上　越　数　学　教　育　研　究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第　34　号

目　　次

2 0 1 9

上 越 教 育 大 学 数 学 教 室

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.1-12

数学=パターンの科学の考えに基づく授業デザイン

ー中学校１年「比例と反比例」の場合ー

布川　和彦　　　　　　青柳　潤
上越教育大学　上越教育大学附属中学校

１．はじめに

中学生の関数についての理解が十分でないとの指摘がなされて久しい。例えば、平成 30 年度全国学力・学習状況調査の数学 A 問題 9 では、比例 $y=5x$ について述べた 4 つの文から正しいものを 1 つ選ぶ問題であったが、正答である「x の値が 0 でないとき、y の値を x の値でわった商は、いつでも 5 である」を選ぶことができた生徒は 66.4%であった。平成 21 年度の調査では比例 $y=3x$ について同様の問題が出され、その正答率は 54.9%であったので、報告書でも「改善の傾向がみられる」としながらも、「引き続き課題がある」とされている。また同じ問題 9 では、反比例 $y=-6/x$ のグラフだけが提示され、４つの表の中からグラフに対応する表を選ぶ問題も出されており、その正答率は 53.3%であった。これについては、平成 26 年度に反比例 $y=6/x$ のグラフについて同様の問題が出されており、その正答率が 46.4%であったことから、やはり報告書は「改善の傾向がみられる」が「引き続き課題がある」としている。さらに問題 11 の 1 次関数 $y=-2x+6$ のグラフを 5 つの選択肢から選ぶ問題(正答率 57.0%)については、平成 19 年度の $y=-3x+2$ についての類題(正答率 60.4%)よりも正答率が下がっている。

ところで、小学校算数と中学校数学を比較したときに、どちらでも比例と反比例の学習をするという類似性がありながら、他方で、数学をパターンの科学とする立場(布川, 2013)からは、その扱い方に大きな違いがあるとの指摘もある。つまり、前者では「場面中の量に見られるパターンの記述に重点がある」のに対し、後者では「そのパターンを探求の対象とし，パターンの持つ性質を調べようと」する(布川, 2016a)。しかも、両者の違いが中学生の反応に影響を与えることを示唆する報告もなされている(林, 2001; 布川, 2018)。

中学校での学習のためには後者への移行が重要となるにも関わらず、現行の教科書ではその移行が必ずしも意図的に行われていない可能性もある(布川, 2019)。この中学校数学への移行を視野に入れた場合、上述の現状を改善するための 1 つの方向性として、必要とされる移行を明確にするとともに、パターンを探究するという移行後のディスコース (Sfard, 2008)と学習活動との整合性を図ることが考えられる。

そこで本稿は、パターンの科学の観点からの中学校数学への移行を意識的に採り入れ、また移行後のパターンの探究という立場をできるだけ維持するように中学校 1 年の比例・反比例の学習を構成した場合にどのようになるのか、その 1 つの可能性を提示することを目的とする。

２．授業デザインの背景

まずは、場面中のパターンを記述することからパターンを対象として探究することへの移行という観点から、現行の指導を概観して

みる。

小学校 6 年における比例・反比例の学習では、基本的に日常の変化を伴った場面や図形の辺の長さなどが変化する場面が提示され、そこに含まれる 2 つの量について表に整理するなどして探究する。そして、それらの変化の仕方や両者の関係に見られるパターンを見出し、その特徴を比例や反比例として記述する。y=決まった数×x と書けることやグラフが直線になることも、具体的場面中の数量間の関係を記述するものとなっている。

中学校 1 年では [1]、最初に関数について学習するが、その際には算数と同様、具体的場面が提示され、そこに含まれる 2 量を探究する中で、一方の値が決まるとそれに対応して他方の値が決まるという関係に着目していき、それを基に関数が定義される。またその後の問題では、いくつかの具体的場面に含まれる 2 量が指定され、一方が他方の関数と言えるかを判断することが基本的に行われる。つまり、具体的場面の 2 量間に見られるある種の特徴を関数として記述している。

比例の学習においても 1 社を除いては、最初に具体的場面が提示され、そこに含まれる 2 量の変化の仕方やそれらの関係についての特徴を見出した上で、そのうちの 1 つの特徴を用いて比例が定義される。その後の問題で比例かどうかを判断する際にも具体的場面に含まれる 2 量が取り上げられることがほとんどであり、また x の変域が負の数の範囲に拡張される際にも具体的場面をもとに拡張が説明される。この段階までは、中学校数学であっても場面中のパターンを記述する活動が主として行われている。

続く比例の比例定数を負の数に拡張する段階になって、4 社の教科書では具体的場面が提示されず、式だけから表を作成して、その特徴を考えるようになっている。しかし他の 3 社では水が減る、あるいは電車が逆方向に走るといった場面を提示し、その変化を記述することから比例定数が負になることを説明している。この後、5 社は 1 組の x, y の値から比例の式を求める学習をし、さらに比例のグラフに進むが、ここまで来ると具体的場面を伴わずに新たな内容が導入される。ただし問題では具体的場面を扱うものが 5 社中 2 社ある。これら 5 社以外の 2 社はグラフの学習を先にし、その後、式を求める学習をするが、グラフの学習では場面を伴わないものの、式を求める学習では、1 社は具体的場面を伴って導入がなされ、もう 1 社は場面なしで導入した後に、問題で自動車の燃費を扱っている。

反比例の学習では、小単元冒頭で反比例を導入する際には、面積一定の長方形の縦の長さ x cm と横の長さ y cm のような場面が提示されるが、変域の負の数への拡張、比例定数の負の数への拡張、反比例のグラフは、具体的場面は提示されずに導入される [2]。なお 1 組の x, y の値から反比例の式を求める学習では、1 社が面積 6 cm^2 の長方形という場面を最初に提示し、その後に $y=6/x$ を取り上げている。また 2 社は場面を伴わずに導入をした後の問題で、水を入れる速さや時速とかかる時間の関係を取り上げている。

以上より、中学校 1 年の関数単元においては、関数および比例の定義、比例の x の変域の拡張までは具体的場面を伴って導入され、その後、負の比例定数については場面を伴わずに導入する教科書が現れ、比例の式を求める学習とグラフの学習では基本的に場面を伴わずに導入が行われる。反比例の学習では、定義は具体的場面を伴って導入が行われるが、x の変域を拡張する学習以降は、基本的に場面を伴わずにそれぞれ導入される。反比例の冒頭で場面が一時的に用いられるものの、比例の比例定数の拡張から式を求める学習のあたりで、場面を対象とし、そのパターンを記述するディスコースから、パターンを対象としたディスコースへの移行が期待されていると見ることができる。

ただしその移行部分を見てみると、特にそうした移行を示唆する説明はなく、ある時点で場面を伴わずに式だけを提示して比例を考えさせるようになる。また場面を伴わずに比例を導入していた1社が、次の x の変域の拡張では人が走る場面を用いて導入をしたり、式を求める学習よりも比例のグラフを先に学習する教科書でも、式を求める学習の際に水槽に水を入れる場面から学習を始めるものがあったりと、全面的には移行しない展開の仕方も見られる。こうした展開の仕方は、上述したディスコースの移行を曖昧にすることにつながるとも考えられる。

３．移行の明示化

前節で見てきた現行の教科書における展開の特徴を考慮した場合、パターンの科学という視点からの授業デザインで必要な点として、ディスコースの移行を生徒にも明確にすることが考えられる。これは、これまで対象としていなかったものを新たに対象とすることは意図的に行われる必要があるとの指摘がなされていることによるものである。

Dörfler (2002)は数学の指導において、探求の対象についての移行が生じても、それが暗黙的にしか示されないことが多いとし，次のように述べている：「学習者はある段階で、何かを対象自体として考えると決定しなければならないこと、そしてあたかも1つの統合された全体であるかのようにその何かを扱い、用い、考えるという意図を持たねばならない」(p. 340)。そしてそうした視点を採用するという意思決定が必要であり、教師は「この意思決定が理に適っていて、[生徒にとって]もっともらしく見えるようにする」ことも重要である(p. 346)としている。

