領域によってそのアプローチは異なり，広範な概念を射程とする（中西，2008）．しかし，「使用状態にある言語」（鴨川，2000），「ある一まとまりのコミュニケーションシステム」（関口，1995）に見られるよう，一定の文脈において行われる対話性をもったコミュニケーションの一形式であるといえる．ディスコースという理論的視点を通じ，表面上の言語のやりとりだけでなく，その背後に潜む文化的・社会的な要素まで考慮した上で数学の授業を捉えていくことは，生徒の言語活動の様相や主体的・対話的な授業を記述する上で示唆を与える．

他方，筆者は数学授業において，交わす言葉が同じであるにも係わらず，生徒との話が何かずれていると感じたことがある．生徒が見えない力に導かれるように推論を推し進める様子や，逆に理解力が高いと思われる生徒が誤った考えから抜け出せずにいる姿を見たこともある．数学的な側面，あるいは暗黙的で文化的な価値的側面からディスコースを方向付けている何かの存在を，数学授業の実践者は実感しているのではないだろうか．

このような問題意識から，筆者は一連の研究により中学生の数学的な概念とその発達を目的とした授業において，ディスコースをメタ的に制御したり，方向付けたり，形作ったりしているメタディスコースの存在を示し，その様相を明らかにしてきた（浦野，2017a；浦野，2017b）．しかし，その理論枠組みや，理論枠組みを支える先行研究の詳細について，修士論文以外の場では，詳述しきれていない部分がある．

そこで本稿では，ディスコースを方向付ける意味でのメタディスコースに係る理論の詳細を提示することを目的とする．

この研究目的の達成に向け，第一にメタ

ディスコースの要素であると捉えられる先行研究を概観する．第二に，Güçler（2016）と Sfard（2008）を参照し，コモグニション論，ディスコース，メタディスコースの 3 点から再構築した理論を提示する．

２．メタディスコースに係わる先行研究

2.1　メタ言語・メタ表記

湊（1975）は認識には常に対象が存在するという前提に立ち，対象言語とメタ言語という視点から「数学について」の指導内容の学習効果を考察している．湊（1975）は数学教育について，生徒が操作を行う対象を主語，具体的操作や子どもの活動を述語の関係として示すことができ，この主語が対象言語，述語がメタ言語に当たると述べている．その上で，湊（1975）はその述語であるメタ言語を主語化し，学習対象として扱っていくことが数学という教科の特性であるため，数学教育においては数学言語に対する話しことばや自然言語などのメタ言語に感心と注意をもつことの必要性を述べている．

このように数学は，学習対象に対して，数学的な上位概念に当たったり，次の学習対象を引き起こす内容を持ち合わせたりしている．これらは数学的な概念が発達する方向性を示す要素であると捉えられる．本研究においては，湊（1975）に準じ，授業中のディスコースは対象について語られることで表象化されるメタ言語的な対象に向かっていくと考えられることから，ディスコースを形づくる要素として捉えていく．尚，本研究におけるディスコースの概念規定は 3.2 で行うが，ここではディスコースを，一般的なコミュニケーションや思考を，その背景となる社会的・文化的な側面も考慮した視点から捉えた研究用語であり，コミュニケーションの型の一つとしておく．また，ここでいう要素とは，全体を分断した一部ではなく，何らかの影響を与える単位的な視点である．したがって，要素が集まったからといって全体を示せるわけではなく，全体には要素の集まりだけでは説明できない暗黙性が関与しているものとする．

一方，平林・片山（1969）は，数学教育が「言語を用いて言語を教え，学ぶこと」という視点から言語や表記に焦点化し，今学習しようとしている表記を対象表記，そのために用いられる表記（主として日本語）をメタ表記とする．例えば，方程式を学ぶ場合，方程式は対象表記，その指導に用いられる言葉や数計算などはメタ表記であり，対象表記は教育内容に，メタ表記は学習指導論に属するとされる（平林・片山，1969）．更に，平林・片山（1969）によれば，このようなメタ表記には図的表記も含まれ，問題解決のヒントになる斜線や補助線，矢印などの教育的配慮から生じる図がそれに当たるとされる．

平林・片山（1969）は表記を言語のみに縛らず，記述物を含んだ広い意味として用い，「メタ」という言葉を対象の形成に影響を与える要素として捉えている．一方，平林・片山（1969）のいうメタ表記の中には，学習者によって既に学習され，対象表記になっている言語や表記は存在しないのだろうか．過去の学習で扱った数学的な言語や表記は対象化されていると捉えれば，湊（1975）のいうメタ言語との間には相違もあり，対象とメタという語を使う際の基準を明確にする必要がある．そこで本研究では，3.3 においてメタディスコースを規定する際に，「メタ」なる語を規定することとする．

2.2　社会的相互作用に見られる要素

関口（1995）は，教室という空間では言語の独特の意味が形成されることを明らかにしている．関口（1995）によると，中学校の論証指導における「言う」ことは，授業で使ってよいと認められた性質を用いて結論を導き出すことであり，それは同時に理由を挙げることが要求されている．また，関口（1995）

は「言う」ことのほとんどは「書く」ことと一体になっており，証明において「言われる」ことは書きコトバで表現することを意味していると述べている．

教室において言語的に表出する意味がある一方，関口（1995）に示される独特な意味は，参加者の間で暗黙的に共有され，言語として明示されずに学習の前提になるものである．これらはコミュニケーションや学習を規定し，その共同体への参加に係わる要素と捉えられる．それ故，子どもによってはこの意味形成が学習の困難性に起因する要因ともなり得る．

熊谷（1993）は，算数・数学の授業における社会的相互作用を通じて社会的な基準またはルールが生じると述べ，授業に内在する暗黙のルールを示している．熊谷（1993）は，問題を定式化する場面における暗黙のルールの三つの水準として，「第I水準：基礎的水準」，「第II水準：数学的知識のかかわった水準」，「第III水準：数学的適切性のかかわった水準」を示し，学習者や教師は適宜水準間を移行しているとも述べている．

これより熊谷（1993）は，意味の社会的構成過程を方向付けている要素をルールという側面から捉えている．授業という社会的な営みでは子どもの活動が何らかの規則に制約され，形作られる．また，授業では，教師の意図に係わらず，その時々，学習者や教師の状況によって適用される規則は異なり，それが学習の水準に影響を及ぼしている．更に，個人に目を向ければ，生徒それぞれが別々の規則に従って活動していることも考えられ，学習の多様性が想定される．相互作用やコミュニケーションは何らかの暗黙的なルールによって構成されるという立場の基，その規則を分析することで，個々の思考も含めたディスコースを方向付ける要素を特定していける．

2.3　中村(2007)による数学的対象と価値

中村（2007）は，数学的な概念の多くは視覚的に直接捉えることができないため，教師と子どもが暫定的に存在すると扱っているものを数学的対象と呼んでいる。中村（2007）は，三平方の定理の対象形成過程の考察から，辺の長さを求める操作の対象化が生じること，言語的な表現が与えられること，それを道具として問題解決がなされることを通じて生徒たちがその存在を捉えていったと述べている。また，中村（2007）は，三平方の定理という関係式が共同体に数学的対象として認められていくためには，「他の問題やるときに，あとからその式使えるかな」といった説明だけでなく，その意図の背景にある一般的な方法を求めようとする活動を方向づける価値を明示していくことが必要であったとも述べている。

中村（2007）は「メタ」という語は用いないながらも，操作や行為の中にあるメタ的，数学的な概念を抽象していくという解釈は湊（1975）と同様であり，数学的対象の形成には，表現の導入や対象自体の扱い方，付随する様々な情報の存在等，多くの要素が係わっている。知識を数学的対象という角度から見る際，多面的な扱い方から形成を図る必要がある。更に，数学的対象の形成には数学的価値が深く係わっており，その明示によってディスコースが認められ，公的に発達させていく数学化過程を促進させる。

2.4　金本(2014)にみられる要素

金本（2014）は今井（1995）等の先行研究を参考とし，コミュニケーションにおいて，表現通りの「表示的な意味」とは別に「付帯的な意味」もあり得ると指摘する．例えば「雨が降っている」という言明に対して「外には出たくない」という言外の意味が構成されることがある．金本（2014）は，このような暗黙性を加味したコミュニケーションの解釈において，既存のコードモデルでは困難が生じるため，推論モデルの必要性を指摘する．発話を理解する推論を行う際，その前提となる

のが言語的文脈（コンテクスト）であり，金本(2014)は文脈を,「発話の理解にあたって，発話の内容と共に推論（inference）の前提として用いられ，結論を導く役割をする想定（assumption)」と捉えている．さらに，金本（2014）は，学級という文化的な空間の中には，言語的文脈のメタレベルに位置付く，社会的文脈も影響を与えているという．算数・数学の問題について考え話し合っていくための土台である社会的文脈は,その例として「解き方の説明をしたり正当化したりすること」等に係わる社会的規範,「多様な数学的解き方,よりよい数学的な解き方」等に係わる社会数学的規範が挙げられている．

これより，コミュニケーションはある種の想定を促す文脈によって成立している.また，数学の教科性から，このような文脈は解釈のみならず，自らが思考し，表現し，行為する場面も含めたコミュニケーション過程全般について存在していると考えられる．コミュニケーション過程に内在する言語として表出していない意味は，関口（1995）の共同体特有の意味にも係わり，これらの暗黙化には言語や人間関係に係わる社会的文脈も影響している．数学の授業が社会的，文化的な営みである以上，授業中のディスコースを数学の学習内容に限って捉えず，社会的な要素まで含めた広い視点から捉えていくことが必要である．

以上より，ディスコースを方向付ける要素には暗黙的な規則や規範，共同体に特有な意味，文脈等がある．これらの要素を，既存のディスコース「についての」（cf.湊，1975）という意味を表す「メタ」という語を用い，メタディスコースという用語で包括していく．

３．メタディスコースの存在を支える理論

Güçler（2016）の理論枠組みとその背景となる Sfard(2008)を参照し,コモグニション，ディスコース，メタディスコースの 3 点から本研究の理論を示す．

3.1　コモグニション

3.1.1　コモグニション論

語「コモグニション（commognition)」は A. Sfard の造語である．Sfard（2008）において，コミュニケーション（communication）と認知（cognition）の組み合わせとするこの語は，思考と個人間のコミュニケーションを包含し，これら 2 つの過程のタイプの統合を強調するために創り出された．Sfard（2008）による思考の定義は：

Thinking is an individualized version of (interpersonal) communicating.

（Sfard，2008，p.81）

*思考*とは,（個人間の）コミュニケーションの個人化バージョンである．

（Sfard，2008，p.81：筆者訳）

とされ,思考は個人が他人とコミュニケーションする方法で自分自身とコミュニケーションすることができるようになるときに表出する人間の行為の型だと考えられている．コモグニション論では一般的にコミュニケーションという言葉が表す個人間のコミュニケーションに加え，一見個人的な「思考」もコミュニケーションに含まれる．

このようにコモグニション論は思考とコミュニケーション，表記を同じ現象の異なる表れと捉え，統一的に取り扱う．これにより，思考や認知を従来の観察不可能な精神内の現象でなく，教室内のコミュニケーションの中に見いだすことが可能になる（大滝， 2014）．

コモグニション論では，何らかのパターン化された規則によってコミュニケーションが成立し，また，それに適応していくことが学習であるとする．このような視点において Sfard（2008）はメタ規則と対象規則を区別することが重要だと述べているが,詳しくは 3.3 で述べる．

3.1.2 コモグニション論における数学的対象

コモグニション論では，記号表現（signifier，以下図中 S）を実体（realization，以下図中 R）に関連付けることによって学習を定式化する．Sfard（2008）によれば，記号表現とは名詞的に使われる記号，実体とは知覚を通してとらえられるものであり，記号表現は通常多くの知覚的に近接可能な実体をもつ（p.154）．例えば「7x+4=5x+8 という方程式の解」という記号表現は，「2x+4=8 の解」といった代数的な表現，グラフを用いた幾何学的な表現，数表を用いた表現などの実体が付随する．コモグニション論では，このような記号表現と実体の関係が樹形上に連なったものを数学的対象とする（図 1）（Sfard，2008，pp. 164-167）．

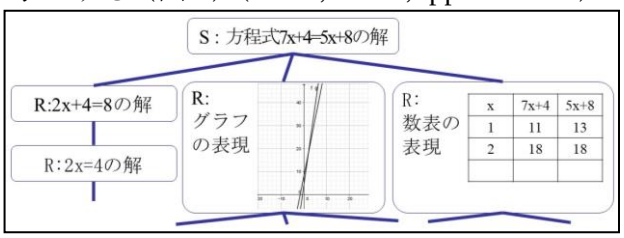


図 1　記号表現「方程式7x+4=5x+8の解」の実体の木（Sfard, 2008, p. 164：筆者訳出）

コモグニション論における数学的対象の形成は名辞によって以下の二つに分類される．一つは初源対象(primary object)と呼ばれる，見たり触ったりできる知覚可能な具体物に，名前や記号を与えることで形成される対象（例えば犬に名前をつける）であり，もう一方は現存のディスコース対象や初源対象に，以下の方法によって名詞や代名詞を与えることで形成される対象である（Sfard，2008，p.170）．

- 同一化(saming)：前もって「同じこと」であると思われないいくつかのものに，一つの記号表現を割り当てること．例えば，a/b（a，b は数字の列）の型のすべての表記に「分数」という記号表現を割り当てること．
- カプセル化(encapsulation)：ある対象の集合に一つの記号表現を割り当て，それら集合の性質をまとめて言及するときに，単数形でその記号表現を使うこと．例えばある家族を「アダムスファミリー」と呼ぶこと．
- 具象化(reifying)：いくつかの対象についての過程に関する語り（動詞）を，対象間の関係に関する「タイムレス(timeless)」な語りと（名詞化）すること．例えば，「7 つの全体を 5 つの部分に分ける」という操作を 5/7 と表記すること．

以上より本研究では，コモグニション論に基づき，記号表現と実体の関係によって数学的な概念を捉えていく．また，数学的対象の形成にはディスコースが深く関与する．これは 3.2 で述べることにする．

3.1.3　Güçler(2016)の実践におけるコモグニション

Güçler（2016）はコモグニション論に基づき，「関数」という数学的対象を言語に注目して分析している．例えば Lea（Güçler（2016）の教授実験の調査参加者）は関数の定義づけを行う場面で，「関数」という記号表現について「一つの変数がもう一つと関係して変わる 2 変数間の依存性」だと語り，実体化している．さらに，実体として現れた言葉，例えば「関係」を次の記号表現とした新たなディスコースを構成しているケースもあり，記号表現と実体は相対的な関係である．

このように Güçler（2016）は，記号表現を実体化する活動を繰り返し，学生が様々な実体を知覚，関係付け，序列化することで，関数という数学的対象の形成を試みている．

3.2　ディスコース

3.2.1　コモグニション論におけるディスコース

コモグニション論における分析単位はディスコースであり，Sfard（2008）はディスコースをコミュニケーションの特定の種類であるとする．言語ディスコースは言葉の使用（word use），視覚的媒介（visual mediators），認められた物語（endorsed narratives），ルーチン(routines)によって特徴づけられる(Sfard,

2008，p.297）．言葉の使用とは，そのディスコースが持つ独特な語の使い方のことであり，増加量や傾きなどが挙げられる．視覚的媒介とはコミュニケーションを高めるために用いられる可視化できる対象であり，数表やグラフ，代数的記号等である．認められた物語とは，対象，対象間の関係，対象の伴う過程の解説に係わり，共同体において真であると認められる一連の発言を意味し，数学的な定義や定理，性質を含む．例えば，一次関数 y=ax+b の変化の割合は一定である等が挙げられる．物語という語を使っているのは学習者の関係する共同体において，それが築かれた文脈を意識してのことだろう．また，ここでいう発言とは口頭のものに加えて書かれたものも含まれるのはコモグニション論の特徴でもある．ルーチンとは，類似の状況で同じことが繰り返される，ディスコースのパターンを決定するメタ規則の集合であり，計算することなどが挙げられる．

3.2.2 Güçler(2016)におけるディスコースの解釈

Güçler（2016）の実践は「関数の定義づけ」を行い，大学院の学生がもつ関数に係るコモグニションを分析している．従って，授業中は Sfard（2008）の 4 つの特徴によって認められる関数を巡ったディスコースが構成され，その記号表現には常に関数と関連する名詞が含まれる．この活動から，「独立変数，一意対応，表」といった言葉の使用や「数表や式，グラフ」等の視覚的媒介を道具として用い，「独立変数が一つの従属変数のみと対になる」「一つの集合から要素を取り出し、それらをもう一つの要素に移す（写像）規則」などの認められた物語が実体として現れている．また，時には「関数は連続である」といったそのディスコースが構成された時の学習範囲のみで認められる，他の場面では誤っている可能性がある物語が生ずることもある．

これより Güçler（2016）は，ディスコースを Sfard（2008）のいう四つの特徴という大局的な視点に加え，より局所的に数学的対象の形成過程である記号表現と実体の関係を分析している．記号表現と実体に着目し，ルーチンやメタ規則がその関係を結ぶという視点は，大滝（2014）の「ディスコースのコモグニション論的三角形」（図 2）の解釈と同様であり，数学的対象を実体化していく過程がディスコースであるといえる．

図２ コモグニション論的三角形（大滝, 2014）

Güçler（2016）のディスコースの構成には，記号表現の実体化があり，数学的対象の形成がある．

3.2.3 本研究におけるディスコース

以上より，本研究におけるディスコースを，記号表現と実体を関連付けるために言葉や視覚的媒介を用い，ルーチンや認められた物語によって特徴づけられるコミュニケーションと定義する．ディスコースの構成は Güçler（2016）の捉えに準ずる．

3.3 メタディスコース

メタディスコースを捉える理論枠組みを Güçler（2016）と Sfard（2008）の捉えるメタ規則，メタディスコースの視点から構築する．

3.3.1 対象規則とメタ規則

Sfard（2008）における対象規則（object-level rule）は，ディスコース対象のふるまい（behavior）に関する規則であるとされる．例えば，「n 角形の内角の和は，(n－2)×180°に等しい」という数学的な物語は幾何学の対象規則である（Sfard，2008，p.201）．

それに対してメタ規則は，メタディスコース規則（meta-discursive rule）の略であり，ディスコース参加者の活動においてパターンを

定める規則とされる（Sfard, 2008, pp.200-202）．具体的に，Sfard（2008）は，中学校以降の代数ディスコースにおいて「a(b+c)=ab+ac」という対象規則に替わる以前の，算数の段階における分配法則はメタ規則であると述べている．このようなメタ規則は操作や活動に潜む次の対象規則につながる規則である．また，対象規則を導き出し(produce)，その公式化（formulation）や具体化（substantiation）に係わる，証明したり推論したりする活動を管理する規則でもある．更に，Sfard（2008）には一般的で構成員に共通する（generic）と表現されるメタ規則も含まれ，人間関係やその場の環境も考慮されている．授業には社会的，文化的な影響もあり，この視点も重要である．

以上より本研究では対象規則とメタ規則を次のように定義する．対象規則とは，記号表現と実体によってパターン化された認められた物語やディスコースである．メタ規則とは，子どもの行為や操作に潜み次の対象規則となり得る概念や数学的な推論に係わる「数学的なメタ規則」と，ディスコースの創造や正当化を文化的，社会的な側面から暗黙裡に規制している「暗黙的なメタ規則」の二つの規則の総称である．メタ規則について前者の「数学的なメタ規則」は湊（1975）のメタ言語や金本（2014）の数学的実践の前提となる言語的文脈に，後者の「暗黙的なメタ規則」は熊谷（1993）のいう暗黙のルールや，金本（2014）のいう社会的文脈に係わると考えられる．

また，ディスコースの特徴の一つであるルーチンは，このようなメタ規則の集合であるため，本稿ではメタ規則という語を用いる．

3.3.2　本研究におけるメタディスコース

2 章において「メタ」という語を「についての」と規定したことより，メタディスコースとは「ディスコースについてのディスコース」である．一方，Sfard（2008）はメタ規則の特徴に暗黙性（tacit）を挙げていることから，授業中には表出しないディスコースがありうる．その表出しないディスコースこそがメタディスコースに相当する．これより本研究において，ディスコースは授業中主として言語として表象化され，議論や個人の主たる考えに用いられるものであるが（図 3），その背景には，ディスコースを方向付けるメタレベルの規則があり，そのメタ規則を含むものをメタディスコースと呼ぶのである（図 4）．

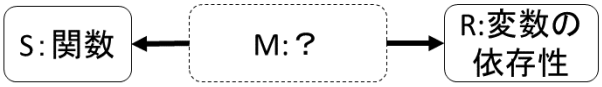


図３　本研究におけるディスコース

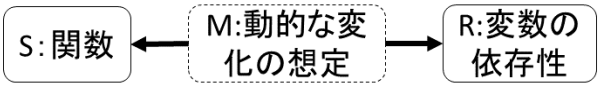


図４　本研究におけるメタディスコース

ディスコースとメタディスコースは理論におけるモデルにおいては区別をするが，この区別は便宜的な物であり，現実にはこの両者にはこの区別では捉えられない何らかの関連性もあるだろう．

(1) 数学的なメタディスコース

Sfard（2008）の論ずるメタディスコースは，「代数ディスコースは算数ディスコースのメタディスコース」（図 5 の C：筆者訳出）等の包摂関係(subsuming)を示す（p.121）．これは「2 数の和は逆順での和に等しい」という有理数のディスコースが，同一化(saming)，具象化(reifying)され，簡潔で数学的に精錬された「p+q=q+p」という代数式のディスコース

