上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.23-38

三角比の定義がもたらす概念理解

～記号論的表現の視点から～

宮　川　　健
上越教育大学

1. はじめに

高等学校における指導内容の一つである三角比の重要性は，解析や代数，幾何を学習する上で言うまでもないであろう．しかしながら，その学習は，定義や定理の暗記に頼ることが少なくない．正弦は sin の頭文字の筆記体の *S*，余弦は cos の *c*，正接は tan の *t* と，まったく数学とは関連のない暗記法（暗記には有効かもしれないが）が，しばしば利用され，教科書の教師用指導書にまで紹介されている（大島ほか, 2003, pp. 164, 167；松澤ほか, 2003, pp. 121, 124）．

一方，三角比は，高校生に十分には理解されていないようである．三角比・三角関数の学習困難性が報告されている（cf. 長岡, 2003）のみならず，平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査においても，三角比に関する問題の通過率は 24%と低かった（国立教育政策研究所, 2004）．三角比学習の困難性と暗記法との関連は定かでないが，暗記は一般に概念の十分な理解へは導かない．暗記されたものは，多くの場合その概念の特定の側面もしくは特定の表現でしかなく，本来備えられるべき他の側面や他概念とのつながりが薄い．

では，三角比の学習はなぜ暗記に頼ることが多いのか．暗記に頼るしかないのであろうか．そもそも教科書は三角比のいかなる概念理解をもたらしているのか．教師用指導書にまで暗記法が紹介されていることからすると，暗記に頼る要因は，生徒個人にではなく，学校数学における概念の扱われ方にあるのではないだろうか．

これらの問いに答えるため，本稿では，今日の教科書[1]がもたらす三角比の概念理解の様相を明らかにすることを試みる．また，三角比と言ってもその領域は広いことから，三角比領域において最初に暗記に依存することが少なくない三角比の導入部，つまり定義に焦点を当てる．数学学習において，定義は前提であり暗記するものである，と考えるのであれば，本稿は意味をなさない．しかしながら，次章でより詳細に述べるが，数学一般において，定義は所与ではなく徐々に構成され変化すること，定義が与える“意味”，つまり可能となる概念理解が変化することを考慮すれば[2]，今日，教科書で与えられている定義がもたらしうる概念理解を明らかにすることは，十分意義のあることと考える．

なお，本研究の位置づけは，教授学的転置理論 (Chevallard, 1991; 1992) の視点からすれば，教科書に見られる知識，教科書が生徒に学習可能としている知識である「教えるべき数学」としての三角比の本性の一部を探ることである．転置理論の枠組

みでは,「教えるべき数学」の他概念との繋がりやその存在条件など「知識の生態(*écologie de savoir*)」を探ることが多いが,本稿では，概念理解という，より認知的な側面を探る.

さて，概念理解の分析には様々なアプローチが考えられる.本稿では,その中でも,認知的側面から概念理解をモデル化する「記号論的表現のレジスター」(Duval, 1995; 2006; 2017) を分析ツールとして採用する．暗記という活動が個人の認知的な活動であるとすれば，この分析枠組みを用いて今日の教科書の三角比の定義が生徒にもたらす概念理解を明らかにすることにより,三角比学習を暗記に導く要因も明らかになると期待する．分析の主たるデータは教科書である．だが，本稿ではさらに，レジスターの視点から別の概念理解をもたらすと判断されるものを比較対象として提示する.この別の概念理解は, 19 世紀の教科書を分析し導き出す．教科書の定義がもたらす概念理解の他に，別の概念理解の可能性を例示することは，今日の教科書がもたらす概念理解の追究に対する助けとなる.同時に,実際面を検討する上でも有用であろう．しかしながら，本稿は，三角比指導の現状の批判や，より優れたと思われるカリキュラムや指導法を提案・主張することを目的とするわけではない．現状の批判より，むしろ現状の把握を目的とする．その現状に対し，何らかの対策をとる必要は喚起するかもしれないが，ある特定の指導法を提案・主張するわけではない．なぜならば，指導法の提案・主張には,その実現可能性など,本稿で扱わない，より実際的な側面を考慮する必要があると考えるからである．本稿は，あくまで基礎的な研究報告であり，実際面は別の機会に検討したい.

本稿の目的と方法をまとめると，次のとおりである.

教科書における三角比の定義がもたらす概念理解を明らかにすることを目的とする．そのために，今日の教科書をレジスターの枠組みを用いて分析するとともに, 19 世紀の教科書から導かれる別の概念理解を提示する．これらを通して，三角比の学習が暗記中心になっている要因を明らかにする.

本稿は 7 章からなる．第 2 章では，定義に焦点を当てることが数学教育学の研究としていかなる意味をもつのか示す．第 3 章では，本研究の分析ツールとなる記号論的表現のレジスターを概説するとともに，記号論的表現を通していかに数学の活動や思考を認知的な側面から分析できるか述べる.第 4 章では，今日の教科書に用いられているレジスターとその機能を特定する．つまりこの章はデータ(教科書)の分析である.さらに第 5 章では，データの分析結果をもとに，それがもたらす概念理解について考察する．第 6 章では，古い教科書に見られるレジスターとその性質を考察し，別の概念理解の可能性を示す．そして，第 7 章を終章とする.

2. 定義について

公理的にきれいに体系立てられ整理された数学は，長きにわたる数学的な活動の所産であり，脱文脈化の結果である (cf. Brousseau, 1997, pp. 21-22)．実際，このような数学では，その数学体系に含まれるある概念が発生した際の文脈が削除され，あたかもある重要な定理を導くためにその概念が必要となったかのように記述されることが多い.ラカトシュの言葉を援用すれば,