こうした指摘に基づいて移行を明確化することを考えると、比例について1組の x, y の値から比例の式を求める学習やグラフの学習を始める以前に、比例の学習における対象が、算数の時のような具体的場面から、式で規定される変数間のパターンへと移行したことを、明確に生徒に説明をする必要が出てくる。さらに、その移行が「もっともらしく見えるようにする」ことも必要となる。

この観点から数学での比例の定義を見直してみると、算数での比例の定義が共変性の特徴に基づくものであったのに対し、数学での比例の定義は関数的関係の特徴に基づくものとなっている。そこで、数学で行われる移行の妥当性を、比例を関数として捉え直すこと、つまり x の値に対して対応する y の値がどのように決まるかに着目して捉えることに求めることが考えられる[3)]。すると今度は、算数でのともなって変わる量という視点から、数学の関数という視点への移行の「もっともらしさ」が必要となる。これについては、例えば、定数関数や階段関数のように、ともなって変わるとは限らない場合を含む2量の関係も、併せて扱うことができることがあろう。0を数に含めることで何もない場合も数を用いて表すことができるようになるのと似ている。また、適当な対応のルールにより自由に関数を構成できる点も、関数の利点とも言える。ともなって変わる量の場合には、その変化を体現する具体的場面がないと、「ともなって」いることが明確でなく、規定がしにくいが、2変数の対応のきまりであれば、具体的場面を必要とせず、適当なきまりを設定して自由に規定することがしやすい。

以上の点を考慮すると、単元最初の関数の学習の段階で、まずともなって変わる量の視点から関数の視点に移行することを意図的に行い、それを利用して、比例については関数として捉え直すことを意図的に行う中で、$y=ax$ という式により比例を定義すること、そしてこの式で規定される2変数間のパターンを対象とすることを説明し、今後はそれを「扱い、用い、考える」という意思決定を学習の一環として行うことが、パターンを対象とす

るディスコースへの移行を明確化する、１つの方策と考えられる。

なお2社の教科書では、比例を導入する直前の部分で、具体的場面を考えた後に、具体的場面を伴わずに $y=3x$ や $y=5x$ の式だけを提示して表を完成させている。また1社は比例の学習の最初で、場面を伴わずに2変数の表だけを提示し、その関係を $y=3x$ の式で表し、比例の定義を行っている。これらの教科書での扱い方を見ると、比例を導入する段階でも、式により規定されるパターンを探究することへの移行が可能であることが示唆される。

この段階で移行を明示化することは、比例の定義に見られる差異とも整合する。算数での定義は共変性に基づくだけでなく、それは「ともなって変わる2つの量 x と y」について述べられている。これに対し、中学校1年で比例と反比例を定義する際には、「変数 x, y の間」の関係として述べられる。量が通常、現象、物体または物質の属性とされるとすれば、算数での比例や反比例は現象、物体、物質のある量の変化の仕方を記述したものとなる。これに対し、変数は「いろいろな値をとる文字」であるから、比例や反比例はいろいろな値をとる文字と文字の間の関係ということになり、2文字のそれぞれがとる値の間の関係となる。その関係が場面等で規定されていない場合には、その関係は $y=ax$ や $y=a/x$ の式により規定されると考えられよう。このように定義の中の差異も、量に見られるパターンの記述から、式により規定される2変数間のパターンを対象とすることへの移行を含んでおり、この段階で移行を試みることと整合することになる。

４．比例・反比例の性質のパターンの性質としての扱い

パターンの科学という視点から必要なことの二つ目として、新たな対象について探究するというディスコースを生徒にも明確化することが考えられる。そのためには、学習内容をできるだけ、式により規定される変数間のパターンを対象とした探究として扱うことが必要となる。これにより、パターンを対象としたディスコースのルーチンやナラティブが生徒にとって明確化され、このディスコースへの生徒の参加を促すことで、学習のパラドクス(布川, 2016b)を解消することにつながると期待される。

比例と反比例の学習では比例と反比例の諸性質が扱われる。式により規定される変数間のパターンを対象とするディスコースにおいて考えるならば、それらの性質はこのパターンの性質として扱われなければならない。したがって、それらの性質が成り立つことは、パターンを規定する $y=ax$ と $y=a/x$ という式から説明される方が適切であると考えられる。

教科書では比例の関係にある2量を含む具体的場面を提示し、2量についての表を作った上で、それぞれの対応する x と y の値について y/x の値を調べることを通して、y/x の値が一定になることを見出させている。これは場面中の数量関係の特徴として、比例の1つの性質を見出していることになる。これに対し、式だけが提示された時に、この式から表を作り、その表で今の性質を確認した場合には、この性質は式で規定されたパターンの持つ性質として見えやすくなる。したがって、表が式で規定されたパターンの表現であることを生徒に対して明確にする方が、パターンを対象としたディスコースとしての一貫性が生徒に感じられやすくなると考えられる。

パターンの性質であることをさらに直接的に扱うとすれば、比例という変数間のパターンを規定する式である $y=ax$ から今の性質を示すことが考えられる。すなわち、$x\neq0$ のときにこの式の両辺を x で割ることにより $y/x=a$ となるので、ここから y/x の値が一定であることを示すというやり方である。これにより、今の性質がパターンの持つ性質であることが、

より明確になる。

比例の定義が$y=ax$の式により述べられるようになったことから、算数における比例の定義であった「xの値が2倍、3倍、…になるとyの値も2倍、3倍、…になる」は、中学校1年の学習においては比例の性質として扱われていると考えられる。教科書ではやはり具体的場面に関わり作った表において値の対応を調べることを通して、この性質が成り立つことを確認している。この場合も、表を式から作り、変数間のパターンの表現であることを明確にすることが、今の性質がやはりパターンの持つ性質であることを明確にする1つの方策となる。

さらにパターンという対象の持つ性質としてこの性質を扱うことを考えると、パターンを規定する式である$y=ax$からこの性質を示すことになろう。例えばxの値がk倍になることをkxと表し、このときのyの値を計算すると、$a(kx)=k(ax)$となる。これはkxに対応するyの値がxに対応するyの値axのk倍であることを示しており、上の性質がパターンを規定する式から導出されたことになる[4)]。

ただ、$a(kx)=k(ax)$という式の解釈が中学校1年生には困難であるとも考えられる。その場合には、算数で学習した大きさの等しい分数やわり算のきまりを用いて示すこともできる。つまり、比例では$y/x=a$ (一定) あるいは$y \div x=a$ (一定) となることが既に示されているとすると、xの値がk倍になった際に分数y/xの値や商$y \div x$が一定となることから、yの値もk倍になるはずであるとわかる。パターンを規定する式$y=ax$から導出された$y/x=a$ (一定) や$y \div x=a$ (一定) を経由する形にはなるが、今の性質をパターンの性質として扱うことが可能になる。

なお教科書ではとりあげられないが、比例においてxの値が1増えるとyの値が比例定数分だけ増えるという性質も、$a(x+1)=ax+a$によりパターンを規定する式から示すことが考えられる。

反比例については第2節で見たように、その導入以外では具体的場面を伴わずに学習内容が導入されるが、反比例についての同様の性質は反比例の導入部で一緒に扱われるので、比例と同様の扱いとなっている。したがって、上で比例について述べたことは、反比例についても同様に考えることができる。

このように、具体的場面における比例や反比例の関係にある量について調べる中で比例と反比例の性質を見出すのではなく、比例と反比例というパターンを規定する式から性質を導くことにより、パターンを探究の対象とすることが維持され、またその性質をパターンに基いて説明することが受容されるナラティブであるようなディスコースが維持される。これにより、比例や反比例の学習がそのディスコースにおける活動として捉えやすくなるものと期待される。

