上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.39-48

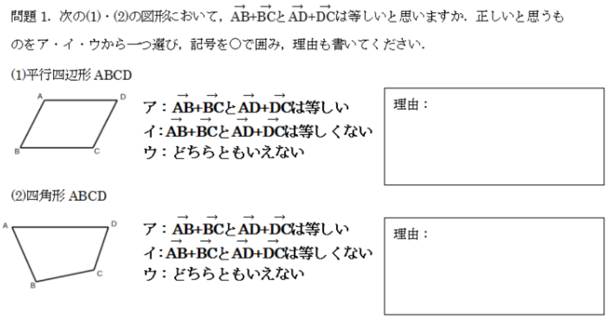
# 高等学校数学Ｂ「ベクトル」における概念形成過程に関する研究

佐々木　文弥
上越教育大学大学院修士課程３年

## 1. はじめに

昨年度末，高等学校学習指導要領が改訂された。今回の改訂の基本方針の一つとして「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進が挙げられている。高等学校学習指導要領解説数学編理数編には，「数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，新しい概念を形成したり，よりよい方法を見いだしたりするなど，新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し，思考，態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる。」（p. 133）と記述されている。現在，数学Ｂに位置づけられている「ベクトル」は，全く新しい概念を学ぶことができる単元であると考える。筆者は，ベクトルの学習は新たな概念を形成することや，思考，態度が変容でき，「深い学び」を実現できる単元の一つだと考える。しかしながら，学習指導要領改訂に伴い，これまで数学Ｂに位置づけられていたベクトルは，新設された数学Ｃへ移行となり，一部の高校生のみが履修可能の単元となった。その背景として，ベクトルには全く新しい概念を学習するにあたり，様々な困難性が指摘されていることが考えられる。

ベクトルの学習について，白川(2004,2005)は高校３年生を対象としたベクトルの理解に関するアンケート調査を行っている。その結果，学習者には内積の定義の混乱や，ベクトルの相等性の無理解などを明らかにしている。佐々木（2018）は，ベクトルを学習し，数年経過した大学生に対し次の図１に示したアンケート調査を行った。


問題 1．次の(1)・(2)の図形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しいと思いますか．正しいと思うものをア・イ・ウから一つ選び，記号を○で囲み，理由も書いてください．

(1)平行四辺形 ABCD

ア：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しい
イ：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しくない
ウ：どちらともいえない

理由：

(2)四角形 ABCD

ア：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しい
イ：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しくない
ウ：どちらともいえない

理由：

**図１：大学生に対するベクトルのアンケート（佐々木，2018）**

この問題に対し，「(2) 四角形 ABCD」を誤答（イ・ウ）する回答者が 28 人中 11 人おり，「平行四辺形ではないから」や,「辺の長さが異なるから」を理由として挙げていた。この調査から，ベクトルを学習し，数年経過した大学生には，ベクトルに対して適切な概念が身についていない事が明らかとなっている。

ベクトルは，算数・数学学習において全く新しい概念を身につけなければならず，高等学校の数学において，理解が困難な場面が多い単元である。山口（1995）は，ベクトルを規定する,「大きさと向きを持つ量」という表現が生徒にとって捉えづらいことや，位置が異なっても大きさと向きが等しいならば同じものとみなすベクトルの同等を理解することが,学習者にとって困難であると述べている。

実際の指導場面での「ベクトル」の学習においては,「ベクトルは矢印である」というような，誤った「ベクトル」概念が形成されていることがよく見受けられる。「ベクトル」の適正な概念形成のためには,現在の「ベクトル」学習における困難性とその要因を明らかにする必要がある。その上で，学習者がどの様にベクトルの困難性を乗り越え，素朴概念を新しい概念へと修正し，ベクトルの概念を形成していくのか，その過程を捉えなければならない。

本研究の目的は，心理学および数学教育学の概念変化研究を手がかりとし，高等学校数学B「ベクトル」の学習において，学習者がどの様にして「ベクトル」の適正な概念を形成していくのか，その概念形成過程を明らかにすることである。

## 2. 「ベクトル」の学習における困難性の要因

ベクトルの学習には，図など視覚的なものによる表現を用いることが非常に多い。ここでは，図や記号には，どのような機能を有するのか,Skemp(1973)の「心像」と,中原(1995)の「図的表現の抽象性モデル」を参考にする。

