上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.1-12

数学=パターンの科学の考えに基づく授業デザイン

−中学校１年「比例と反比例」の場合−

布川　和彦　　　　　　　青柳　潤
上越教育大学　上越教育大学附属中学校

１．はじめに

中学生の関数についての理解が十分でないとの指摘がなされて久しい。例えば、平成30年度全国学力・学習状況調査の数学A問題9では、比例 $y=5x$ について述べた4つの文から正しいものを1つ選ぶ問題であったが、正答である「x の値が0でないとき、y の値を x の値でわった商は、いつでも5である」を選ぶことができた生徒は66.4%であった。平成21年度の調査では比例 $y=3x$ について同様の問題が出され、その正答率は54.9%であったので、報告書でも「改善の傾向がみられる」としながらも、「引き続き課題がある」とされている。また同じ問題9では、反比例 $y=-6/x$ のグラフだけが提示され、４つの表の中からグラフに対応する表を選ぶ問題も出されており、その正答率は53.3%であった。これについては、平成26年度に反比例 $y=6/x$ のグラフについて同様の問題が出されており、その正答率が46.4%であったことから、やはり報告書は「改善の傾向がみられる」が「引き続き課題がある」としている。さらに問題11の1次関数 $y=-2x+6$ のグラフを5つの選択肢から選ぶ問題(正答率57.0%)については、平成19年度の $y=-3x+2$ についての類題(正答率60.4%)よりも正答率が下がっている。

ところで、小学校算数と中学校数学を比較したときに、どちらでも比例と反比例の学習をするという類似性がありながら、他方で、数学をパターンの科学とする立場(布川, 2013)からは、その扱い方に大きな違いがあるとの指摘もある。つまり、前者では「場面中の量に見られるパターンの記述に重点がある」のに対し、後者では「そのパターンを探求の対象とし，パターンの持つ性質を調べようと」する(布川, 2016a)。しかも、両者の違いが中学生の反応に影響を与えることを示唆する報告もなされている(林, 2001; 布川, 2018)。

中学校での学習のためには後者への移行が重要となるにも関わらず、現行の教科書ではその移行が必ずしも意図的に行われていない可能性もある(布川, 2019)。この中学校数学への移行を視野に入れた場合、上述の現状を改善するための１つの方向性として、必要とされる移行を明確にするとともに、パターンを探究するという移行後のディスコース (Sfard, 2008)と学習活動との整合性を図ることが考えられる。

そこで本稿は、パターンの科学の観点からの中学校数学への移行を意識的に採り入れ、また移行後のパターンの探究という立場をできるだけ維持するように中学校1年の比例・反比例の学習を構成した場合にどのようになるのか、その1つの可能性を提示することを目的とする。

２．授業デザインの背景

まずは、場面中のパターンを記述することからパターンを対象として探究することへの移行という観点から、現行の指導を概観して

みる。

小学校6年における比例・反比例の学習では、基本的に日常の変化を伴った場面や図形の辺の長さなどが変化する場面が提示され、そこに含まれる2つの量について表に整理するなどして探究する。そして、それらの変化の仕方や両者の関係に見られるパターンを見出し、その特徴を比例や反比例として記述する。y=決まった数×xと書けることやグラフが直線になることも、具体的場面中の数量間の関係を記述するものとなっている。

中学校1年では[1]、最初に関数について学習するが、その際には算数と同様、具体的場面が提示され、そこに含まれる2量を探究する中で、一方の値が決まるとそれに対応して他方の値が決まるという関係に着目していき、それを基に関数が定義される。またその後の問題では、いくつかの具体的場面に含まれる2量が指定され、一方が他方の関数と言えるかを判断することが基本的に行われる。つまり、具体的場面の2量間に見られるある種の特徴を関数として記述している。

比例の学習においても1社を除いては、最初に具体的場面が提示され、そこに含まれる2量の変化の仕方やそれらの関係についての特徴を見出した上で、そのうちの1つの特徴を用いて比例が定義される。その後の問題で比例かどうかを判断する際にも具体的場面に含まれる2量が取り上げられることがほとんどであり、またxの変域が負の数の範囲に拡張される際にも具体的場面をもとに拡張が説明される。この段階までは、中学校数学であっても場面中のパターンを記述する活動が主として行われている。

続く比例の比例定数を負の数に拡張する段階になって、4社の教科書では具体的場面が提示されず、式だけから表を作成して、その特徴を考えるようになっている。しかし他の3社では水が減る、あるいは電車が逆方向に走るといった場面を提示し、その変化を記述することから比例定数が負になることを説明している。この後、5社は1組のx, yの値から比例の式を求める学習をし、さらに比例のグラフに進むが、ここまで来ると具体的場面を伴わずに新たな内容が導入される。ただし問題では具体的場面を扱うものが5社中2社ある。これら5社以外の2社はグラフの学習を先にし、その後、式を求める学習をするが、グラフの学習では場面を伴わないものの、式を求める学習では、1社は具体的場面を伴って導入がなされ、もう1社は場面なしで導入した後に、問題で自動車の燃費を扱っている。