5．変域および比例定数の拡張

パターンを対象として探究するというディスコースを明確化するという点からは、xの変域および比例定数を負の数へ拡張する場合にも、パターンを規定する式を基本とし、その拡張の試みと捉える方が、ディスコースとしての一貫性を保つことができる。

上でも述べたように、反比例の学習においては、変域を負の数の範囲に拡張する場合も、比例定数を負の数へ拡張する場合も、具体的場面は提示されず、式だけが示された上でそこから表を作り、反比例の性質が正の数の場合と同様に成り立つことを確認するようになっている。こうした導入になっているのは、変数yが変数xに反比例し、しかもxの値が負になるような具体的場面や、比例定数が負になる具体的場面として適切なものが見つけにくいこともあるであろうが、結果として、$y=a/x$という式で規定されるパターンについて、xやaの値を形式的に負の範囲に拡張し

た場合にどのようなことが起こるかを探究する活動になっている。したがって、反比例の x の変域および比例定数を拡張することの学習については、現行の教科書の扱い方をそのまま援用できる。

また比例についても比例定数を負の数に拡張することの学習では、第２節で見たように 4 社の教科書では具体的場面を提示せずに、反比例の場合と同様、形式的に比例定数が負の場合を導入している。したがって、これらの教科書の扱い方を援用することで、式により規定される変数間のパターンを対象とするディスコースと整合した形で、比例定数を負の数に拡張できる。

これに対し比例の x の変域を負の数の範囲に拡張することの学習では、すべての教科書で具体的場面を提示し、x で表される数量が負の値になる場合を考える中で、x の値が負になることを導入している。ただし、3 社は比例自体を導入する際に x の値が負になることを一緒に扱っている。これに対し他の 4 社では、x の値が正である場合だけを扱って比例を導入し、その後、改めて x の値が負になる場合を探求する展開になっている。

この後者の展開を採用し、なおかつ第３節で論じてきたように、比例の導入時に式で規定されるパターンを対象とするディスコースへの移行を明示するとすれば、これ以降に行われる学習は、新たなディスコースと整合的であることが望ましいので、反比例の場合と同様の扱いをして、x の変域を負の数の範囲に拡張することになろう。これは、次のような啓林館昭和 43 年版の説明と同様の方針となる：「比例して変わる数 x, y は、実際の量では、ふつう正の値をとるが、$y=ax$ という式では、負の値も考えることができる。そこで、これからは、x, y が負の値をとる場合もふくめて、$y=ax$ の関係があるとき、y は x に比例するということにする」(2 年 p. 79)。この教科書の場合、直前では x が正の値だけになる具体的場面を用いて比例の式を提示し、次に x が 3 の時 y が 8 である x と y の関係を式で書かせ、それから上の説明がなされている。

この説明は、量の記述では正の値に制限されるのに対し、式だけを見れば負の数も自由に考えることができるとしており、式で規定されるパターンを対象としたディスコースの中で負の数へ拡張することを、生徒にも明確に宣言したものと言える。

以上のことから、パターンを対象とするディスコースとしての整合性を考慮した場合には、具体的場面の探求から比例の式を見出し、それをもとに式で規定される 2 変数間のパターンとして比例を定義した後は、x の変域および比例定数の負の数への拡張は、形式的に行うという方法の方が、整合性は保たれやすいと考えられる。

６．具体的場面を代替する事象としての提示

式で規定されるパターンを対象とするディスコースとしての整合性を重視した結果として、第３節から第５節で述べた展開の仕方では、式に基づく形式的な扱いが多くなってしまっている。特に関数的関係を表現した式に基づくことにより、具体的場面を用いた際には 2 量の連動した変化として自然に現れていたともなって変わるという共変性が、生徒に見えにくくなるという危険性が考えられる。

この点を補うために、式で規定されるパターンを動的[5)]に提示することで、パターンの持つ変化の側面や共変性を生徒が捉えやすくすることが、１つの支援のあり方となる。例えば図１は比例を定義し、また定義の式で規定されるパターンを対象とすることを生徒に説明した後で使うことを想定した動的教材であり、GeoGebra で作成されている。

ここでは下段の点 A を数直線上に沿って動かすと x の値が変わり、それに伴って y の値や点 B の位置が式に基づいて変わる。具体的場面を伴わないものの、ある種の「現象」ら

しく生徒に提示する試みである。これにより

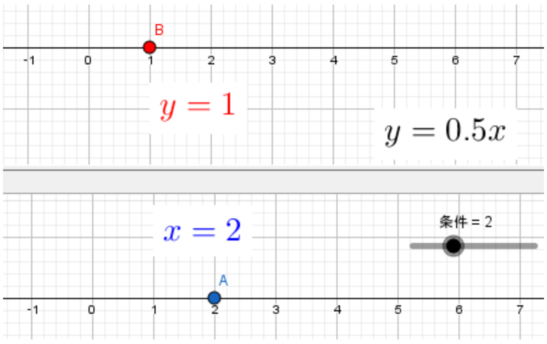


図 1: 式が規定するパターンの提示

y=ax という式の持つ変化の側面を見えやすくし、対応や関数的関係による比例の規定と、そこから派生する変化や共変性の側面が、統合された形 (布川, 2010) で扱われることになる。また右の「条件」スライダーにより比例定数を変えることができ、それにより y の値や点 B の位置の決まり方も変わることで、比例定数 a がパターンの特性を決める因子であること、a の値に応じて異なるパターンが得られることを感得しやすくすると期待される。

また図 1 にあるように、数直線上で点 A を動かして x の値を制御すると、正負の数の学習との関連で、数直線は負の数の範囲も含むものとなり、点 A を動かす中で自然に負の数についても扱われることになる。つまり、x の変域を負の数に拡張することが、式で規定されるパターンの感じをつかむ活動の中で、自然に生じることになる。

さらに比例定数を決めるスライダーに負の数も含めた場合には、比例定数を負の範囲に拡張することも同様に扱うことができる。その場合、比例定数が正の値の場合と負の値の場合の点 B の位置の決まり方を観察することで、比例定数の影響を感じることができるとともに、そもそも比例定数が負の値になっても 2 変数間のパターンを同様に考えていくことができるとの理解を支えることになると考えられる。

なお、図 1 では 2 本の数直線を上下に平行に並べているが、小学校 6 年での学習を前提とするならば、この時点で 2 本の数直線を直交するように提示することも考えられる(図 2)。座標の学習の前であっても、平面上の 1 点により x と y の対応を表すことまでは含めず、それぞれの数直線上の点により x と y の値を表すと想定すれば、そこに現れる「現象」を図 1 と同様に解釈することはこの段階の生徒にも可能であると考えられる。

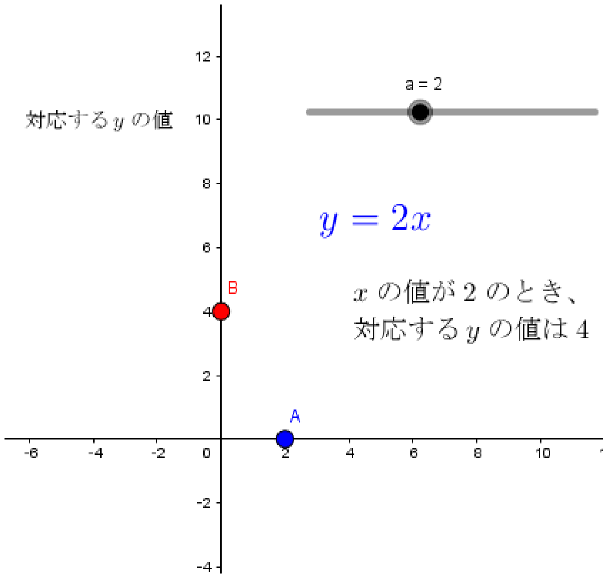
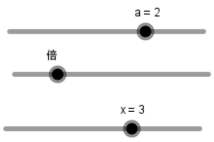