### 2.1. R.R.Skemp（1973）の「心像」(mental image)

Skemp（1973）は,「心像」(mental image)の特徴を，次のように説明している。

「すでに早く 1880 年代に，ゴールトンは，人々は極めて異なる種類の心像を持つことを見出している。ある人は，ゴールトンと同様，強い視覚的心像をもっているし，全く心像をもたず，主として言葉で考える人もある。これは，今日も依然として通用する。そうしてまた，どちらかを多用するにしても，両方を使いうる人もある（しかし，どんな種類のイメージを使うか，あるいは，実のところイメージを使うか使わないかさえ決定するのは容易ではない)。」(Skemp, 1973, p. 83 / 訳：藤永・銀林)

視覚的なイメージを持つか，持たないかは学習者に依存するものであり，どの様なイメージを持つのかについてもまた，学習者に依存するものである。

次に，Skemp（1973）は,「視覚的記号」という語を用いて，次のように写真と言葉の違いを説明している。

「写真と言葉との 2 種類の記号の主な相違とは，一方が，その集合中の典型であるように見えるのに対し，他方は，そのようには聞こえないという点である。それゆえ，この視覚的記号は，対応する言語記号よりも，いかなる意味でも，その概念とより密接な結び付きをもっている。同じことが，幾何学的記号についてもいえる。次は幾何学的記号である。

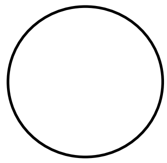


図 2：Skemp（1973）による幾何学的記号の例

これは，それに対応する言語記号である。

円

図 3：Skemp（1973）による言語記号の例

幾何学的記号の概念への近似性は，利点と欠点の双方をともに含んでいる。利点は，概念の特性を忠実に喚起できる点にある。このことは，とくに，幾つかの概念を一緒に視覚的に表現しようとするときによくあてはまる。図式的表現は言語的表現にくらべてこれらの概念のあいだの関係をはるかに明確に示すことができる。

視覚的記号のもつ不利な点は，それを伝達するためには書いて見せなければならない

ことである。—しかし，紙や鉛筆，黒板やチョークを使うのはやさしい。問題は，視覚的記号が特定の円や接線ではなくて，変数—現に見ているような中心や半径をもったこの円ではなく円一般を表すことを銘記しておかなければならないことである。言葉は，必然的にこの事情を意識させる。図式は，特定の円その他しか表すことができないから，われわれは，特定の性質を無視して，その表象する一般的性質を扱うように努めなければならないのである。それは，より具体的な段階にあるから，われわれは，自分自身である種の抽象を行わなければならない。」(Skemp, 1973, p.88-89 / 訳：藤永・銀林)

このことから，言語的記号と視覚的記号には，利点，欠点の両方を持ち合わせていることが分かる。視覚的記号の利点は，対応する言語的記号よりも，その概念とより密接な結び付きをもっていることである。視覚的記号の欠点は,他者への伝達が困難なものであり，特定の条件におけるものを示しやすいことが挙げられる。言語的記号の利点は，他者への伝達が容易なものであり，一般的性質を示しやすい。言語的記号の欠点は，視覚的記号に比べ，対象の概念との結びつきが弱いことである。

Skemp (1973) が述べている通り，視覚的記号は，その概念の特殊なものしか表すことができない。そのため，学習者は自分自身である種の抽象を行わなければならない。ベクトルの学習にもこのことは適用できるだろう。「向きと大きさをもった量」として黒板やノートに描かれる「ベクトル」とは,「有向線分」を示すものであり,視覚的記号にすることで,「位置に左右されない」性質は表象されなくなる。そのため，ベクトルの学習において困難性がみられる学習者には，与えられた視覚的表現を個人の中で抽象化できていないことが考えられる。このことは，ベクトルの学習における困難性の要因として挙げることができる。

次に，中原（1995）を参考にし，視覚的表現の類別を行う。このことは，ベクトルの学習の困難性の要因を更に浮き彫りにすることを狙いとしている。

### 2.2. 中原(1995)の先行研究とベクトルの図的表現の抽象性レベル

次に，ベクトルの図的表現の抽象性レベルについて述べる。中原（1995）は，図的表現を表現方法の抽象性レベルに着目をして次の3つのレベルに分類している。

**表1：中原（1995）による図的表現の抽象性レベル（p.238）**

| |
|---|
| 具象的レベル…実物の描写やそれに近い表現 |
| 抽象的レベル…対象を基本的要素に還元して表現 |
| 記号的レベル…符号化された記号による表現 |