反比例の学習では、小単元冒頭で反比例を導入する際には、面積一定の長方形の縦の長さx cmと横の長さy cmのような場面が提示されるが、変域の負の数への拡張、比例定数の負の数への拡張、反比例のグラフは、具体的場面は提示されずに導入される[2]。なお1組のx, yの値から反比例の式を求める学習では、1社が面積6 cm^{2}の長方形という場面を最初に提示し、その後にy=6/xを取り上げている。また2社は場面を伴わずに導入をした後の問題で、水を入れる速さや時速とかかる時間の関係を取り上げている。

以上より、中学校1年の関数単元においては、関数および比例の定義、比例のxの変域の拡張までは具体的場面を伴って導入され、その後、負の比例定数については場面を伴わずに導入する教科書が現れ、比例の式を求める学習とグラフの学習では基本的に場面を伴わずに導入が行われる。反比例の学習では、定義は具体的場面を伴って導入が行われるが、xの変域を拡張する学習以降は、基本的に場面を伴わずにそれぞれ導入される。反比例の冒頭で場面が一時的に用いられるものの、比例の比例定数の拡張から式を求める学習のあたりで、場面を対象とし、そのパターンを記述するディスコースから、パターンを対象としたディスコースへの移行が期待されていると見ることができる。

ただしその移行部分を見てみると、特にそうした移行を示唆する説明はなく、ある時点で場面を伴わずに式だけを提示して比例を考えさせるようになる。また場面を伴わずに比例を導入していた1社が、次の x の変域の拡張では人が走る場面を用いて導入をしたり、式を求める学習よりも比例のグラフを先に学習する教科書でも、式を求める学習の際に水槽に水を入れる場面から学習を始めるものがあったりと、全面的には移行しない展開の仕方も見られる。こうした展開の仕方は、上述したディスコースの移行を曖昧にすることにつながるとも考えられる。

３．移行の明示化

前節で見てきた現行の教科書における展開の特徴を考慮した場合、パターンの科学という視点からの授業デザインで必要な点として、ディスコースの移行を生徒にも明確にすることが考えられる。これは、これまで対象としていなかったものを新たに対象とすることは意図的に行われる必要があるとの指摘がなされていることによるものである。

Dörfler (2002)は数学の指導において、探求の対象についての移行が生じても、それが暗黙的にしか示されないことが多いとし，次のように述べている：「学習者はある段階で、何かを対象自体として考えると決定しなければならないこと、そしてあたかも1つの統合された全体であるかのようにその何かを扱い、用い、考えるという意図を持たねばならない」(p. 340)。そしてそうした視点を採用するという意思決定が必要であり、教師は「この意思決定が理に適っていて、[生徒にとって]もっともらしく見えるようにする」ことも重要である(p. 346)としている。

こうした指摘に基づいて移行を明確化することを考えると、比例について1組の x, y の値から比例の式を求める学習やグラフの学習を始める以前に、比例の学習における対象が、算数の時のような具体的場面から、式で規定される変数間のパターンへと移行したことを、明確に生徒に説明をする必要が出てくる。さらに、その移行が「もっともらしく見えるようにする」ことも必要となる。

この観点から数学での比例の定義を見直してみると、算数での比例の定義が共変性の特徴に基づくものであったのに対し、数学での比例の定義は関数的関係の特徴に基づくものとなっている。そこで、数学で行われる移行の妥当性を、比例を関数として捉え直すこと、つまり x の値に対して対応する y の値がどのように決まるかに着目して捉えることに求めることが考えられる[3)]。すると今度は、算数でのともなって変わる量という視点から、数学の関数という視点への移行の「もっともらしさ」が必要となる。これについては、例えば、定数関数や階段関数のように、ともなって変わるとは限らない場合を含む2量の関係も、併せて扱うことができることがあろう。0を数に含めることで何もない場合も数を用いて表すことができるようになるのと似ている。また、適当な対応のルールにより自由に関数を構成できる点も、関数の利点とも言える。ともなって変わる量の場合には、その変化を体現する具体的場面がないと、「ともなって」いることが明確でなく、規定がしにくいが、2変数の対応のきまりであれば、具体的場面を必要とせず、適当なきまりを設定して自由に規定することがしやすい。

以上の点を考慮すると、単元最初の関数の学習の段階で、まずともなって変わる量の視点から関数の視点に移行することを意図的に行い、それを利用して、比例については関数として捉え直すことを意図的に行う中で、$y=ax$ という式により比例を定義すること、そしてこの式で規定される2変数間のパターンを対象とすることを説明し、今後はそれを「扱い、用い、考える」という意思決定を学習の一環として行うことが、パターンを対象とす