図 2: 数直線を垂直に配置した提示

比例の性質についても同様に、動的側面を採り入れることで、式との関係を表を媒介せずに提示することもできる。例えば図 3 は「x の値が 2 倍、3 倍、…になると y の値も 2 倍、3 倍、…になる」の性質について、第 4 節で述べた $a(kx)=k(ax)$の関係をもとにした式による説明を、動的側面を採り入れ、数を擬変数として捉えやすくした数式により示す教材である。スライダーにより比例定数、倍、x の値を変更することができるが、倍の値を固定して x の値を変えたときのようすを観察することで、x の値によらずに同様の関係が成り立つことが理解しやすくなる。逆に x の値を固定して倍の値を変えることで、倍の値が異なっても同様の関係が成り立つことを確認しやすくなる。これらの観察を通して、式によりこの性質を示す際に最も重要となる $a(kx)=k(ax)$という関係についての理解を支援

することを意図したものである。



比例 $y = 2x$ では、
$x = 3$のときの yの値は2×3で
求まるので $y = 6$である。
今、xの値を $\frac{1}{4}$倍すると、$3 \times \frac{1}{4}$になるが、
このときの yの値は、

$$2 \times (3 \times \frac{1}{4}) = (2 \times 3) \times \frac{1}{4}$$

となるので、yの値も $\frac{1}{4}$倍になる。

図 3: 比例の式と性質の関係の提示

このように、パターンを対象とすることを明確にするために式をもとにして考える場合、新しい内容を導入する際に具体的場面をできるだけ用いないことによる問題点を緩和する一つの手立てとして、動的提示により、式に潜在的に含まれる変化や共変性に関わる側面を明示化することが考えられる。

7．パターンの表現としてのグラフ

現行の教科書において比例のグラフが導入される際には、まず y=2x といった式が提示され、その式から表を作り、表の対応する x, y の値をそれぞれ x 座標、y 座標とする点を座標軸のはいった平面上にとることで、グラフを作成している。具体的場面を伴わずに式だけをもとに表、グラフを作成しており、式により規定されるパターンを対象とするディスコースにおける活動と見ることができる。また、提示されたグラフから比例の式を求める学習は、グラフから比例の式が復元できることを確認することにもなっている。

パターンを対象とするディスコースの観点から考えた場合、グラフは対象であるパターンの表現である。そして、グラフをかく目的はこのパターンを探究することになろう。したがって、グラフをかくというルーチンを経て見出すことのできた比例や反比例というパターンの特徴について語ることは、パターンを対象とするディスコースにおけるナラティブと言える。その点では、グラフの特徴について語ることと、グラフから見出される比例や反比例の特徴について語ることとは、表現についての語りと対象について語りとして区別されるべきであろう。その上で、グラフの特徴から見出される比例や反比例の特徴について語ることが重視される必要がある。

グラフがパターンを表現していることから、グラフが与えられればそれによりパターンも規定されることになる。上述したグラフから式を求めることは、このパターンを求めることにもなる。しかしグラフ上の点が x の値と y の値の対応を表現していることから、直線が 1 本引かれたり、双曲線が 1 組引かれたときに、単に比例定数を求めることができるというだけでなく、すべての x の値についてその対応する y の値が確定したこと、つまり 2 変数間のパターンが規定されたと考えることは、グラフがパターンの表現であることをより明確にした考え方と言える。

グラフが直線や双曲線になることは、現行の教科書では点のとり方を徐々に密にすることで示し、その後、x の値が増加したときの y の値の増減についてグラフ上で考えさせている。しかし、変化の仕方もパターンの特徴であるとするならば、パターンを規定する式に潜在的に含まれていた変化の仕方をグラフにより顕在化できることを強調した提示をすることが、パターンを対象とするディスコースには適した提示と言えよう。

例えば図 3 の教材では、x 軸上の点 P を正の方向に移動させると、対応する y 軸上の点 Q とそこから派生する平面上の点 R とが伴って移動する。ここで点 R の残像が残るように設定しているので、点 R が移動するにつれて半直線が画面上に現れる。このように直線が画面の左から右に向かって徐々に現れていくという仕方で、変化を強調するように動的に

グラフを提示するものである。図 2 により 2 変数の対応を観察した経験は、図 3 の理解を支える可能性がある。また点 P と点 Q も併せて提示することは、グラフと x, y の値の変化とを関連づけて観察する機会も提供する。

このような提示は関数のグラフをスキャンする手続き (procedures of scanning, Sfard, 2008, p. 134) を示唆することにもなる。利用される視覚的媒介物についてのスキャンする手続きもディスコースの要素であるならば、この手続きを示唆するグラフの提示の仕方の方が、本稿で考えているディスコースとの整合性という意味では、好ましいと考えられる。

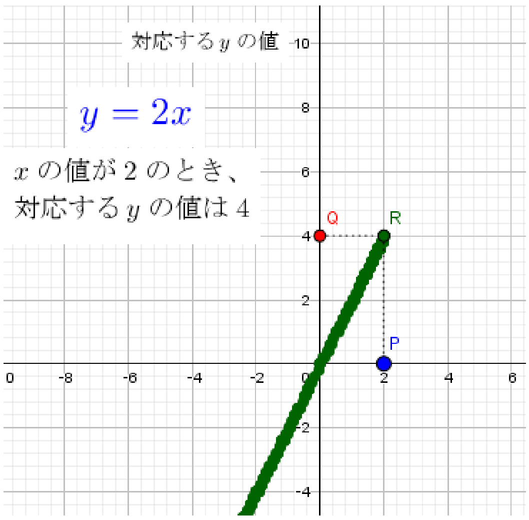


図 4: 比例のグラフの動的な提示

なお比例のグラフが直線になるといったグラフの特徴も、パターンの性質から生じたものとして説明できる方が、パターンを対象とするディスコースと整合する。これについて比例や反比例の性質のときと同様に考えるならば、グラフの特徴もパターンを規定する式から説明することが、今のディスコースとの整合性が見えやすい。例えば、比例の式から比例のグラフが直線になることを説明する (布川, 2015, p. 9)[6] ようなナラティブである。しかしそうした式からの説明が生徒にとって困難であれば、グラフをかくために作る表が式から作られたことを意識させ続けたり、式への値の代入から直接、グラフに点をプロットしたりすることで、点の集合により作られた線が式により規定されたパターンの表現であり、その形状の特徴も式に依拠するものであると理解しやすくすることが考えられる。

８．関数の活用の問題

関数単元の活用の学習は、方程式の学習に比べて、数学的モデル化の過程が捉えにくい場合が多い (布川, 2014)。こうした過程を明確にし、数学的モデル化過程における関数の役割が生徒に見えやすくするためには、場面と関数とを区別することが必要とも考えられる (布川, 2014; 布川(2011)の図 6 も参照)。

式で規定されるパターンを対象とし、それを探究するようなディスコースと関数の学習との整合性を図ることは、この具体的場面との区別を促す試みとなっている。

活用より以前の学習は、パターンを対象とするディスコースという意味で、パターンを探究し、その性質を見出したり、それに関わるルーチンを確立することとして特徴づけられる。このパターンに関する知識や手法は、数学的モデル化過程の数学的処理の部分を担い、数学的モデルに関わる新たな情報を生成することを可能とし、結果として数学的モデルで記述される場面についての情報を得ることにつながる。つまり、比例や反比例の学習を、式で規定されるパターンを探究する活動として位置づけることは、それらの活用と矛盾しないだけでなく、むしろ活用の際の数学的モデル化過程を明確化し、関数の役割を生徒に見えやすくすることになる。具体的場面の利用を意図的に控えることが、結果として比例や反比例を具体的場面に適用するようすを見えやすくするのだとも言えよう。