「演繹主義的スタイル」で記述されることが多いのである (1980, pp. 172-174). 例えば，ユークリッドの『原論』第 1 巻（cf. 中村幸四郎他訳, 1971/1996）は，平面幾何学の数学体系を非常に公理的に記述している．その体系の提示の仕方は，当たり前のことだが，より基礎的なものから，より複雑なものへと配列されている．そして，最初の方に出てくる公理（及び公準）・定義・命題は，その多くが，後々の命題の証明に必要となる．第 1 巻では，三平方の定理（の逆）はあくまで最後の命題であり，最初の方では扱われないのである．こうした数学体系は，あたかもこの公理的な体系や順序に基づいて数学概念が発生してきたかのような印象さえ与える．しかし，数学概念の発生は，この公理体系のように順序立ててなされるわけではない．それは，後世には消えてしまったかもしれない何らかの文脈における必要に応じて発生してくる．そして多くの場合，数学における厳密性という要請に応えるために，後にその概念の定義が公理等とともにより明確にされ，数学体系が整備されるのである．つまり，概念の定義はその文脈に応じて変化しているのである．これらのことは，近代のヒルベルトによる平面幾何学の公理化において，様々な概念が再定義されていることからもよくわかる．『原論』では「点は部分をもたないもの」であり（idem., p. 1)，ヒルベルトの公理化においては「三種類の物の集まり」の「第一の集まり」が「点」である（ヒルベルト, 2005, p. 15)．この例はやや極端かもしれないが，ラカトシュ (1980) では，より厳密な証明の要請に応えるために，多面体等の概念が拡張されることが数学史上の例とともに示されており，概念形成の過程における定義の変化が容易に見て取れる．

一方，定義の変化は，それが与える“意味”の変化でもある．ある概念が扱われ始めた頃に，その定義から知ることができる意味と，整理され無味乾燥になった数学体系における定義から知ることができる意味とは異なる．先の「点」の例においても，それぞれから考えられる意味は大きく異なるだろう．ヒルベルトの定義からは，通常考えられる図形の“点”のイメージは浮かばない．実際，どんな“物”でも“点”になりうる．したがって，公理化され整理された数学の定義は,脱文脈化の結果であり，定義からうかがい知ることのできる意味や個人にもたらす概念理解は，その過程で変化するのである．

そこで本稿は，今日の学校数学で扱われる三角比の定義が与えうる意味を探ろうとするものである．数学教育学における定義の研究は，定義の役割や本性，定義する活動など，これまで様々な側面を扱ってきた (e.g., Vinner, 1991; Borasi, 1992; De Villiers, 1998; 清水, 2000; Ouvrier-Buffet, 2006)．本稿は，こうした定義という概念そのものの性質を研究対象とするのではなく，三角比の場合の定義がもたらしうる意味，つまり学習者にもたらしうる概念理解の様相を研究の対象とする．そして，さらに三角比の定義が暗記に依存する要因を探りたいと思うのである．

3. 数学の活動・思考における記号論的表現

数学教育学における記号論 (Semiotics) に関する研究は少なくない．数学的な対象（関係を含む）の筆記された表現のみならず，ジェスチャーなど人間の動きをひとつの表現と捉え，学習者による数学的な意味

の構築における表現の役割なども議論されている（cf. Edwards, et al (Eds.), 2009）．記号論は，言語学の領域で扱われることが多いため，数学教育学研究においても，言語学の用語がしばしば援用される．しかし，数学では数学特有の記号が用いられることから，本稿では，数学（数学教育ではなく）における記号論的表現に焦点を当てた数学教育学（厳密にはフランスを起源とする数学教授学）の理論を用いる．Duval (1995; 2006; 2017) の認知記号論である．

(1) 記号論的表現

表現が，数学において重要であることは言うまでもない．わが国においても，数学教育における様々な表現の重要さが指摘されてきた (中原, 1995)．今日の学習指導要領における数学的な表現の強調も，その重要さ故と考えられる．しかし，本稿で記号論的表現に焦点を当てる理由は，数学教育におけるその重要性にあるのではなく，数学の活動や思考を認知的な側面から記述するために記号論的表現の分析が非常に適していることにある．つまり，記号論的表現が，数学的な活動と思考の認知モデルになりうると考えるのである．

ここで言う「記号論的表現 (<u>semiotic</u> representation)」とは，Duval に従い，「記号 (*signes*) を利用することによって作られたもの」 (1995, p. 2) とする．日常言語，数字，式，グラフ，図など，あくまで記号による表現を想定しており，内的な表現（つまり内的表象）は想定していない．

ところで，わが国の先行研究には，「記号的表現 (<u>symbolic</u> representation)」という概念が存在する (中原, 1995, pp. 251-271)．これは，一見，Duval の「記号論的表現」に近いように思える．だが，両者は必ずしも一致しない．Duval のものは，数学的対象を表現する記号として図なども「記号論的表現」に含め，「記号的表現」より広く捉えたものである．むしろ，「記号論的表現」は中原 (1995, p. 194) で「表現」と呼ばれているものに近い．両者とも“表現”を扱うため共通する点はいくつか見られるものの，表現に対するアプローチの仕方や焦点の当て方は異なる．実際，Duval は，数学教育における表現ではなく，数学における記号論的表現に，そしてさらに記号論的表現の中でも本章 3 節で扱うレジスターという記号体系にのみ焦点を当てる．それにより，数学的な活動や思考の認知モデルの構築を試みるのである．そこでは，教育学でしばしば考慮される規範性は見られない．

二つの枠組みにはこれら以外にも様々な相違があるであろう．理論枠組みの詳細な比較はそれだけで一つの研究課題となるため別の機会にゆずり，本研究では，三角比の概念理解をより詳細に分析できると思われる Duval の記号論的表現についての枠組みを分析ツールとして採用する．

(2) 数学における記号論的表現の役割

数学における記号論的表現の役割は，主に二つ考えられる．一つは，数学的対象を表現し伝達することである．数学的対象は，抽象的な存在であり，それを直接知覚することはできない．記号論的表現を通してのみ，人間はそれに触れることができる．先にあげた平面幾何学における「点」を例に考えてみよう．「点」は「部分をもたないものである」が，そのようなものは物理的には存在しない．紙に描いた点も，顕微鏡で拡大すれば，幅があり部分がある．紙に描いた点は，あくまでも数学的対象としての点を物理的に表現したものである．抽象的

な点を表現できるものは紙に描いた点に限らないが，表現を通してのみ，数学的対象としての点を知覚し伝達できるのである．

一方，記号論的表現の役割は数学的対象の表現・伝達のみではない．記号論的表現は，われわれが数学的対象を扱い，数学的な活動を行なうことを可能にする．これがもう一つの記号論的表現の役割であり，Duval が強調する機能である（1995, pp. 1-14; 2006, pp. 106-107）．ここで言う数学的な活動とは，問題への解答や新たな数学的対象を生み出したり，妥当性を判断したりすることである．数学においては，表現を通してのみ数学的対象を扱うことができるため，数学的な活動や思考，さらにその発展は表現に大きく依存する．