るディスコースへの移行を明確化する、１つの方策と考えられる。

なお2社の教科書では、比例を導入する直前の部分で、具体的場面を考えた後に、具体的場面を伴わずに $y=3x$ や $y=5x$ の式だけを提示して表を完成させている。また1社は比例の学習の最初で、場面を伴わずに2変数の表だけを提示し、その関係を $y=3x$ の式で表し、比例の定義を行っている。これらの教科書での扱い方を見ると、比例を導入する段階でも、式により規定されるパターンを探究することへの移行が可能であることが示唆される。

この段階で移行を明示化することは、比例の定義に見られる差異とも整合する。算数での定義は共変性に基づくだけでなく、それは「ともなって変わる2つの量 x と y」について述べられている。これに対し、中学校1年で比例と反比例を定義する際には、「変数 x, y の間」の関係として述べられる。量が通常、現象、物体または物質の属性とされるとすれば、算数での比例や反比例は現象、物体、物質のある量の変化の仕方を記述したものとなる。これに対し、変数は「いろいろな値をとる文字」であるから、比例や反比例はいろいろな値をとる文字と文字の間の関係ということになり、2文字のそれぞれがとる値の間の関係となる。その関係が場面等で規定されていない場合には、その関係は $y=ax$ や $y=a/x$ の式により規定されると考えられよう。このように定義の中の差異も、量に見られるパターンの記述から、式により規定される2変数間のパターンを対象とすることへの移行を含んでおり、この段階で移行を試みることと整合することになる。

４．比例・反比例の性質のパターンの性質としての扱い

パターンの科学という視点から必要なことの二つ目として、新たな対象について探究するというディスコースを生徒にも明確化することが考えられる。そのためには、学習内容をできるだけ、式により規定される変数間のパターンを対象とした探究として扱うことが必要となる。これにより、パターンを対象としたディスコースのルーチンやナラティブが生徒にとって明確化され、このディスコースへの生徒の参加を促すことで、学習のパラドクス(布川, 2016b)を解消することにつながると期待される。

比例と反比例の学習では比例と反比例の諸性質が扱われる。式により規定される変数間のパターンを対象とするディスコースにおいて考えるならば、それらの性質はこのパターンの性質として扱われなければならない。したがって、それらの性質が成り立つことは、パターンを規定する $y=ax$ と $y=a/x$ という式から説明される方が適切であると考えられる。

教科書では比例の関係にある2量を含む具体的場面を提示し、2量についての表を作った上で、それぞれの対応する x と y の値について y/x の値を調べることを通して、y/x の値が一定になることを見出させている。これは場面中の数量関係の特徴として、比例の1つの性質を見出していることになる。これに対し、式だけが提示された時に、この式から表を作り、その表で今の性質を確認した場合には、この性質は式で規定されたパターンの持つ性質として見えやすくなる。したがって、表が式で規定されたパターンの表現であることを生徒に対して明確にする方が、パターンを対象としたディスコースとしての一貫性が生徒に感じられやすくなると考えられる。

パターンの性質であることをさらに直接的に扱うとすれば、比例という変数間のパターンを規定する式である $y=ax$ から今の性質を示すことが考えられる。すなわち、$x\neq 0$ のときにこの式の両辺を x で割ることにより $y/x=a$ となるので、ここから y/x の値が一定であることを示すというやり方である。これにより、今の性質がパターンの持つ性質であることが、

より明確になる。
　比例の定義が $y=ax$ の式により述べられるようになったことから、算数における比例の定義であった「x の値が2倍、3倍、…になると y の値も2倍、3倍、…になる」は、中学校1年の学習においては比例の性質として扱われていると考えられる。教科書ではやはり具体的場面に関わり作った表において値の対応を調べることを通して、この性質が成り立つことを確認している。この場合も、表を式から作り、変数間のパターンの表現であることを明確にすることが、今の性質がやはりパターンの持つ性質であることを明確にする1つの方策となる。
　さらにパターンという対象の持つ性質としてこの性質を扱うことを考えると、パターンを規定する式である $y=ax$ からこの性質を示すことになろう。例えば x の値が k 倍になることを kx と表し、このときの y の値を計算すると、$a(kx)=k(ax)$となる。これは kx に対応する y の値が x に対応する y の値 ax の k 倍であることを示しており、上の性質がパターンを規定する式から導出されたことになる[4)]。
　ただ、$a(kx)=k(ax)$という式の解釈が中学校1年生には困難であるとも考えられる。その場合には、算数で学習した大きさの等しい分数やわり算のきまりを用いて示すこともできる。つまり、比例では $y/x=a$ (一定) あるいは $y \div x=a$ (一定) となることが既に示されているとすると、x の値が k 倍になった際に分数 y/x の値や商 $y \div x$ が一定となることから、y の値も k 倍になるはずであるとわかる。パターンを規定する式 $y=ax$ から導出された $y/x=a$ (一定) や $y \div x=a$ (一定) を経由する形にはなるが、今の性質をパターンの性質として扱うことが可能になる。
　なお教科書ではとりあげられないが、比例において x の値が1増えると y の値が比例定数分だけ増えるという性質も、$a(x+1)=ax+a$ によりパターンを規定する式から示すことが考えられる。
　反比例については第2節で見たように、その導入以外では具体的場面を伴わずに学習内容が導入されるが、反比例についての同様の性質は反比例の導入部で一緒に扱われるので、比例と同様の扱いとなっている。したがって、上で比例について述べたことは、反比例についても同様に考えることができる。
　このように、具体的場面における比例や反比例の関係にある量について調べる中で比例と反比例の性質を見出すのではなく、比例と反比例というパターンを規定する式から性質を導くことにより、パターンを探究の対象とすることが維持され、またその性質をパターンに基いて説明することが受容されるナラティブであるようなディスコースが維持される。これにより、比例や反比例の学習がそのディスコースにおける活動として捉えやすくなるものと期待される。