この3つのレベルにおいて，中原（1995）は，数学教育における例として，金魚が12匹いることを表す次の図のような図的表現が挙げている。

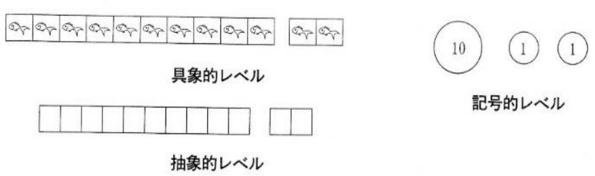



**図4：中原（1995）による数学教育における抽象性レベルの例（p.239）**

これらの分類をもとにし，次に，数学Bの教科書（数研出版）におけるベクトルの図的表現を考察することとする。次に示すのは，現行の学習指導要領における数学Bの教科書（数研出版）による図の記述である。

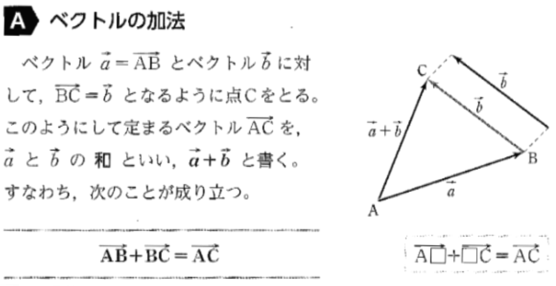



**図 5：ベクトルの加法の教科書による記述（数研出版，2017，p. 8）**

図 5 から，ベクトルの教科書による図的表現として，ベクトルを矢線で表している部分は，抽象的レベルによって記述されている。また，抽象的レベルに付随した記述として，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いた記号的レベルでの記述がなされていることがわかる。

ベクトルの学習における図的表現の抽象性レベルとして，具象的レベルでの記述はかなり難しいだろう。例えば，力の向きを表すような図を用意したとしても，ベクトルを矢線として表すことで，必ず抽象的レベルでの記述が含まれてしまうと考える。次に，具象的レベルと抽象的レベルの特徴の違いによって生じる困難性について述べる。

中原（1995）は具象的レベルによる表現と抽象的レベルによる表現とは，その機能に違いがあることを指摘し，次のような違いを挙げている。

**表 2：中原（1995）による抽象性レベルの特徴（p. 239）**

| |
|---|
| 具象的レベル…特殊的，個別的な意味を伝える<br>抽象的レベル…一般的，包括的，本質的な意味を伝える |

このことは，ベクトルの困難性に関わる大きな要因であると考えられる。具象的レベルにて，特殊的，個別的な意味を伝える。抽象的レベルにおいては一般的，包括的，本質的な意味を伝える違いがある。それに対し，ベクトルの学習では，具象的レベルの図的表現を記述することは非常に難しい。そのため，前節にて挙げた，ベクトルの学習においての困難性として示された，「ベクトルは位置に依らないこと」といった困難性の要因として，本来ならば具象的レベルでの図的表現から，抽象的レベルでの図的表現に段階を踏んで学習がおこなわれるのに対し，ベクトルの学習では，抽象的レベルのみでしか学習を行うことができないため，学習者にとって，特殊的，個別的な性質のものと一般的，包括的な性質のものの区別が非常につきにくいのではないかと考えられる。

### 2.3. 中原（1995）の表現方法の抽象性レベルについての分類

ここでは，具象的レベルの説明である「実物の描写やそれに近い表現」の捉え方について考察を進める。中原（1995）は，「金魚」という具体物を用いて具象的レベルを表現しているが，先述したようにベクトルそのものは，「動き」を表すものであるため，具象的レベルの図にすることはできないだろう。具象的レベルについて考察を進めるため，具象的レベルを 2 つの視点により更に分類をすすめる。1 つ目の視点として，具象的レベルを，「動的」なものと「静的」なものに分類することである。2 つ目の視点として，具象的レベルを「現実の場面で記述可能」なものと「数学の世界でのみ説明される」ものに分類することである。それぞれの視点を以下に考察していく。

#### 2.3.1. 具象的レベルを「動的」なものと「静的」なものに分類すること

「静的」なものとは，中原（1995）の例示である「金魚が 12 匹」や，加減乗除の計算などが挙げられる。「静的」なものには，具体物そのものを用いて表現することが可能である。