Duval の前提は「sémiosis なしに noésis はない」(1995, p. 4) である．前者の sémiosis は，記号論的表現を捉え作り出すこと（つまり記号の操作）を指し，後者の noésis は，ある対象を概念的に把握することや他の対象との違いを区別すること，ある推理を理解することなどの認知的な行為とその結果を指す（idem., p. 4）．ここで，人間は記号論的表現を通してのみ数学的な活動や思考をなすことができるとし，sémiosis と noésis は切り離せないとするのである．

このことは，数学史からもよくわかる．代数記号を例に考えれば，16 世紀のカルダノらの時代と現代の代数記号を用いる時代では，可能な数学的思考が大きく異なる．カルダノらは，方程式を解くために図と日常言語を駆使した（cf.『カジョリ初等数学史』(1997, p. 319)）．しかし，現代では代数記号の計算のみで比較的容易に解けるのである．

この Duval の前提を認めるのであれば，研究者は，記号論的表現の分析を通して，学習者の考えや知識獲得の過程を明らかにでき，困難性の根源を発見できる（Duval, 2006）．逆に言えば，記号論的表現を通さない思考の分析は，知識獲得の過程や困難性の根源の解明には不十分なのである．

(3) 記号体系と記号論的表現のレジスター

記号論的表現もしくは記号の同種の集まりは，特有な規則とともに一つの体系を作り上げる（「記号体系」と呼ぶ）．例えば，“1, 2, 3 …” という数字の記号と “+, −, =, …” の演算記号の集まりは，一つの記号体系を構成する．ここで，数学における異なる記号体系を考慮することが，Duval の認知記号論で鍵となる．実際，数学教育学の研究において，数学における記号論的表現の全体を一つの記号体系として捉え，異なる記号体系は必要ない，とする主張もある（cf. Ernest, 2008a）．しかしこの後者の立場は，数学や数学教育の特徴を統一的に説明しようとする立場であり，学習者の数学的な活動や思考とその発展を認知的側面から解明しようとする Duval の立場とは目的が異なると考える．

さて，Duval は数学における主な記号体系を「記号論的表現のレジスター (register of semiotic representation)」と呼ぶ（以下では，簡潔に「レジスター」とする）．ここで「主な」としたが，これはすべての記号体系が人間の知的活動や思考を可能にするわけではないからである．記号体系の中で，次の三つの基本的な機能を備えるものが「レジスター」である（Duval, 1995）．

> 「ある決まった体系において，<u>何らかの表現として</u>特定可能である知覚的な形跡もしくはその集まりを構成すること．次に，体系に特有な規則のみにより，もと

の表現と比べてある知的貢献ができる別の表現が得られるような仕方で，表現を変換すること．最後に，ある体系において作られた表現を，別の体系の表現に転換すること．この際，後者の表現は表現されているものに関わる別の意義 (*signification*) を明らかにする」(p.21)[3]

それぞれの意味するところを例とともに見ていこう．第一の機能は，与えられた記号が何らかの対象を表現し，同じ体系において別の対象の記号とは区別されることである．例えば，代数記号体系の ab^2 と $(ab)^2$ は，体系の規則に従い，異なる数学的対象を示している．第二の機能は，体系内においてある表現から別の表現に変換できる，つまり別の表現を作り出せることである．本稿では，この機能を Duval にならい「処理 (treatment)」(2006, p. 111) と呼ぶ．例えば，演算記号を含んだ数記号体系では，$2 + 3$ という記号が 5 という記号に変換・処理できるところに，この機能が見られる．第三の機能は，ある記号体系の表現から別の記号体系の表現へ翻訳できる，つまり別の記号体系の表現を作り出せることである．本稿では，この機能を「転換 (conversion)」(Duval, 2006, p. 112) もしくは「翻訳」と呼ぶ．例えば，小数記号体系における 0.5 という記号と，分数記号体系の 1/2 という記号は，同じ数学的対象を表現しているため，一方の記号体系から他方へ翻訳可能である．

記号体系のこれらの三つの機能は，乱雑な考えの整理や情報の探求などを可能にする．数学であれば，様々な推論や計算を進めることが可能となる．一方，上の三つの機能をもたない，つまりレジスターでない記号体系も存在する．Duval (1995, p. 21) は，体系内での処理をほとんど可能にしない交通標識の記号体系やモールス信号を例としてあげている．また，先に触れたジェスチャーなども，記号体系内での処理機能を備えていないことや記号体系の規則が曖昧なことなどから，Duval の意味ではレジスターではない．

なお，「レジスター」の語は，Duval の理論に限らず，言語学でも利用される．Halliday が中心となって構築した「機能言語学 (Systemic Functional Linguistics)」と呼ばれる言語学の一領域がその例である (cf. Halliday and Matthiessen, 2004)．この領域の枠組みは数学教育学研究でも近年援用されるものだが (cf. Ernest, 2008a; 2008b)，そこでも「レジスター」の語が登場し，言語が使用される領域や場を意味するものとして用いられている．わが国では「言語使用域」と訳されるようである．しかし，この語は Duval のものと大きく異なり，関連はない．

(4) レジスター分析のもたらすもの

本稿では，レジスターの「処理」と「転換」の機能に焦点を当て，教科書に用いられている記号論的表現を分析する．換言すれば，記号論的表現の処理と転換の視点から三角比の概念理解を追求しようとするのである．一見，記号論的表現の操作のみに焦点を当てると，主体の認知的な活動の表層しか捉えていないように思える．しかし，用いられるレジスターを同定し，その処理と転換の仕方を明らかにすることは，認知的な活動について多くの情報を提供する．簡潔に処理と転換において明らかにできることを見ておこう．

レジスターの処理においては，個々のレジスターに固有な処理規則が存在し，レジスターによって，その規則が異なる．そのため，用いられたレジスターを同定するこ

とにより，可能となる処理操作や，操作に伴う考えが明らかにできる．例えば，小数と分数それぞれのレジスターを考えると，0.05 + 0.75 と 1/20 + 3/4 という記号はそれぞれ同じ数学的対象を表現している．しかし，計算結果の 0.8 と 4/5 を生み出す処理操作はそれぞれ大きく異なり，その処理に伴う考え（例えば，繰り上がり，通分など）も異なれば，経済性も異なるのである．