5．変域および比例定数の拡張

　パターンを対象として探究するというディスコースを明確化するという点からは、x の変域および比例定数を負の数へ拡張する場合にも、パターンを規定する式を基本とし、その拡張の試みと捉える方が、ディスコースとしての一貫性を保つことができる。
　上でも述べたように、反比例の学習においては、変域を負の数の範囲に拡張する場合も、比例定数を負の数へ拡張する場合も、具体的場面は提示されず、式だけが示された上でそこから表を作り、反比例の性質が正の数の場合と同様に成り立つことを確認するようになっている。こうした導入になっているのは、変数 y が変数 x に反比例し、しかも x の値が負になるような具体的場面や、比例定数が負になる具体的場面として適切なものが見つけにくいこともあるであろうが、結果として、$y=a/x$ という式で規定されるパターンについて、x や a の値を形式的に負の範囲に拡張し

た場合にどのようなことが起こるかを探究する活動になっている。したがって、反比例の x の変域および比例定数を拡張することの学習については、現行の教科書の扱い方をそのまま援用できる。

また比例についても比例定数を負の数に拡張することの学習では、第２節で見たように4社の教科書では具体的場面を提示せずに、反比例の場合と同様、形式的に比例定数が負の場合を導入している。したがって、これらの教科書の扱い方を援用することで、式により規定される変数間のパターンを対象とするディスコースと整合した形で、比例定数を負の数に拡張できる。

これに対し比例の x の変域を負の数の範囲に拡張することの学習では、すべての教科書で具体的場面を提示し、x で表される数量が負の値になる場合を考える中で、x の値が負になることを導入している。ただし、3社は比例自体を導入する際に x の値が負になることを一緒に扱っている。これに対し他の4社では、x の値が正である場合だけを扱って比例を導入し、その後、改めて x の値が負になる場合を探求する展開になっている。

この後者の展開を採用し、なおかつ第３節で論じてきたように、比例の導入時に式で規定されるパターンを対象とするディスコースへの移行を明示するとすれば、これ以降に行われる学習は、新たなディスコースと整合的であることが望ましいので、反比例の場合と同様の扱いをして、x の変域を負の数の範囲に拡張することになろう。これは、次のような啓林館昭和43年版の説明と同様の方針となる：「比例して変わる数 x, y は、実際の量では、ふつう正の値をとるが、$y=ax$ という式では、負の値も考えることができる。そこで、これからは、x, y が負の値をとる場合もふくめて、$y=ax$ の関係があるとき、y は x に比例するということにする」(2年 p. 79)。この教科書の場合、直前では x が正の値だけになる具体的場面を用いて比例の式を提示し、次に x が3の時 y が8である x と y の関係を式で書かせ、それから上の説明がなされている。

この説明は、量の記述では正の値に制限されるのに対し、式だけを見れば負の数も自由に考えることができるとしており、式で規定されるパターンを対象としたディスコースの中で負の数へ拡張することを、生徒にも明確に宣言したものと言える。

以上のことから、パターンを対象とするディスコースとしての整合性を考慮した場合には、具体的場面の探求から比例の式を見出し、それをもとに式で規定される2変数間のパターンとして比例を定義した後は、x の変域および比例定数の負の数への拡張は、形式的に行うという方法の方が、整合性は保たれやすいと考えられる。

６．具体的場面を代替する事象としての提示

式で規定されるパターンを対象とするディスコースとしての整合性を重視した結果として、第３節から第５節で述べた展開の仕方では、式に基づく形式的な扱いが多くなってしまっている。特に関数的関係を表現した式に基づくことにより、具体的場面を用いた際には2量の連動した変化として自然に現れていたともなって変わるという共変性が、生徒に見えにくくなるという危険性が考えられる。

この点を補うために、式で規定されるパターンを動的[5)]に提示することで、パターンの持つ変化の側面や共変性を生徒が捉えやすくすることが、１つの支援のあり方となる。例えば図１は比例を定義し、また定義の式で規定されるパターンを対象とすることを生徒に説明した後で使うことを想定した動的教材であり、GeoGebra で作成されている。