「動的」なものとは，「ベクトル」や，「速さ（割合）」などが挙げられる。ベクトルは，図的表現をしようとすると，有向線分や，記

号表現を用いなければならず，抽象的レベルまたは記号的レベルでの記述になってしまう。そのため，具象的レベルで表現することは非常に困難である。速さについても，動的な表現を図として表すのは非常に困難である。

### 2.3.2. 具象的レベルを，「現実の場面で説明可能」なものと「数学の世界でのみ説明されるもの」に分類すること

「現実の場面で説明可能」なものとは，先に挙げた「金魚が 12 匹」，「速さ（割合）」などが挙げられる。その要素として，現実の場面に着目した文章題を作成できたり，実際の体験により問題の解答を確かめたりできる，ということが挙げられる。

「数学の世界でのみ説明されるもの」とは，「負の数の乗除」，「虚数，複素数」の数概念に関わるものが挙げられる。負の数の乗除の文章題では，「東の方角を正，西の方角を負とすると…」という前置きがよく見られる。先に述べた「現実の場面で説明可能」と大きく異なる点は，学習者の直観から離れ，現実場面を形式的に数学の世界に移行させなければならないことである。実数から拡張される「虚数，複素数」においては，現実の場面において説明ができるものは少ないと考える。この分類においては，「ベクトル」は，「現実の場面だが説明不可能」であるだろう。なぜならば，「物体を押す力」や「引っ張られる力」などは，速さと同じで直接目に見えなくても体験によって学習者が感得することが可能である。その点においては，「現実の場面」を表していると言える。しかしながら，「説明可能」という点では先述した通りベクトルそのものを具象的に表記することは不可能であるため，数学の世界でしか説明ができない。

### 2.4. 具象的レベルの分類について

以上の具象的レベルに対する捉え方から，具象的レベルに関して，次の図 6 を作成した。

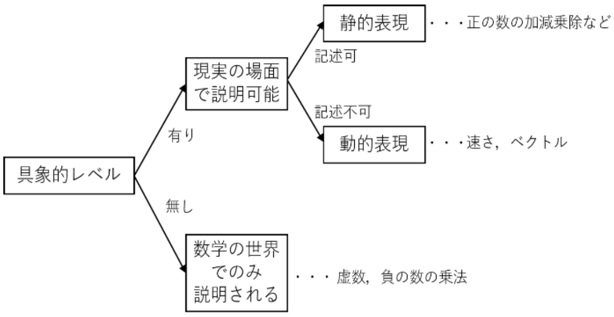



**図 6：具象的レベルの分類**

図 6 による分類とは，第一に，具象的レベルが有るものと具象的レベルが無いものに分類し，具象的レベルが有るものは，現実の場面で説明が可能であり，具象的レベルが無いものは数学の世界でのみ説明される。数学の世界でのみ説明されるものとは，例えば，負の数の乗法や虚数など，数学の言語の中から演繹されるものを指す。他方，現実の場面において説明可能なものとは，現実の場面に着目した文章題を作成できたり，実際の体験により問題の解答を確かめたりできるものが挙げられる。

さらに，現実の場面で説明可能なものを，図示による記述が可能であるか分類し，記述が可能であるものを静的表現，記述が不可能であるものを動的表現として捉える。記述が可能である静的表現とは，正の数の加減乗除など，具体物をそのまま図示することができるものが挙げられる。記述が不可能である動的表現とは，ベクトルや，速さなどが挙げられる。なぜならば，ベクトルを例に挙げると，「物体を押す力」や，「引っ張られる力」，「風力とその風向き」など，直接，目には見えなくとも実体験によってその存在を感得することが可能である。しかしながら，視覚的表現で図示するときに，ベクトルそのものを具象的レベルでの表現をすることは不可能であり，有向線分による抽象的レベルや，$\vec{a}$ や $\vec{b}$ といった記号的レベルの表現でのみ記述が可能である。