一方，レジスターの転換・翻訳の視点からすれば，相互に翻訳可能なレジスターにおいては,記号レベルで対応関係がある(例えば 0.5 と 1/2)．数学の問題を解決する過程では，あるレジスターから別のレジスターへこの対応関係を通して転換することにより別のレジスターで処理を施すことが可能となる．しかし，レジスター間の対応関係は必ずしも一対一とは限らない．対応関係をもつ記号もあれば，対応関係をもたない記号も存在する．そして，この対応関係つまり翻訳可能性は，ある程度事前に決定されているのである．さらに，たとえ対応関係があったとしても，相互に対応する記号それぞれが形成する「意義(*signification*)」も「意味 (*référence*)」も一致しない．言語学のソシュールの言葉を用いれば，記号体系における「記号表現(*signifiant*)」が異なれば，たとえ数学的対象（指示対象：*référent* もしくは *objet*）が同じであっても，主体がもつ「記号内容(*signifié*)」は異なり，形成される「意義」や「意味」も異なるのである．ここで「意義」と「意味」は，フレーゲに倣って用いており，前者は「記号表現(*signifiant*)」と「記号内容」との関係，後者は「指示対象」と「意義」との関係として捉えられる(Duval, 1995, pp. 62-64)．したがって，レジスターの対応関係を明らかにすることにより，可能となる数学的な活動や思考，さらには子どもが形成可能な「意義」や「意味」が明らかになってくるのである．

4. 今日の教科書における三角比の定義

本章では，教科書における三角比の領域がいかなる数学的な活動・思考を可能としているか探るため，教科書に用いられている記号論的表現のレジスターとその本性を分析する.ここでは三角比の導入部(定義)，特に鋭角の三角比に焦点を当てる．分析には，川中ほか (2006), 飯高ほか (2007), 岡本ほか (2007), 3 社の教科書を用いた．

(1) 三角比の導入

三角比は高等学校の数学 I で最初に登場する．いずれの教科書も，相似から直角三角形の辺の比が一定であることに注目し，三角比を定義する．川中ほか (2006)の教科書では，図 1 のような相似の直角三角形をもとに，直角三角形の底辺と高さの比が一定であることを確認したのち,「PQ/OQ を角θの正接またはタンジェント (tangent) といい，tan θで表す」 (p. 108) と正接を定義している．

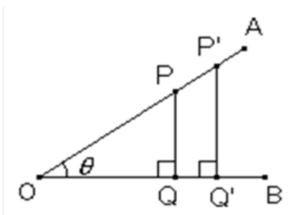

図 1　川中ほか (2006, p. 108)

その後さらに，図 2 のように，新たな直角三角形の図とともに定義がまとめられている．正弦と余弦の定義は，正接を定義したのち,ほぼ同様の文言と図で与えられる．3 つの概念が類似の導入方法を採っているため,以下では正接を中心に分析を進める．

正接
右の図の直角三角形 ABC において

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$a = b\tan\alpha$$

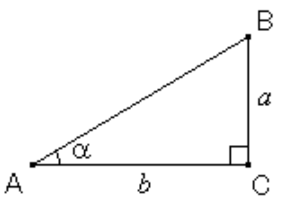

図 2　川中ほか (2006, p. 109)

(2)　教科書に用いられている記号体系

いずれの教科書でも，図表現，数表現，代数表現，日本語表現の記号体系が混用されていた．なお，本稿では，「図的な記号体系」「数的な記号体系」「代数記号体系」「日本語の記号体系」をそれぞれ簡潔に「図表現」「数表現」「代数表現」「日本語表現」と呼ぶことにする．

図表現は，相似の関係を示す際，定義を与える際に，例・例題などに用いられている．その記号は，図 1 と図 2 で見られるように，直角三角形とその部分（辺となる線分や角など），直角三角形に付随する図的な記号（直角の印と角の印など）が中心である．このレジスターでは，線分の長さや角度などを視覚的に捉え（例えば，どちらが長い，大きい，直角），処理することが可能になる．三角比については，特に代数表現における記号間の関係（例えば，角 A の対辺の長さが *a*）を視覚的に捉えること（この場合，代数表現と図表現間の翻訳がなされている）が可能になる．

数表現は，三角比の導入にはほとんど用いられていないが，例や練習問題で，辺の長さや角度，三角比の値を表現する際（例えば，$\tan 45° = 1$）に利用されている．このレジスターは，生徒がもっともなじみ深く，数値計算の処理が容易なことから非常に操作的な記号体系である．しかしながら，教科書では定義が一般的な形で与えられるため，次に記す代数表現が数表現の代わりに多く用いられている．

代数表現は，図表現と同様，頻繁に利用されている．相似の三角形において辺の比が一定であることが代数表現における処理によって示され，定義の命題も代数表現の記号で与えられている．さらに図の中にも代数記号が用いられている．上の図に関連したものでは，ローマ字やギリシャ文字を用いた P, Q, PQ, OQ, P’Q’, OQ’, A, B, C, *a*, *b*, θ, α や，分数の記号とともに少し塊となった記号の PQ/OQ, tan θ, *a*/*b*, さらにいくつかの記号を結ぶ “=” の記号などが代数表現の要素となっている．このレジスターは，具体的な数値を用いずに一般形を示したり，問題における未知数を表わしたりできる．さらに，操作的（代数処理ができる）であることは言うまでもない．

最後に，日本語表現（もしくは日常言語表現）は，図表現と代数表現との記号間の対応の説明（例えば「図のように」「半直線のなす角θ」），他のレジスターにおける操作・処理の説明（例えば「垂線を下ろす」），三角比の名称・定義（例えば「正接という」）などに用いられている．頻繁に用いられる記号体系ではあるが，その操作性が代数表現や数表現，図表現より乏しいことは否めない．特に，「正接」や「タンジェント」の語は，日常では用いられない数学用語であり，他の用語との関連がほとんどない．少なくとも，日本語として漢字だけを見れば，一定の比と「正接」の語とのつながりはない．若干「正しく接する」などともとの語の処理は可能だが，生成された語を正接の定義で与えられた他の記号体系（図表現，代数表現）へ翻訳はできない．このように考えると，「正接」や「正弦」，「余弦」の語は，教科書の中で日本語表現としてほとん