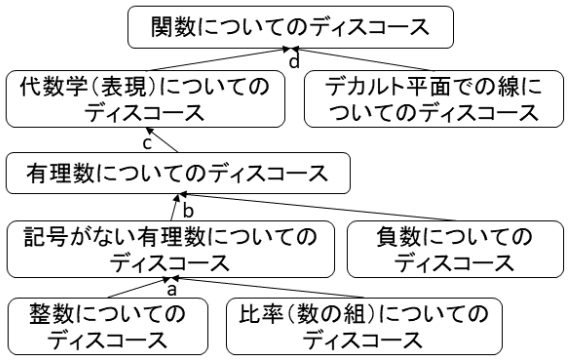


図５　計算ディスコースの発達（Sfard, 2008, p.121：筆者訳出）

に発達することを指す．授業中に見られるパターン化された活動や操作（ルーチン）には次の対象規則と成り得るメタ規則が含まれることを示している．これらは湊（1975）の示すメタ言語に係わると考えられる．

Güçler（2016）は，3.1.3 で述べた Lea の「関数」という記号表現に対する「2 変数間の依存性」という実体は，「動的な変化の想定（assumption)」というメタ規則に基づくと分析した（図 4)．これは，金本（2014）のいう言語的文脈と捉えられ，結論を導く役割の想定,いわば推論モデルの一部といえる.更に，Güçler（2016）の分析では，同一化をメタ規則として捉えていることから，Güçler（2016）の理論枠組みでは，記号表現と実体を結び付け，数学的対象の形成やその過程での正当化に用いられている数学的な内容や性質，推論に係わる数学的なメタ規則を分析している．

本研究では，数学的なメタ規則がディスコースを方向付けている要素と考えられることから，記号表現と実体を関連付ける数学的なメタ規則が明示されたディスコースを数学的なメタディスコースと捉えていく．

例えば，二次関数の変化の割合が一定だという意見を否定する生徒の根拠が，表を用いて具体的に区間[1，2]と[2，3]の値を求めた結果だとする．この際,「S：二次関数の変化の割合」に対する「R：一定ではない」を形作るメタ規則は「M：反例が存在すれば偽」であり，数学的なメタ規則に基づいた数学的なメタディスコースが存在する（図 6)．

図６　数学的なメタディスコース

次に，二次関数の傾きが区間を結ぶ直線の傾きとは別だという発言がある．この理由が二次関数の傾きというからには区間ごとの傾きではなく，グラフ全体の傾きがあると考えているとすれば，その時の数学的なメタ規則は「M：曲率の想定」である．これは湊（1975）のメタ言語に係わり，微分や導関数につながる数学的なメタディスコースである（図 7)．

図７　数学的なメタディスコース②

二次関数の変化の割合は一定ではないと実体化したとする．その考えが「y を変化させる値だから」に基づいていれば,「S：二次関数の変化の割合」に対する「R：一定ではない」を形作る数学的なメタ規則は「M：変数間の対応関係の想定」である（図 8)．このように，数学的なメタディスコースの誤った適用が誤謬を生じさせるケースもあり得る．

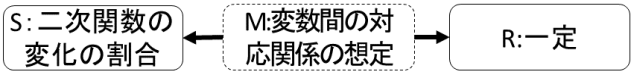


図８　誤謬に関わる数学的なメタディスコース

(2) 暗黙的なメタディスコース

Güçler（2016）のメタ規則には，個人の嗜好（preference）や教師としての立場など，価値観や社会規範も示されている．このような暗黙的なメタ規則は Sfard（2008）のいう一般的で構成員に共通する(generic)メタ規則や，金本（2014）のいう社会的文脈に相当し，個人の選択行為における判断基準や行為の規定要因として捉えられる（山崎，2015)．

これより，本研究では暗黙的なメタ規則がディスコースを暗黙的に方向付ける要素と捉えられることから，この規則を伴ったディスコースを暗黙的なメタディスコースとする．

以上より，本研究におけるメタディスコースは，数学的なメタ規則と暗黙的なメタ規則によってその存在を示すことができる．但しこの二つは理論枠組み上区別するが，互いに関連し合い，分離し得るものではない．

例えば，二次関数の変化の割合は a で一定であるという発言の根拠が，一次関数学習時の認められた物語を用いて「授業で習ったから」と語られる．この記号表現「S：二次関数の変化の割合」の「R：a で一定」という実

体は,「M : 教師が断定したことは正しい」という規範に係わるメタ規則に方向付けられており,暗黙的なメタディスコースが存在する.

図９　暗黙的なメタディスコース①

次に，上記の例と同様に，変化の割合はいつでも一定であるという考えが共有されているグループがある．そのグループで，反対意見を出した生徒に対して「なんだよ，裏切るのかよ.」と発言したとする．そこでは数学的なメタ規則でなく,「M:集団性に係る価値観」をメタ規則とした暗黙的なメタディスコースが構成されていることになる（図 10）.

図１０　暗黙的なメタディスコース②

(3) 暗黙化されたメタディスコース

メタ規則が，暗黙的な性格をもつ一方，ディスコース自体を暗黙化させる様相も持ち得ると考える．図 11 のように R を実体とするディスコースを構成すれば，同時に考えた可能性がある R'は表出せず，いわば暗黙化されたメタディスコースと成り得るからである．これら授業中言語として表出しないディスコースは，関口（1995）の共同体特有の意味や金本（2014）の付帯的な意味に係わる.

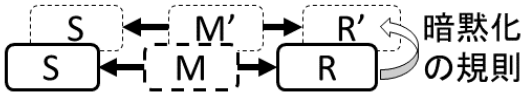


図１１　暗黙化されたメタディスコース

例えば，話者が関数領域において変数の区間を表すことを意図して不等式という語を用いたとする．この際,「S : 不等式」という記号表現に対する「R : 区間を表す」という実体は,「M : 関数領域での使用の想定」というメタ規則によって方向付けられている．しかし，通常この意味は,「M : 代数領域での使用」をメタ規則として形作られる「R : 不等号を用いた式」という実体が形成する意味によって暗黙化されている（図 12）．この暗黙化されたメタディスコースは,「M : 使用領域の転換」という暗黙化するメタ規則によって生じており，意味の解釈にはこのメタ規則の共有が必要になる．このモデルは，関口（1995）の共同体特有の意味や，金本（2014）の付帯的な意味が構成される様相を示している.

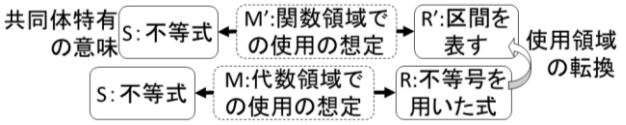


図１２　暗黙化されたメタディスコース

４．総括的考察と結論

本稿ではディスコースを方向付ける意味でのメタディスコースに係わる理論や，その背景となる先行研究を詳述してきた.

その結果，授業に影響するディスコースレベルでは語り切れない多様な要素が存在することが明らかとなった．通常我々は言語のやり取りで授業が成立していると考えがちであるが，本来的にはコモグニションという語に示されるように，子どもの認識とコミュニケーションが相まって成り立っており，しかもそれはメタディスコースの存在によって方向付けられ，形作られている．授業には言語として表出していないメタレベルの世界がディスコース以上の影響力を与え，授業があたかも生き物であるかのような様相を呈している.教師がこのような視点をもたずに，言語的なコミュニケーションのみで授業を捉えようとするならば，学習に係わる重要な見落としが生じるのではなかろうか．我々は常に，子どもの背後にある何物かの存在を意識しながら授業を展開していく必要があるだろう.

一方，金本（2014）は，授業における言語的文脈と社会的文脈は複層的に構成されていることを明らかにしている．これより，本研究では同一のレベルで扱ってきた数学的なメタディスコースと暗黙的なメタディスコース

が同時に構成される場面も想定される．この問題意識に加え，この二つのメタディスコースが互いに与える影響についても研究を進めていく必要がある．

付記　本稿で用いた事例は，筆者の平成 29 年度修士論文のデータを加工して用いた．

引用・参考文献

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics*, 91, pp.375-393.

日野圭子(2016)．関数の授業における数学的対象の構成－Sfard の談話論からの考察－．日本数学教育学会，第 4 回春期研究大会論文集，41-48.

平林一栄・片山一法(1969)．図的表記の言語性．日本数学教育会誌，臨時増刊，数学教育学論究，第 14 号，1-14.

今井邦彦(1995)．関連性理論の中心概念．言語，第 24 巻，第 4 号，20-29，大修書店.

鴨川卓博(2000)．談話，「語り」，ナラディヴーディスコースのすがたー. 大阪教育図書.

金本良道(2014)．数学的コミュニケーションを展開する授業構成原理．教育出版.

国立教育政策研究所(2016)．国研ライブラリー資質・能力〔理論編〕．東洋館出版.

熊谷光一(1993)．算数の授業における数学的適切性の性質に関する考察．日本数学教育学会，第 26 回数学教育論文発表会論文集，205-210.

湊三郎(1975)．数学教育における教育内容に関する一考察．秋田大学教育学部教育研究所報，第 12 号，92-110.

文部科学省(2008)．幼稚園，小学校，中学校，高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善について（答申）．http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo0/toushin/__icsFiles/afieldfile/2017/01/10/1380902_0.pdf

文部科学省(2016)．次期学習指導要領等に向けたこれまでの審議のまとめのポイント．http://www.mext.go.jp/component/b_menu/shingi/toushin/__icsFiles/afieldfile/2016/09/09/1377021_3.pdf

中村光一(2007)．数学授業の相互行為における数学的対象と価値．日本数学教育学誌数学教育，第 89 巻，第 1 号，13-22.

中西満貴典(2008)．ディスコース概念の再考－Van Dijk 及び Fairclough の言説概念の検討－．岐阜市立女子短期大学研究紀要，第 57 号，29-39.

大滝孝治(2014)．確率概念の形成におけるミスコンセプションの研究．広島大学大学院博士学位論文．http://ir.lib.hiroshima-u.ac.jp/files/public/3/36449/20141202145315601 96/k6488_3.pdf

関口靖広(1995)．ある論証指導に関する民族的研究－教室内ディスコースの分析から－．日本数学教育学会第 28 回数学教育論文発表会論文集，279-284.

Sfard,A. (2008) *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing.* New York: Cambridge University Press.

浦野正(2017a)．中学校数学授業におけるメタディスコースに関する研究－B. Güçler による理論枠組みの精緻化を通して－．上越数学教育研究，第 32 号，85-94.

浦野正(2017b)．変化の割合の授業におけるメタディスコースの様相－中学 3 年生を対象としたデザイン実験を通して－．日本数学教育学会, 第 50 回数学教育論文発表会論文集，365-368.

山崎美穂(2015)．数学教育における価値を捉える視点とその理論的背景．日本数学教育学会誌，第 97 巻，数学教育学論究，臨時増刊，201-208.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.63-74

中学校数学科における世界探究パラダイムに基づいた SRP についての研究

葛岡　賢二
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

筆者は，中学校の教育現場における日頃の数学授業の経験から，生徒が数学を学習する必要性を十分感得することができていないように感じた．その要因は何であろうか．この疑問に対して，問題の所在は現在の中等教育の数学の授業のあり方にあるのではないかと考えた．これまでの授業では，やや教科で閉じられた指導・学習が多く，限られた道具を用いて，必要性もわからないままに数学の知識や技能を勉強しそれを応用するという学習が主であったように思う．一方，今日の学校教育では，これまでの内容（コンテンツ）ベースのカリキュラム構成から，資質・能力（コンピテンシー）ベースへと移行しつつある（石井，2015; 奈須ほか，2015）．

このような背景のもと，筆者は，「世界探究パラダイム」（シュバラール，2016）という数学教育の考え方，世界探究パラダイムに基づいた “SRP (Study and Research Paths) ”（宮川ほか，2016; 濵中ほか，2016）という探究活動に興味を持った．SRP は，問いを重視し，問いに答えるために使えるものは何でも利用し，必要なものは必要に応じて学習するといった研究者の探究活動をモデルとした学習である．そして，SRP がわが国の数学教育に何をもたらしうるのか，その可能性について研究を進めてきた．

そこで本研究の目的を二つ設定した．第一の目的は，世界探究パラダイムに基づいた SRP という探究活動を中学校で実践することによって，具体的にいかなる「教科横断的な学習」が可能であり，それはいかなる数学的な活動をもたらすのか，を明らかにすることである．第二の目的は，SRP ではいかなる「主体的な活動」が可能となるのか，それはこれまでの数学の授業で想定されてきたものといかに異なるのか，を明らかにすることである．これらの目的を達成するために，世界探究パラダイムに基づいた SRP を中学校で実践し，「教科横断的な学習」と「主体的な活動」に焦点を当てて，収集したデータの分析と考察を行う．世界探究パラダイムや SRP が，今日のわが国の学校教育の流れに合致したものと考えられることから，本研究は，今後の資質・能力を重視した授業における SRP の可能性を示すとともに，実際に指導・学習を進める上での示唆を与えてくれると期待する．

なお，本研究の成果は筆者の修士論文にまとめられている．本稿はその要点をまとめたものである．詳細は，修士論文を参照されたい．

２．先行研究から

本研究の位置づけをより明確にするために，「教科横断的な学習」と「主体的な学習・活動」に関連する先行研究を振り返る．

(1) 教科横断的な学習について

「教科横断的な学習」の先行研究には，学校教育で進められてきた研究として代表的なものとして，総合的な学習の時間と関連させた数学学習があった. 高階ほか (1996) は, わが国で総合学習が学校教育に導入される際に「クロスカリキュラム」の構想を先導的に示した．そこでは, 1980 年代後半からアメリカやイギリスなどの諸外国が取り組んでいるクロスカリキュラムの実態を報告するとともに，わが国の新しい教育課程と総合学習の在り方を示し，学校教育への示唆を得ている．

一方，数学教育と関連する総合学習についての研究は，総合学習の中でいかに数学的な内容を扱うかといった実践的なものが中心であった．例えば，筑波大学附属中学校の研究グループは，「総合学習」において数学にかかわるテーマを掲げ，図形や統計に関する実践を試みた（両角，2002; 鈴木ほか，1999）．そして，体験的・日常的な事象と数学を関連づけ，やや高度な数学を扱うなど，学習内容や学習形態を柔軟にし，通常の授業を超えた存在として捉えることが総合学習では大切と指摘した（鈴木ほか，1999）．さらに別の研究では，牧下 (2012) は，総合学習における探求的な問題解決学習として，算額を教材化した授業等，複数の授業実践を進めてきた．それらから，総合学習のねらいとする教科等の枠を超えた横断的・総合的な学習と体験的活動を通した数学科を中心とした探求型の授業が重要であると指摘している．総合学習が導入された時期にこのような授業実践が多く行われていたが, 最近では,「学力向上」「各教科の授業改善」が叫ばれており，総合的な学習の時間より，各教科教育に重きが置かれている．

そして，近年 ESD や STEM 教育が国際的に注目を集めているが，日本では研究が進んでいるとは言い難い現状もある．しかしながら，学習指導要領次期改訂に向けた方針では「教科横断的な学習」の重要性を指摘し，総合的な学習の時間で探究型の学習が推奨されていることから，数学教育の文脈における教科横断型の授業について，さらなる研究の必要があろう．

(2) 主体的な学習・活動について

次に,「主体的な学習・活動」についての先行研究を振り返る．つまり，わが国の数学教育において，これまでにいかなる主体的な活動が実際に生じていたのかを過去の先行研究から明らかにする．わが国の「主体的な学習や活動」についての先行研究を振り返ると, 1990 年代から「主体性」や「主体的」といった語が多く使われるようになり，子どもたちにいかに主体的な学習を行わせるのかその方法が論じられてきた．湊ほか (1994) は,「主体的」という語が「自主性・自発性」と同義に捉えられることが少なくないものの,「自主的・自発的」と「主体的」の二つの学習には明確な違いがあると指摘している．また,「主体的」という語は用いられないが，学習者の主体的な学習や営みを特徴付ける理論も見られる．「教授学的状況理論」（以下，TDS）では,「亜教授学的状況」という概念があり, それは, 学習者が, 教師に依存せずに, ミリュー M との相互作用のみで新たな知識を創り上げていると思えるような学習場面を意味する（Brousseau, 1997; 宮川，2011; 石川・宮川, 2012）．

これらの先行研究を踏まえると，主体的な学習や活動には，一般に二つの側面が考慮に入れられている．一つは，教師や親に言われなくとも，自ら進んで自主的・自発的に学習に取り組むといった，学習への取り組み方もしくは取り掛かり方である．もう一つは，学習活動において，教師に依存しながら問題を解決し新たな数学的知識を獲得するのではなく，自らの考えに基づいて問題を自ら解決するといった活動の仕方である．すなわち，前者は数学学習全体についての主体性を問題とし，後者は個々の学習活動における主体性を問題とする．それぞれ「主体的な学習」と「主体的な活動」と呼ぶことができよう．この視点からすれば，今日の学習指導要領で強調されている「数学的活動」や

上の亜教授学的状況は，二つ目の主体性にかかわるものである．そして，本研究で着目するのも，SRP における「主体的な活動」である．

３．本研究の理論的枠組み

本研究の理論的な枠組みについて述べる．まず，教科横断型の授業をデザインするうえで拠り所となった「教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic)」（以下，ATD）の諸概念について，特に，未知なるものへ前向きに探究し続けようとし，開かれた探究を生み出す「世界探究パラダイム」について述べる．そして，世界探究パラダイムに基づいた SRP の基本概念について述べる．SRP は，本研究で行った教授実験の基となる重要な理論的枠組みであり，SRP を特徴づける諸概念は，授業実践（教授実験）における授業デザインのみならず，授業で収集したデータの分析に対し重要な視点を提供する．SRP の探究活動では，問いの役割に重きを置き，ミリューM [1)]との相互作用によって探究が進む．さらに，メディアの利用を前提とした探究活動が期待される．

さらに，ATD では，数学的な知識や活動，その体系を「プラクセオロジー（praxeologie）」の概念でモデル化する．教科横断型 SRP における数学的な活動を特定しその性質を記述するために，ATD の主要概念のひとつである「プラクセオロジー」（Chevallard, 2006; 宮川, 2011; ボスク・ガスコン, 2017）を用いる．この概念は，人間の活動や行為が実践的な側面 (praxis) と理論的な側面 (logos) を持つことに注目し，数学的な知識や活動，その体系をモデル化するものである．学習者の数学に関して用いた知識のみならず行為をも同時に記述できるため，数学的な活動を詳細に捉えられると期待する．

プラクセオロジーの要素と意味をまとめると表 1 のようにまとめられる．タスクタイプとテクニックは，数学に限らず人間のあらゆる行為や営み，活動を記述することができ，テクノロジーとセオリーは，実践部の背景となる知識を記述することができる．これら四つの要素で一つのプラクセオロジーが構成されるのである．

本稿では，生徒たちの探究活動を分析する視点として，「問いと回答の往還」「メディア・ミリューの往還」を採用する．そして，本研究の目的でもある，「いかなる教科横断的な学習を可能にしたのか」や「いかなる主体的な活動が生じたのか」を明確にする．なお，数学的な活動の分析については，「プラクセオロジー」を用いて記述することとする．これらを用いることによって，生徒たちの探究活動の様子を示すことができると考える．より詳細な分析は，修士論文を参照されたい．

表 1　プラクセオロジーの要素と意味（宮川，2011，p. 53）

実践部 (praxis)	T：タスクタイプ（タスク t ∈T）	ある対象の解決にかかわる問いの種類 一つ一つの問いをタスク (t) という
	τ：テクニック	タスクを成し遂げる解決方法
理論部 (logos)	θ：テクノロジー	テクニックを正当化する，説明し理解する，生成する理論的なもの
	Θ：セオリー	テクノロジーをさらに正当化，説明，生成するもの

４．教授実験の概要と分析方法

ここでは, 教科横断型 SRP の教授実験について，授業デザインを行う．

(1)　問いの設定

SRP では，最初の問い Q_0 が重要となる．本教授実験では，中学 2 年生を対象に教科横断型 SRP を実践するにあたり，次の Q_0 を最初の問いとして設定した [2].

> Q_0 :「1900 年までの世界人口の総和と 1900 年以降の世界人口の総和が同じになるのは何年か？」

今回この問いを採用した理由の一つ目は，最初の問い Q_0 が生徒たちにとって, 先述した“生成的な強い力を持った自然な問い”である点である．「世界人口」という言葉は生徒には壮大な印象を与えるかもしれないが，社会・生活と関連した問いであること，そして自らは問うたことはないかもしれないが，言われてみればどうなのだろうと中学生も疑問に思いそうな自然な問いである．さらに，この問いには必ずしも明確な回答がないため，様々な探究が想定されるとともに生徒たちの主体的な活動が可能になるであろう．理由の二つ目は，数学的な活動が必要になる点である．生徒たちの探究の最終的な回答 $A^{\blacktriangledown}$ を作り上げる場面では，方程式や関数やそのグラフ，表，関数で囲まれた図形の面積など，多領域の数学学習にかかわる知識・技能が必要となるであろう．さらに，新たな数学的な内容を必要に応じて学習することも期待される．理由の三つ目は，教科横断的な学習が期待される点である．先述した数学的な活動に加え，社会科等他教科の知識を融合した学習が見込めるであろう．さらに，「世界人口」という語が，日常生活に結びついた現実的な問題を想起させ，規定の学習内容の枠を超えた幅広い学習が期待される．すなわち，この問いは，SRP の Q_0 が満たすべき三つの条件 (1) 数学の核心をつくもの, (2) 学校を超え, 社会と関連するもの，(3) 学問的関心に基づく新たな探究に導くもの（葛岡, 2017）を満たしていると考える [3].