ここでは下段の点Aを数直線上に沿って動かすと x の値が変わり、それに伴って y の値や点Bの位置が式に基づいて変わる。具体的場面を伴わないものの、ある種の「現象」ら

しく生徒に提示する試みである。これにより

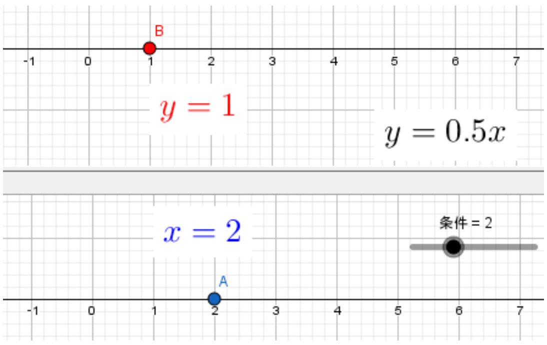

図 1: 式が規定するパターンの提示

$y=ax$ という式の持つ変化の側面を見えやすくし、対応や関数的関係による比例の規定と、そこから派生する変化や共変性の側面が、統合された形 (布川, 2010) で扱われることになる。また右の「条件」スライダーにより比例定数を変えることができ、それにより y の値や点 B の位置の決まり方も変わることで、比例定数 a がパターンの特性を決める因子であること、a の値に応じて異なるパターンが得られることを感得しやすくすると期待される。

また図 1 にあるように、数直線上で点 A を動かして x の値を制御すると、正負の数の学習との関連で、数直線は負の数の範囲も含むものとなり、点 A を動かす中で自然に負の数についても扱われることになる。つまり、x の変域を負の数に拡張することが、式で規定されるパターンの感じをつかむ活動の中で、自然に生じることになる。

さらに比例定数を決めるスライダーに負の数も含めた場合には、比例定数を負の範囲に拡張することも同様に扱うことができる。その場合、比例定数が正の値の場合と負の値の場合の点 B の位置の決まり方を観察することで、比例定数の影響を感じることができるとともに、そもそも比例定数が負の値になっても 2 変数間のパターンを同様に考えていくことができるとの理解を支えることになると考えられる。

なお、図 1 では 2 本の数直線を上下に平行に並べているが、小学校 6 年での学習を前提とするならば、この時点で 2 本の数直線を直交するように提示することも考えられる(図 2)。座標の学習の前であっても、平面上の 1 点により x と y の対応を表すことまでは含めず、それぞれの数直線上の点により x と y の値を表すと想定すれば、そこに現れる「現象」を図 1 と同様に解釈することはこの段階の生徒にも可能であると考えられる。

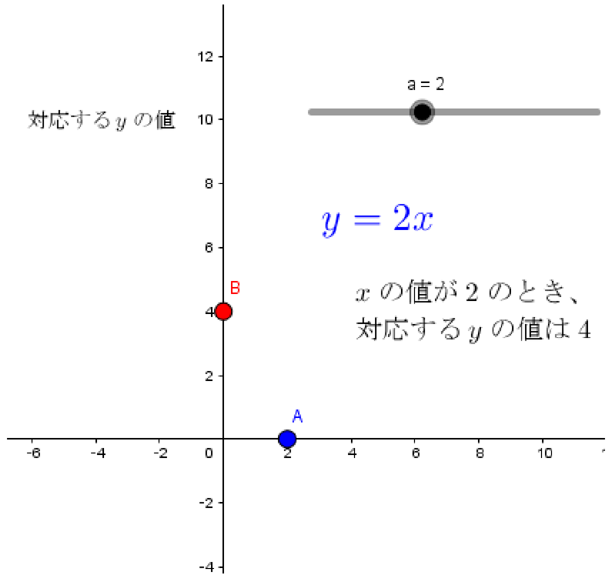

図 2: 数直線を垂直に配置した提示

比例の性質についても同様に、動的側面を採り入れることで、式との関係を表を媒介せずに提示することもできる。例えば図 3 は「x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値も 2 倍、3 倍、…になる」の性質について、第 4 節で述べた $a(kx)=k(ax)$の関係をもとにした式による説明を、動的側面を採り入れ、数を擬変数として捉えやすくした数式により示す教材である。スライダーにより比例定数、倍、x の値を変更することができるが、倍の値を固定して x の値を変えたときのようすを観察することで、x の値によらずに同様の関係が成り立つことが理解しやすくなる。逆に x の値を固定して倍の値を変えることで、倍の値が異なっても同様の関係が成り立つことを確認しやすくなる。これらの観察を通して、式によりこの性質を示す際に最も重要となる $a(kx)=k(ax)$という関係についての理解を支援