９．変数の対象レベル化

第 6 節では具体的場面を代替するものとして、動的な提示によりパターンの変化の側面を生徒に見えやすくすることを提案した。式

をこうした動的イメージと関連させる際には比例や反比例の変数 x にいろいろな値が順に代入されていくことを、生徒が十分理解している必要がある。また、第４節で述べたような、比例や反比例の性質をパターンを規定する式から説明しようとする際、式変形だけの説明が生徒にとって理解しにくい場合は、式から表を作成し、そこで性質を見出したり確認したりする必要があるが、その際、式で規定されるパターンを対象としていることが維持されるためには、表を作成することが式中の変数 x にいろいろな値を代入し、対応する y の値を求めていることとして、生徒に意識されている必要がある。

このように、パターンを対象とし、それを規定する式を中心に考える場合、特にその変化や共変性の特徴を探究する場合には、生徒が変数 x にいろいろな値が代入されるというイメージを持つことは重要であり、いろいろな値を代入する行為は式で規定されるパターンを対象とするディスコースでのルーチンと考えられる。変数を表す文字 x が、その背後に常に想定されるべき数の集合(真野, 2011)を反映せず、表記を見てもその特徴が現れていないという意味で暗黙的シンボル (tacit symbol, Harel & Kaput, 1991) として用いられるとすれば、背後の数の集合を想定し、その要素が次々に代入されるという変数の特徴は利用者によって補完されねばならない。利用者が「区間に属する任意の数値を与えようと欲する」(高木, 1938/1980, p. 17) 必要がある。

具体的場面を探究し、そこで見出されたパターンを記述する学習では、場面中の変化に伴い、ある量のいろいろな状態が生じ、そこからその量の値として変数のいろいろな値も派生する。しかし、パターンを対象とした学習では、変数自体も代入という操作の対象となる対象レベル(object-level, Oldenburg, 2015)で扱われることになる (布川, 2019)。したがって、比例や反比例の学習がパターンを対象としたディスコースで成立することは、変数の理解との係わりで検討される必要がある。

なお、式中の変数 x にいろいろな値を代入し、それに対応する y の値を求めることは、二重性の観点からは、操作的な捉え方に当たる(Sfard, 1992)。また二重性の議論では、関数についても構造的な捉え方への移行が問題にされることが多い(Slavit, 1997)。しかし Sfard (1992)も指摘するように、数学的対象が操作的な起源を持つとするならば、関数を学習し始めた初学者に対しては、操作的捉え方の状態で関数について十分に経験することが重要と考えられる。パターンを対象としたディスコースの中で、変数にいろいろな値を代入することは、操作的な捉え方のレベルで関数について経験する機会を提供することになり、したがって、後の構造的な捉え方への移行のための素地になりうる。その際、第６節で述べた動的な提示は、代入による計算手続きの圧縮化ともなっており、構造的な捉え方への移行を促す可能性も考えられよう。

10．おわりに

布川 (2015) は関数が思考の対象として成立しやすくなることを目指した教科書試案を提案しており、その際、関数について次のような定義をしている：「『変数 x の値を決めると変数 y の値が１つ決まる』と考えているとき、『y は x の関数 (function)である』といいます。つまりここでは、別の変数 x により決まる変数 y を関数と呼びます」(p. 4)。本稿で述べてきたことは、この変数 x により決まる変数 y が、$y=ax$ や $y=a/x$ というパターンにより決まる場合、あるいは変数 y がそうしたパターンを内的構造として持つ場合と言え、そこで必要とされた、関数の性質を「式に戻って考えて」(p. 8)みることや、グラフの特徴を式と関連づけて扱うことになっていた。

こうした扱い方は Nachlieli & Tabach (2012) の提案する低いレベルのディスコース (lowerlevel discourses)から関数のディスコース (the discourse on functions)への移行を促すという展開とは異なる。そこでの低いレベルのディスコースは関数の式やグラフ、表が対象にはなっても関数が対象になっていないような活動を指している。しかし本稿で述べてきたことは、式やグラフが関数の表現であることをより明確にして生徒に提示することであり、表現される対象としての関数を想定することになっていた。

この点で本稿の提案はむしろ、比例や反比例に関わり model-of のレベルから model-for のレベルへの移行 (Gravemeijer, 1997) を意図したものと見ることができる。すなわち、具体的場面のモデルとして比例や反比例を扱う算数での model-of の経験を生かし、中学校ではそのモデルが独立した存在となり、数学的推論のためのモデルとなるような model-for のレベルに移行し、後のよりフォーマルな扱いに備えるのである。

ただし、そうした扱い方をする場合、パターンが式により規定されている以上、どうしても式を重視した展開になる。本稿ではそれを補うために、作図ツールを利用した動的な提示をできるだけ用いることを併せて提案した。しかしそれにより、実際に中学校 1 年生が活動することができるかについては、今後、検討していく必要がある。

謝辞：model-of/model-for の議論との類似性については、お茶の水女子大学附属中学校の藤原大樹先生よりご示唆を頂きました。ここに記してお礼申し上げます。本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：16K00954）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 中学校の教科書は平成 28 年度版を利用している。

2) ただし 1 社は、$y=12/x$ について考えるとしながら、その横に面積が 12 の様々な長方形がかかれた図が載せられてはいる。

3) 算数の比例の定義にあらわれる「x の値が 2 倍、3 倍、･･･になると、y の値も 2 倍、3 倍、･･･になる」という条件も、例えば $y=f(x), f(rx)=rf(x)$ ($r \in \mathbb{Q}$)と表現するならば、２変量の間のある種のパターンとして式で表せる。したがって、$y=ax$ とパターンを簡潔に表現できることは、中学校の定義の利点ではあるが、これを移行を「もっともらしく見えるようにする」決定的な要因であるとは考えないでおく。

4) 大阪書籍の昭和 43 年版中学校 2 年の教科書では、x の値が a、$2a$、$3a$、pa の時の $y=kx$ の値を表に整理して、同様の説明でこの性質を説明している (p. 122)。

5) ここでの「動的」は各 x が関数により対応する y の値に成るというような「関数の動的側面」(Eisenberg, 1991)とともに、それにより y の値が次々に生まれ、ある種の変化を作り出していくような側面の双方を念頭に置いている。次ページで述べる関数的関係と共変性が統合された動きである。

6) 比例のグラフが「直線」になることについては、比例の式と小学校 6 年で学習する図形の拡大・縮小をもとに説明することは可能である。実際、学校図書の昭和 34 年版中学校 3 年の教科書では直角三角形の相似を利用してグラフが直線になることを説明している (p. 15)。反比例のグラフが「双曲線」になることを式をもとに示すことは、双曲線の定義の関係もあり、これよりは容易ではない。

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, *4* (4), 337-350.

Gravemeijer, K. (1997). Mediating between concrete and abstract. In T. Nunes, & P. Bryant (Eds.), *Learning and teaching mathematics: An international perspective* (pp. 315–345). Hove,

England: Psychology Press.
林 弘. (2001). 一次関数における学習過程に関する考察：事象からモデルを構成する活動を重視した教授実験を通して. 上越数学教育研究, *16*, 81-90.
Eisenberg, T. (1991). Functions and associated learning difficulties. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 140-152). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Harel, G. & Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities and their symbols in building advanced mathematical concepts. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51/52*, 10-27.
布川和彦. (2010). 数量関係の学習と背後の現象や共変性の意識化. 上越数学教育研究, *25*, 1-10.
布川和彦. (2011). 関数的内容の学習におけるきまりの関連づけと対象の構成. 上越数学教育研究, *26*, 1–12.
布川和彦. (2013). 「数学：パターンの科学」の捉え方と学校数学の関係の検討. 上越教育大学研究紀要, *32*, 169–180.
布川和彦. (2014). 中学校数学における関数の対象としての構成(2) ：教科書の利用場面に焦点を当てて. 上越数学教育研究, *29*, 1–12.
布川和彦. (2015). 関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案. 上越数学教育研究, *30*, 1–12.
布川和彦. (2016a). 「数学=パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察. 日本数学教育学会誌, *98* (4), 3–14.
布川和彦. (2016b). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *4*, 49–56.
布川和彦. (2018). 具体的場面の数量関係と学習の対象としての関数. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, *6*, 105-112.
布川和彦. (2019). メタレベルと対象レベルの観点から見た学校数学における文字の利用. 上越教育大学研究紀要, *38* (2), 309-320.
Oldenburg, R. (2015). Algebra at the meta and the object level. *Turkish Journal of Computer and Mathematics Education*, *6* (3), 366-379.
Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), T*he concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 59–84). Mathematical Association of America.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
真野祐輔. (2011). 変数性に関する概念変容の数学史的背景：擬変数の機能の考察を中心に. 数学教育研究(大阪教育大学), *40*, 71–87.
Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (3), 259-281.
高木貞治. (1938/1980). 解析概論. 岩波書店.