以上の分類により，ベクトルの単元は動的な表現を用いる単元であり，現実の場面で説明が可能であるが，具象的レベルでの視覚的な記述が困難である単元だと捉えることができる。しかしながら，現実の場面による説明が可能であるにもかかわらず，学習者はベクトルを抽象的レベルや記号的レベルで捉えていることが多い。具象的レベルとして捉えることが可能であるのに，抽象的レベルで捉えてしまうことによる問題点として，中原(1995)の表現方法のレベルの違いによる，伝達される特徴の違いが挙げられる。具象的レベルによる特殊的，個別的な特徴を，数学の世界において抽象的レベルに移行させることで，一般的，包括的，本質的な意味が見えてくるような学習段階が望ましい。しかしながら，抽象的レベルのみしか獲得していない学習者には,学習したことが一般的な性質であるのか，特殊的な性質であるのかの判別が非常に難しいものとなるだろう。このような表現方法の抽象性レベルによって，前節で挙げた佐々木（2018）のアンケート調査や，山口（1995）の指摘に見られるような困難性を生じてしまう一つの要因として同定できる。

## 3.本研究における「概念変化」の捉え

研究目的を達成するため，本研究では，心理学研究における「概念変化」と，算数・数学学習における「概念変化」の二つの視点を用い，その上で，認知的構造に関する研究であるVinner（1991）の「概念イメージ」の視点を用いる。佐々木（2018）は，心理学研究における概念変化と，算数・数学学習における概念変化を踏まえた上で，ベクトルの学習における概念変化の捉えを考察した。本研究では，佐々木(2018)を踏まえた上で，Vinner（1991)の「概念イメージ」の概略を記述し，概念変化の捉えを確立する。

### 3.1.数学学習における「概念イメージ」

Tall＆Vinner（1981）は，数学学習において,「概念イメージ」を次のように端的に述べている。

「概念イメージとは概念と結びついた総合的認知構造であり，心的図式や関連した性質や過程などすべてを含む。それはあらゆる種類の経験を通じて何年もかかって築き上がり，個人が新たな刺激を受けたり成熟したりするにつれて変わる。」（Tall ,Vinner, 1981, p.152 / 訳:磯田・岸本）

「概念イメージ」とは，概念と結びついた総合的認知構造であると捉えている。この認知構造を用い，概念変化を捉えていく。以上のことを踏まえた上で本研究における概念変化の捉えを確立する。

### 3.2. 本研究における「概念変化」の捉え

佐々木（2018）の概念変化研究の概観を踏まえ,本節では,本研究における「概念変化」の捉えについて，心理学における概念変化研究，算数・数学教育における概念変化研究，Vinner（1991）の数学学習における「概念イメージ」に関わる研究を加え，3 つの先行研究から立場を明らかにしていく。

算数・数学学習における，概念変化に関する先行研究には藤村（2011）や真野（2010）がある。藤村（2011）は概念変化について，多様な知識が関連付けられている知識構造の質的変化のプロセスだと捉えている。真野（2010）は概念変化を単なる知識の累積的な成長として捉えず，素朴概念が新しい概念と相互作用し，全面的に再構成されることだと述べている。これらは心理学研究のVosniadou(1994)の概念変化の捉え方と異なり，Vosniadou(1994)は既有の概念が新たな概念に「取り込むように変化」することだと述べている。本研究ではVinner（1991）の概念イメージ，Vosniadou(1994)，藤村(2011)

と真野（2010）の記述を取り入れる。その上で，本研究における「概念変化」の捉え方を明確にする。概念イメージには，素朴概念の中のものと，新しい概念の中のものがある（Vinner, 1991）。個人の概念定義は 2 つあり，素朴概念の中のものと，新しい概念の中のものがある（Vinner, 1981）。素朴概念の中の個人の概念定義と素朴概念の中の概念イメージ同士の相互作用を経ることによって素朴概念の中の概念イメージが新しい概念の中の概念イメージに取り込まれるように変化し，全面的に素朴概念が新しい概念に再構成されることを本研究における「概念変化」の捉え方とする。次の図 7 は，本研究の数学学習における「概念変化」の捉えを表している。