ど操作的でなく，レジスターとして捉えられるかどうかも疑問である．

(3) レジスター間の対応関係

ではこれらの異なるレジスターがお互いにいかなる関係にあるか明らかにしたい．ここで扱われている数学的対象は，点，線分，角，その大きさ，正接，比の値などである．これらの表現として用いられている記号を，記号体系間の対応・翻訳の関係から見ていく．

① 基本図形単位とその大きさ

数学的対象としての点，線分，角，その大きさの表現をまず見ていこう(以下,点,線分，角を「基本図形単位」と呼ぶ)．代数表現においては，これらはすべて P, Q, PQ, OQ, P’Q’, OQ’, A, B, C, a, b, θ, α の記号で表現されている．図表現においても，基本図形単位は，図 1 と図 2 のように表現される．点は線の交わるところ，線分はまっすぐな線，角は 2 本の交わる線で表現されている．同じ数学的対象を代数表現の記号と図表現の記号によってそれぞれ表現しているため，教科書では，基本図形単位においては記号体系間の対応関係が一対一に存在し，相互に翻訳可能と判断できる．

一方，基本図形単位の大きさ（長さ，角度）も，代数表現の記号のみならず，図表現の記号として表現されている．線分の長さは，線として図に示されており，角度は 2 本の交わる線として図に与えられている．ここで,線分の長さと角度いずれの場合も，図表現の記号は，ある基本図形単位とその大きさという二つの数学的対象を表現している．実際，図に描かれた線は，線分を表現しているとも，線分の長さを表現しているとも解釈できる．言語学の言葉を用いれば，一つの記号表現 (*signifiant*) が二つの指示対象 (*référent*) を表現していると言える．一方，代数表現においては，線分と線分の長さに異なる記号が用いられている（例えば，BC と a)．このことから，図表現と代数表現においては，記号体系間の対応関係はあるものの，一対一の関係ではないと判断できる．しかし，大きさの代数表現が図の中に与えられていることから，高等学校では，これらの対応関係に対して大きな認知的混乱は生じないであろう．

このように，基本図形単位とその大きさにおいては，代数表現の記号と図表現の記号との間に対応関係があり，ほぼ相互に翻訳可能と言える[4]．この翻訳可能性により，代数表現の記号を図表現上で視覚的に捉え処理できるとともに，図表現の記号を代数表現に翻訳し処理を施すことができるのである．

② 正接と比の値

次に正接と比の値の表現について見ていこう．代数表現では tan α や a/b, PQ/OQ などの記号が与えられている．まず，a/b や PQ/OQ は基本図形単位の大きさの記号を分数の記号で組み合わせたものであり，これらは比の値を表現したものである．ここで，この代数記号を比の値ではなく PQ:OQ のように関係（つまり，比）と見ることもできる．しかし教科書では,「PQ/OQ の値」や「値を求めよ」などの語が定義の前後に利用されていることから，比の値と捉えるのが妥当であろう．

さて，この比の値は図表現の記号としていかに表現されているか．教科書の図表現には，この比の値を表現する記号は見当たらない．実際，与えられた図において「この比の値 (a/b) はこの線分の長さ（もしくは面積）です」といった情報は得られない．

教科書では，対辺と底辺の比の値という数学的対象は，a/b という代数表現の記号でしか与えられていないのである．これは，a/b として定義されている tan α についても同様である．このことは当たり前のようだが，レジスターの視点からすると非常に重要な点である．代数表現の記号である tan α や a/b が図表現に対応する記号をもたず，相互に翻訳することができないとなると，その数学的対象（比の値，正接）の図表現での操作・処理も不可能となる．

なお，教科書の定義では，代数表現の PQ/OQ の比の値が一定であることが，図表現の複数の相似直角三角形により表現されている（図 1）．平行線の定理に慣れ親しんだ者や，複数の相似三角形を見れば一定の比の値を考えることができる者であれば，ここで，この図表現に「一定の値」といった記号内容を与え，代数表現の PQ/OQ = c や日本語表現の「一定の値」に翻訳可能であろう．しかし，これはあくまで値が一定であることに対する記号論的表現であり，正接の値の記号論的表現ではない．

③　等号：二項関係

正接の定義では tan α = a/b, a = b tan α の記号が与えられ，等号が用いられている．等号は，数学的対象としての二項関係もしくは同値関係を表現した記号である．代数表現のみならず数表現にも用いられる．この数学的関係の表現を見ていこう．tan α = a/b については，代数表現のみを考えれば，代数的に表現された何かの値 (a/b) が tan α という別の記号に恣意的に定義として結びつけられたものと捉えられる．ここでは，両辺が同値だという以上の意味はない．また，上で述べたように比の値 a/b は図表現に対応する記号をもたないことから，この等号に対応する記号が図表現に存在するわけでもない．したがって，代数表現の tan α = a/b における等号を図表現へは翻訳できない．

一方，a = b tan α の等号はどうであろうか．代数表現のみを考えれば，等号は両辺の同値関係を表現しているだけである．しかし，教科書では示されていないが，左右の記号の起源によっては，等号は他の記号体系に表現をもちうる．

例えば，a = b tan αの両辺の記号は，それぞれ図表現から翻訳されたものと考えられる．実際，a は図表現に対応する線分 BC をもつ．さらに，b tan α の値も線分 BC として表現されていると考えうる．すると，両辺にある代数表現の記号が，それぞれ同じ線分として表現されているから等号で結ばれている，つまり等号は図表現における「同じ線分」であることを代数表現に翻訳したものと解釈できる．しかし，教科書で「線分 BC の長さを b tan α と書き表わそう」としているわけでもないため，この解釈はあくまで勝手な解釈であろう．

また，a = b tan α が tan α = a/b から代数表現における処理の結果生じたものであるならば，等号は代数処理において保存されたものであり，図表現に対応する関係や記号は，やはりもたない．