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.13-22

中等教育におけるユークリッド幾何学の受容

－明治前期の代表的な幾何学教科書に着目して－

伊達文治
上越教育大学

1．はじめに

本研究は，日本の数学教育が形をなす時代の数学および数学教育の様態を，中等教育の数学内容に関わる西洋数学受容に焦点を当てて,明らかにしようとする取組の一環である。本稿は，明治前期の代表的な幾何学教科書に着目して，中等教育におけるユークリッド幾何学受容をその内実にまで掘り下げようとするものである。そのために，まず『幾何原本』が幾何学受容にどの様な影響を与えたかを確認する。次に，明治前期において幾何学教科書がどのように編纂されていったか，その系譜を捉えて幾何学受容の様態と経緯を整理していく。翻訳ではなく日本人によって日本語で書かれた最初の幾何学教科書である『初等幾何学教科書』(菊池,1888)の完成をもって，中等教育におけるユークリッド幾何学受容とみなすことができるが，その書の基にされた『平面幾何学教授条目』(菊池訳，1987）を中心に内容的検討を加え，その書の完成を可能にした背景と要因を浮き彫りにしていく。本稿は,『初等幾何学教科書』の内容の研究に本格的に取り掛かるための基盤を培うことを一つのねらいとして取り組んだものである。

わが国に定着している「幾何」という語は,『幾何原本』前六巻(1607)という中国の書物の名に由来する。『幾何原本』前六巻(1607)は，マテオ・リッチの口訳と徐光啓の筆受によってユークリッド『原論』の漢訳本として生まれ,中国においては「幾何(いくばく)？」という問いに答えるための量の技術の基礎理論として受け入れられた。その後,『数理精蘊』(1723)本の『幾何原本』と『幾何原本』後九巻(1857)を加えた全十五巻が編纂されたが，幾何学とは量の技術であるという中国人の捉え方は変わらず，中国は清末に至ってもユークリッド幾何学を真に受容することはできなかったと考えられる。江戸時代の日本の数学（和算）も中国の数学と同様，量の技術即ち算術であった。当時の日本人や中国人に決定的に欠如していたのは，演繹的思考であり，論証の精神であった。これらの日本人の思考様式が，ユークリッド幾何学の理解を妨げた大きな要因として考えられる。日本の数学者がユークリッド幾何学に接したとき，彼らにとって論証の幾何学としてのその意味を理解することは大きな困難であった。それ故,『幾何原本』は数回に亘る輸入にも拘わらず幕末に至るまで日本に影響を及ぼすことは少なかった。西洋数学の導入が盛んになる幕末から明治初期にかけ，西洋の幾何学を受容していく過程において『幾何原本』は強く影響を及ぼし，大きな役割を担うことになる。ユークリッド幾何学受容の初期様相をよく表すとみられる『測地略』「幾何学」の部には，命題を一般的に記述することとそうすることによる体系化における意義の理解，ユークリッド幾何学の体系化の根幹に関わる「公準（要請）」や「作図題」の認識の困難性及び命題の流れに対する理解等に，ユークリッド幾何学受容

の困難性が認められる。『幾何原本』は，特に西洋数学の導入が盛んになる幕末から明治初期にかけ，西洋の幾何学を受容していく過程において強く影響を及ぼし，大きな役割を担った。しかし，その際，日本が『幾何原本』から受け入れたものは，主には幾何学用語と幾何図形の名称（用語），そして論理体系を逐うという記述形式等，言わば西洋の幾何学の表面的な部分であった。西洋の幾何学（ユークリッド幾何学）を，その真髄（演繹法や論証の方法としての幾何学とその精神）を理解して受容するというまでには至らなかった。この後，本格的な（中国の洋算書ではない）西洋数学書の翻訳の段階を経て，日本は真の幾何学受容に至るが，『幾何原本』は，本格的な西洋数学書の翻訳活動の準備段階において大きな役割を果たしていたと言えよう。その後，本格的な（中国の洋算書ではない）西洋数学書の翻訳の段階を経て漸く，ユークリッド幾何学の真髄（演繹法や論証の方法としての幾何学とその精神）を理解して，受容に至ることになる。次の節において，本格的な西洋数学書の翻訳の段階を精査していく。(この節は，安(2007)をはじめとする本稿末の「引用・参考文献」及び「参考古典籍資料」を参考に総合的に検討し記述した。)

２．明治前期の代表的な幾何学教科書の底本

後述する代表的な幾何学教科書の底本（参考にされた原著）について，公田(2006)「明治前期の日本において教えられ，学ばれた幾何」(pp. 188-189) を基に次に整理しておく。

イギリスでは，長い間，幾何はユークリッド『原論』を教科書として学ばれてきた。Robert Simson 編のユークリッド『原論』(1756)を底本として編纂された教科書が多かった。Isaac Todhunter の“Elements of Euclid”は 19 世紀半ばの代表的な教科書の一つで，底本は Simson であるが，若干の修正が加えられ，註や練習問題が付け加えられている。しかし，中等教育でユークリッド『原論』を教科書として幾何を教授することには問題があり，19 世紀の中頃から徐々に，ユークリッド『原論』そのままではなく，イギリスの中等教育に適した形で幾何が教授されるようになった。Wilson や Wright などは，そのような立場で，Legendre や Rouché-Comberouse などのフランスの幾何学書を参考に教科書を編纂した。1871 年に幾何教授を改良の目的として *Association for the Improvement Geometrical Teaching*（英国幾何学教授法改良協会）が設立され，1875 年にはこの協会により“*Syllabus of Plane Geometry (corresponding to Euclid, Books Ⅰ-Ⅳ)*”が作成された。この Syllabus の第 4 版(1885)は後に菊池大麓によって邦訳され明治 20 年(1887 年)に『平面幾何学教授条目』として出版された。以下，*Association for the Improvement Geometrical Teaching* を AIGT，“*Syllabus of Plane Geometry (corresponding to Euclid, Books Ⅰ-Ⅵ)*”を『シラバス (AIGT)』と略記することとする。

フランスでは，かつては幾何はユークリッド『原論』を教科書として学ばれたが，後には A.M.Legendre の “Éléménts de Géométrie” や，これに範を取って編纂された教科書が用いられるようになった。Legendre の “Éléménts de Géométrie” は，元来はユークリッド『原論』に代わる幾何の本を意図したもので，初版は 1794 年であるが，版を重ねるごとに加筆・訂正が加えられ，1833 年に Legendre が亡くなるまでに 12 版まで刊行された。その後も Legendre の学生であった M.A.Blanchet が補訂したものが版を重ね，Legendre の “Éléménts de Géométrie” は 18 世紀末

の初版以来約一世紀にわたり,フランスはもとより,欧米諸国に多大の影響を与えた。Legendre の幾何学書では，ユークリッドの『原論』とは異なり，冒頭に公理を列挙するというスタイルを取らないものが多い。わが国に影響を及ぼしたフランス書としては Amiot と Rouché-Comberouse がある。いずれも邦訳がある。