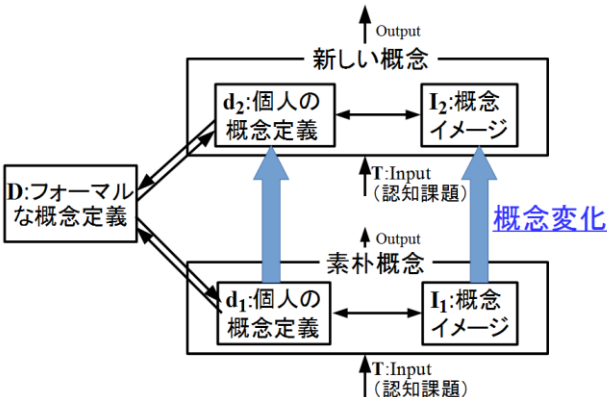



図 7：数学学習における「概念変化」の捉え

認知課題（T）が与えられると，素朴概念の中の個人の概念定義($d_1$)と概念イメージ($I_1$)を用いて課題の解決（Output）へと向かう。素朴概念によって行われる問題解決は，誤った概念定義や完全でない概念イメージを用いることがあるため，適切な課題の解決をすることができない可能性がある（Vinner, 1991）。そのため，新しい概念を身につけることで，与えられた認知課題を適切に解決することができるだろう。

素朴概念の中の個人の概念定義（$d_1$）は，教科書や教師の働きかけ等のフォーマルな概念定義（D）により，新しい概念の中の個人の概念定義（$d_2$）へと変化する。しかし，$d_1$ を $d_2$ に変化させることができたとしても，概念イメージは $I_1$ から変化しない場合もあることが予想される。その場合，D によって，学習者が一時的に $d_2$ を得ることができたとしても，学習者は習慣的に D を調べる必要性を感じていない（Vinner, 1991）ため，時間がたつに連れて $d_2$ を忘れてしまうことが考えられる。そこで，$I_1$ を $I_2$ へと概念変化させることを通して，$d_2$ を忘れたとしても，$I_2$ を所持していれば与えられた課題を適切に解決できるだろう。この捉え方を用いて，ベクトルの学習ではどのような概念イメージが存在するのか，フォーマルな概念定義と個人の概念定義は何かをそれぞれ分析していくこととする。

## 4. 調査の目的と方法

### 4.1. 調査の目的

数学 B「ベクトル」の単元を通して，前節で確立した概念変化の捉えを基に，素朴概念と新しい概念を捉え，概念変化の様相を明らかにする。

### 4.2. 調査の概要

日時：平成 30 年 5 月 7 日～5 月 14 日（全 10 時間）
対象：青森県内の県立高等学校第 2 学年から文型コース 1 クラス
単元：内積の復習から 2 直線の交点まで

### 4.3. 調査の方法

各授業を固定カメラ，手持ちカメラを用いて授業の様子，生徒の様子を撮影した。授業後 5 分程度学習者にインタビュー調査もしくは学習者同士の対話的な学習を記録した。

## 5. ベクトルの和に関する概念変化

この節では，ベクトルの和に関する概念変化の様相を分析，考察していくこととする。

5 月 14 日授業後プロトコル（8/10 時間目）を取り上げる。授業の中で提示された問題を

次に示す。

| |
|---|
| 問：△ABC と点 P が$6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たすとき，点 P はどのような位置にあるか。 |

授業終了後，この問題について学習者（s1）が，他の学習者（s2）に対して次の 2 つの質問をしていた。

①ベクトルの差は，どのように表すのか。

②ベクトルの和をどのように考えれば良いか。

①に関してのプロトコルを次に示す。2 人の生徒と，調査者（R）の対話であり，s1 がベクトルの差の表し方について質問している場面であり，s2 は$\overrightarrow{PA}$を用いて問題の解法を説明しようとしている。

| | |
|---|---|
| s1 | 終点－始点だったっけ(中略)全部 PA に合わせればいいの？ |
| R | それって何で？ |
| s2 | 合わせないとさ，いけない。合わせたほうがいい。 |
| s1 | じゃあ，AP−AB？ AB−AP か？ |
| s2 | 違うって(笑) PA−BA。 |
| s1 | もっとわからん。意味わからん。 |

s2 は，s1 にベクトルの差について説明しようと試みている。s1 の発言から，s1 はベクトルの差において，s1 の概念イメージが不鮮明である事がわかる。

次に，s2 が s1 に対してベクトルの差の表し方を説明した。$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$を説明し，その後，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+(-\overrightarrow{BA})$を説明しようと試みているが，s1 は，なぜ$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$となるのか，意味がわからない，といった様子であった。R は，s1 がベクトルの差の概念イメージや個人の概念定義を所持する以前に，s1 のベクトルの和に関する概念イメージと概念定義が適切なものではないと考えた。次のプロトコルは R が 2 人の対話に介入し，R が s1 に対してベクトルの和について，フォーマルな概念定義を与える場面を示している。

| | |
|---|---|
| R | 足し算がなぜ同じになるか？例えば，AB とかってあるときにさ，AP+PB って AB になるし，AC+CB も AB になるし，みたいなこと？ |
| s1 | え，なるんですか？（中略）なぜなんですか？ |