④　日本語表現

ここまで主に代数表現と図表現の対応関係を見てきた．しかし，教科書で与えられた日本語表現も代数表現，図表現とそれぞれに対応関係をもつ．

図表現をもたなかった代数表現の記号 a/b は，「辺の比」もしくは「正接」などの日本語表現の記号に対応し，代数表現の等号は「～を～と書く」といった文章に対応

する．教科書では必ずしも代数表現のすべての記号に日本語表現の記号を与えているわけではないが，両者の記号体系には対応関係が多く，相互に翻訳可能である．

一方，日本語表現と図表現の対応関係は，代数表現と図表現の対応関係に近い．「辺の比」や「正接」の語は図表現に対応する記号をもたないが，基本図形単位とその大きさを表現する「点」「線分」「角」などの語は，図表現に対応する記号をもち，翻訳可能である．

(4) 分析結果のまとめ

以上，教科書の三角比の導入部における記号論的表現の分析結果を示した．今回は三社の教科書のみを分析に利用したが，三角比の導入部は高等学校数学Ｉの多くの教科書で類似したものであり，他の教科書にもあてはまる結果であろう．

ここまでの分析結果をまとめてみると，おおよそ図 3 のように図式化できる．図表現と代数表現の間には，点，線分，角などの基本図形単位において対応関係があるものの，正接の定義に用いられている比の値や等号においては対応関係がほとんどない．日本語表現においては，代数表現と多くの対応関係が見られるものの，図表現との対応関係は代数表現とそれとの関係と大きな違いはなく，さらに，記号体系内で処理を施すことが難しかった．

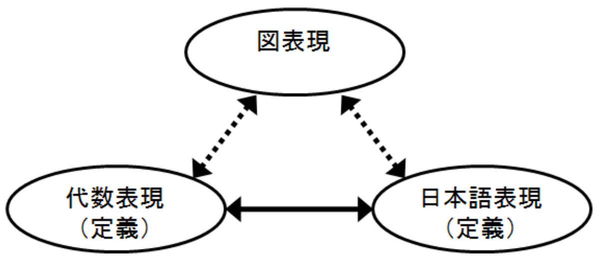

図 3　今日の教科書での記号体系間の対応

5. 考察:今日の教科書がもたらす概念理解

ここでは，第 4 章で得られた分析結果をもとに，今日の教科書がもたらす三角比の概念理解について考察してみたい．

(1) 図表現の小さな役割の帰結

レジスターの転換・翻訳の視点からすれば，三角比の導入部において，図表現と代数表現（さらには日本語表現）の記号体系間の対応関係は貧困であった．定義に用いられる基本図形単位（点，線分，角）においては，相互に翻訳可能であったが，比の値や同値関係については，代数表現にはその表現をもつものの（a/b など），図表現にはもたなかった．そのため，図表現では，点や線分，角などの位置関係を示すことが主となり，三角比自体の処理や操作が行なえなかった．図表現が，記号体系として，限られた役割しか果たしていないと言える．このことは，代数表現のレジスターで三角比を扱うことに導く．代数表現において三角比に対する十分な意味を生徒に構築させることができればよいが，一つのレジスターのみでは限界があろう．

正弦の定義の概念理解を例に考えてみよう．ある直角三角形 ABC（角の対辺の長さを a, b, c とする）の正弦 $\sin A$ を考える．ここで，教科書のように，正弦が辺の比の値であるという考えを相似の直角三角形から学習していたとする．すると，正弦が，代数表現の記号としては m/n という形に表現されることに容易に導かれる．では，m, n に何を入れるのか．直角三角形は 3 つの辺をもつ．相似の直角三角形においては，いずれの 2 つを取ってもその比は等しく，3 つの組み合わせが可能である．そのうちいずれか 1 つの組み合わせが正弦の m, n に用いられ，他の組み合わせは正弦として認め

られない．さらに，正弦に用いる 2 辺において，その長さの比の値は，a/b と b/a の 2 つの可能性があり，どちらか一方のみが正弦である．前者が正弦であれば，後者は正弦ではない（実際，後者は「余割」「コセカント」と呼ばれる）[5]．

したがって，正弦を与えるためには，2 つの決定を下さなければならない（どの 2 辺，どちらを分母にするか）．しかし，教科書の図では，正弦が表現されておらず，図表現で，この 2 つの決定は下せないのである．代数表現でそのことをうまく決定できればよいが，$\sin A = m/n$ という記号のみでは，m と n に何を入れるべきか教えてくれない．すると，図表現のどの辺・どちらを分母にするかの決定は，教科書において数学的な根拠をもちえない．そのため，$\sin A = a/b$（対辺／斜辺）の理由づけを「教科書もしくは教師が言っているから」などという権威的な根拠に頼らざるを得なくなり，m, n に何を入れるのかは暗記に委ねられる．

このように，今回分析した教科書では，正弦等を図表現の記号で表現・処理できないために，権威と暗記に頼った正弦の概念理解しか可能にしないのである．

(2) 三角比の暗記法

なお，わが国の高等学校でしばしば用いられる三角比の暗記法（正弦・余弦・正接に筆記体の S, c, t をあてる）[6]は，まさに前節の問題を解消するためのものである．この暗記法は，図表現が本来備えるべきもの, 教科書に欠けていたものを補っている，と捉えられる．実際，この暗記法では，図表現が，用いる 2 辺と分母・分子の位置の 2 点を同時に教えてくれる．しかし当然ながら，暗記法で与えられた図的な意味は，数学的な意味ではない．筆記体の S, c, t は数学的対象の図表現の記号（例えばある線分）ではないため，数学の他の概念との関係をもつことや何かの処理を施すことはできない．つまり，この暗記法では，教科書同様，図表現というレジスターで三角比を扱えず，教科書以上の概念理解を可能とはしないのである．

(3) 実社会の文脈：三角比の実用性

以上のように，レジスターの視点からすれば，教科書の定義も三角比の暗記法も大した概念理解を促さない．ところで，三角比の領域では，測量など現実世界の文脈がしばしば利用される．これは，生徒が数学の意義を感得できるように，と考えられたものであろう．測量の文脈は，生徒の概念理解を促進するか．