することを意図したものである。

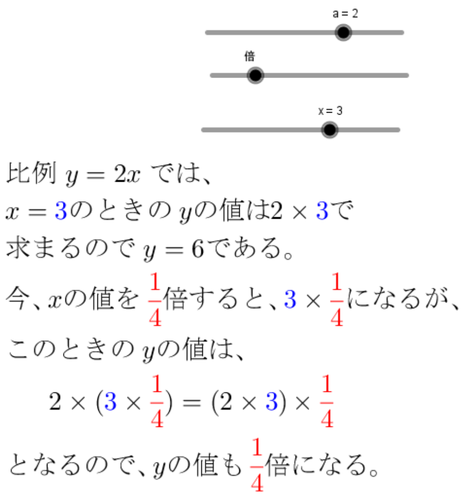

図 3: 比例の式と性質の関係の提示

このように、パターンを対象とすることを明確にするために式をもとにして考える場合、新しい内容を導入する際に具体的場面をできるだけ用いないことによる問題点を緩和する一つの手立てとして、動的提示により、式に潜在的に含まれる変化や共変性に関わる側面を明示化することが考えられる。

7．パターンの表現としてのグラフ

現行の教科書において比例のグラフが導入される際には、まず y=2x といった式が提示され、その式から表を作り、表の対応する x, y の値をそれぞれ x 座標、y 座標とする点を座標軸のはいった平面上にとることで、グラフを作成している。具体的場面を伴わずに式だけをもとに表、グラフを作成しており、式により規定されるパターンを対象とするディスコースにおける活動と見ることができる。また、提示されたグラフから比例の式を求める学習は、グラフから比例の式が復元できることを確認することにもなっている。

パターンを対象とするディスコースの観点から考えた場合、グラフは対象であるパターンの表現である。そして、グラフをかく目的はこのパターンを探究することになろう。したがって、グラフをかくというルーチンを経て見出すことのできた比例や反比例というパターンの特徴について語ることは、パターンを対象とするディスコースにおけるナラティブと言える。その点では、グラフの特徴について語ることと、グラフから見出される比例や反比例の特徴について語ることとは、表現についての語りと対象について語りとして区別されるべきであろう。その上で、グラフの特徴から見出される比例や反比例の特徴について語ることが重視される必要がある。

グラフがパターンを表現していることから、グラフが与えられればそれによりパターンも規定されることになる。上述したグラフから式を求めることは、このパターンを求めることにもなる。しかしグラフ上の点が x の値と y の値の対応を表現していることから、直線が 1 本引かれたり、双曲線が 1 組引かれたときに、単に比例定数を求めることができるというだけでなく、すべての x の値についてその対応する y の値が確定したこと、つまり 2 変数間のパターンが規定されたと考えることは、グラフがパターンの表現であることをより明確にした考え方と言える。

グラフが直線や双曲線になることは、現行の教科書では点のとり方を徐々に密にすることで示し、その後、x の値が増加したときの y の値の増減についてグラフ上で考えさせている。しかし、変化の仕方もパターンの特徴であるとするならば、パターンを規定する式に潜在的に含まれていた変化の仕方をグラフにより顕在化できることを強調した提示をすることが、パターンを対象とするディスコースには適した提示と言えよう。

例えば図 3 の教材では、x 軸上の点 P を正の方向に移動させると、対応する y 軸上の点 Q とそこから派生する平面上の点 R とが伴って移動する。ここで点 R の残像が残るように設定しているので、点 R が移動するにつれて半直線が画面上に現れる。このように直線が画面の左から右に向かって徐々に現れていくという仕方で、変化を強調するように動的に

グラフを提示するものである。図 2 により 2 変数の対応を観察した経験は、図 3 の理解を支える可能性がある。また点 P と点 Q も併せて提示することは、グラフと x, y の値の変化とを関連づけて観察する機会も提供する。

このような提示は関数のグラフをスキャンする手続き (procedures of scanning, Sfard, 2008, p. 134) を示唆することにもなる。利用される視覚的媒介物についてのスキャンする手続きもディスコースの要素であるならば、この手続きを示唆するグラフの提示の仕方の方が、本稿で考えているディスコースとの整合性という意味では、好ましいと考えられる。

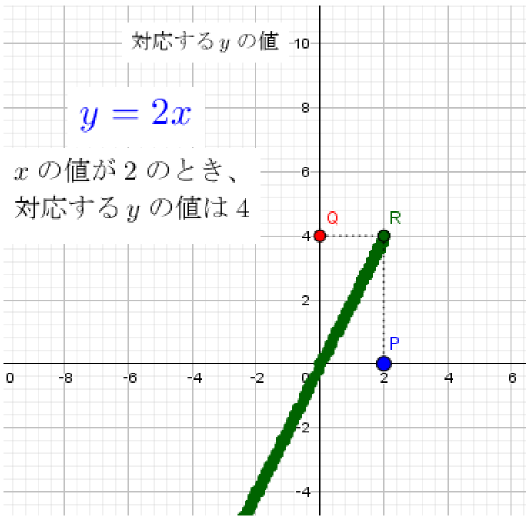

図 4: 比例のグラフの動的な提示

なお比例のグラフが直線になるといったグラフの特徴も、パターンの性質から生じたものとして説明できる方が、パターンを対象とするディスコースと整合する。これについて比例や反比例の性質のときと同様に考えるならば、グラフの特徴もパターンを規定する式から説明することが、今のディスコースとの整合性が見えやすい。例えば、比例の式から比例のグラフが直線になることを説明する (布川, 2015, p. 9)[6] ようなナラティブである。しかしそうした式からの説明が生徒にとって困難であれば、グラフをかくために作る表が式から作られたことを意識させ続けたり、式への値の代入から直接、グラフに点をプロットしたりすることで、点の集合により作られた線が式により規定されたパターンの表現であり、その形状の特徴も式に依拠するものであると理解しやすくすることが考えられる。