(2) 授業の実際の概要

授業は，公立中学校第 2 学年の 5 クラスを対象とし，それぞれ全 4 時間の授業を実施した．1 クラスの人数は約 32 名で，1 グループ 3～4 名で 7～8 グループを作った．授業はコンピュータ室で行い，探究活動はグループ活動とした．数学の成績が比較的高い生徒を各グループに割り振り，教師による意図的なグループ編制がなされた．教授実験においては，生徒らのワークシートを始め，AG-デスクトップレコーダー[4]を用いてパソコン画面と生徒たちの音声，ビデオカメラ 5 台用いて各グループの様子を録画し，データを収集した．

５．教授実験の分析

生徒たちが取り組んだ探究は，前半はいろいろな問いが生まれそれについて探究していたが，それらの問いは社会科的な問いが中心であり，その探究は，メディアを探るようなやや調べ学習的な探究であった．そこでは，いろいろな情報に出会い，既存の回答 $A^{\diamondsuit}$ を見つけてはそれらが有力な情報なのかを判断していた．生徒たちは，問い Q や既存の回答 $A^{\diamondsuit}$ やデータ D をミリュー M に含め，問いと回答の往還が見られたが，その時点ではまだ数学的なタスクが生じておらず，数学的な活動は表れなかった．そして次第に，数学的な探究が必要になり，数学的な活動が社会科的な問いの回答を求める手段となっていた．そのようなグループは，グループ活動が活発になり，個人で探究したことをグループで共有し，さらにグループ内の相互作用で新たな問いや探究の方向性を確認した．一方で，最終的な回答 $A^{\blacktriangledown}$ を作り上げることができなかったグループは，社会科的な問いに対する調べ学習的な学習から抜けきれず，数学的なタスク

が生じなかった．

以下では，実際の教授実験で得られた C 班と E 班の二つ班の活動を分析する．C 班は最終的に数学的な活動に進み，教科横断的な学習や主体的な活動が表れたグループである．一方，E 班は数学的な活動に進まず，思うように探究が進まなかったグループである．この二つの班の分析を取り上げる理由は，教師が期待するような活動のみならず，教師の視点からうまくいかなかったと思われる活動をも取り上げることにより，何が数学的な活動を生じさせ，何がそれを妨げているのか，条件と制約を議論する際の実験データとなるからである．

(1) C 班の探究

C 班の探究は，第 1 時は調べ学習的な活動であった． C 班は，情報を鵜呑みにせず，その真偽を確かめようとしていた．C 班の探究姿勢は主体的な活動，とりわけ，生徒たちが探究活動の中で抱いた問いや疑問に自ら向き合い取り組む姿が見られた．その様子が表れた場面が至る所で観察された．その事例をいくつか示す．まず，第 1，2 時で生じた問いは以下のものであった．

$Q_{1\text{-}1}$：総和とは何か
$Q_{1\text{-}2}$：総和を求めるにはどうするのか
Q_2 ：現在の世界人口は何人か
$Q_{2\text{-}1}$：1900 年までの世界人口は何人か
$Q_{2\text{-}2}$：1900 年以降の世界人口は何人か
Q_3 ：人類の誕生はいつか

C 班では，各問いに向き合い，インターネットから既存の回答や様々なデータを得ることにより，自らの回答を作り上げていった．Q_3 に対して最終的に，人類の起源に関して得た情報を調べたり議論したりして，

A_3：人類の起源は 2 万～1 万年前のホモ・サピエンス（新人）で，氷河時代末期を自らの回答とした．

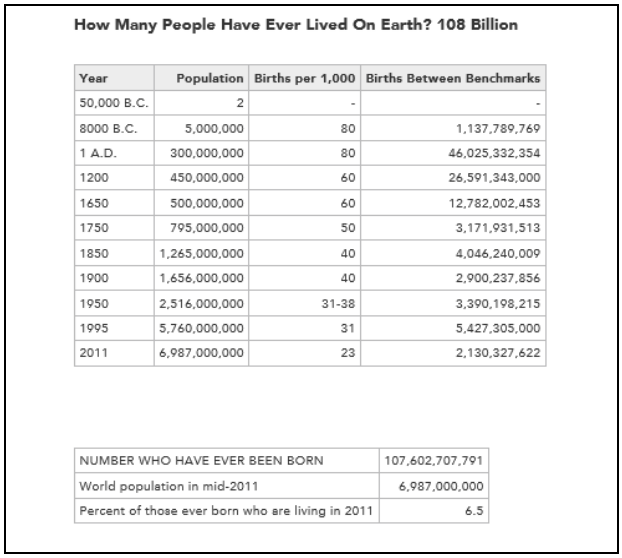
C 班は，探究の前半では上のような社会科的な問いが多かった．それは，真偽を確かめるようとする探究が起こったためである．そして，いろいろな問いから得られた $A_i^{\diamond}$ によって構成されたミリュー M との相互作用によって，A_3 を作り上げた．ここでは，数学的な活動は生じておらず，数学的な概念や性質などとの相互作用はなかった．数学的な問いはもう少し後で徐々に生じてくる．また，C 班は，「Q_4：今までに何人の人間が地球上にいたのか」の問いに取り組み，世界人口の推移と累計のページ[5]より，

$A_{4\text{-}1}^{\diamond}$：過去 6000 年間に存在した全ての人口のおおよそ 5 分の 1 が現在の人口である．68 億人（2009 年）×5＝340 億人．340 億人＋68 億人＝408 億人が今までの世界人口の総和である．

という既存の回答を得た．生徒たちは，この既存の回答に見られる数値に対し，「340 億人？」「なんで？」「408 億人？」などの疑問を呈し，さらにインターネットから，$A_{4\text{-}1}^{\diamond}$ と値が異なる別の既存の回答，

$A_{4\text{-}2}^{\diamond}$：これまでに地球上に生まれたヒトの総数は約 1076 億人[6]

を得た．C 班では，そのサイトに書かれていることを追究するために，英語で書かれたサイト（How Many People Have Ever Lived On Earth?(PRB)[7]）に進んだ．その意図は，今までの世界人口の総和がなぜ 1076 億人なのかを純粋に知りたかったためである．しかし，そのサイトは英語で書かれており，図 1 の表の数値の意味を理解しようと試みたが，理解するのが困難であった．英語の翻訳サイトで調べたり，教師に質問したりしながら，試行錯誤した．特に，「Births Between Benchmarks」の理解に苦しみ，その解釈を巡って，教師からのアドバイスを受けたが，そのアドバイスを当てにせず，自ら探究する場面もあった．教師もメディアでしかないことを裏付ける場面であった．C 班は，探究過程で終始，主体的な活動が見られたと言える．



How Many People Have Ever Lived On Earth? 108 Billion

Year	Population	Births per 1,000	Births Between Benchmarks
50,000 B.C.	2	-	-
8000 B.C.	5,000,000	80	1,137,789,769
1 A.D.	300,000,000	80	46,025,332,354
1200	450,000,000	60	26,591,343,000
1650	500,000,000	60	12,782,002,453
1750	795,000,000	50	3,171,931,513
1850	1,265,000,000	40	4,046,240,009
1900	1,656,000,000	40	2,900,237,856
1950	2,516,000,000	31-38	3,390,198,215
1995	5,760,000,000	31	5,427,305,000
2011	6,987,000,000	23	2,130,327,622

NUMBER WHO HAVE EVER BEEN BORN	107,602,707,791
World population in mid-2011	6,987,000,000
Percent of those ever born who are living in 2011	6.5

図 1 C 班が閲覧したサイトの表
「How Many People Have Ever Lived On Earth? (PRB) 」

C 班は，最終的な回答を作り上げる場面では，数学的な活動が表れた．それは，「W_1：（1900 年までの世界人口の総和）=（1 年間に生まれる人数）× x + （1900 年の世界人口）という方程式を解く」（※ x は 1900 年から x 年後に世界人口の総和が同じになるとする．）である．ただし，世界人口が 1900 年から一定のペースで増え続ける，つまり，一定のペースで人が生まれ続けると仮定している．そして，次のような方程式を立て，次のように解いた．

$$1{,}656{,}000{,}000{,}000 = 70{,}000{,}000x + 3{,}522{,}000{,}000$$
$$70{,}000{,}000x = 1{,}652{,}478{,}000{,}000$$
$$70x = 1{,}652{,}678$$
$$x = 23{,}609$$

最終的な回答 $A^{\heartsuit}$は 1900 + 23609 = 25509 で 25509 年になった．いろいろなメディアを参照し必要な情報を得て，数学的な方法 W（方程式）によって回答を出した．メディア・ミリューの往還が起こった場面であった．さらに，常にグループで共有し合い，終始活発なグループ活動が起こっていたため，個人と集団の往還が頻繁に表れていた．

C 班は，数学的な考え方を用いて回答を出すことができたが，この回答にはいくつかの誤答が確認できた．C 班では，時間が足りなかったことと，いろいろな探究に時間がかかったことで，最も重要な数学的な探究，つまり，ミリューM との相互作用に十分に時間をかけることができなかった．よって，回答の正当性を確認したり，修正したりすることができなかった．しかし，C 班の探究活動は，いろいろな問いが生じ，既存の回答を鵜呑みにせず，それらの問いと向き合う主体的な活動場面が多く見られ，た．また，数学的な活動だけでなく，社会科的な問いに答える場面や英語のサイトの解釈に努めるなど，教科横断的な学習が起こっていたことも注目すべき点である．

(2) E 班の探究

次に，数学的な探究へ進まなかったグループの例を取り上げる．E 班は探究活動の最初は意欲的に取り組んでいたが，思うように探究が進まず，終始調べ学習的な活動になっていた．いろいろな既存の回答 $A^{\diamondsuit}$に出会っているが，それらを深く理解する探究に進まなかった．数学的な探究に進まなかっただけでなく，探究自体の深まりも浅かったようであった．その様子が表れた場面を，生徒 WA と生徒 TO の発言を中心に示そう．E 班で第 1, 2 時までに生じていた問いは，

Q_1：現在の世界人口は何人か
Q_2：1900 までの世界人口の総和は何人か
Q_3：人類の起源はいつか

である．これらの問いに対する回答をインターネット上の情報から得ようとしていた．そのことは，図 2 のプロトコルにおける生徒 WA と生徒 TO の会話から読み取れる．

ここでは，他のグループでも獲得されていた以下に示す既存の回答 $A_2^{\diamondsuit}$に出会った．その既存の回答 $A_2^{\diamondsuit}$は，世界人口の推移と累計のページ[8]より得た，

$A_2^{\diamondsuit}$：過去 6000 年間に存在した全ての人口のおおよそ 5 分の 1 が現在の人口．

というものであった．

あるサイトを見て
11　TO　これ良くない？
12　WA　サヘラントロプス・チャデンシスって言うのがいたんだって．
13　TO　知らねーよ．
14　TO　これで探究が終わりじゃん．
15　WA　いや，いつ同じになるか，だから，まだ答えは出ていない．
（略）
41　WA　これを全部足せばいいんじゃない？
42　TO　これって総和なの？

図 2　E 班のプロトコルデータ

さらに，WA は，「机上の計算ですが，人類が 4000 年前からいたとすると，現在 60 億人として紀元前 0 年を 3 億人, 1800 年を 10 億人. 1950 年を 25 億人とすると面積が（毎年の延べ人口）が 1 兆 9450 億人となりこれを平均寿命（約 50 年）で割ると約 400 億人というところでしょうか.」とサイトに書かれていた情報を読んだ. そして TO は「11 これ良くない.」「14 これで探究が終わりじゃん.」と発言した．つまり，有力な情報を得ることはできていたものの，この情報を理解するために新たな問いや疑問が生まれるのではなく，このサイトの情報のみを頼りに探究を終わらせようとしていたことが伺える．そして，WA は「15 いや，いつ同じになるのか，だから，まだ答えは出ていない.」と発言したことから，新たに問いや疑問が生まれるきっかけはあった．しかし，それ以上の探究は見られなかった. すなわち，このサイトの情報は，E 班にとって有力な情報にはなり得なかった．

その後，E 班は，「Q_4 : 総和とは」という問いが生じ,「世界の人口」というサイトにある離散的な数値データを足し合わせようとした．そこで，教師から次のような質問がなされた．「Q_T : その間の数年間の世界人口はどうするのか？」E 班では,「総和」の意味を「世界人口を合計する」と捉えていた．教師からの補助発問を受けて，各数値間のデータをどのように考えるのかについて，明確な回答が作り出せなかった．そして，世界人口を出生数で和を求めると考え，世界の出生数を調べようとした．しかし，有力な情報が得られなかった．E 班では，メディアから情報を得て，ミリューM は様々な要素から構成されているものの，それらと相互作用していなかった．そのため，フィードバックも起きていない．一つの問いや疑問を掘り下げる活動が見られなかった．つまり，「Q_4 : 総和とは」について，明確な回答 A を作り上げることができなかった．

第 3 時では，次回が発表会であるため，何とか回答を見つけようとしていたが，思うように探究が進まなかったようである．最終回の発表会では，最終的な回答 $A^{\blacktriangledown}$は作り上げることができず，調べた内容を発表したが，自信を持って発表することができなかったようである．E 班は，インターネット上の情報を頼りに終始調べ学習的な探究を行っていた．これは，Q_0 の回答（正解）がどこかに存在すると終始思っていたことが要因の一つと考えられる．実際，TO は「先生の答えを教えてください.」や「良いサイトが無い.」と発言していた．このことからも，既存の回答を頼りに探究していたと言えよう．さらに, Q_0 の回答 $A^{\blacktriangledown}$は自分たちで作り上げるものであるとの認識に至らなかったようである．そして，E 班では，数学的な活動が探究活動の中で核心的な役割を果たすことができなかった．それには，生徒たちが持っている数学の知識や技能と関係があると推測できるが，それは必ずしも大きな問題ではない. なぜなら, WA も TO も数学の成績は中位以上であり，普段の授業では基本的な問題は自力解決することができる．しかし，今回の授業では彼らの力を生かすことはできなかった．また，今回の授業のように，すぐに回答が出せないような難しい問題に対して，諦めの気持ちが生じていたことも要因であろう．WA は「（この問い Q_0 は）中学生のテーマじゃないよ.」「僕たちの班は「出ませんでした.」という結果になりました（と発表しよう）.」と発言をしたことから，難しい問題に立ち向かうことができなかったことを表している．このような後ろ向きな発言は他の班でも

確認することができたが, E 班は特に多かった.

(3) 数学的プラクセオロジー

ここでは，C 班で表れた数学的な活動をプラクセオロジーの視点から記述する.

C 班で生じた主な数学的な活動は，第 3 時の後半の最終的な回答 $A^{\blacktriangledown}$を作り上げる場面であった．そこでは，（1900 年までの世界人口の総和）＝（1 年間に生まれる人数）× x＋（1900 年の世界人口）という方程式を解く」（※ x は 1900 年から x 年後に世界人口の総和が同じになるとする.）という「T_2: 方程式を解く」というタスクタイプを，移項によるテクニック ($\tau_{2\text{-}2}$) で解決した. C 班は実際に方程式を立てて移項によって解いた．中学校 1 年生で学習する 1 次方程式の基本的な問題を解くようにである. 移項によるテクニックの背景となる数学的なテクノロジー ($\theta_{3\text{-}3\text{-}2}$) は，a = b ならば，① a + c = b + c, ② a－c= b－c, ③ ac = bc, ④ a/c=b/c（c≠0）が成り立つ，といった等式の性質である．そして，それらの性質をまとめた方程式の理論もしくは数の理論 ($\Theta_{3\text{-}2}$) がセオリーとなっている．ここでの C 班の活動は，独立した数学的な活動であったため，日常の文脈への依存やそれにかかわったテクニックは見られなかった．C 班の数学的活動のプラクセオロジーをまとめると図 3 のようになる.

- T_2 ：方程式を解く
  $\tau_{2\text{-}2}$ ：移項を用いて
  $\theta_{3\text{-}3\text{-}2}$：等式の性質
  $\Theta_{3\text{-}2}$ ：方程式の理論

図 3　C 班のプラクセオロジー

プラクセオロジー分析では，C 班に限らず, 数学的な活動が見られたグループについて，その数学的な活動の詳細を記述するために行った．その結果から，三つのことが指摘できる.

一つ目に，グループによって異なった数学が利用されたことである．今回の授業では，ある特定の数学の内容の利用を目指していたわけではない．しかし，一次関数と平面図形を用いたグループや方程式を用いたグループ等が表れた．しかも，それらは生徒たちの探究活動の中で自然に起こった数学的な活動である．これは，存在意義を持った数学ともかかわる活動である.

二つ目は，通常の授業で行われる，特定の教科や領域等の学習内容を規定した活動とは異なる数学的な活動が表れたことである．例えば，方程式という数学的な方法を用いたグループが複数表れた. そこで,「T_2: 方程式を解く」というタスクタイプは共通しているが, それぞれについて, 背景にある考え方やテクニックは異なっていた. あるグループは，世界人口の総和を求める際に平均寿命を考慮に入れて考えたのに対し，あるグループは方程式を立式する際に既存の回答を数値データとして用いたのである．テクニックも等式の性質や移項による解き方を用いたグループもあれば，算術的な方法を用いたグループもあった．そして，様々な種類の異なる数学を活用したグループは，一次関数や平面図形の面積に関わる活動を中心とし，それらの活動の中で，一次関数の直線の式を求めるために連立方程式を利用したり，代入して式の値を求めたりしていた．つまり，それらの活動の背景にある数学的な理論は，関数の理論と平面図形の理論だけでなく，数と式の理論や，方程式の理論もある．生徒たちの探究活動では，共通する最初の問い Q_0 から, 様々な数学的な活動が表出しただけでなく，一つのグループの中でも多領域にまたがった複合的な数学的な活動が起こっていたと言える.

三つ目は，通常の授業で表れる数学的なプラクセオロジーと異なる点である．今回の探究活動で表出した一次関数や方程式や平面図形, それぞれのプラクセオロジーは，通常の授業で扱われるプラクセオロジーと大きく異なる．通常の授業では，学習内容が規定されており系統性があるが，今回見

られた数学的な活動はそのような型にはまった数学ではなかった.

６．考察

教授実験の分析結果を受けて,「(1) 教科横断の視点」「(2) 主体的な活動の視点」「(3) 教授学的契約の視点」「(4) 最初の問い Q_0 の条件の視点」の四つの視点から考察した. (1), (2), (3)については，紙面の都合から考察結果のみを示す.

(1) 教科横断の視点から

まず，目的の一つ目の結論として，つまり教科横断的な学習について，次の三点を示すことができた.

① 教科横断型 SRP における複数の教科の関連の仕方があること
② 数学学習の特徴として大きなプラクセオロジーが表れたこと
③ 通常の授業では稀な研究者の探究の特徴が表れたこと

(2) 主体的な活動の視点から

さらに，目的の二つ目の結論として，主体的な活動について，四つの異なった種類の主体的な活動が特定できた.

① 自らの問いや疑問に向かい合い取り組むということ
② 得られた情報を鵜呑みにしないということ
③ 新しい知識や未知の数学に出会って探究を進めるということ
④ 試行錯誤を繰り返し自らの回答を作り上げるということ

とりわけ①から③はこれまでの授業では想定されていなかった主体的な活動であった．これらのことが本研究の結論である.

(3) 教授学的契約の視点から

今回の SRP では，探究活動の初め，生徒たちの多くは明確な正解がないオープンな探究型の授業に慣れておらず，おそらく，どこかに正解が存在し，教師は正解を知っていると思っていたようである．よって，生徒たちの探究活動の中心は，正解を探すという活動であった．しかし，次第に今回の問い Q_0 の回答を作り上げることは簡単ではないということに気がつき，戸惑い始めた．そこで，ほとんどのグループが主体的に探究を進めるという活発な探究活動が行われた．その中で数学的な活動に活路を見出し，数学的な方法を用いて回答を作り上げることができたグループ（C 班等）が表れた．一方，数学的な方法を用いることができなかったグループや，思うような活動が生じなかったグループ（E 班）もあった．数学的な活動や主体的な活動が生じなかったグループについては，その要因は何であろうか．生徒たちの主体的な活動や数学的な活動へ進むことを妨げた，いくつかの教授学的契約について，次の三点を特定した.

① 通常の授業で暗黙的になっている授業形態における教授学的契約である.
② Q_0 に答えるという教授学的契約である.
③ 教師の役割に関する教授学的契約である.

これらの教授学的契約の影響を受けた結果，特に E 班等では，数学的な活動に進まなかったり，最終的な回答 $A^{\heartsuit}$を作り上げることができなかったりしたと考えられる.

(4) 最初の問い Q_0 の条件の視点から

4 節で述べたように，濵中ほか (2016) は, García et al .(2006) で指摘されている Q_0 が満たすべき三つの条件を示している．それは，次の三つである.