三角比の起源は，測量や天文学の計算にあると言われている．すると，三角比を必要とする測量の文脈を三角比の導入に利用することは，三角比という概念に大きな意味を与えそうである．しかし，レジスターの視点からすると，この文脈は必ずしも概念理解を促進するものではない．なぜならば，測量の場面は，新たなレジスターを三角比に提供するわけではなく，新たな処理や転換を既存のレジスターに促すわけでもないからである．教科書で与えられた現実の場面はすでに紙上に表現されており，それを少し一般化した紙上の三角形の図と比べてみても，記号体系としては，さほど違いがない．小学校の算数では，現実社会の文脈や具体物の利用がしばしばなされるが，これらは三角比の測量の文脈とはその本質が大きく異なるのである．例えば，四則演算の授業で具体物（例えば，おはじき）を利用することは，演算において数表現とは異なるレジスターを用いることである．実

際,具体物には操作や配列の規則が存在し,処理が施せるものである．一方，測量の場面は，レジスターとして何か特別の処理を施せるものでもない．

なお，これらの見解は，あくまでレジスターの視点から測量の文脈を捉えた場合のものである．別の視点からすれば，別の概念理解をもたらすとの判断も可能だろう．例えば，概念が必要となる状況を考慮に入れる教授学的状況理論 (Brousseau, 1997) の視点からすれば，測量は三角比の必要性や発生に対して一つの文脈を与えると判断されうる．したがって，いかなる分析枠組みも十全ではなく，説明できる概念理解は用いる枠組みによるのである．しかし，本稿から，少なくともレジスターの視点が三角比の概念理解の中心的な部分を説明していると言えるのではないか．

6. 19 世紀の教科書における正弦・余弦等

ここまで，今日の教科書の三角比におけるレジスターの特徴，特にレジスター間の対応関係が貧困であることを示し，それがもたらす三角比の概念理解について考察した．しかし，これはあくまで今日の教科書においてのことである．数学が発展してきた過程では，レジスターの働きが大きく異なる．以下，異なる概念理解の可能性を示し，今日の教科書のもたらす概念理解に対する比較対象を提示するとともに，三角比指導へのヒントを示したい．

三角比は，それに相当するものが古くは古代ギリシャ時代から異なった地で測量に使われてきたと言われる．しかしそこまでさかのぼらずとも，18, 19 世紀の平面三角法や測量の教科書を見れば，そこにはレジスター間の対応が非常に多い，特に図表現での処理を可能にした「三角比」の定義[7]が見られる．

正弦・余弦等は，ヨーロッパの教科書を見ても，わが国の教科書を見ても，19 世紀頃までは円における弧（もしくは角度）に対する線分として定義されていた[8]．例えば，重版を重ねたラクロワの三角法の教科書 (Lacroix, 1807) では，正弦が「弧の正弦 (*sinus*) は，その弧の一方の端点から他方の端点を通る半径へおろした垂線である」(p. 4) と定義されており，余弦は「任意の弧の余弦 (*cosinus*) は，その弧の残り (*complément*) の正弦であり，中心と正弦の足との間の半径の一部に等しい」(p. 4) とされている．線分として定義されているために，フランスでは正弦・余弦等をまとめて「三角線 (*lignes trigonométriques*)」(cf. Lacroix, 1807; Guilmin, 1863)と呼んでいた．また，わが国においても，福田理軒 (1856) の『測量集成 四』の二編巻之一では，「八線」の名のもとに線分の名称として，図 4 のようにある角度に対する線分として正弦・余弦等が定義されている．ここで，正弦は角の正面の半弦であり，余弦は余角の正弦つまり余角の正面の半弦であり，正接は正面の接線との交点までの線分である．

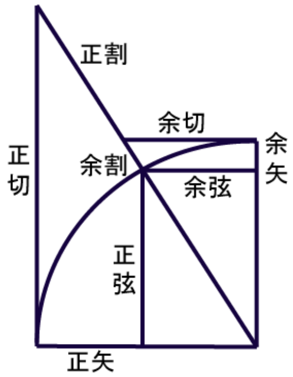

図 4　福田理軒『測量集成 四』(1856)

このように正弦・余弦等が図表現で線分として定義されると，レジスターにおける

処理と対応関係は，今日の教科書と大きく異なる．三角比を図表現で扱うことのできなかった今日の教科書に対し，古い教科書では図表現で処理することが可能になるのである．例えば，正弦と余弦の値を比べること，正弦と余弦のそれぞれの長さの自乗の和が円の半径の自乗になること，余弦と正弦との比が正接と半径の比に等しいこと（図 4 のもっとも大きな直角三角形は底辺が半径で高さが正接，その中の直角三角形は底辺が余弦で高さが正弦），などが図表現の処理で導かれる．さらに，図表現で定義されているため，先に述べた正弦にどの 2 辺を用いるか，*a*/*b* か *b*/*a* かといった問題も生じない．

また，日本語表現においても，それぞれの漢字が図表現において対応する記号が存在し，日本語表現から図表現への翻訳も容易になる．今日の教科書では，「正接」などの日本語表現から別の日本語表現はほとんど生成できない．生徒にすれば，「正接」でなくとも他のいかなる語でも変わりはない．しかし，上述の正弦・余弦等の定義（図 4）では，日本語表現における処理も可能になり，レジスターとしての機能も備わる．例えば，「余弦」から「余角の弦」を作り出すことができるとともに，日本語表現の「余角の弦」から，さらに図表現の対応する角や線分への翻訳も可能となる．つまり，図表現と日本語表現の間で定義に関して，対応関係をもつことができるのである．

ここで示した正弦・余弦等の定義におけるレジスターの相互関係をまとめると，図 5 のように図式化できるだろう．三つの記号体系間の対応・翻訳においても，さらにそれぞれの記号体系での処理が今日の教科書以上に可能になる．つまり，これらのレジスターのもたらす概念理解は，今日の教科書より豊かなものとなるのである．

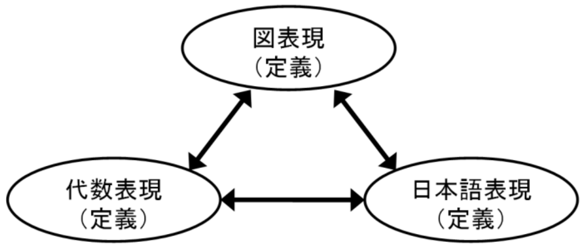

図 5　測量集成での記号体系間の対応[9]