８．関数の活用の問題

関数単元の活用の学習は、方程式の学習に比べて、数学的モデル化の過程が捉えにくい場合が多い (布川, 2014)。こうした過程を明確にし、数学的モデル化過程における関数の役割が生徒に見えやすくするためには、場面と関数とを区別することが必要とも考えられる (布川, 2014; 布川(2011)の図 6 も参照)。

式で規定されるパターンを対象とし、それを探究するようなディスコースと関数の学習との整合性を図ることは、この具体的場面との区別を促す試みとなっている。

活用より以前の学習は、パターンを対象とするディスコースという意味で、パターンを探究し、その性質を見出したり、それに関わるルーチンを確立することとして特徴づけられる。このパターンに関する知識や手法は、数学的モデル化過程の数学的処理の部分を担い、数学的モデルに関わる新たな情報を生成することを可能とし、結果として数学的モデルで記述される場面についての情報を得ることにつながる。つまり、比例や反比例の学習を、式で規定されるパターンを探究する活動として位置づけることは、それらの活用と矛盾しないだけでなく、むしろ活用の際の数学的モデル化過程を明確化し、関数の役割を生徒に見えやすくすることになる。具体的場面の利用を意図的に控えることが、結果として比例や反比例を具体的場面に適用するようすを見えやすくするのだとも言えよう。

９．変数の対象レベル化

第 6 節では具体的場面を代替するものとして、動的な提示によりパターンの変化の側面を生徒に見えやすくすることを提案した。式

をこうした動的イメージと関連させる際には比例や反比例の変数 x にいろいろな値が順に代入されていくことを、生徒が十分理解している必要がある。また、第４節で述べたような、比例や反比例の性質をパターンを規定する式から説明しようとする際、式変形だけの説明が生徒にとって理解しにくい場合は、式から表を作成し、そこで性質を見出したり確認したりする必要があるが、その際、式で規定されるパターンを対象としていることが維持されるためには、表を作成することが式中の変数 x にいろいろな値を代入し、対応する y の値を求めていることとして、生徒に意識されている必要がある。

このように、パターンを対象とし、それを規定する式を中心に考える場合、特にその変化や共変性の特徴を探究する場合には、生徒が変数 x にいろいろな値が代入されるというイメージを持つことは重要であり、いろいろな値を代入する行為は式で規定されるパターンを対象とするディスコースでのルーチンと考えられる。変数を表す文字 x が、その背後に常に想定されるべき数の集合(真野, 2011)を反映せず、表記を見てもその特徴が現れていないという意味で暗黙的シンボル (tacit symbol, Harel & Kaput, 1991) として用いられるとすれば、背後の数の集合を想定し、その要素が次々に代入されるという変数の特徴は利用者によって補完されねばならない。利用者が「区間に属する任意の数値を与えようと欲する」(高木, 1938/1980, p. 17) 必要がある。

具体的場面を探究し、そこで見出されたパターンを記述する学習では、場面中の変化に伴い、ある量のいろいろな状態が生じ、そこからその量の値として変数のいろいろな値も派生する。しかし、パターンを対象とした学習では、変数自体も代入という操作の対象となる対象レベル(object-level, Oldenburg, 2015)で扱われることになる (布川, 2019)。したがって、比例や反比例の学習がパターンを対象としたディスコースで成立することは、変数の理解との係わりで検討される必要がある。

なお、式中の変数 x にいろいろな値を代入し、それに対応する y の値を求めることは、二重性の観点からは、操作的な捉え方に当たる(Sfard, 1992)。また二重性の議論では、関数についても構造的な捉え方への移行が問題にされることが多い(Slavit, 1997)。しかし Sfard (1992)も指摘するように、数学的対象が操作的な起源を持つとするならば、関数を学習し始めた初学者に対しては、操作的捉え方の状態で関数について十分に経験することが重要と考えられる。パターンを対象としたディスコースの中で、変数にいろいろな値を代入することは、操作的な捉え方のレベルで関数について経験する機会を提供することになり、したがって、後の構造的な捉え方への移行のための素地になりうる。その際、第６節で述べた動的な提示は、代入による計算手続きの圧縮化ともなっており、構造的な捉え方への移行を促す可能性も考えられよう。