① 数学的合法性：教授争点として狙われるべき数学の核心をついた内容
② 社会的合法性：数学や学校を超え，社会や世界と関連した内容
③ 機能的合法性：数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究に導く内容

今回の教授実験で設定した最初の問い Q_0

は，上の三つの条件を満たしていたと言えるが，この条件はあくまで必要条件である．つまり，最初の問い Q_0 が生徒にとって自然な問いであることが大切であり，探究過程で委譲がスムーズに行われなければ，豊かな探究は起きないのである．では，この三つの条件を満たす問い Q_0 とは，どのような問いなのか．今回の問い Q_0 は，シュバラール氏とボスク氏に紹介された問いであるため，本研究において，筆者が作成したオリジナルの問いではない．このような条件を満たした問い Q_0 を設定することは容易ではない．また，学習者の持つ数学的な知識や技能によって，到達する $A^{\heartsuit}$ のレベルも変わってくるであろう．SRP の問い Q_0 の質によって探究活動に大きな影響を与えることは明らかである．SRP では，どのような Q_0 がふさわしいのだろうか．中学生や高校生や大学生にふさわしい問い Q_0 はどのようなものがあるのだろうか．これらについては大きな研究課題となるであろう．したがって，各年代で SRP の実践研究が期待される．学習者の探究活動に焦点を当てて，Q_0 の質によってどのような特徴が表れるのかについて，研究を進めていく必要がある．

７．教育への示唆

本研究では，SRP という探究型の授業を中学校で実践し，SRP の諸概念を用いて分析を行った．そして，結論として，いかなる教科横断的な学習や主体的な活動が生じるのかについて考察した．この分析により，学校教育，学校数学の指導に対して，どのような示唆が得られるであろうか．筆者は，以下の二点が教育への示唆となるであろうと考える．

一点目は，教科横断的な学習や主体的な活動の在り方について，学校教育で SRP のような探究活動を取り入れることで，真の探究型の授業が可能になるということである．SRP を学校教育，とりわけ学校数学に導入することは，現時点の中学校の授業では「総合的な学習の時間」や数学の「課題学習」と関連させて行うことが考えられる．そこで，教科の枠を超えた問いを設定し，使えるものは何でも使うという探究活動を長期的に計画することで，生徒たちが教授学的契約に影響を受けず，素直な探究心から試行錯誤しながら問題を解決するという活動が展開されると考える．

二つ目は，探究活動において，問いの存在が重要であるということである． SRP は研究者の探究活動をモデル化しているため，最初の問い Q_0 の回答を作り上げる営みが“探究”となる．探究の中で問いを持たないまま学習を行っても，探究は深まらない．真の探究型の学習を可能にするためには問いの存在が大きいと考える．

８．おわりに

本稿は，中学校数学科における世界探究パラダイムに基づいた SRP についての研究をまとめたものである．本研究において，SRP の実践を中学校で行い，教科横断的な学習や主体的な活動が表れたことは大きな成果として受け止めている．一方，SRP を行う上でいくつかの課題が見えてきた．

今回の SRP の教授実験の授業としての課題の一つ目は，SRP の探究活動における時間的な課題である．自ら作り上げた回答 $A^{\heartsuit}$ の妥当性や正当性を吟味する時間がなかったことや，発表後に聴衆から意見をもらって再検討する機会も時間的に厳しく十分に行うことができなかった．二つ目は，教授学的契約にかかわる課題である．生徒の自由な発想や主体的な活動を妨げる要因として，これまでの学校の授業に暗黙的に潜んでいた授業のスタイル等が影響していることが明らかになった．三つ目は，SRP の最初の問い Q_0 についての課題である．今回の SRP では，最初の問い Q_0 は生成的な強い力を持った問いであることが明らかになった．

しかし，探究が活発にならなかったグループや，数学的な活動が起きなかったグループもあった．このようなグループによる差は，何によって生じているのか．また，問いQ_0の質による探究活動の差等の研究課題が表れた．

これらの課題が浮き彫りになったことは，本研究の成果であるとともに今後の研究で明らかにしたい視点を明確に示すものであると捉えている．今回の研究は一つの問いQ_0についての実践例であり，しかも中学校での実践という特殊な実践例である．SRP について研究を進めていく上では，参考となる実践例の一つであると感じているが，SRP を行う上での様々な課題を解明していくことは今後の課題である．

註

1) ミリューM とは，教授学的状況理論 (TDS) で使われているものとほぼ同義である．しかし，TDS では教師がミリューM を設定し，学習において学習者が対峙し，情報とともにフィードバックを得るものであるものに対し，SRP では，メディアから得られた情報等からなり，探究において学習者が自ら作っていくものである．具体的には，ミリューM は，メディアから得られる既存の回答 $A_i^{\diamond}$，メディアから得られる情報（データ）D_j，数学的な方法や実験等 W_k，問い Q_l 等から構成され，次のように表せる．
$M=\{Q_0, A_i^{\diamond}, A_i, D_j, W_k, Q_l\}$
2) この問いは，2016 年 10 月に大阪で開催されたシュバラール氏とボスク氏による ATD のワークショップで紹介されたものを若干修正したものである．
3) 濵中ほか (2016, p. 63) では，SRP の問い Q_0 が満たすべき三つの条件を，「数学的合法性」，「社会的合法性」，「機能的合法性」と述べている．これは，García et al. (2006)が指摘している．
4) http://t-ishii.la.coocan.jp/download/AGDRec.html
5) https://matome.naver.jp/odai/2138339969046725701
6) http://d.hatena.ne.jp/Zellij/20111104/p1
7) http://www.prb.org/Publications/Articles/2002/HowManyPeopleHaveEverLivedonEarth.aspx
8) https://matome.naver.jp/odai/2138339969046725701

引用・参考文献

石井英真 (2015).『今求められる学力とは－コンピテンシー・ベースのカリキュラムの光と影－』．日本標準.

石川実・宮川健 (2012).「「手続きの説明」の学習における伝言ゲームの可能性－中学校図形領域における教授実験を通して－」．日本数学教育学会誌，第 94 巻，第 5 号, pp. 2-11.

葛岡賢二 (2017).「中学校関数領域における教科横断型授業のデザイン－「世界人口総和問題」を題材にした SRP－」．上越数学教育研究，第 32 号, pp. 95-104.

国立教育政策研究所．勝野頼彦（研究代表者）(2013).『教育課程の編成に関する基礎的研究　報告書 5 社会の変化に対応する資質や能力を育成する教育課程編成の基本原理』．国立教育政策研究所.

シュバラール (2016). 大滝孝治・宮川健訳「《翻訳》明日の社会における数学指導－来たるべきカウンターパラダイムの弁護－」．上越教育大学数学教育研究，第 31 号, pp. 73-87.

鈴木彬・大根田裕・両角達男・徳峯良昭 (1999).「数学科における総合学習の位置－実践をふまえた提言－」. 1999 筑波大学附属中学校研究紀要，第 51 号, pp. 1-18.

高階玲治ほか (1996).『実践クロスカリキュラム－横断的・総合的学習の実現に向けて－』．図書文化社.

奈須正裕・江間史明 (2015).『コンピテンシー・ベイスの授業づくり』．図書文化社.

濵中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016).「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2) －電卓を用いた実践を通して－」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻, 第 2 号, pp. 59-72.

ボスク, M., ガスコン, J. (2017). 大滝孝治・宮川健（訳）「教授学的転置の 25 年」. 上越教育大学数学教育研究, 32 号, pp. 105-118.

牧下英世 (2012).「筑駒における数学を主とした総合学習教材の開発－数学史を利用した探求的な学習－」. 2011 筑波大学附属駒場論集, 第 51 集, pp. 149-158.

松嵜昭雄 (2017).「「持続可能な開発のための教育 (ESD)」の視点に立つ算数・数学の学習方法と学習形式に関する一考察－算数学習の指導実践例の検討を通して－」. 日本数学教育学会第 5 回春期研究大会論文集, pp. 91-98.

湊三郎・浜田真 (1994).「プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか－数学観と数学カリキュラム論との接点の存在－」. 日本数学教育学会誌, 第 76 巻, 第 3 号, pp. 2-8.

宮川健 (2007).「関数グラフソフトを用いた教授・学習過程の分析―教授学的状況理論の視点から－」. 日本数学教育学会誌『数学教育』第 89 巻, 第 1 号, pp. 2-12.

宮川健 (2011).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格－わが国における「学」としての数学教育研究をめざして－」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第 94 巻, pp. 37-68.

宮川健・濵中裕明・大滝孝治 (2016).「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1)－理論的考察を通して－」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻, 第 2 号, pp. 25-36.

宮川健 (2017).「世界探究パラダイムに基づいた SRP と「問い」を軸とした数学学習」. 日本数学教育学会第 5 回春期研究大会論文集, pp. 173-180.

両角達男 (2002).「数学学習にねざした総合学習－東京教育大学・筑波大学附属中学校における教育実践を踏まえて－」. 上越数学教育研究, 第 17 号, pp. 21-34.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 - 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), pp. 221-266.

Chevallard, Y.(2002). Les TPE comme ploblème didactique. In T. Assude & B. Grugeon (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris: IREM de Paris 7 et ARDM.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (ed.) *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.

García, F. J., Gascón, J., Ruiz Higueras, L., & Bosch, M. (2006). Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education, 38*(3), 226-246.

Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactic. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), pp.267-284.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.75-82

高等学校数学科課題学習における SRP の生息可能性

竹内　元宏
上越教育大学大学院修士課程 2 年

１．はじめに

中等教育以降の数学の指導・学習では，カリキュラムに多くの学習内容が定められており，教師が数学の内容を順々に学習者へ教授する伝達型の授業形態になりがちである．こうした数学の指導・学習の結果，次の二点が懸念される．一つは，学習者はなぜある特定の数学的な知識を学ぶ必要があるのかという知識の存在理由を知らないまま数学学習が進められること．もう一つは，伝達型の授業形態では，主体的な活動が十分に実現されないことである．

こうした数学教育の現状は，わが国に限ったことではない．シュバラール氏は，過去の偉人が創り上げた数学を細分化し，系統立てて配列したカリキュラムを順々に指導していくという，一般に広く共有されている教育の考え方を「記念碑主義パラダイム」と呼び，この現状を生じさせていると考える（シュバラール,2016）．そして将来は，「世界探究パラダイム」と呼ばれるものに代わるのではないかと指摘する．このパラダイムは，特定の数学的な知識の獲得を目標とするのではなく，研究や探究活動を通して研究者の態度を養うことを目標とする．研究者の探究活動がそうであるように，そこでは非常に主体的な活動が期待される．なお，「世界探究パラダイム」に基づき，その学習活動を定式化したものは，“Study and Research Path”（以下，SRP）と呼ばれる．

一方，わが国の高等学校数学においても，数学教育の現状の改善へ向けた方策の一つとして，課題学習が導入された．課題学習は生徒の数学への関心意欲を高め，主体的な学習を促すことを目的としている．しかしながら，課題学習が主に問題演習になっているとの指摘もある（長崎，2015）

そこで筆者は，SRP の視点を課題学習に導入することにより，数学を必要に応じて学ぶという存在理由を伴った数学の学習と研究者の主体的な探究を通した学習が可能になるのではないかと考えた．この課題意識に基づき，高等学校数学科の課題学習において SRP の視点を取り入れた授業を実践し，これまでの課題学習における課題がどの程度改善できるのか，また，課題学習という現行のカリキュラムで規定された学習の中でどのような SRP がどの程度実現可能なのか検討することとした．

なお，本研究の成果は筆者の修士論文にまとめられている．本稿はその要点をまとめたものである．詳細は，修士論文を参照されたい．

２．SRP について

SRP は世界探究パラダイムに基づいた探究活動を定式化したものである．その活動は，研究者が知識を生み出すような探究の過程をモ

デルとする．その活動は次のような過程を経るとされる．

まず，SRP は，数多くの問いを生み出し，より多くの知識に出会えるような「生成的な強い力を持った問い Q_0」から始まる．この問いは学習者に提示，あるいは，学習者自身が持った疑問などから学習が始まる．この時の SRP において満たさなければならない条件として，3 つの合法性が指摘されている．①数学的合法性：学習される数学的知識が，核心をついた内容である．②社会的合法性：数学や学校を超え，社会や世界と関連した内容である．③機能的合法性：数学的関心や他の学問的関心に基づく新たな探究へと広がりを見せる内容である（濱中ほか，2016）．

次に SRP では，Q_0 に対して回答を作り上げるために，資料を調べ必要な情報を自ら見つけてくるという過程を前提とする（宮川ほか，2016）．これまでの一般的な授業では，情報の獲得は，教科書や教師が配るプリント，課題，記憶などに限定されることが多く，それ以外の図書館の資料やインターネットを利用することはできなかった．しかし，SRP では，これまでの授業では扱われてこなかったインターネットをも含め，活用できるものはなんでも用いて良いことを前提とする．こうした資料は「メディア」と呼ばれ，そして学習者は，メディアから情報（他者による回答，データ，種々の概念など）を得てきて，それらを「ミリュー」に組み込み，ミリュートとの相互作用により自らの回答を作り上げていくとされる．こうした学習の仕組みは「メディア・ミリューの往還 (media-milieu dialectic)」と呼ばれる．

また，一般的には，Q_0 に答えようとすれば，様々な新たな問いが生まれてくるのが自然である．メディアから情報を得ても同様である．そして，それらに取り組み，場合によっては，いくつかの問いに回答もしくは部分的な回答が得られたりする．場合によっては脱線し思いもしなかった方向に研究が進むこともある．SRP は，そうした問いの広がりをも考慮に入れ，こうした過程を繰り返すことで，探究が深まっていくと考える．こうした過程は，図 1 のような樹形構造で定式化される．

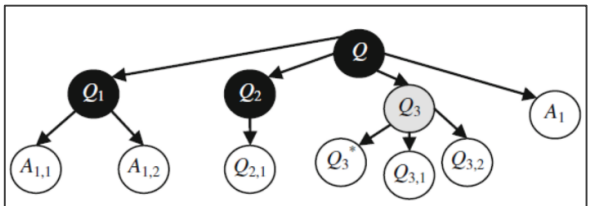


図 1　SRP の樹形構造 (Winsløw et al., 2013, p. 271)

3．課題学習と SRP

SRP と課題学習との比較を行う．そこから実践レベルでの SRP の導入可能性を検討する．ここでは SRP と「問い」を軸とした数学学習を比較した宮川 (2017) を参考に思想・理念のレベル，学習活動レベルで比較検討する．

(1) 思想・理念レベルの比較

双方の指導・学習のねらいはどのような能力の育成であるのか検討する．

課題学習のねらいは，生徒の主体的な学習を促し，数学のよさを確認できるようにすることである．このねらいは，課題学習導入の背景にあった，問題解決力の育成や主体性を伸ばすといった社会的要請に対応している．また，これまで数学教育は教えられるべき内容を重視した結果，学ばれる知識の必要性や数学のよさを十分認識できないことが多かった．その反省として，課題学習では，数学的な知識・技能の習熟よりも，生徒たちの数学の学習に対する興味・関心や創造力，活用力の育成をねらいとしている（古藤，1989）．課題学習のねらいを教授パラダイムの視点から考察すると，これまでの通常の授業では記念主義パラ

ダイムに代表される，学習されるべき知識を重視したカリキュラムによって内容ベースの学習がなされていた．結果，学習に対する主体性や数学への興味関心を育むことができなかった．その反省として，課題学習を導入し，それらの態度や能力を身につけるねらいがある．課題学習は学習指導要領に設けられた活動の一つの枠組みであるため，カリキュラムに沿った記念碑主義の文脈にあると考えられるが，そのねらいはこれまでの数学教育への反省となっている．

一方，世界探究パラダイムのねらいは，探究者の態度の育成である．その態度とは未解決の問いに出会っても，臆することなく取り組み，必要であれば新しい知識をも学習し，解決を目指す前向きな態度である（宮川，2017）．

ここで，課題学習と世界探究パラダイムのねらいを比較すると，前者では，学習に対する主体性と数学に対する興味・関心を育むことが，後者では，探究者の態度の育成が目指されている．課題学習のねらいはやや学校教育における教科の範疇が想定されたものとなっており，世界探究パラダイムでは，教科に限らず，人間の問いや知識との関わり方から規定されている．両者の類似点として，教授パラダイムの視点では互いに記念碑主義的な教育からの脱却が想定されると考えられる．課題学習は，カリキュラムに沿った数学教育の中にある一つの枠組みとして導入され，記念碑主義的な内容重視の授業では育成できなかった主体性や数学のよさを身につけることを目的とし，世界探究パラダイムでは，記念碑主義のようにカリキュラムを取らず，問いへの解決という目的のもと知識を学習することで知識の必要性を担保した学習を行うことができるであろう．また，課題学習のねらいである，主体的な学習は，世界探究パラダイムの目指す探究者の態度において期待されるものである．探究者にとって回答とは，誰かに教えてもらうものではなく，自ら導くものである．そのため，主体的に活動をすることは前提となろう．

(2) 学習活動レベルの比較

学習活動においてもいくつかの相違点が考えられる．課題学習の課題設定には各領域を総合し，日常の事象や他教科の内容と関わる課題が設定される．各領域の総合に関しては既習の内容があり，日常の事象などの内容に関しても，数学的な内容が盛り込まれる．この課題に対して既習の知識・技能を用い解決を目指す．また，課題学習の題材として新しい内容や考え方があった場合は教師が説明する必要性も出てくると考えられる．課題学習では，これまでの学習が基盤になっていること，新しい知識の獲得には教師の存在が発生してしまうという特徴がある．この点，SRP の活動では，利用できるものが限られた中で活動するのではなく，インターネットなどのメディアの利用を前提とするため，探究に応じた新しい知識の獲得が想定される．もちろん，その際，教師がサポートをすることも考えられるが，教師がすべて指導する必要はない．また，新たに学習される知識は，問いに回答を求めるといった目的のもと，必要性が生じたもののみであることも SRP の特徴である．一方，課題学習でも，日常の事象など特定の数学的内容が必要となる場面設定がしばしばなされる．しかし，SRP と大きく異なる点は，その場面が既習の内容のよさが感得できる場面であり，新たな内容が必要となる場面ではないことである．

4. 教授実験

本研究では，高等学校数学科の課題学習へ．

の SRP の導入可能性を探るため，課題学習でしばしば用いられる題材を用いて，課題学習の時間等の制約の中で，SRP の視点を採用した学習活動を実践した.

(1) 問いの設定

次の Q_0 を最初の問いとして設定した.

Q_0 :「黄金比は数学的に美しいのか？」

黄金比はなぜ美しいと言われているのだろうか？という問いはいたって素朴であり，明確な回答がないものである．ただし，単に「なぜ美しいのか」という問いであれば，美学的な方向に進み，数学的な要素の探究にはいかない可能性がある．そのため，「数学的」という語を加えた．よく知られているように，その背景には数学的な要素が多く隠されており，数学的に美しい理由を考えるために，黄金比についての様々な数学的性質をまず知る必要が生じると考えた．その結果，SRP の Q_0 としての機能を果たすと期待した.

(2) 教授実験の概要

授業は，公立高等学校第 1 学年の 1 クラス，22 名を対象に全 2 コマ（1 コマ 50 分）で実践した．2 コマが課題学習に使える最大の時間であった．1 グループ 2〜3 人のグループを 8 班作り，各班にインターネットにつながるパソコンを 1 台用意した．また，これら以外に生徒のワークシートもデータとして収集した.

第 1 時は，導入として，黄金比についてパワーポイントを用い具体的な黄金比となっているとされるものなどを説明した．そして，黄金比は美しいとされていることを紹介し，なぜ，黄金比は美しいとされているのか問題意識を持たせ，これから行う探究活動でのインターネットの利用や，探究の成果を最後に発表することなど，授業の説明を行った．また，これまでの授業とは異なり，明確な回答がないことや，教師も回答を知らないことなどを説明し，探究活動として，自ら回答を導くことを強調した．教師は各グループの探究活動中は生徒からの質問へ対応するとともに，探究に対する助言を必要に応じて行った.

第 2 時は，授業，後半での探究の成果の発表について説明するとともに，教師が発表を模擬的に実演した．学習者が探究したはじめの問いとは異なった，簡易な問いを用意し，はじめの問いからどのような問いが新たに発生し，それに関連した情報をメディアからどのように獲得したかなど，どのような活動の変遷から回答を導いたのか活動の過程がわかるような発表を演じた．残りの発表までの時間は各班での探究と発表に向けた準備にあてた.

(3) 実験データの分析

データの分析として，A グループを抽出する．この A グループは，生徒間での意見のやり取りが，比較的よく見られため教授実験での活動がどのようなものだったのか，明らかできると考えた.

なお，データの分析として 2 つの視点を設ける．1 つは探究活動における問い・回答の往還である．学習者が探究活動における Q_0 への回答を作り上げる過程でどのような問いが発生したのかを分析する．2 つ目はメディア・ミリューの往還である．SRP の探究活動では，インターネットなどのメディアから得られた既存の回答 $A^{\diamond}$ や様々な情報・データ D を自ら理解・吟味し用いることで，自らの回答を作り上げていく．メディアからいかなる既存の回答や情報を得たのか，その要素を明らかにするとともに，それらをミリューの一部として含み，ミリューといかに相互作用していたのかを明らかにすることにより，どのような学習が実現さ

れていたのか記述する.

A 班の活動の中心となった主な問いは以下である（図2）.

Q_1 ：美しい建造物の比率は黄金比になっているのか?
$Q_{1\text{-}1\text{-}2}$ ：サグラダファミリアが黄金比に沿って拡大しているとは何か?
Q_5 ：数学的に美しいとは何か?
$Q_{5\text{-}1}$ ：黄金長方形に現れる渦巻きとはどういうことか? また，どう関係するのか?
$Q_{5\text{-}3}$ ：美しいものは自然と黄金比になるのか?
Q_6 ：美しい造形物は黄金比が使われているが，黄金螺旋はどう関係しているのか?
Q_7 ：黄金比とは何か?
$Q_{7\text{-}1}$ ：フィボナッチ数列とは何か?
$Q_{7\text{-}1\text{-}1}$ ：フィボナッチ数列と黄金比の関係は何か?
Q_8 ：黄金比を用い美しい芸術作品が作られるのか? 美しく作ろうとした結果が黄金比になるのか?

図2：A グループの主な問い

A 班の活動を「問い・回答の往還」と「メディア・ミリューの往還」の視点から分析する.