アメリカでは,初期には幾何はユークリッドの『原論』(Simson あるいは Playfair)または Legendre（の英訳）によって教えられたが，後には，Legendre を基盤とするが，ユークリッドの『原論』を考慮に入れ,米国の学校使用に適するように編纂された教科書によって教えられるようになった。例えば Charles Davies の幾何は，初版は 1830 年代で，Legendre の英訳に米国の学校の教科書用として手を加えたものであったが，版を重ね，1851 年には増補修正版が発行された。Loomis の幾何は幾何の教科書の編纂に『原論』と Legendre の両方の長所を取り入れようとしたものであるが，章の構成や順序は Legendre の影響を受けている。Robinson の幾何も多年に亘り版を重ねたものであるが,当時の米国の学校教育の実状を考慮して,生徒には難しいと思われる内容を除き，展開の順序や証明を改め，証明には代数的方法も用いている。応用面を重視し，長さ，面積，体積等の計算問題が多い。このため，Robinson の幾何は『原論』や Legendre とは趣が異なる。Chauvenet は Rouché-Comberouse を参考に編纂された書物でフランス系の幾何である(公田,2006, pp.188-189 を参考)。

ところで，藤澤（1900）は，幾何学の流派として，第一は「いうくりっど流又ハ英國流」，第二は「佛蘭西流」，第三は「獨逸最新流」と，３つがあると紹介している（p.364)。第二の「佛蘭西流」の代表に挙げられているのが Rouché-Comberouse であり，ルジャンドル（Legendre）を範としたものである。第一の「いうくりっど流又ハ英國流」はユークリッド流，第二の「佛蘭西流」はルジャンドル流と言ってよいであろう。第三の「獨逸最新流」の代表に挙げられているのが， J.Henrici 及び P.Treutlein であり,これらが日本に広まってきたのは大正時代である。明治前期における幾何学の流派は大きく,ユークリッド流とルジャンドル流の２つであったと言ってよい。ユークリッド流は概して，ユークリッド『原論』を模範として，代数記号を一切使用せず,全てを言葉で記述する体裁をとる。一方，公田(2006)によると，Legendre などのフランスの幾何学書では，ユークリッドの『原論』 とは異なり， 冒頭 に公理を列挙するというスタイルを取らないものが多く， また， 時に代数を利用している。 立体幾何は重視され， 作図については， 伝統的な定規とコンパスによる作図だけではなく， 実用的な作図についてもふれている（公田， 2006， p.188 を参考)。

底本からみた幾何学教科書の系統を,イギリスの系統，フランスの系統，アメリカの系統とすると,概してイギリスの系統はユークリッド流に,フランスの系統とアメリカの系統はルジャンドル流に位置づけられよう。

３．明治前期の代表的な幾何学教科書の系統

この節では，学制が施行された明治 5 年(1872 年)から，菊池大麓『初等幾何学教科書平面幾何学』が出版される明治 21 年(1888 年)までの，日本における代表的な幾何学教科書を年代順に挙げ整理していきたい。ここで主に使用する引用・参考文献とその略記は，次頁の表１の通りである。

明治前期の日本における代表的教科書を，

先に底本からみた幾何学教科書の系統に沿って，時系列で配置すると次頁の表２のようになる。その書の概要の説明については， 紙面の都合上省略したが，編著者，書名の次に，引用･参考文献の略記とその引用･参考箇所の頁番号を＜略記〇〇-〇〇＞のように記している。編著者名の先頭の列がその書の所属する系統を示すものとする。

表１：表２で使用の略記

引用・参考文献	略記
松原元一(1982)	ＭⅠ
松原元一(1983)	ＭⅡ
松原元一(1985)	ＭⅢ
松原元一(1987)	ＭⅣ
公田藏(1998)	ＫⅠ
公田藏(2006)	ＫⅡ

４．ユークリッド幾何学受容の系譜

明治初年の幾何学教科書は,「幾何」を実用的見地から量のカテゴリーで捉えているものがほとんどである。その後もユークリッドの精神を理解することが難しい状況は続いた。明治 12 年(1879 年)の『幾何学通書 巻之一』等をみれば，当時の日本において，論証幾何学がそれまでに学ばれていた数学（和算はもとより，代数や三角法などの洋算）と「異質」なものであり，論証幾何学を学び，内容を理解することは相当困難であったと考えられる（公田，2006，p.194）。これまでみてきたように，日本は，Simson，Todhunter，Wilson，AIGT というイギリスの系統,ユークリッド流を主とし,ルジャンドル流(アメリカの系統，フランスの系統）がそれに影響を及ぼしていくという展開を示した幾何学書翻訳の段階を経て，日本は中等教育においてユークリッド幾何学の受容へと向かっていった。日本が中等教育において最終的に受容したのは，英国幾何学教授法改良協会（AIGT）の『平面幾何学教授条目』(『シラバス（AIGT)』）にほぼ沿うものであるが，イギリスの教科書の翻訳ではない独自の工夫がなされた，日本人による日本語の幾何学教科書，菊池(1888)『初等幾何学教科書 平面幾何学』(以下,『初等幾何学教科書』と略記する）に具現されたものである。松原(1987)は『初等幾何学教科書』について，簡潔に次のように紹介している。

「後に国内の幾何学の教科書を風靡することになるこの書は,明治 21 年に文部省から出版された。その 3 年前の明治 18 年(1885 年)に，英国において「平面幾何学教授条目」が出され大きな指針が示された。2 年後の明治 20 年に，菊池はこれを訳出している。「平面幾何学教授条目」によって書かれた英国の教科書の翻訳はかなりあるが，菊池の教科書は英国の条目にほぼ沿うてはいるが，英国の教科書の翻訳ではない。条目では平行線論と三角形論とが１つになって入り交じっているが，菊池の書は，平行線を述べる節を先にし，三角形についてはそれに続く節で述べている。これはドイツの教科書を参考にしたものらしいのであるが，窪田忠彦は「菊池大麓先生と天野一之丞先生」(科学, 第 18 巻第 1 号, 1948 年)の中で，英国幾何学改良協会で書いた教科書（日本ではアッソシエーションの幾何といった）や，この協会の条目によって書かれたウヰルソンの幾何学教科書よりも菊池の教科書ははるかに論理の筋道が整然としていて，ほとんどの中学校が長期にわたって，この本を採用していたのもうなずけると述べている。」（松原，1987，pp.117-118)。

小倉(1932)は『初等幾何学教科書』を次のように評価している。

「この書はその厳密の度において，その洗練の度において,‘アッソシエーション’に優るところの，当時における世界有数の初等教科書たるを失はない。」(小倉，1932，p.338)。