ここでは，視覚的表現による説明は無く，R のが「$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}$や$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$は成り立つ」というフォーマルな概念定義のみを伝えている。 s1 の「なぜなんですか？」という発言から，s1 のベクトルの和の概念イメージの変化は起きていないことが読み取れる。その後，R は対話によって s1 がどのようなベクトルの和の概念イメージを所持しているのか明確にしようとしている。以下がそのプロトコルである。

| | |
|---|---|
| R | (紙に平行四辺形 ABCD を書いて)例えばこういう平行四辺形があって，AB+BD=AD．これは分かる？ |
| s1 | わかります。 |
| R | こう行って(A→B)，こう行ったら(B→D)。AD になる。(中略)AC+CD=AD，これもオッケー？ |
| s1 | はい．大丈夫です。 |
| R | (四角形 ABCD を書いて)じゃあさ，これも，どう行ったって，AB+BD=AD，AC+CD=AD なのさ。一緒なのさ。形として。 |
| s1 | うーん？ |

R が s1 に対して，平行四辺形 ABCD を書いた上でベクトルの和の確認し，s1 はわかったという反応を示した。このことから，s1 は平行四辺形を用いたベクトルの和の概念イメージは所持していることが分かる。次に，平行四辺形でない一般の四角形 ABCD にてベクトルの和を確認すると，s1 は一般の四角形においてはよくわからない，という反応を示した。このことから，s1 のベクトルの和の素朴概念の中の個人の概念定義，それに伴う概念イメージは以下の 3 つであることが分かる。

ⅰ．△ABC において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$である。

ⅱ．平行四辺形 ABCD など，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$となっているときに限り，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

iii．一般の四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものである。

以上の s1 の素朴概念の中の概念定義から，次の図 8 のような概念イメージが考えられる。なお図中の i と ii，iii は先に挙げた 3 つの概念定義と対応をしている。

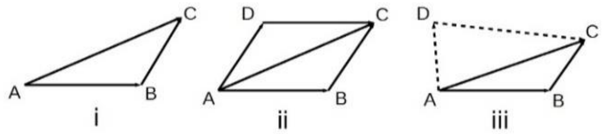



図 8：s1 のベクトルの和に関する概念イメージ

その後，R は s1 に一般の四角形 ABCD でも，視覚的な表現を用いて考えさせる必要があると考えた。次に，R が s1 にベクトルの和における新たな概念の中の概念イメージを一般の四角形 ABCD と位置に依らない点 O を用いて説明する様子である。以下がそのプロトコルである。

| | |
|---|---|
| R | 見た感じ違うように見えるけど。どんな形でも，上の式は成り立つんだよ。全然違う部分に点 O とかおいてもそうなるんだよ。AC っていうのは，AO って行って，OC。AC+OC=AC。 |
| s1 | おおー！はいはいなるほど！分かったわ！ |

R は，どんな点 O を取っても，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$となることを表し，s1 はどのような点 O においても$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$が成り立つことに対し，よくわかった，という反応を示した。

このとき，s1 のベクトルの和の概念イメージは，先に挙げた「iii．一般の四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものである。」から，「四角形 ABCO（O は取る位置に依らない）において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。」へと概念変化が起きたと言えるだろう。また，R の「$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$」という発言から，R がフォーマルな概念定義を s1 に与えることで，s1 ベクトルの和における新しい概念の中の概念イメージと，新しい概念の中の個人の概念定義が適合したと見ることができる。これらの分析から，s1 のベクトルの和の概念変化の様相は次の図 9 にまとめられる。

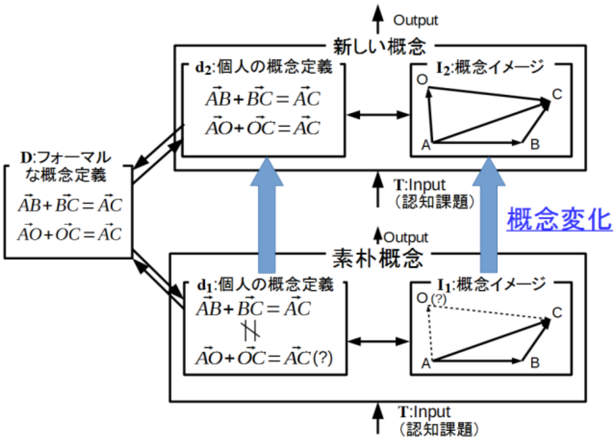



図 9：s1 に見られた概念変化の様相

本調査では，R がベクトルの和に関して，一般の四角形 ABCO を用いてベクトルの和を表現したことから，異なる経路のベクトルの和において，s1 の素朴概念から新しい概念への概念変化の様相を捉えることができた。