① 問い・回答の往還

A グループでは，「Q_1：美しい建造物の比率は黄金比になっているのか?」という問いから活動がはじまった. 建造物の中でも，サグラダファミリアに黄金比が使われているという情報を得た. これは Q_1 に対する具体的な1つの回答であり，A_1 となったであろう. そこからサグラダファミリアの比率の詳細を探究していた. また，メディアから得た「サグラダファミリアが黄金比に沿って内側から外側へ拡大している」という情報に着目し，$Q_{1\text{-}1\text{-}2}$ である黄金比に沿って内側から拡大するとはどのようなことかという問いが発生した.

授業後半になると発表を意識し，はじめの問いに答えられるよう黄金比の美しさについて調べており，Q_0 自体に対する既存の回答 $A^{\diamond}$ を求めていたと言える. しかし，メディアからは明確な回答が得られないものの，活動の中で，この班は黄金長方形に現れる渦巻きや、フィボナッチ数列について着目し，考察していた.

活動の中では多くの問いの発生は見られたが，それら全てに対する回答を必ずしも得ていたとは言えなかった.

② メディア・ミリューの往還

美しい建造物からサグラダファミリアに用いられているとされる黄金比について，Q_1 から $Q_{1\text{-}1\text{-}2}$ までメディアの情報を元に探究がなされている. ここでは，前述のように，美しい建造物の比率は黄金比になっているのかという問いから，黄金比に沿って拡大するとはどのようなことかという問いが発生してきていたが，この問いに対する既存の回答 $A^{\diamond}$ はなかった. 後の探究の中では，このグループは，黄金螺旋に沿って拡大しているのではないかと予想していた. しかし，それ以降の問いからはメディア・ミリューの往還が起こる場面が少なかった. Q_5 は，Q_0 への既存の回答 $A^{\diamond}$ を求めるような問いであり，閲覧していたウェブページも $A^{\diamond}$ になりうる情報が記載されていた.

しかし，学習者はこのウェブページの内容を深く理解することなく回答に関わるミリューの形成につながるような探究は起きていなかった. ウェブページの内容としては，これまで学ばれてこなかった黄金比の数学的な内容が記載され，それが黄金比の美しさにつながるのではないかといった事柄が書かれている. ここでは，記載されている数学的な内容を理解するためのミリューとの相互作用が少なく，メディアを閲覧するだけに止まっていた. 活動では多くの問いが発生し，その回答を求めるためメディアから情報を求める活動は見られたものの具体的な回答を得ることは多くなかった. そのため，問いの発生，メディアの参照は発生した

ものの，回答につながるだけのミリューの形成がなされたとは言えなかった．

5. 追加調査について

今回行なった教授実験ではメディアからの情報を理解する過程で発生した問いも多数あり，はじめの問いである Q_0 ないしは，それに関わる問いの回答を導くために解決しなければならない問いが多くあった．そのため，新たな数学的な知識に出会い，その理解に努める活動や Q_0 への最終的な回答を作り上げるという活動に終始仕切れていなかった．

このように課題学習では限られた時間をはじめとした授業実践における制約や数学的な知識の獲得の側面から，課題学習における SRP のはじめの問いについて検討する必要性があると実践から考えられた．そこで，その検討として以下の問いでは，どのような活動が起きるのか大学院生 2 名を対象に行った追加調査を考察した．

> Q_0：黄金比，下 20 桁を手計算で求める．どんな方法があり，どうやれば早く求められるか？

(1) 調査の概要

調査で発生した主な問いは以下である (図 3)．

Q_1 ：黄金比とは何か？
Q_2 ：$\sqrt{5}$の近似値を求める方法はあるか？
$Q_{2\text{-}1}$：平方根の近似値の求める方法はあるか？
$Q_{2\text{-}2}$：$\sqrt{5}$を求めるよりも速く黄金数を求める方法はないか？
Q_3 ：黄金数の近似値を求める方法はあるか？
Q_4 ：連分数表示を用いて黄金数の近似値を求めることはできないか？
Q_5 ：二次方程式 $x^2-x-1=0$ を用いて黄金数の近似値を求めることはできるか？
Q_6 ：フィボナッチ数を用いて黄金数の近似値を求めることはできるか？

図 3：調査での主な問い

まず，学習者は黄金比について，調べていた．近似値 1:1.618…や，線分を a, b の長さで 2 つに分割するときに、a : b = b : (a + b) が成り立つように分割した比 a : b のことであり、最も美しい比とされるなど黄金比の定義やそれに関わる数学的な表し方を把握していた．ここでは連分数展開やフィボナッチ数列なども把握していた．次に黄金比の近似値の求め方をメディアを用いて探していた．そこでは，「フィボナッチ数列」，「連分数」，「小数の二乗によるはさみうちの方法」，「開平法」，「ヘロンの方法」，「ニュートン法」の 6 つの方法があることが分かった．そして，最終的な回答として，「ヘロンの方法」が最適であると結論づけた．また，発表資料では以下の説明をしている（図 4）．

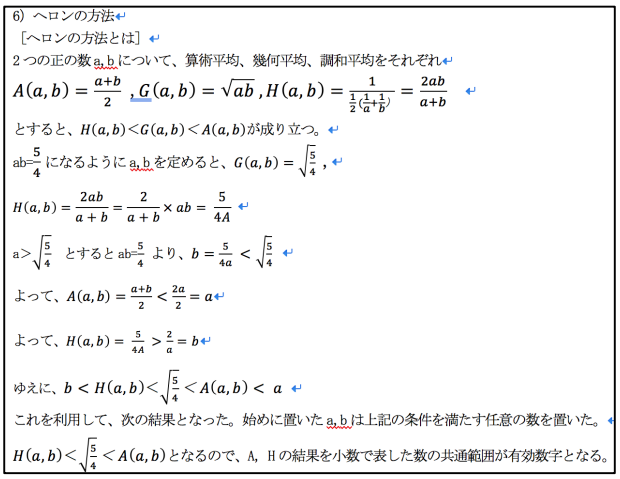

6) ヘロンの方法
［ヘロンの方法とは］
2 つの正の数 a, b について、算術平均、幾何平均、調和平均をそれぞれ
$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$, $G(a,b)=\sqrt{ab}$, $H(a,b)=\frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})}=\frac{2ab}{a+b}$
とすると、$H(a,b)<G(a,b)<A(a,b)$が成り立つ。
ab=$\frac{5}{4}$ になるように a, b を定めると、$G(a,b)=\sqrt{\frac{5}{4}}$,
$H(a,b)=\frac{2ab}{a+b}=\frac{2}{a+b}\times ab=\frac{5}{4A}$
a>$\sqrt{\frac{5}{4}}$ とすると ab=$\frac{5}{4}$ より、$b=\frac{5}{4a}<\sqrt{\frac{5}{4}}$
よって、$A(a,b)=\frac{a+b}{2}<\frac{2a}{2}=a$
よって、$H(a,b)=\frac{5}{4A}>\frac{2}{a}=b$
ゆえに、$b<H(a,b)<\sqrt{\frac{5}{4}}<A(a,b)<a$
これを利用して、次の結果となった。始めに置いた a, b は上記の条件を満たす任意の数を置いた。
$H(a,b)<\sqrt{\frac{5}{4}}<A(a,b)$となるので、A, H の結果を小数で表した数の共通範囲が有効数字となる。

図 4：発表資料による「ヘロンの方法」の解説

(2) 追加調査から

追加調査で発生した問いの多くは，数学的な内容が多く，学習者もそれらの知識に対して探究の中で，理解し，自らの回答を導くことができていた．これは「黄金比」とい同じ題材であっても，問いの違いによって SRP の活動が大きく左右されるということを示している．

6. 考察

(1) SRP を実施する上での問い

本研究では，SRP を高等学校数学科課題学習に取り入れることを検討し，課題学習で取り扱えるであろう問いを設定し教授実験をお

こなった. 教授実験では, 学習者は多くの問いが発生し，メディアを通して黄金比の数学的な側面に触れることはできていた．しかし，SRP の目標とする研究者の態度といった，全身認知的な活動はわずかであったと言える．そのような要因として，問いの性質が関係しているのではないかいと考え，追加調査を行った結果. 教授実験では見られなかった. 多くの数学的な探究が見られた．これらから，SRP を実施する上での問いについて考察する．

教授実験と追加調査における問いにはいくつかの違いがある． 1つは数学的な内容に関わる問いが探究の中心に置かれているかということである. 教授実験の問いは, 黄金比の数学的な美しさという問いであった．この問いは数学的な問いであるとともに，学習者にとっては, 美しさとは何かといった. 数学的な内容とは別の問いでもあった. そのため, 様々な観点から活動が行われ，学習者はその結びつきを納得を持って理解できなかった部分があった. それに比べ追加調査の問いでは, 問いとしてやや数学的な内容に閉じられた問いではあったが，はじめの問いに対する知識が少なくても，学習者が目指す回答が想定しやすかったと考えられる. これは, 問いをどのように答えればよいかといった目的づけられ方が学習者にとって判断しやすかったと考える．また，学習者はどのような情報が回答のために必要なのか判断しやすかったと考える．これは 2 つの事例の大きな違いである．教授実験では，メディアから得られる情報の正誤性や回答につながる情報の判断がつきにくく，メディア・ミリューの往還が少なかったのに対し，追加調査ではメディアにある情報を吟味し，数学的な内容を理解するといったメディア・ミリューの往還からも示されると考える. SRP を実施する上で, 学校現場という教室の中の条件で行うには，問いの目的づけられ方にも着目する必要がある．

(2) 課題学習における SRP の生息可能性

データの分析では, 問いの変遷に応じて, 異なった情報や回答をメディアから得て，場合によってはメディア・ミリューの往還が起こり, 学習者が理解を深める場面があった. 一方で，Q_0 に対する回答に迫るようなメディアを閲覧しているにも関わらず，探究が深まらず，既存の回答 $A^{\Diamond}$への理解にも向かわなかった場面も多く見られた．換言すれば，メディアとの相互作用からミリューへの相互作用に進まなかったことが少なくなかった．以下では，このことについて考察し，高等学校数学科課題学習における SRP の生息可能性を議論したい．

まず、学習者の難しいと感じるメディアからの情報に対しては深く追究しようとはしない. その要因はいくつか考えられる. 考えられる要因は，メディアから得られた内容が難しかったからというものである．今回のテーマとしている黄金比は学習者にとってはじめて学ばれるものある. また, 黄金比は数学的な内容のものから，学習者に身近で親しみやすいものなど書かれる内容の理解しやすさに大きな幅があった. また, メディアに書かれている内容は個人的なブログなどであっても，読まれることを前提として作成されているため，整理され, 簡潔に書かれている. すなわち, 脱個人化されており，文脈も今回の生徒たちの文脈とは異なる文脈であったため，メディアからの情報を受け入れることを難しくしていたと考えられる．

しかしながら, 研究者の探究において, メディアを参照した際にすぐに理解できるものば

かりが得られることはない. むしろ, わからないことであってもそれを理解しようと努力し探究を進めることが, 研究者の態度であろう. そのため, 内容の難しさは SRP において避けることのできないものであり, 深い探究が生じなかった理由にはできない. また一般に, 探究の最初の段階ではどれが回答に結びつくのかわからないため, 様々な情報にあたることが多く, 深く追求することは少ない. 今回の実験では, 様々な情報にあたる活動はあったが, そのあとに, それらをミリューとし相互作用する活動に進まなかったのである. その要因を考察する必要がある. 一つの要因は, 時間の制約である. すなわち, 2時間の探究時間では, メディアとの相互作用が主であり, ミリューとの相互作用するまでの余裕がなかったということである. さらに, 6. (1) で述べた通り問いの性質も考慮するべき点であった.

課題学習における, 数学的な知識の獲得と限られた時間という制約を克服しうる Q_0 の開発の困難性がここにあると考えられた.

また, 学習者のメディアから回答を求めようとする態度もより深い探究を妨げていたと考える. 学習者がこれまでに数学で経験してきた活動では, 常に解答があり, それは基本的によく知られたものであった. さらに, メディアにある情報を探した経験はあっても, 調べた情報をまとめれば回答になるような, いわゆる調べ学習のような活動が少なくない. こうした経験を背景とする学習者においては, メディアとの相互作用を主とする活動に終始してしまうのも致し方ないところもある. その一方で, SRP はまさにそうした態度を克服し, 研究者のもつさらに深く探究する態度の育成を目指している. そのため, メディアから回答を求めようとする態度をもっている学習者であっても, メディアから得たものをさらに深めるというミリューとの相互作用が生じるような工夫が重要になる.

7. おわりに

本研究では, 課題学習での SRP 実施における条件と制約を明らかにした. また, SRP 実施における新たな課題もあり, さらなる研究が必要であると考える.

引用・参考文献

シュバラール (2016). 大滝孝治・宮川健訳.《翻訳》明日の社会における数学指導－来たるべきカウンターパラダイムの弁護－. 上越教育大学数学教育研究, 31, 73-87

古藤怜(1989).「課題学習について」. 上越数学教育研究, 第 4 号, pp. 1-10.

長崎栄三(2015).「高等学校の数学教科書における課題学習の分析」. 秋期研究大会発表録. 『日本数学教育学会』, 第 48 巻, pp. 27-30.

濵中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016). 世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2) －電卓を用いた実践を通して－. 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 22(2), 59-72.

宮川健・濵中裕明・大滝孝治 (2016). 世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1) －理論的考察を通して－. 全国数学教育学会誌数学教育学研究, 22(2), 25-36.

宮川健 (2017).「世界探究パラダイムに基づいた SRP と「問い」を軸とした数学学習」. 日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集, pp. 173-180.

Winslow, C., Matheron, Y.&Mercier, A. (2013).Study and research courses as an epistemological model for didactic. *Educational Studies in Mathematics,* vol.83, no.2, pp.267-284.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.83-90

数学 B「ベクトル」における概念変化に関する一考察

佐々木　文弥
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

昨年度末，小・中学校学習指導要領が改訂された．今回の改訂の基本方針の一つとして「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進が挙げられている．高等学校学習指導要領においてもこのような方向性のもと,今年度末には改定される予定である．また,平成 28 年 5 月に示された中央教育審議会教育課程学部会「算数・数学ワーキンググループにおけるこれまでの議論の取りまとめ」には,「算数・数学では，既習の数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して,新しい概念を形成したり，より良い方法を見出したりするなど，新たな知識・技能を身に付け，知識の構造や思考，態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる」(p.11)と記述されている．しかし,「深い学び」を実現するときに様々な障害があること等の指摘もある．diSessa(1982)は，学習者が，概念を理解する過程で，構築すべき概念とは異なった概念を有することがあることを指摘している．また，瀬尾(2011)は，教員養成過程の大学生に対し，比例概念の理解についての調査を行い,「x が増加すると y も増加する場合は比例であり，x が増加すると y は減少する場合は反比例である」という概念が比例概念を学習した学習者の中には存在することを示している．学習者が有するこのような概念を，素朴概念(naive conception)や，誤概念(misconception)(村山，2011)という．そのような誤概念の存在や，その修正についての指摘がなされている．

算数・数学において,「新しい概念の形成」や,「知識の構造や思考，態度が変容する」ことが「深い学び」を実現するための重要な要因であることから,「概念変化」の研究が大きく関わる場面が存在するのではないだろうか．例えば，数の拡張という場面で見た場合，小学校では自然数から始まり，中学校にかけて分数や，負の数，無理数と拡張されていく．数に対する大きな「概念変化」がおこるのは言うまでもない．数学の学習の様々な局面において,「概念変化」が大きく関わることが考えられる．筆者は「概念変化」を捉えるため，これまでの概念変化研究を歴史的な視座から捉えることや，算数・数学学習における「概念変化」の捉え方について取り組んでいる．

本稿は，これまでの主要な概念変化研究を比較・整理し，高等学校の数学学習における「概念変化」の捉えを明確にする．具体的な事例として数学 B「ベクトル」における「概念変化」についての考察をすることが目的である．

2. 概念変化研究

概念変化について捉えるにあたり，概念変化研究の起源を次に記述していく．

2.1. 概念変化研究の背景

「1970 年代半ばから後半にかけて，大学の初等物理教育にて，教えたはずの基本的な内容が正しく理解されていないという事実が報告され，その原因が教える前から持っていた知識であることが明らかにされた(diSessa, 1982)．この問題の本質は，学習者が教育内容を誤解しているのではなく，教える前から学習者が持っていた知識が教育によっても変わらなかったことである，と考えられるようになった．このような知識は様々な名称で呼ばれ，「素朴概念(naive conception)」，「誤概念(misconception)」，「前概念(preconception)」「自然発生的理論(spontaneous theory)」，「代替的枠組み(alternative frameworks)」などがある．(村山，2011，p.218)本研究では，村山(2011)を基に考察を進めていくため，表記を素朴概念に統一する．

素朴概念の発見に伴い，素朴概念をどう克服するかという方向へ発展し，また同時に素朴概念はどのようにして形成されるかについての研究もなされるようになった．日本においても，これまで，概念変化についての研究が少なからず行われ，生物学，心の理論，物理学,数などの領域や自生的な概念変化(概念発達)の研究や，教授・学習場面でのより高度で直観に反するようなフォーマルな概念を学習する際の困難さを説明するものとして概念変化の研究が行われてきた(湯澤・稲垣,2011)．本稿は，数学学習における概念変化について考察していくため，概念変化研究の歴史的な視座から概念変化の捉えを明確にする．

村山(2011)は，概念変化研究において，Posner(1982)の概念変化モデル，Chi(1992)のカテゴリーシフト論，Vosniadou(1994)のフレームワーク理論，diSessa(1982)の p-prims 理論の４つの理論が主要な概念変化研究の理論であると述べている.本研究では,村山(2011)の記述を基に，3 つの理論について比較・検討をしていく．なお，p-prims 理論は，力学現象を中心とする自然現象に対する推論と，自然科学の学習によるその変化を幅広く扱っているが数学については対象としていない．本稿の目的は数学学習における概念変化について焦点を当てるため，p-prims 理論は，本稿においては取り扱わないこととした．

2.2. 概念変化についての３つの理論

以下は,村山(2011)の関係する記述であり，概念変化の先行研究についての概略を次に述べる．

2.2.1. Posner(1982)の概念変化モデル

Posner らが設定した問題は,「学習者は如何にしてある概念 C1(素朴概念)からそれに取って代わる概念 C2(科学的概念)へと移行するか」というものである(図１)．

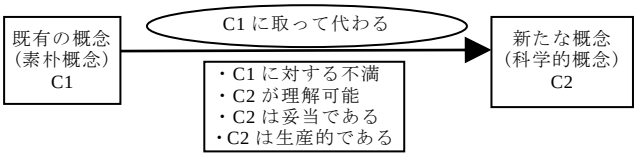


図 1:Posner の概念変化モデル(筆者による)

既有の概念 C1 が存在している状況で，新たな概念 C2 が導入された場合，C2 は，①拒否される，②丸暗記される，③C1 に取って代わる，④C1 に取り込まれる，の 4 パターンが考えられる．その中でも概念変化は，③にあたる．Posner らのモデルでは，概念変化のための４つの条件が挙げられている．1.既有の概念に対する不満が存在する，2.新しい概念は理解可能である，3.新しい概念は妥当である，4.新しい概念は生産的である．Posner らのモデルでの教授方法は，素朴概念を攻撃するだけでなく，科学的概念と素朴概念と対比した上で，科学的概念が妥当性と生産性において勝っていることを示さなければならない.

2.2.2. Chi(1992)のカテゴリーシフト論

Chi は素朴概念の概念変化の難易度につい

て述べている．強固な素朴概念の存在によって重要な科学的概念の学習が困難を極めることがある一方で，教育によって容易に生じる概念変化もあれば，意図的・組織的な教育なしでも生じる概念変化もある．このように，素朴概念には変化しやすいものと変化しにくいものがある．何がこの違いを生み出しているのかを説明するのが，Chi の目的である．

Chi は，概念変化が必要になるのは，学習すべき概念と対立する既有知識を持つ場合であると捉えている．しかし，概念変化の難易度について考える場合，その概念が正しいか誤っているかという区別をするだけでは，不十分である．そこで，Chi は既有概念に存在する誤解を 3 つのレベルに分けて考える．それは，個人の信念，メンタルモデル，カテゴリーである(図２)．

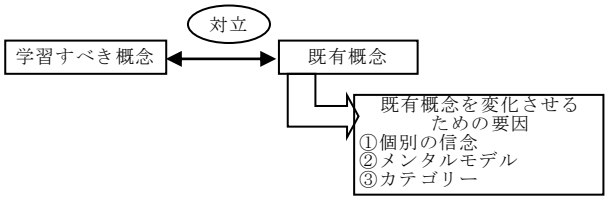


図 2:Chi(1992)の概念変化の捉え(筆者による)

既有概念を変化させる要因についての詳細な説明は省略する．

2.2.3. Vosniadou(1994)のフレームワーク理論

Vosniadou の理論が扱っているのは,教育によって生じる概念変化である．反直観的な科学概念が教示されたとき，それがどう受け入れられるか，素朴概念にどのような変化が生じるか，を問題にしている．幼児期の理解は物理・生物・心など幾つかの領域に分けられており，個々の対象に対する理解はその領域固有な理論の中に埋め込まれている．Vosniadou はこの理論をフレームワーク理論と呼び，物理，心理，数学，言語の 4 領域を想定している．

Posner らの最初の概念変化モデルでは，概念 C1(素朴概念)と C2(新たな概念)がそれぞれ独立に存在し，最終的にどちらかが選択されるものであった．そこでは，C1 と C2 の相互作用は考慮されていなかった．しかし，理解の困難な科学的概念の教授場面では，C2 が何の誤解もなく理解されて C1 と競合するということはまれである．C1 によって C2 が誤って解釈されたり，C1 が C2 を取り込むように変化したりと，C1 と C2 の 2 つがそのままの形で共存しないことのほうが多い(図３)．

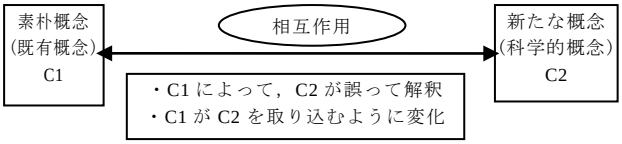


図 3：Vosniadou(1994)の概念変化の捉え（筆者による）

これがどのようなプロセスであり，どのようにして科学的概念の理解に至るかが、Vosniadou の理論が答えようとする問題である．

2.3. 3 つの理論の比較

Posner と Chi は，概念変化の対象についての明確な記述はないが，Vosniadou は物理，心理，数学，言語の 4 領域を想定している．また，Posner と Chi，Vosniadou の理論を比較すると，概念変化の捉え方が異なっていることが分かる．Posner は素朴概念が新たな概念に「取って代わる」ことを概念変化であると捉えている．Chi と Vosniadou は，素朴概念の変化や，新しい概念との対立に焦点をあてており，素朴概念が新たな概念を「取り込むように変化する」ことを概念変化と捉えている．これらの概念変化の捉え方の違いを踏まえた上で，算数・数学学習において適用可能であるか検討する必要がある．そのため，次節では算数・数学学習における概念変化の先行研究を概観する．

3. 算数・数学科における概念変化の捉え

この節では算数・数学学習における概念変化を捉える．以下，藤村(2011)，真野(2010)

の記述である.