10．おわりに

布川 (2015) は関数が思考の対象として成立しやすくなることを目指した教科書試案を提案しており、その際、関数について次のような定義をしている：「『変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる』と考えているとき、『y は x の関数 (function)である』といいます。つまりここでは、別の変数 x により決まる変数 y を関数と呼びます」(p. 4)。本稿で述べてきたことは、この変数 x により決まる変数 y が、$y=ax$ や $y=a/x$ というパターンにより決まる場合、あるいは変数 y がそうしたパターンを内的構造として持つ場合と言え、そこで必要とされた、関数の性質を「式に戻って考えて」(p. 8)みることや、グラフの特徴を式と関連づけて扱うことになっていた。

こうした扱い方は Nachlieli & Tabach (2012) の提案する低いレベルのディスコース (lowerlevel discourses)から関数のディスコース (the discourse on functions)への移行を促すという展開とは異なる。そこでの低いレベルのディスコースは関数の式やグラフ、表が対象にはなっても関数が対象になっていないような活動を指している。しかし本稿で述べてきたことは、式やグラフが関数の表現であることをより明確にして生徒に提示することであり、表現される対象としての関数を想定することになっていた。

この点で本稿の提案はむしろ、比例や反比例に関わり model-of のレベルから model-for のレベルへの移行 (Gravemeijer, 1997) を意図したものと見ることができる。すなわち、具体的場面のモデルとして比例や反比例を扱う算数での model-of の経験を生かし、中学校ではそのモデルが独立した存在となり、数学的推論のためのモデルとなるような model-for のレベルに移行し、後のよりフォーマルな扱いに備えるのである。

ただし、そうした扱い方をする場合、パターンが式により規定されている以上、どうしても式を重視した展開になる。本稿ではそれを補うために、作図ツールを利用した動的な提示をできるだけ用いることを併せて提案した。しかしそれにより、実際に中学校 1 年生が活動することができるかについては、今後、検討していく必要がある。

謝辞：model-of/model-for の議論との類似性については、お茶の水女子大学附属中学校の藤原大樹先生よりご示唆を頂きました。ここに記してお礼申し上げます。本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 中学校の教科書は平成 28 年度版を利用している。

2) ただし 1 社は、$y=12/x$ について考えるとしながら、その横に面積が 12 の様々な長方形がかかれた図が載せられてはいる。

3) 算数の比例の定義にあらわれる「x の値が 2 倍、3 倍、･･･になると、y の値も 2 倍、3 倍、･･･になる」という条件も、例えば $y=f(x)$, $f(rx)=rf(x)$ ($r\in\mathbb{Q}$)と表現するならば、２変量の間のある種のパターンとして式で表せる。したがって、$y=ax$ とパターンを簡潔に表現できることは、中学校の定義の利点ではあるが、これを移行を「もっともらしく見えるようにする」決定的な要因であるとは考えないでおく。

4) 大阪書籍の昭和 43 年版中学校 2 年の教科書では、x の値が a、$2a$、$3a$、pa の時の $y=kx$ の値を表に整理して、同様の説明でこの性質を説明している (p. 122)。

5) ここでの「動的」は各 x が関数により対応する y の値に成るというような「関数の動的側面」(Eisenberg, 1991)とともに、それにより y の値が次々に生まれ、ある種の変化を作り出していくような側面の双方を念頭に置いている。次ページで述べる関数的関係と共変性が統合された動きである。

6) 比例のグラフが「直線」になることについては、比例の式と小学校 6 年で学習する図形の拡大・縮小をもとに説明することは可能である。実際、学校図書の昭和 34 年版中学校 3 年の教科書では直角三角形の相似を利用してグラフが直線になることを説明している (p. 15)。反比例のグラフが「双曲線」になることを式をもとに示すことは、双曲線の定義の関係もあり、これよりは容易ではない。

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, *4* (4), 337-350.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315–345). Hove,

England: Psychology Press.
林 弘. (2001). 一次関数における学習過程に関する考察：事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して. 上越数学教育研究, *16*, 81-90.
Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Harel, G. & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51/52*, 10-27.
布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.
布川和彦. (2011). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成. 上越数学教育研究, *26*, 1–12.
布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169–180.
布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成(2) ：教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *29*, 1–12.
布川和彦. (2015). 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, *30*, 1–12.
布川和彦. (2016a). 「数学=パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察. 日本数学教育学会誌, *98* (4), 3–14.
布川和彦. (2016b). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *4*, 49–56.
布川和彦. (2018). 具体的場面の数量関係と学習の対象としての関数. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *6*, 105-112.
布川和彦. (2019). メタレベルと対象レベルの観点から見た学校数学における文字の利用. 上越教育大学研究紀要, *38* (2), 309-320.
Oldenburg, R. (2015). Algebra at the meta and the object level. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6* (3), 366-379.
Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), T*he concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Mathematical Association of America.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
真野祐輔. (2011). 変数性に関する概念変容の数学史的背景：擬変数の機能の考察を中心に. 数学教育研究(大阪教育大学), *40*, 71–87.
Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (3), 259-281.
高木貞治. (1938/1980). 解析概論. 岩波書店.