7. おわりに

本稿の目的は，レジスター分析により，教科書の三角比導入部の定義が生徒にいかなる数学的な活動や思考，また，いかなる概念理解をもたらすかを示すことであった．その結果として，今日の教科書が複数のレジスターでの十分な処理と転換を可能としないことを明らかにし，それが暗記中心の学習に導いていること，教科書のみを用いて三角比の概念を十分に理解することは難しいことを示した．特に，今日の教科書で与えられている図表現はレジスターの役割を十分果たしていなかった．三角比領域の学習・指導において暗記依存を望まないのであれば，代数表現のレジスターだけでなく，三角比自体の処理をはじめとする操作（認知活動）を可能とする他のレジスターが必要である．

また第 6 章では，古い教科書から正弦・余弦等を線分として定義する場合を取り上げ，そこでのレジスターの機能が，今日の教科書と大きく異なることを示した．この定義で与えられた図表現は，レジスターとしての機能を果たしており，三角比の操作を可能にした．近年，三角比を線分もしくは線分の長さとして導入することが提案されている（長岡，2003；熊倉，2006; 楠田，

2007)．これらの提案が三角比の概念理解をより豊かにすることを本稿が裏付けていると言えるのではないか．

なお，本稿では，あくまで平面幾何における三角比についての扱いについて述べた．これが解析領域で三角関数として拡張して扱われる場合は，座標表現など新たなレジスターが用いられることもあり，その概念理解の様相はさらに異なったものになると思われる．その検討は今後の課題としたい．

注

[1] 本研究は少し前に実施したものであり，分析した教科書はそのときのものである．ただし，三角比の定義の仕方に実質的な変化はない．

[2] 本稿では，「概念理解」という語と「意味」という語をほぼ同義に用いる．いずれもレジスターという概念によってモデル化されるものである．しかしながら，「意義 (*signification*)」や「意味 (*référence*)」という語は，言語学の概念でもあるため，その際は明記することにする．

[3] 筆者訳．下線は原文で斜体．

[4] 基本図形単位とその大きさにおける対応関係をより詳細に見ると，翻訳規則が存在する．大文字のローマ字が点に，大文字のローマ字を二つ合わせたものが線分に，小文字のローマ字が線分の長さに，ギリシャ文字は角度に対応している．

[5] これは比としてやや特殊である．黄金比であれば，$(\sqrt{5}+1)/2$ としても，その逆数である$(\sqrt{5}-1)/2$ としても，さほど問題はないが，三角比はそうはいかない．

[6] フランスや米国では，この暗記法ではなく，SOH, CAH, TOA (O: opposite; H: hypotenuse; A: adjacent) の暗記法がしばしば用いられる．

[7] 本節で述べるように，18, 19 世紀の教科書では，線分の名称として「正弦」や「余弦」の語が用いられているため，「三角比」の語は不適切である．そこで本稿では，線分で定義されている場合には，「三角比」の代わりに「正弦・余弦等」の語を用いる．

[8] 線分として正弦・余弦等を定義した場合，線分の長さがその値となる．すると，単位円を用いなければ，当然ながら今日の三角比の値には対応しない．Lacroix (1807) では，単位円ではなく半径 R の円で定義され，様々な公式に半径 R が出てくる．例えば，加法定理は，$\sin(a+b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b) / R$ である (p. 30)．また，福田理軒 (1856) においても，半径が 10,000,000 の場合の正弦・余弦等の長さが求められている．一方フランスでは，19 世紀中期になると，線分として正弦・余弦等を定義したのち，その値を単位円における線分の長さとする (Guilmin, 1863, pp. 3-5)．

[9] この図では，「代数表現」としたが，『測量集成　四』では，代数表現の代わりに数表現が用いられている．

参考文献

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 – 1990.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2nde édition). Grenoble: La Pensée Sauvage (1ère édition, 1985).

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(2/3), 215-230.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch: PME.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of

Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham: Springer.

Edwards, L., Radford, L. and Arzarello, F. (Eds.). (2009). Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (2).

Ernest, P. (2008a). Towards a semiotics of mathematical text (part 2). *For the Learning of Mathematics*, 28 (2), 39-47.

Ernest, P. (2008b). Towards a semiotics of mathematical text (part 3). *For the Learning of Mathematics*, 28 (3), 42-49.

Guilmin, P. A. (1863). *Cours élémentaire de trigonométrie rectiligne* (3ème édition). Paris : A. Durand.

Halliday, M.A.K. and Matthiessen, C.M.I.M. (2004). *An introduction to functional grammar 3rd edition*. London: Arnold.

Lacroix (1807) *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie* (4ème édition). Paris : Chez Courcier (1ère édition, 1789).

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 259–282.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

飯高茂ほか (2007). 数学 I, 東京書籍.

大島利雄ほか (2003). 数学 I [高等学校指導書], 数研出版.

岡本和夫ほか (2007). 高校数学 I, 実教出版.

小倉金之助補訳 (1997). カジョリ初等数学史（復刻版）, 共立出版.

川中宣明ほか (2006). 改定版 数学 I, 数研出版.

国立教育政策研究所 (2004).「平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査科目別報告書の概要」(http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/)

楠田貴至 (2007). 「三角比の指導についての提案」, 数研通信, 57 号, 10-12.

熊倉啓之 (2006). 「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究」, 日本数学教育学会第 39 回数学教育論文集. pp. 335-360.

清水美憲 (2000). 「数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究」, 数学教育学論究, 73/74, 3-26.

長岡耕一 (2003). 「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」, 日本数学教育学会誌, 第 85 巻, 第 9 号, 32-37.

中原忠男 (1995). 算数・数学教育学における構成的アプローチの研究. 聖文社.

中村幸四郎他訳・解説 (1971/1996). ユークリッド原論（縮刷版）. 共立出版.

ヒルベルト, D. (2005). 幾何学基礎論（中村幸四郎訳）, ちくま書房.

福田理軒著, 花井喜十郎編 (1856). 測量集成 四, 浪花：敦賀屋九兵衛.

松澤亮ほか (2003). 高校数学 I [高等学校指導書], 実教出版.

ラカトシュ, I. (1980). 数学的発見の論理：証明と論駁（佐々木力訳）, 共立出版.