3.1. 藤村(2011)の先行研究

藤村(2011)の概念変化の捉えは，単なる知識の増加や累積ではなく，多様な知識が関連付けられていることによる知識構造の質的変化のプロセスと捉えており，それが算数・数学領域における概念変化にあたると考えている．藤村(2011)は，実際に小学校算数科において，単位量あたりの大きさを事例として，概念変化について研究している. 導入・展開・事後テストにおいて，児童が用いた学習方略と，方略の変化についてまとめており，単位量あたりの大きさの概念を理解している子どものもつ既有の方略が，授業場面で形式的に数式に当てはめただけの子どもが示した方略の利用の仕方を意味づけ，それが授業後の理解に影響すると言った流れ(理解の漸進的プロセス)の示唆もしている.

3.2. 真野(2010)の先行研究

真野(2010)は，“conceptual change”を「概念変化」ではなく「概念変容」という．概念変容をもたらす授業構成の原理において，構成原理(Design Principles)を次のように捉えている：

「DP1：算数・数学の学習を，知識の累積的成長として捉えるのではなく，先行知識が新しい知識と相互作用とし，全面的に再構成される過程として捉える〈構成主義的学習観の原理〉」(真野，2010, p.249)．

上の 2 つの算数・数学科における概念変化の捉え方の特徴として，概念変化をある相互作用による知識構造の質的な変化と捉えていることに注目したい．このことは前節で挙げた Posner の概念変化の捉え方と大きく異なる部分である．Posner の概念変化の捉え方は，素朴概念が新しい概念に「取って代わる」ことであった. Chi と Vosniadou の概念変化の捉え方は，素朴概念と新しい概念の「対立」または「相互作用」を考慮したものであり，特に Vosniadou においては素朴概念が新しい概念を「取り込むように変化」することだと捉えている．このことは藤村(2011)の「知識構造の質的変化」や，真野(2010)の「全面的に再構成される過程」と類似している点であるだろう．この捉え方を基に次節では，素朴概念と新しい概念が相互作用をすることの捉え方として，概念構造に着目し，問題解決の過程について述べられている Vinner(1991)の「概念イメージ」を参考にする.

4. 数学学習における「概念イメージ」

Vinner(1991)は，数学学習において，「概念定義」(concept difinition)，「概念イメージ」(concept image)という語を用いて説明している.「概念イメージ」とは，学習者が認知課題を与えられた時に心のなかで生起する非言語的な概念名，または図や印象である．それらは学習者の経験によって概念名と結び付けられ，言葉の形に変換できるものである.

Vinner(1991)は，「関数」において「概念イメージ」の具体的な例示をしている：

「「関数」という言葉を聞いたとき，あなたは「$y = f(x)$」や，視覚的な関数のグラフや $y = x^2$，$y = \sin x$ や $y = \log x$ のような特定の関数を思い浮かべるだろう．このことは，概念イメージは,個人の経験との関連のみである」(Vinner, 1991,p.68)(和訳は筆者による).

「関数」という言葉を聞いたとき，学習者は数学的に関数の定義を述べることよりもむしろ，上記に示した「概念イメージ」を持つことを Vinner(1991)は示している.

Vinner(1991)は，望ましい問題解決過程として，次の図 4 を示している．図 4 は，Vinner(1991)が示す望ましい問題解決過程で

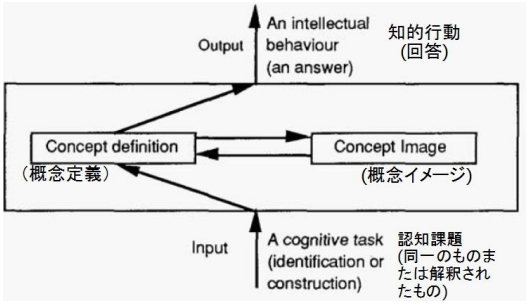


図 4：理想的な問題解決の過程
(Vinner, 1991, p. 71)(和訳は筆者)

あるが，概念イメージを形作るときであっても，認知構造を考えるときでも，実際に行う課題に対して，定義を強制的に学ばせることは難しいため，Vinner(1991)は実際の学習活動において，図 5 のような学習になっていると考えている．

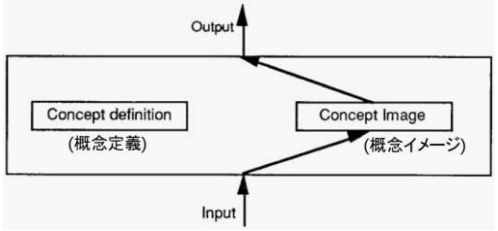


図 5：直観的対応
(Vinner, 1991, p. 73)(和訳は筆者)

学習者の概念定義の有無にかかわらず，概念イメージのみで回答することが殆どである．このことは，学習者が習慣的に公式の定義を調べる必要性を感じていないことから起こる．

5. 「概念変化」についてのまとめ

第 2 節から第 4 節にかけて，概念変化，概念変容，概念イメージについての先行研究を述べた．ここでは，本研究における「概念変化」の扱いについて，先行研究から立場を明らかにしていく．

概念変化研究は，科学の分野において生まれ，最初に理論枠組みを構築したのは Posner(1982)である．Posner は，既有の概念が新たな概念に「取って代わる」ものを概念変化と定義し，元々持っていた概念は棄却される．Chi(1992)や Vosnidou(1994)は Posner の概念変化の捉え方とは異なり，素朴概念が新たな概念と対立したり，相互作用が起きたりすることを述べている．特に Vosniadou は既有の概念が新たな概念に「取り込むように変化」することだと捉えている．

算数・数学学習において，概念変化の理論を適用させたのが藤村(2011)や真野(2010)である．概念変化を単なる知識の累積的な成長として捉えず，素朴概念が新しい概念と相互作用し，全面的に再構成されることであると述べている．このことは，特に Vosniadou の捉え方と類似している．これらの捉え方は，Vinner(1991)の概念イメージの考え方に大きく関わるだろう．Vinner の概念イメージと，Vosniadou と真野(2010)が記述する素朴概念と新しい概念の間での相互作用を取り入れた上で，本稿においての高等学校の数学学習における「概念変化」の捉え方を明確にする．概念イメージには，素朴概念による概念イメージと，新しい概念による概念イメージが考えられる．概念定義を通じた相互作用を経ることによって素朴概念による概念イメージが新しい概念による概念イメージに取り込まれるように変化し，全面的に再構成されることを「概念変化」と本研究においては捉えることとする．図 4，図 5 と本研究における「概念変化」の定義を基にすると，数学学習において次の図 6 が考えられる．

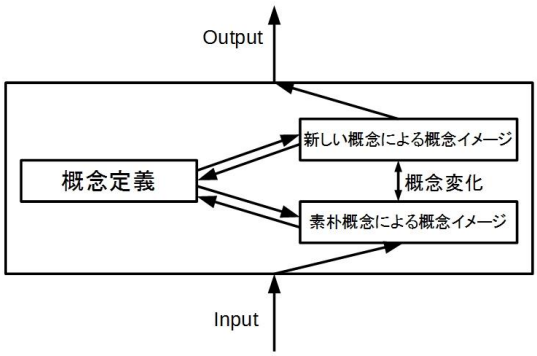


図 6：本研究における「概念変化」

概念イメージは，素朴概念と新しい概念に分けられるものであると捉える．すると，次の 3 つの相互作用が考えられる．一つ目は概

念定義が素朴概念による概念イメージと相互作用すること，二つ目は概念定義が新しい概念による概念イメージと相互作用すること，最後に素朴概念による概念イメージと新しい概念による概念イメージが相互作用することである．その中でも，概念イメージ同士の相互作用を概念変化として捉えることが出来るだろう．その過程の中で，概念イメージ同士の相互作用により，Vosniadou の「素朴概念が新しい概念を取り込むように変化」し，真野(2010)の「素朴概念が新しい概念と相互作用し，全面的に再構成される」過程であると捉えることが出来るだろう．

本節で定めた定義を基に，次節では高等学校の数学学習において，概念イメージの具体的な内容をアンケート調査により同定した．

6. アンケート調査の結果と分析

前節で定義した本稿における「概念変化」の枠組みのもと，数学 B「ベクトル」における大学生の概念イメージを同定することを目的とした調査を行った．大学生を対象としたアンケート調査を作成・実施し，その結果の分析を行った．アンケート調査の概要を次に述べる．

6.1. アンケート調査の内容

大学生に対するアンケート調査の概要は以下の通りである．

調査場所：新潟県内の国立大学
日　　時：平成 30 年 1 月 16 日
調査時間：約 10 分
対　　象：大学 2 年生～大学院 3 年生
人　　数：33 名
記録内容：学生によるアンケート調査用紙への記入

アンケート調査は個人で回答するものとし，周りと相談したり，参考書を見たりせずに指示したものである．このアンケート調査ではベクトルの困難性，学習者が持つ概念イメージを回答から見ることができる．

アンケート調査の内容については，学年・コース名および高校生の時の数学の履修状況を質問しており，その後に問題 1，問題 2，問題 3 を出題している．なお，対象とした学生は全員「ベクトル」の単元を高校生のときに履修済みであった．

6.2. アンケート調査の結果と分析

アンケート調査より，問題 1 と問題 2 を分析をする．以下，実際に扱った問題とその結果と分析である．

6.2.1. 問 1 の結果と分析

問 1(1)(2)の実際の問題は図 7 の通りである．

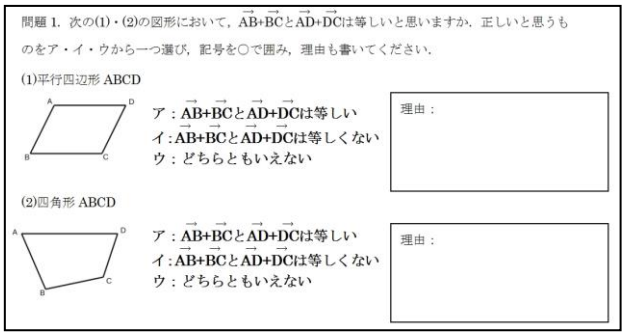


図 7: アンケート調査問題. 問題 1(1)(2)

問題 1 の結果として，(1)と(2)の回答は，「どちらも$\vec{AC}$と表せるから」,「平行四辺形だから」,「移動経路が一緒だから」の 3 通りに大別した．それぞれの回答者数は図 8 の通りである．

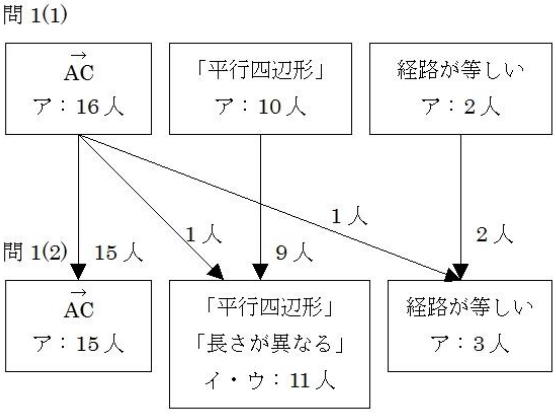


図 8：問 1(1)(2)における主な回答と人数

図 8 から，問 1 の(1)と(2)において，(1)の理由を(2)においても同じ理由で回答している回答者が多いことから，ベクトルの和に関する概念イメージとして，次の 3 つが同定することができるだろう．

①ベクトルの演算から，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$と表わすことができ，その 2 つは等しい．

②ベクトルの和としての移動経路は関係なく，移動先が同じ場所になる．

③ベクトルの和は，2 つのベクトルが 2 組で平行四辺形となったときに等しいといえる．

①と②が獲得すべき概念イメージであり，③は誤った概念イメージである．この問題から，ベクトルの和において，①は静的に見る概念イメージ,②は動的に見る概念イメージ,③は図形として認識する概念イメージだと見出すことができ,「平行四辺形」など，ベクトルの和においての適用範囲の限界がある捉え方をしている学習者がいることが発見できた．この問題の課題として，に記載された$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$のベクトルが離れている場合は回答がどのように変化するのかさらなる調査が必要である．

6.2.2. 問 2 の結果と分析

問 2(1)(2)の実際の問題は図 9 の通りである．問 2 (1)の回答の理由には「中点とは限らない」,「平行四辺形・平行の関係」の 2 つが多く見られ，(2)の回答の中には(1)の回答と「向きが異なる」という理由を用いた学生が多く見られた．それぞれの回答者数を図 10 に示す．問 2 の回答として，(1)，(2)の両方の回答理由として多くの回答者が「中点とは限らない」と答えていた．このことは，問題文に，EF は AB の中点であることを明記しなかったことが考えられる．そのため，(1)における正答はイ又はウを選び「中点とは限らない」となる．しかし，(2)においては，$\overrightarrow{EB}$と$\overrightarrow{FD}$はベクトルの向きが異なるため，正答はイを選択し「向きが異なるから」であることに留意したい．図 10 から，問 2 の(2)において，理由として「中点とは限らない」と「向きが異なる」と回答している人数が多いことが分かる．(1)で回答した理由を(2)でも同じ理由として回答している人数が多いことから以下の 2 つのベクトルの相等に関する概念イメージを同定することができるだろう．

①大きさが等しくても，向きが異なれば，異なるベクトルである．

②ベクトルは大きさが関係しており，向きに関してはあまり問題視しない．

①が獲得すべき概念イメージであり，②は誤った概念イメージである．このことから，

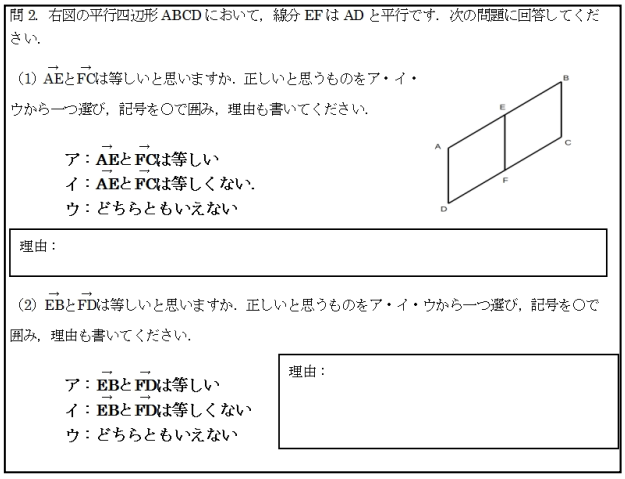


図 9：アンケート調査問題．問 2

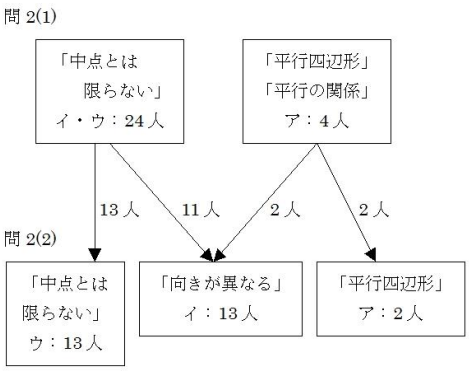


図 10：問 2(1)(2)における主な回答と人数

ベクトルの相等に関して，学習者の中には，ベクトルの大きさに目を向けることは出来るが，向きにはあまり着目しないという概念イメージがあるだろう．正しいベクトルの相等に関する概念定義を学んだときに，大きさの概念は向きの概念よりも学習者に強く残りやすいことが示唆される．ベクトルの相等の概念イメージに関して，今回の調査問題では大きさが等しいことを問題に明記していなかったため，今後，ベクトルの大きさは等しく，向きが異なるような調査問題を作成し，検証する必要がある．

7. まとめと今後の課題

本稿では，これまでの概念変化研究を比較，整理することを Vinner(1991)の考えを基に「概念イメージ」と「概念変化」の関係を見出すことを通して，本稿における「概念変化」の捉え方を確定した．その上で，数学 B「ベクトル」のアンケート調査において，学生のベクトルの和，ベクトルの相等における概念イメージを同定した．今後の課題は，素朴概念による概念イメージと概念定義の相互作用，新たな概念による概念イメージと概念定義の相互作用，素朴概念による概念イメージと新たな概念による概念イメージの相互作用がどのように行われるかを見極め，高等学校の数学学習における概念変化の様相を明らかにしていくことである．

引用・参考文献

Chi, M. T. H.（1992）. Conceptual change within and across ontological categories : Examples from learning and discovery in science: Vol.15.In R. Giere, & H. Feigl （eds.）, *Cognitive models of science*（pp.129-186）. Minnerapolis, MN : University of Minnesota Press.

diSessa, A, A.（1982）. Aristotelian physics: A study of knowledge-based learning . *Cognitive Science*, 6, 37-75.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. A.（1982）. Accommodation of a scientific conception : Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, 66, 211-227.

Vinner, S.（1991）. The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D, Tall（Ed.）, Advanced mathematical thinking. pp.65 － 81. Dordrecht:KluwerAcademic Publishers.

Vosniadou, S.（1994）. Universal and culture-specific properties of children's mental models of the earth. In L.A. Hieschfeld & S.A. Gelman（Eds.）, *Mapping the mind : Domain specificity in cognition and ulture*（pp.412-430）. New York : Cambridge University Press.

真野祐輔（2010）．算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究―「数」領域の展開を中心に―. 広島大学. 学位論文(未公刊).

瀬尾美紀子（2011）．比例概念の理解と素朴概念―『増えると比例，減ると反比例？』―. 日本教育心理学会総会発表論文集. 53, 358.

中央教育審議会(2016). 算数・数学ワーキンググループにおける審議の取りまとめ. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/073/sonota/__icsFiles/afieldfile/2016/09/12/1376993.pdf （2018.2.15. 最終確認）

藤村宣之（2011）．教授・学習活動を通じた数学的概念の変化．心理学評論. 54,3,296-311.

村山功（2011）.「概念変化についての諸理論」. 心理学評論. 54(3), 218-231.

湯澤正通，稲垣佳世子（2011）. 日本における概念変化研究『概念変化研究』の特集にあたって. 心理学評論. 54, 3, 201-205.