本研究における概念変化の捉えを基にした本調査の分析から，s1 のベクトルの和に関する概念変化の様相には次の 3 つの段階があることが明らかとなった。

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$は異なるものである。

②平行四辺形 ABCD では，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表すが，一般の四角形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものを表す。

③一般の四角形 ABCO において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

②の段階には「平行四辺形だとベクトルの和は成り立ち，一般の四角形だとベクトルの和は成り立たない」という認知的葛藤が生じるような素朴概念が表出し，ベクトルの和の概念変化には，認知的葛藤の起こる素朴概念を通して，新しい概念に推移することが認められた。

## 6．研究のまとめと今後の課題

ベクトル学習の困難性の要因の一つとして，ベクトルの視覚的表現に関わる部分を挙げた。

中原(1995)の具象的レベルの分類をすすめ，ベクトルの学習における具象的レベルは，図的表現によって表すことが非常に難しいことを述べた。そのため，ベクトルの学習を進める上で，ベクトルを表す視覚的表現が，一般性を含むものであるか，特殊性を含むものであるか，といった，図的表現の抽象性レベルが捉えづらいことが困難性の要因の一つとして同定することができた。

また，学習者の授業直後の対話から，「ベクトルの和」に関する概念変化の様相を捉えることができた。特に，学習者のベクトルの和に関する概念変化の様相には，次の 3 つの段階が有ることが明らかとなった。①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$は異なるものである。②平行四辺形 ABCD では，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表すが，一般の四角形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものを表す。③一般の四角形 ABCO において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

②の段階には「平行四辺形だとベクトルの和は成り立ち，一般の四角形だとベクトルの和は成り立たない」という認知的葛藤が生じるような素朴概念が表出し，ベクトルの和の概念変化には，学習者の持つ素朴概念が，認知的葛藤の起こる素朴概念を通して，新しい概念に推移することが認められた。

本研究は，数学 B「ベクトル」における概念形成過程に焦点を当てた。今後は，「ベクトル」の単元において今回作成した理論枠組みの，高等学校数学の内容全体における概念形成過程への適用可能性を検討し，高等学校数学における概念形成過程に関する研究を更に推進していきたい。

## 引用・参考文献


R. R. Skemp. 藤永保，銀林浩 訳（1973）.『数学学習の心理学』. 新曜社.

Tall, D. 磯田正美，岸本忠之監訳(2016).『数学的思考―人間の心と学び―』. 共立出版.

Tall, D. Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Difinition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity *Educational Studies in Mathematics* Volume 12, Issue 2, pp 151–169

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D, Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. pp.65 － 81. Dordrecht:KluwerAcademic Publishers.

Vosniadou, S. (1994). Universal and culture-specific properties of children's mental models of the earth. In L.A. Hieschfeld & S.A. Gelman (Eds.) , *Mapping the mind : Domain specificity in cognition and ulture* (pp.412-430) . New York : Cambridge University Press.

岡部浩司 他（2017）.『改訂版　高等学校　数学 B』. 数研出版

佐々木文弥（2018）.「数学 B「ベクトル」における概念変化に関する一考察」. 上越教育学研究, 33, 83-90.

白川嘉子（2005）.「高等学校数学におけるベクトルの理解に関する研究(2):有向線分，ベクトル，内積，位置ベクトル，直線のベクトル方程式についての実態調査」. 数学教育学論文発表会論文集, 38, 709-714.

真野祐輔（2010）.「算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究―「数」領域の展開を中心に―」. 広島大学. 学位論文(未公刊).

中原忠男（1995）.『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.

藤村宣之（2011）.「教授・学習活動を通じた数学的概念の変化」. 心理学評論,54,3,296-311.

山口潤一郎（1995）.「線形理論に関する基礎的研究―ベクトルの同値性に関する教育的考察―」. 数学教育論文発表会論文集, 28, 449-454