上越数学教育研究，第33号，上越教育大学数学教室，2018年，pp.91-104

中学生の数学学習における情意の様相について
- メタ情意とメタ認知に注目して -

小林　祐希
上越教育大学大学院修士課程１年

１．はじめに

数学学習において，学習意欲や学習に向かう態度などの情意面を育てることが重要である。新学習指導要領では，育成すべき資質・能力の三つの柱の一つに学びに向かう力・人間性等が挙げられ，数学においても，これまで以上に情意的な側面を大切にし，評価・改善する態度や多面的に考えることや，粘り強く問題の発見や解決に取り組む態度が求められている(文部科学省，2016a)。

しかし，2015 年国際数学・理科教育動向調査(TIMSS)の調査結果に示されているように，小学校から中学校に移行すると，数学嫌いの生徒が増加傾向にあることは，数学教育が抱える課題である (文部科学省, 2016b)。また，2012 年に行われた PISA 調査(国立教育政策研究所，2013)の結果から，諸外国と比べて数学を不安と思う生徒が多いことが課題であることが示された。

数学教育における情意研究では，これまで情意と数学学習との関係を明らかにしようとした統計的な研究が数多く行われ，情意と認知との関係が明らかになった(eg.，湊，1983; 鎌田，1985)。他方で，情意に関する質的な研究では，統計的な研究で捉えきれなかった，情意の詳細な様相や，情意的葛藤の様相が明らかになった(eg.，McLeod，1994; 山野，2015a)。

以上のように，数学嫌いや数学不安が，数学教育の課題として挙げられているが，数学に望ましい情意が何かについては，未だ十分な議論がされていない。例えば，数学に対する不安も，一見否定的な情意のように思えるが，その不安が危機感や危険回避的な動機づけにつながり，学習の促進となる場合もある。山野(2015a)は，生徒の情意が数学学習に影響し，情意を豊かにすることによって数学学習の促進が期待できるとしている。

本研究では，情意同士，情意と認知の関わりについての様相を捉えることのできる，Debellis & Goldin(2006)のメタ情意という概念に着目する。他方で，数学教育においてメタ認知の研究が盛んに行われている(eg.，重松，1994; 石田，2002)。様々な知識を複合しながら認知を調整するメタ認知は重要であり，数学教育において欠かせない視点である。多くの先行研究では，情意と認知との関わりについて言及されており，メタ認知においても情意的側面がメタ認知と関係している。

一方で，情意とメタ認知を表象体系の関わりの中から捉えようとする研究も行われており(eg.，Goldin，1987)，この考えは本研究における鍵となる。

本研究の目的は，Debellis & Goldin(2006)の情意の構成要素やメタ情意を元に，新たにメタ認知を加えた理論枠組みを構築し，先行研究のプロトコルを用いてその妥当性を検討することである。

本研究の目的を達成するにあたり，本研究において立脚する数学観を示し，情意に関し

て先行研究で何が明らかになってきたのか，統計的研究と質的研究について述べ，情意にメタ認知の側面を加えた新たな理論枠組みを構築する。最後に，理論枠組みの妥当性について先行研究のプロトコロルを用いて考察を行う。

２． 本研究で立脚する数学観

Debellis & Goldin(2006)の挙げている数学的親密さ，数学的誠実さの二点を元に，本研究において依拠する数学観を述べる。

2.1 数学的親密さ

Debellis & Goldin(2006)によると，数学的親密さとは，数学には人の情意が深く入り込んでおり，親しみを感じ，自分の近くに数学があることが望ましいと述べている。数学的親密さの要素には，深い感情の関与，数学を学習することの意味や目的の構築が含まれている。例えば，数学が好きな人は数学を自分にとって身近に感じ，数学が嫌いな人は自分が数学から遠い位置にいると感じる。数学的に親密な行動とは，例えば数学について語る際に生き生きと語ることや，数学の問題を解いている際に興奮すること，数学に関して知らないことがあると知的好奇心が湧いてくること，などが挙げられる。

一方で，Debellis & Goldin(2006)はこうした数学的親密さを持って従事することは，数学との長期的で確実な関係を保証するものではないと述べている。生徒が予想しない部分でつまずくことや，数学教師から叱られた場合に，親密的な裏切りといった，数学から裏切られたような感覚になり，これにより数学を身近に感じられなくなるといった，数学的親密さを持たなくなる要因になる。このことから，数学的親密さには文脈や状況が影響している。Debellis & Goldin(2006)は数学的親密さをなくさないためには，メタ情意的な能力を持つことが必要であると述べている。

2.2 数学的誠実さ

数学的誠実さとは，数学的な真理への傾倒や数学的理解の探求，数学的研究を導く道徳的な人格のことを指す(Debellis & Goldin, 2006)。例えば，数学的事象に対して規則性を見つけた際に，それが本当にどのような場合でもいえるのかを確かめたいと思い，数学的活動を行うことは，数学的な真理を探求し，数学的な研究へ導く人格である。他方で，他者から教えられた数学に関する知識が誤りではないかと思いながらも，その知識を用いることで他者に認められるといった理由で問題解決をすることは，数学的に誠実であるとは言えない。

Debellis & Goldin(2006)は，数学的誠実さと数学的親密さは学習の本性と知識の深さに影響し，これらが相互作用している場合に効果ある学習や問題解決が生まれると述べている。

これまで挙げたように，数学学習において数学的親密さ，数学的誠実さは様々な数学学習に影響を及ぼし，情意的側面が重要である大きな理由である。よって，これら二つを本研究で立脚する数学観とする。

３． 先行研究

3.1 情意に関する研究

これまでの数学学習における情意に関する研究では，質問紙など測定用具としての尺度を用いて情意を数量化し，分析するといった統計的な研究が日本で行われており，極めて重要な知見をもたらしている(eg.，湊，1983；鎌田，1985；今井，1986)。

湊(1983)は，算数・数学に対する態度を測定し，幅広い学校段階に使用できる SD 型測定用具 MSD を開発し，態度評価が指導者の内省のための手段として使用されるべきであると述べている。

鎌田(1985)は，それまであまり日本で注目されてこなかった数学に対する不安や，自信

を中心とした項目からなる不安測定用具を開発し，数学に対する不安と態度等に高い相関関係があることを示した。数学不安は数学学習を阻害または促進する要素となり得るため，その際の規則や法則性についても明らかにする必要がある。

今井(1986)は，因子分析を用いて，数学能力と数学学力や数学に対する情意面との相関関係について考察した。その結果，今井(1986)は，図形が好きな生徒は探究的態度を有しているなど，数学的な能力や学力が高く数学を好む生徒が特有の人格的側面を持つことを示した。数学学習によって人格形成が促進されたのか，特有の人格を持った生徒が数学的な能力や学力が高い傾向にあるのかは，今後の検討事項である。

湊＆鎌田(1991)は，これまで行われてきた認知的学力と情意的学力間の関係について研究を発展させ，情意的学力が原因となって認知的学力が形成されるような因果的方向性が多く見られることを明らかにした。

伊藤(1994)は，数学における情意的特性を測定するために，数学に対する情意的特性検査(ACTM)を開発した。伊藤(1994)はそれぞれの要素の相互関係について考察し，学校段階によって情意的特性の構造が異なるということを明らかにした。

他方で，統計的研究では捉えきれなかった情意の特性を捉えようとした，質的研究方法を用いた研究がある。米国ではMcLeod(1994)が情意研究において今まで主流であった統計的な研究だけでなく，質的な研究の補完が必要であると述べている。

松岡(1992)は，McLeod(1992)が挙げた数学学習における情意の構成要素としての信念，態度，情緒の三つの分類を元に情意を定義し，情意を生成する要因として，興味，自信，不安，忍耐の四要素を規定した上で，認知的な側面を考慮した枠組みを構築し，分析を行った。その結果，これらの要素が肯定的または否定的な情意が生じる要因となっていることを明らかにした。

阿部＆伊藤(1995)は，情意的側面を信念，態度，情緒という三つのカテゴリーに分類し，その時点における生徒の情意的側面の状況を把握することができると述べている。さらに，阿部＆伊藤(1995)は数学の授業を支えている生徒の情緒には，不安，疑問，安心，自信，うれしさ，などが挙げられるとし，従来の学校教育における伝達型授業を支える情意的側面にまで考察対象を発展させている。

横塚(1996)は，情意反応グラフを用いた研究を行い，情意の変動について分析を行い，生徒が持っている情意と，教師が観察する情意にはずれが生じることを明らかにした。生徒が授業中の自身の情意の変化についてグラフで書くという横塚(1996)の方法は，それを元に情意を想起できるという利点がある。

Goldin (2002)は，McLeod(1992)が挙げた３つの要素に，４つ目の要素として価値観/道徳観/倫理観を加え，情意をコントロールする役割としてのメタ情意という概念を開発した。McLeod(1992)と Goldin(2002)の情意の捉え方の違いについて，今井(2015)は以下のようにまとめている(表１)。

【表１】今井(2015)がまとめた情意区分

	McLeod	Goldin
不安定	情動	情動
安定	態度 信念(自分の数学学習や数学という教科に対する信念，社会における数学に対する価値意識としての信念)	態度 信念 価値/道徳/倫理

桑原(2013)は，算数授業における態度に焦点を当てた分析を行い，態度形成には，子どもが持つ社会的または認知的な目標や期待

などが影響していると述べている。社会的な側面が情意と関わっていることは，後述するDebellis & Goldin(2006)の情意の四面体モデルにおける社会や文化の状況に相当する。

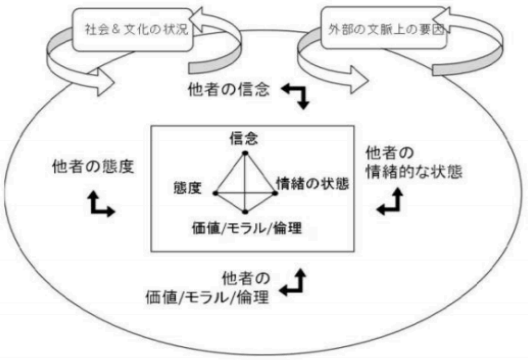
3.1.2 本研究における情意の構成要素

Debellis & Goldin(2006)は，McLeod(1992)の考えに基づき情意を価値観，道徳観，倫理観を加えた四つの構成要素に拡張し，これらの要素について以下のように説明している：

・情緒
　急速に変化する感情の状態であり，局所的で文脈に依存する
・態度
　特定の数学的文脈における，特定の(肯定的又は否定的な)情緒的な感情の状態への傾向であり，情意と認知のバランスが必要である
・信念
　外部真理であり，信念は非常に安定しており，高度に認知的であり，高度に構造化されている
・価値観/道徳観/倫理観
　個人が大切にしている深い「個人にとっての真理」や約束を指し，長期的な選択と短期的な優先事項の動機づけを促す

(Debellis & Goldin，2006，p.135：筆者訳)

これらの四つの要素を元に，Debellis & Goldin(2006)は四面体モデルを作成し(図１)，情意のメカニズムは繰り返し起こる情意のつながりからなる包括的な構造になっており，さらには社会や文化の状況，外部の文脈との相互作用があると説明している。



【図１】Debellis & Goldin(2006)による情意の四面体モデル

数学的親密さ，数学的誠実さは，数学そのものだけでなく，教師や他の生徒といった他者や環境，状況などの要素が組み合わさって形成されるため，こうした状況や文脈について考慮する必要がある。

情意は認知と密接に関わっているが，認知との関わりにおいて情意を定義しているという点で，Debellis & Goldin(2006)の情意の四要素は，認知との関わりの中から情意の様相を捉えるという本研究の考えに合致する。そのため，本研究における情意としてこれらの四要素を規定する。

3.2 メタ認知に関する研究

メタ認知は，生徒の数学における問題解決や学習のメカニズムを解明し，授業実践を行う上で欠かせない要素である(重松＆勝美，2010)。メタ認知に関する研究は，心理学研究のみならず，教科教育学においても重要なテーマとして位置付けられており，数学教育学においても，メタ認知の果たす役割の重要性が主張されている(eg.，古本他，2015)。

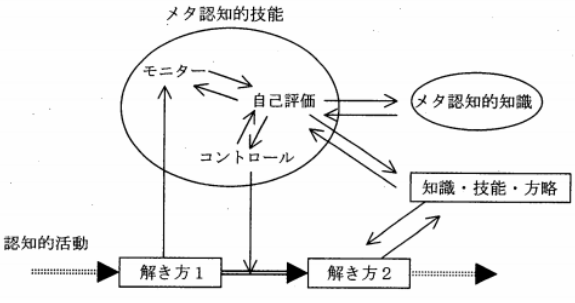
重松他(1994)によると，メタ認知とは，うまく知識や技能が活用されているかなどその認知を調整する作用であり，メタ認知を以下のように分類している：

(１) メタ認知的知識(メタ知識)
①環境に関するメタ知識
②課題に関するメタ知識
③自己に関するメタ知識
④方略に関するメタ知識
(２) メタ認知的技能(メタ技能)
①モニターに関するメタ技能
②自己評価に関するメタ技能
③コントロールに関するメタ技能
(重松，1994，p.186)

重松他(1994)は，メタ認知の内面化には七段階の過程があると述べ，再生刺激法を用いてモデルの実証的解明を行った。

他方で，メタ認知を育成するための実践研究も盛んに行われている。重松他(2010)は，これまでの一連の研究で子どもの書いた算数作文に対する教師の指導によって，子どものメタ認知の変容が促されることを明らかにした。

石田(2002)は加藤(1999)を元に，よりよい解き方を追求する問題解決過程における認知とメタ認知との関連をまとめた(図２)。



【図２】問題解決過程における
メタ認知(石田，2002)

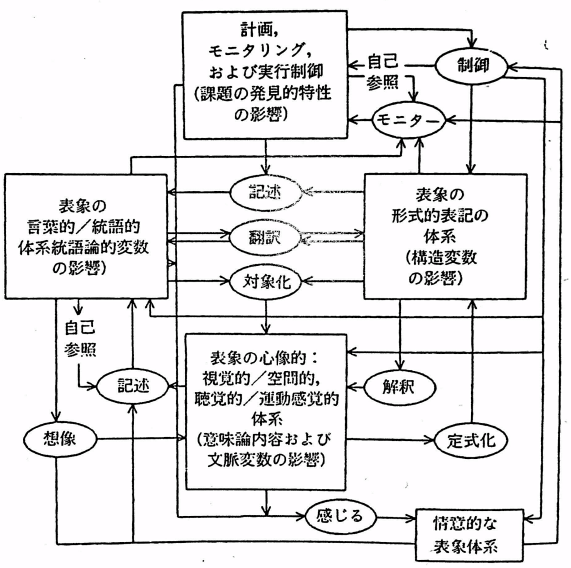
その上で，石田(2002)はメタ認知の指導を取り入れた算数授業によって，子どもの問題解決過程にどのような影響を与えるか分析した結果，メタ認知の指導が多様な解き方ができる子どもの問題解決過程に効果的であることが明らかになった。

高井(2012)はメタ認知の拡張について考察し，これまでのメタ認知研究では授業における自力解決の段階に焦点が挙げられていたため，他者や自己と他者間のモニターを調査，分析することの困難性を指摘した。図２にあるように，認知と直接的にかかわっているのはメタ認知の中でもメタ技能の側面であるため，本研究においても，認知の中でも特にメタ技能に注目する。

以上を踏まえ，本研究では問題解決過程における情意を捉える視点として，重松(1994)のメタ認知の分類を採用する。

3.3　表象体系における情意，メタ認知

情意と認知は，表象体系として相互に関連しているものとして捉える必要がある。数学学習と情意との関係を明らかにする上で，Goldin(1987)は五つの表象体系を示した。山田(1994)は Goldin(1987)の表象体系を再整理し(図３)，それぞれの表象体系について以下のように説明している：



【図３】山田(1994)によって整理された
Goldin(1987)の表象体系

(A) 言葉的/統語論的体系
自然言語の言語的/統語論的処理のための処理系

(B) 心像的体系
言語的なものでない, 心像的な表象のための処理系
(C) 形式的表記体系
形式的な表記体系のための処理系
(D) 計画，モニタリング，実行制御の体系
発見的計画や実行制御, モニタリングに関わる処理系
(E) 情意的表象の体系
問題解決中の感情の変化などにより, 解決過程の進行をモニターし, 評価する処理系
(山田，1994，p.384-385)

山田(1995)は(D)の体系について，(１)他のシステム内及び自分自身内で起こっていることに絶えず注意すること(モニタリング)，(２)自分自身を含む内的な表象体系内で採用されるステップを決めること(計画)，(３)他のシステムを修正すること(制御)，の三つのサブシステムを有するものであると述べている。これは重松(1994)の定義のうち，メタ技能に相当する。また，(D)の体系と(E)の体系の関わりについて，制御，モニター，自己参照の機能がある。

山田(1994)は，このモデルを用いた分析で，成功的な問題解決者には, 情意的表象を用いたモニタリングや表象の変容が頻繁に見られたと考察し, 認知過程の分析に情意的な側面を考慮に入れることは本質的な要請であると述べている。

Debellis & Goldin(2006)は，Goldin(1987)の表象体系を元に, 数学的問題解決能力のモデルとして, 五つの内的で相互作用的な表象体系を挙げ，以下のように説明している：

(a) 言語的/統語論的体系(自然言語，文法，および構文を含む)
単語，句，文レベルでの自然言語処理に対する能力を説明するもの
(b) 心像的体系
内部視覚/空間, 聴覚/律動/触覚/運動感覚のコード化を含む。
(c) 形式的表記体系(算術，代数，微積分の表記法，デカルトグラフなど)
数学における形式的表記の構造についての体系
(d) 問題解決の間の経験則的かつ戦略的な意思決定を支配する, 計画と実行制御の体系
(e) 情緒，態度，信念，道徳観，価値観，倫理観を含む情意システム
(Debellis & Goldin，2006，p.132：筆者訳)

Debellis & Goldin(2006)は, 表象体系を考慮することについて, 情意の体系だけでなくこれら五つの表象体系を考慮し, 他の表象との相互作用をすることによって, 情報を読み取ることができる可能性があるとしている。Debellis & Goldin(2006)は, 他の内的表象システムとの相互作用によって情報を符号化することに関して, 生徒の試行錯誤をしてもうまくいかないという不満が, 他の簡単な問題を解いてみるといった方略の変化をもたらすメタ認知について言及している。生徒によっては, こうした不満が絶望や不安に変わり, 雑談をするなどの学習に対する回避行動をすることもある。このように，情意の様相について記述する際に認知, 情意だけでなくメタ認知についても考慮しており, 本研究においても取り入れるべき視点である。さらに, これらの表象体系は非常に複雑であり, 時間をかけて段階的に発展し, 状況や文脈に依存する。

表象体系全体について整理すると，Debellis & Goldin(2006) の(a)〜(e)の体系は，情意体系の定義が 3.1.2 で述べた情意の四つの構成要素に基づいたものとなっている。

例えば，生徒が黒板に式の答えを書き(c の体系)，それが合っているか不安になっている状態(e の体系)で，教師が黒板に書いて

ある答えに丸をつけたことを生徒が視覚的に解釈し(b の体系)，教師が生徒に「よくできたね」といった言葉をかける(a の体系)という場面が考えられる。

４． 情意を捉える理論枠組み

本研究では，特に学習の促進，妨げになっている際の情意の様相を明らかにするために，動的に情意を捉える枠組みを構築する。そのために，情意と密接に関わっている認知やメタ情意だけでなく，認知の背景となるメタ認知についての関係について明らかにする必要があるという立場を取る。

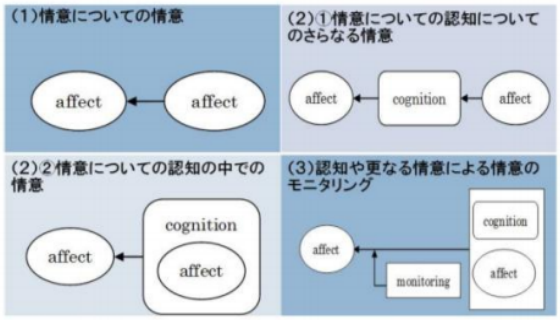
4.1 メタ情意

Debellis & Goldin(2006)は，生徒の情意に影響を与える，情意の一番重要な面としてメタ情意を以下のように定義している：

(１) 情意についての情意
(２) 情意の認知についてのさらなる情意，もしくは認知の中での情意
(３) 認知やさらなる情意についての情意のモニタリング
(Debellis & Goldin，2006，p.136：筆者訳)

Debellis & Goldin(2006)によると，メタ情意は経験からくる情意をネガティブからポジティブなもの，もしくはその逆に変えることができるとし，ジェットコースターと数学に対する恐怖の例を挙げて説明している。ジェットコースターに乗る際，高いところから落ちるという恐怖といった否定的な情意があるが，ジェットコースターが安全であるという知識が，ジェットコースターに対する高揚感や興奮という肯定的な情意を生み出す。同様に，生徒がミスをしても周りが受け入れてくれる環境では，生徒の回答が間違っており，不安になったとしても，ミスを受け入れてくれる他者がいることに対する安心感や嬉しさを感じるのではないか。

山野(2015a)は，メタ情意の視点を取り入れることで，情意に関わる認知にまで言及することができ，授業中の生徒の情意を詳細に表し，情意の生成過程をより精緻に捉えることができるとした。山野(2015a)は，Debellis & Goldin(2006)を基にしてメタ情意を図式化し(図４)，情意が他の表象体系及び認知と密接に関わっていることや，生徒のより安定した情意の形成に，メタ情意が大きく作用していることが挙げられると考察している。



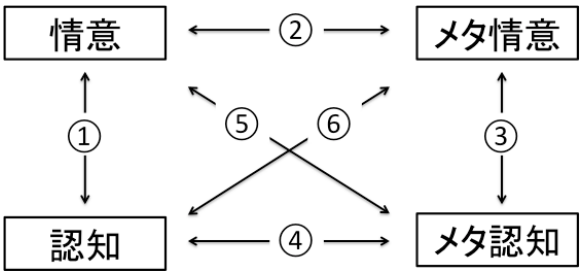
【図４】山野(2015a)による
メタ情意の図式化

メタ情意が数学学習における枠組みとして有効なのかについて，例えば，「数学は好きだけど今学習している単元の数学は嫌い」といったメタ情意は，状況依存的に情意が変化するというメタ情意の特質を記述している。数学学習は環境や文脈といった状況が常に変化するものであり，そうした中でメタ情意は，数学学習を考察する上で有効な要素であると言える。

以上を踏まえ，本研究では，Debellis & Goldin(2006)の述べているメタ情意の定義を本研究においても採用し，Debellis & Goldin(2006)の表象体系には含まれていないメタ情意についても表象体系として考慮すべきであるという立場をとる。

4.2　情意を捉える理論枠組み

これまでの議論を踏まえ，本研究では，情意，認知，メタ情意に加え，メタ認知を考慮した理論枠組みを構築し，その妥当性について検討する(図５)。



【図５】本研究における理論枠組み

4.3　本研究における概念規定

情意，メタ情意，認知，メタ認知についてそれぞれ以下のように規定する。

本研究では，情意，認知，メタ認知について 3.3.1 で述べた Debellis & Goldin(2006)の体系をもとに規定する。

情意の体系は Debellis & Goldin(2006)の (e) 情緒，態度，信念，道徳観，価値観，倫理観を含む情意システム，の体系や四面体モデルの中で定義されている情緒，態度，信念，価値観の四要素として既定する。

認知は Debellis & Goldin(2006)の中の(a)言語的/統語論的体系，(b)心像的体系，(c)形式的表記体系の体系，として表されるものを既定する。

メタ認知は，Debellis & Goldin(2006)の(d)問題解決の間の経験則的かつ戦略的な意思決定を支配する，計画と実行制御の体系を元に，重松(1994)のメタ認知がメタ知識とメタ技能の側面から成るという論を参考にし，特に認知的活動と直接関わるメタ技能の側面について着目する。

メタ情意の規定について，4.2 で述べた Debellis & Goldin(2006)のメタ情意の分類に当てはめると，(２)情意の認知についてのさらなる情意，もしくは認知の中での情意，(３)認知やさらなる情意についての情意のモニタリングは，メタ認知の一部と情意との関わりとして記述することができるため，矢印①，②，⑥の関係の一部とみなすことができる。そのため，本研究ではメタ情意を Debellis & Goldin(2006)のメタ情意の分類のうち(１)のみと規定し，(２)と(３)に関しては矢印の関係として表すこととする。

4.4　本研究の理論枠組みにおける要素間の関係について

4.4.1　情意，メタ情意，認知，メタ認知の関係の捉え

矢印①の情意と認知の関係については，3.1 で触れたようにその関係性が統計的研究においても，質的研究においても扱われており，情意と認知は相互に影響しあっていることが明らかになっている。

しかしながら，数学好きの生徒が数学のテストで高得点を取った場合，数学が好きだからという理由だけで高得点であったとは考えにくい。そこには，単に知識，技能を持っているというだけでなく，テスト勉強の仕方といったメタ認知的な要素があることや，数学が好きといった背景にも，例えばこの単元においては数学が好きだけれども，全体的にはあまり好きでないといった様々な要因としてのメタ情意が存在することが想定される。こうした要素を踏まえれば，矢印①の関係が成立するような他の構造が見える可能性がある。

矢印②の情意とメタ認知の関係については，Debellis & Goldin(2006)のメタ情意の定義のうち(３)に相当する。これが当てはまる場面として例えば，生徒が連立一次方程式の文章問題を解けるか不安という情意に対し，でもなぜかワクワクするといったメタ情意を持っているとする。これは本理論枠組みにおいて，見かけ上は矢印②だけの単独の関係に相当するが，黒板に問題の条件が整理されて

いる図があることを認知していることが，ヒントがあれば問題を解くことができるといったメタ知識につながり，このヒントを用いて問題を解こうといったメタ技能が起こる。このように，矢印①から⑥，⑤から③，あるいは①から④から③といったサイクルが想定される。上の例においては，文章問題を解く前に x，y の文字で置けそうなものに下線を引いてから問題を解こう，といったメタ認知が働き，実際に問題を解き計算するといった認知にもつながる。

矢印②の関係にメタ認知や認知が関わっていることについては，山野(2015a)で明らかにされてこなかったことであり，本研究では情意とメタ認知の関係には，認知的な関係がありながらその関係が成立しているという立場を取る。

矢印④の関係では，認知とメタ認知の関係について，これらは相互に影響し合っていることを 3.2 で触れた。他方で，矢印①の関係と同様に，これらが直接的に関わっているのか，それとも情意やメタ情意の関係を含むのかについては検討する必要がある。例えば，生徒が問題を間違えた際に，間違えたことを隠したいという情意をモニターし，解答できていないことを隠そうというコントロールが働き，すぐに答えを見て解答をノートに写すという認知的活動が起こることが考えられる。このことからも，認知とメタ認知の関係にも，何らかの情意の影響があることが考えられる。

矢印⑥の認知とメタ情意の関係については，数学が好きだが特定の単元は嫌いというメタ情意を持っている生徒が，その単元の問題があまりできないという認知によって，そのメタ情意が強化されるという例が挙げられるとすれば，これらには関係があるだろう。

4.4.2　新たに検討する関係

矢印③のメタ認知とメタ情意の関わりの重要性について Debellis & Goldin(2006)は，メタ情意は認知やメタ認知と関わり合い，それらの中で中心的な構成要素である，と述べているが，その関係については未だ明らかになっていない。例えば，生徒が教師に指名され，問題の解き方について自分の考えを述べる際に，自分の答えがあっているか不安であるが，みんなに自分が数学をできると思ってもらいたい(もしくはできないと思われたくない)というメタ情意が働いている状況では，近くにいる生徒に自分の回答があっているか確かめてから全体に発表するといったメタ認知が働く可能性がある。そのため，本研究では，メタ認知とメタ情意に関係があるという立場をとる。

Debellis & Goldin(2006)の挙げるメタ情意の分類の一つである(３)認知やさらなる情意についての情意のモニタリングでは，メタ認知のメタ技能の評価，コントロールの側面について言及されていないため，本研究ではこの二つの側面についても記述する。

さらに，山野(2015a)が挙げている情意的葛藤が学習にどのような影響を及ぼすのかについては未だ明らかになっていないことを踏まえ，本研究における理論枠組みにおいて，情意的葛藤がある際のその後の活動や行為に注目して考察する。山野(2015a)は情意同士の対立としてのみで情意的葛藤を述べていたが，情意的葛藤と認知がどのように関わっているのかについても探らなければならない。

矢印⑤について関係があるということは，Debellis & Goldin(2006)が述べているが，その関係の詳細については未だ十分な議論がされていない。情意がメタ認知の特にモニターを促す機能，メタ認知の評価が情意に影響する側面があると考えられる。生徒が自分の書いた回答に対する不安があるから見直ししてみる，といった例から，情意がメタ認知の中のモニターを促す機能があることが想定

される。こうした機能はGoldin(1987)のモデルにおけるモニターに対応するものと見なすことができる。

５．理論枠組みの妥当性の検討

本研究における理論枠組みでは，六つの関係について挙げたが(図５)，現実性のある矢印の組み合わせにどのような傾向があるのかについて考察する必要性がある。そのため，先行研究のプロトコルを元に，本研究の理論枠組みの妥当性を検討する。

5.1　横塚(1997)のプロトコルから

横塚(1997)は，中学１年生の単元「正負の数」の授業において生徒が課題に対して自分で考えた式と答えを黒板に書いている場面について，以下のプロトコルを考察した。

71　T:ちょっと時間ないからごめん。はい，じゃあちょっと自分で見比べてくれる？あの式があってるかな？
74　T：間違ってはいないかな。みんな大丈夫かな。
75　S：なんか同じような人いる。
76　T：式はいいですね。
77　T：ちょっと，途中の式が抜けてるのがあるんですが・・・
78　T：やーいっぱい出たね。これ，みんないいかな？大丈夫そうですね。　これ，(　)　がほしいね。どう？すごくいっぱい出ました。すごいね，皆さんの頭ね。

この場面で，生徒は自信を持って黒板に答えを書いたつもりであったが，式にかっこを入れることを忘れており，席に戻ってすぐにミスに気づいたが，すでに答え合わせが教師によって始まっていたため仕方なくそのまま席に着いた。この場面において，本研究における枠組みによる考察を示す。

この場面によるモニターは，生徒が黒板に答えを書いた後に席に戻る際，自分の書いた答えを確かめるという行為である。このモニターの背景として，自分の書いた答えがあっているか不安と毎回黒板に答えを書いたらチェックすることが学級や数学の授業において良いことであるという価値観が合わさったメタ情意が想定される。そのため，黒板に答えを書くという認知から，メタ情意を経由してメタ認知(モニター)が起こる。これは本理論枠組における矢印③と⑥の関係に相当する。

次に，自分の間違いに気づくという評価をした生徒は，しまったという焦りの情意を持ったことが予想できる。さらに，生徒が自分の間違いに気づいたことで，生徒には間違いを直したいという欲求と，教師の話を遮ってはいけないという価値観との情意的葛藤が生まれている。その結果，席に着こうというコントロールが起こり，結果的にそのまま席に座ったといった，矢印③の関係があると解釈できる。さらに，コントロールの背景には，情意的葛藤があった際に教師の話を遮ってはいけないという価値観を優先させ，判断したという側面を見いだすことができる。

他方で，78 で教師に間違いを指摘されたことで，生徒が真っ赤な顔をして下を向いてしまった場面については，生徒がその状況をモニターし，教師から間違いを指摘されたこと自体に対する恥ずかしさという情意(矢印①の関係)と，教師からの指摘(認知)により他の生徒が自分の間違いを知っている状態であることに気づいたこと(評価)による恥ずかしさという情意の両方が生まれていると捉えることができる(矢印④，⑤の関係)。こうしたように，恥ずかしいという情意が起こるまでの関係が複数存在する場合がある。

以上より，情意やメタ情意と認知の関わりだけではなく，メタ認知の側面も含まれることが明らかになった。

5.2　山野(2015a)のプロトコルから

山野(2015a)は中学一年生の単元「空間図形」および「資料の活用」において，授業の参与観察とインタビューを行った。インタビューは刺激再生法を用いて授業で撮影したビデオを生徒に見せながら行われた。

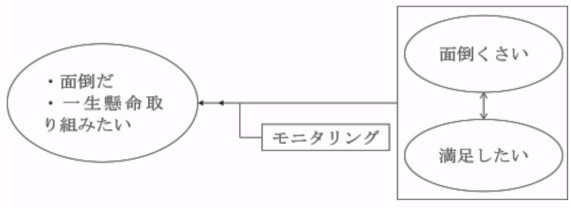
以下のインタビュープロトコルにおいて話題になっているのは，負けず嫌いの性格の生徒が，数学の授業において自分の回答が級友の回答と似たものであったことに対して議論している場面である。

159　S：何かつまんないですよね。
160　山野：あ一他の人と一緒っていうのは。
161　S：なんかオリジナル感がないっていうか。そう，何かちょっとショック受けてました。つまんないみたいな。

さらに，授業場面を元に，自分の負けず嫌いな性格についても言及している。

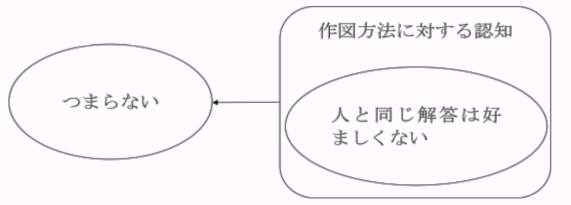
183　S：すごい満足するんですけど，かぶるとちょっとみたいな。
184　山野：なるほど，いいこと。全然いいよ。
185　S：そうですか？負けず嫌いすぎて困りますけどね，なんか自分で。
192　山野：結構意欲がある感じで，自分でいいと思わない？そこが。
195　S：いやなんか，いちいち何か自己満足したいと思う自分が面倒くさいです。それに向けて何かやらないといけないんで。考えたり。
197　S：面倒くさい自分と自己満足したい自分がいるんです心の中に。
201　S：うんでも，気分によって変わりますけど，まぁ基本自己満足するために頑張ります。

山野(2015b)は，負けず嫌いな性格と数学学習との関わりについてのメタ情意を図式化した(図６)。



【図６】生徒の情意についての
山野(2015b)の図式

山野(2015b)は，生徒が自己満足したい自分と面倒くさいと思うメタ情意と相反する二つのメタ情意を持っており，メタレベルにおいて情意的葛藤が生じていることを指摘している。さらに，山野(2015b)は図６の情意に関連するような授業場面におけるメタ情意を図式化し(図７)，授業場面においてつまらないという情意を持っている要因として，自分だけしか考えつかない解答ができなかったという認知がつまらないという情意に対して作用したためであると述べている。



【図７】授業場面における情意
についての山野(2015b)の図式

上記の場面について，本研究の理論枠組みで分析すると，負けたくないという情意は，満足感を得たいという情意と関わっているメタ情意として記述することができる。生徒はそうしたメタ情意について，負けたくない自分がいるという評価をし，数学学習では他人が考えない解法を求めようというメタ知識があり，それに基づくコントロールが働いて，195 で述べているように何かをやるとい

う認知が起こり，それによって満足感を得るという情意を満たす，矢印③，④の関係がある。このように，メタ認知の側面を記述することによって，生徒がどのように判断して次の認知活動が起こったのか，その背景となる情意やメタ情意の側面についての様相が明らかになる。

生徒の実際の授業場面に置き換えると，他の生徒の作図方法の記述(認知)を生徒がモニターし，自分の作図方法と同じだということに気づき（評価），つまらないといった情意になる(矢印④，⑤の関係)。この情意は，負けず嫌いだけど満足したいというメタ情意があるから起こる。このように，メタ情意は安定しており，場面によってその構造が強化されたり修正されたりするような側面を持っていることがわかる。

他方で，山野(2015a)は，別の場面の分析において，生徒が教師の話を聞かずに作業をしていた場面から，話を聞くようになったことに関して，表象体系の(d)実行制御の体系を表す認知的なものであるかもしれないと述べている。この場面では，話を聞かずに作業したいという情意と，話を聞かないといけないという道徳観との間に情意的葛藤が起こっている。問題を解くのをやめ，教師の話を聞くようになった背景としては，教師の話は聞かないといけないといった規範に関わる情意だけでなく，他の生徒は話を聞いているが，自分だけ教師の話を聞かずに作業をしているという状況を認知し，その認知に対して否定的な評価をした，というメタ認知も関わっている可能性もある。

情意的葛藤とその後のコントロールを考察することによって，情意的葛藤が生まれた際の判断といった側面を見いだすことができた。こうした葛藤が生まれた際の判断基準には，この場面においては，他の生徒が教師の話を聞いているといったその場の状況や，学校や教室の文化も含まれる。

以上から，先行研究で明らかにされてこなかった矢印③，⑤の関係に着目しながら分析，考察を進めていくことにより，情意の様相を動的に捉える，認知的活動と情意の関わりについて緻密に記述することができ，情意がどのように学習に影響しているのか，情意的葛藤があった際の評価，判断の基準を明らかにする新たな視点になる。

さらに，今回の理論枠組みではそれぞれの要素を結ぶ矢印を相互に影響するものとしたが，これらが現実的に妥当であるかについては今後も検証していく必要がある。

5.3　情意の構成要素としての欲求

本節では先行研究のプロトコル分析の結果から，情意の構成要素として欲求を新たに加えることを検討する。

先述した横塚(1997)のプロトコル分析では，生徒が自分の間違いに気づいた後「間違いを直したい」という欲求が生まれ，情意的葛藤が生まれた。他方で，山野(2015a)は中学生の情意を分析する際に「作業したい」「作図したい」「説明したい」など，欲求ととれる情意について言及しており，「作業したい」という情意が情意的葛藤を生んだと考察していることから，欲求は学習や活動に大きく影響する情意の要素であると考えることができる。

Goldin et al.(2011)は情意の構造において，欲求はその達成や不満に関連して特定の感情を引き出すと述べた上で，生徒たちは，異なる動機付けの欲求を持った上で，問題解決のために同様の行動をすることを指摘した。他方で，欲求は欲求が受け取られる社会環境によって誘発されるといった，欲求と環境との関わりについても言及している。

以上を踏まえ，欲求は情意において重要な要素であると考え，今後の研究では Debellis & Goldin(2006)の挙げていた四つの要素に新たに欲求を加える。欲求について他の四要素

を踏まえて再定義し，情意の構成要素をより緻密にすることが検討課題である。

６． 結語

本稿では，Goldin(1987)の表象体系やDebellis & Goldin (2006)などを元に情意，メタ情意，認知，メタ認知の概念規定をし，横塚(1997)と山野(2015a)のプロトコル分析により，その妥当性を検討してきた。理論枠組みを構築し，情意，メタ情意，認知，メタ認知の四つの要素について考慮することで，今まで二つの要素間では捉えられなかった因果関係の様相が明らかになることが示された。しかし，これらの関係に現実性があるかについてはさらなる検討が必要であり，理論枠組みの妥当性をさらに検討していく。

引用・参考文献

阿部裕＆伊藤道男.(1995).数学の授業を支える情意的側面について−従来型授業と問題設定型授業との比較を手がかりとして−.上越数学教育研究，10，143-152.

Debbelis，V. A. & Goldin. G.A.(1997). The affective domain in mathematical problem-solving. In PME Conference (Vol.2, 2-209). THE PROGRAM COMMITTEE OF THE 18TH PME CONFERENCE，218-225.

DeBellis，V. A., & Goldin, G. A. (2006).Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. Educational Studies in Mathematics, 63(2), 131-147.

古本温久，久坂哲也，大谷和大，亀岡正睦.(2015).問題解決過程におけるメタ認知的活動の推移に関する考察.−メタ認知をオンラインで可視化するふきだし法を用いて−.秋期研究大会発表集録，48，63-66.

Goldin. G.A..(1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. Problems of representation in the teaching and learning of mathematics，125-145.

Goldin,G.A.(2002).Affect, meta-affect, and mathematical belief structure. In G.C.Leder, E.Pehkonen, ＆G.Törner(Eds) , Beliefs:A hidden variable in mathematics education, 59-72，Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning. ZDM, 43, 547–556.

石田淳一.(2002).メタ認知の指導による小学６年性の問題解決過程の変容に関する研究.日本数学教育学会誌，数学教育学論究.78，3-21.

今井敏博.(1986).数学的能力，数学学力，数学に対する情意面および創造的態度の関連について：中学生を対象として．日本数学教育学会誌，68(1)，26-33.

今井敏博.(2015).算数の学習における情動の喚起と情意形成.日本数学教育学会誌，数学教育学論究 (臨時増刊)，17-24.

伊藤俊彦.(1994).島根式数学に対する情意的特性検査について(２)−算数・数学学習におけるやる気に関する研究(X Ⅳ)−.数学教育論文発表会論文集，27，559-564.

鎌田次男.(1985).測定器具を用いた我国中学生の数学に対する不安の研究.日本数学教育学会誌,67, 59-62.

加藤久恵.(1999).数学的問題解決におけるメタ認知の機能とその育成に関する研究.数学教育学論及，71-72，21-27.

桑原利恵.(2013).情意的領域を統合する新たな枠組みとしての態度から見た子どもの算数的活動と算数の理解について.上越数学教育研究，第 28 号，59-63.

国立教育政策研究所.(2013). OECD 生徒の学習到達度調査，2012 年調査国際結果の要約.
http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/053/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/

12/12/1380468_1.pdf (2018.2.9 確認).
McLeod.D.B. (1992). Research on affect in mathematics education:A reconceptualization. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning，575-591.
McLeod, D.B.(1994). Research on Affect and Mathematics Learning in the JRME: 1970 to Present. Journal for research in Mathematics Education, 637-647.
松岡宏之.(1992).数学的問題解決における affect に関する研究.上越数学教育研究，7，89-98.
湊三郎.(1983).算数・数学に対する態度を測定するために開発された SD について.日本数学教育学会誌，数学教育学論究 39-40，1-25.
湊三郎&鎌田次男.(1991).中学校の数学における認知的学力と情意的学力との間の因果関係Ⅲ.数学教育論文発表会論文集 24，335-340.
文部科学省.(2016a).算数・数学ワーキンググループにおける検討事項. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/061/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/05/11/1370319_8.pdf (2018.2.9 確認).
文部科学省.(2016b).国際数学・理科教育動向調査(TIMSS2015)のポイント. http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/053/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/12/12/1380468_1.pdf (2018.2.9 確認).
重松敬一.(1994).数学教育におけるメタ認知の研究(９)-メタ認知の内面化モデルとその検証-.数学教育論文発表会論文集 27，185-190.
重松敬一＆勝美芳雄.(2010).メタ認知.日本数学教育学会， 数学教育研究ハンドブック， 310-317.
重松敬一，勝美芳雄，上田喜彦.(2010).数学教育におけるメタ認知の研究(２４)−メタ認知的支援の実践による教師の指導観変容システムの開発−.数学教育論文発表会論文集，43(2)，507-512.
高井吾郎.(2012).数学教育におけるメタ認知の拡張についての一考察 : 主観的から間主観的なメタ認知的知識へ.全国数学教育学学会誌，18，1，79-88.
山野天士.(2015a).数学授業における中学生の情意の生成とその様相に関する研究 : メタ情意の働きに関連して形成される数学的な価値観に焦点を当てて. 平成 26 年度上越教育大学院学校教育研究科，修士論文.
山野天士.(2015b).数学授業における中学生の情意の変容について : メタ情意を視点として.上越数学教育研究，第 30 号，23-32.
山田篤史.(1994).数学的問題解決における認知過程に関する研究−G.A.Goldin の「数学的問題解決のコンピテンス・モデル」における記述的側面の検討−.数学教育論文発表会論文集，27，383-388.
山田篤史.(1995).G.A.Goldin の「問題解決のコンピテンス・モデル」の再検討.数学教育学研究 : 全国数学教育学会誌，1，37-44.
横塚昌平.(1996).数学の授業における情意の変化に関する研究.数学教育論文発表会論文集，29，355-360.
横塚昌平.(1997).数学の授業における生徒の情意の変化に関する研究−情意反応グラフの有効性とその限界−.平成８年度上越教育大学院学校教育研究科，修士論文.

後記

「上越数学教育研究」第 33 号の発行に臨み，多くの方々より御協力を賜りました．心から感謝を申し上げます．

今年度は，2 名の教員の研究論文，6 名の今年度修了予定の院生，2 名の来年度以降修了予定の院生の研究論文が掲載されています．第 33 号掲載論文はインターネット上でも公開しますので，そちらも是非ご覧ください．http://www.juen.ac.jp/math/journal.html

（2018.2.22　宮川健）

「上越数学教育研究」投稿規定

1. 投稿資格　　上越教育大学に関係する研究者
2. 投稿内容　　数学教育および数学に関する研究論文，報告，資料
3. 編集・審査　投稿された論文は必要に応じ審査委員を委嘱し審査する
4. 投稿期限　　毎年 1 月 31 日

編集委員

高橋　等　　伊達　文治　　宮川　健
布川　和彦　　岩崎　浩　　松沢　要一

上越数学教育研究　第 33 号

発行日　平成 30 年 3 月 14 日

発行所　上越教育大学数学教室
〒943-8512　新潟県上越市山屋敷町 1 番地
TEL　025（522）2411　（代表）

印刷所　（株）明間印刷所　TEL 0256（32）3090