表 2：明治前期の日本における代表的教科書を，底本からみた幾何学教科書の系統に沿って，時系列で配置した年表

明治	西暦	イギリスの系統	アメリカの系統	フランスの系統	その他
5	1872	山田昌邦訳『幾何学（全三巻)』〈KⅡ191-192〉			瓜生寅編『測地略』〈MⅠ87-88, KⅡ189-190〉
6	1873		中村六三郎訳『小学幾何用法』〈MⅠ88-91〉 柴田清亮『幾何学（第一編)』〈MⅢ234-243〉 榎本長裕『筆算幾何全書』〈MⅢ243〉		
7	1874		杉原正市『小学幾何のちか径　上,下』〈MⅠ203〉		
8	1875	荒川重平・中川將行訳『幾何問題』〈KⅡ192-193〉 山本正至・川北朝鄰訳『幾何学原礎』〈 KⅡ193-194〉			
9	1876		宮川保全『幾何新論』〈MⅠ455〉		
10	1877		堀田維祺『幾何学』〈MⅢ253〉	教導団教官第三課編『平面幾何教授書』〈MⅢ247-253, KⅡ195-196〉	
11	1878		柴田清亮『幾何学』〈MⅠ454-455〉	陸軍士官学校編『算学講本』第三編・第四編〈 KⅡ194-195〉	
12	1879			仏国李珍大氏原著・東京大村邦秀訳『幾何学通書 巻之一』〈KⅡ194〉	田辺善則『幾何学階梯』〈MⅢ253-255〉
13	1880			横須賀造船所『平面幾何学』〈KⅡ196〉	
14	1881				
15	1882	田中矢徳『幾何教科書』〈MⅢ417-425〉		中村精男校閲・赤木周行抄訳『常用曲線』〈KⅡ193-194〉	
16	1883	田中矢徳『幾何教科書』〈MⅠ460-462〉	岡本則録閲 中條澄清訳『幾何学教授書』〈MⅢ425-432〉		村垣素行『幾何例題』〈MⅢ432〉 尾関正求『代数三千題 巻之下』〈MⅢ442-448〉
17	1884	長沢亀之助訳『宥克立』〈 KⅡ194〉 曽禰達蔵訳『突氏幾何学』〈KⅡ194〉 原弥一郎訳『幾何学』〈MⅢ434-436〉			
18	1885	田中矢徳『幾何教科書』〈国立国会図書館デジタル化資料〉			
19	1886				
20	1887	ウヰルソン原著・村田雷三郎訳『幾何学』 ウィルソン原著・河村錝松訳『幾何学初歩』〈MⅢ436-440〉			三木清二『幾何学大意』〈MⅢ440-442〉
21	1888	菊池大麓『初等幾何学教科書　平面幾何学』〈MⅣ117-120, KⅠ76-78〉			

松原(1987)，小倉(1932)両者ともに『初等幾何学教科書』を非常に高く評価している。菊池の教科書(1888･1889)は,わが国の中等教育の幾何学の内容を決めたのである。そして，この教科書の様式（左起き横書き）は，後の数学教科書のモデルになった。

５．『平面幾何学教授条目』（菊池訳，1887）

『平面幾何学教授条目』の｢序｣には，平面幾何学は中等以上の教育においては必修の学科であることは言うまでもなく，西洋諸国においては太古より常にこれを修めるためユークリッド『原論』を用いてきたとした上で次のように記されている。

「二千年ノ久シキ此書ヲ尊テ完全無欠ノ書ト為シユークリッドヲ敬フヿ恰モ神ノ如クナリキ然ルニ漸ク近時ニ至リテ其不完全ニシテ現今ノ時勢ニ適セサルヿヲ説ク者頗ル多ク其論大ニ勢力ヲ得現今ニ於テハ最守舊ノ數學者ト雖モユークリッドノ幾何原本ヲ其マヽニ用#ルヿヲ主張スルモノハ殆ト之レ無キニ至レリ此大改革ニ與リテ大ナル効力ヲ有スルモノハ（但シ主トシテ英國ニ就テ之ヲ云フ）*Association for the Improvement Geometrical Teaching* 即幾何學教授法改良協會ナリ此協會ハ一千八百七十一年ニ設立セルモノニシテ其會員ハ英國ニ於テ數學ノ教授ニ従事セル諸氏ナリ其事業ノ第一着トシテ *Syllabus of Plane Geometry (corresponding to Euclid, Books Ⅰ-Ⅵ)* 即チ平面幾何學ノ表（ユークリッド幾何原本第一巻ヨリ第六巻マテニ對ス）ヲ編纂シタリ本書ハ是其四版(一千八百八十五年出版）を譯シタルモノナリ」（菊池訳，1887,p.2)。

上の引用には，ユークリッド『原論』が二千年の長い間完全無欠のものとされ神のように敬われてきたが，漸く近時になってそれが不完全であり時勢に適さないとの説が多く起こり,最保守の数学者でさえユークリッド『原論』をそのまま用いることを主張するものはいないこと，等が述べられている。更に，次のように続けている。

「余ハ未タ此表ヲ以テ充分満足シタリト言フ能ハス之ヲ編纂シタル會員ト雖モ決シテ之ヲ完全ナルモノトハ認メサリシナル可シト信ス然レドモ學識經驗共ニ備ハレル諸大學者ノ協議ニ成レルモノナレハ苟モ幾何學ノ教授ニ従事スル者ハ必ス參考セ　サル可カラサルヿ明ナリ又此學科ヲ修ムル者ハ之ヲ見テ大ニ得ル所有ル可シ本邦ニ於テハユークリッド妄尊ノ夢未タ全ク覺メサル者有リ然ノミナラス不幸ニシテロビンソンノ如キ書盛ニ行ハル、ヿ實ニ識者ノ歎スル所ナリ故ニ本書ヲ譯シテ之ヲ世ニ公ニスルハ最有益ナル事ナリト信ス」(菊池訳，1887,p.3)。

上の引用には，次の事が述べられている。『シラバス(AIGT)』を編纂した会員でもあるが，会員と雖もこれを完全なものとは認められない。しかし，この『シラバス(AIGT)』は学識・経験共に備わった大学者の協議によってなされたものであるから，幾何学を教授する者は必ず参考にしなければならない。また，幾何学を修めようとする者はこれを見て大いに得るところがあるに違いない。わが国においては(明治20年当時)未だユークリッドを絶対視するような者がいるだけではなく，ロビンソンのような書が盛んになっているのは嘆かわしく不幸な事である。『シラバス(AIGT)』を訳して世に公にすることは最も有益な事である。

以上みてきたように,｢平面幾何学教授条目序」には，わが国の中等教育へのユークリッド幾何学の導入は,ルジャンドル流のもの(ロビンソン等）ではなく，ユークリッド流のものを『原論』そのままにではなく,『シラバス(AIGT)』を基になされなければならないという，菊池の強い考えが記されている。『シラバス（AIGT)』の不完全さについては,『平面幾何学教授条目』には載せられていないが，後に『シラバス（AIGT)』を基にAIGTにより編

纂され出版された幾何学書の邦訳『あっそしえーしょん 初等平面幾何学 上巻』の「原序」にみることができる。次のように記されている。

「本書ハ完全ヲ目的トシタルモノニ非ザレバ書外ノ例解説明及ヒ敷演ヲ要スル所ハ基ヨリ教師各自ノ意見ニ任スルモノナリ」（上野校閲・三木訳述，1892，pp. 3-4)。

明治20年当時の菊池には，この書自身が認める『シラバス(AIGT)』の不完全さと菊池自身が捉えていた『シラバス (AIGT)』の不完全さを克服して，わが国の中等教育にユークリッドの精神に基づく最適な初等幾何学の教科書を編纂しなければという明確で強い意志があったことを，「平面幾何学教授条目序」から読み取ることができよう。

次に，『平面幾何学教授条目』と『初等幾何学教科書』の内容構成をみよう。夫々の目録を比較対照した表が，右の表3である。

編・節のタイトルは，順序は異なるがほぼ同一であるとみることができ，『初等幾何学教科書』は『平面幾何学教授条目』を基に編纂されていることが確認される。では『平面幾何学教授条目』にはどのような改善がみられるのか。『平面幾何学教授条目』には，公理，定義，定理は漏れなく記述されているが，第一編から第三編までは証明部分は省かれていてその記載はない。その証明部分については『あっそしえーしょん 初等平面幾何学 上巻・下巻』を参照しなければならない。『平面幾何学教授条目』がユークリッド『原論』を中等教

表3：平面幾何學教授條目と初等幾何學教科書の目録の対照表

平面幾何學教授條目	初等幾何學教科書
目録	目録
幾何學作圖條目	巻の壹
平面幾何學條目	緒論
豫説	第壹編　直線
第一編　直線	定義
定義，公理，ポスツラート	第一節　一ッノ點ニ於テノ角
第一節　一點ニ於テノ角	第二節　平行 直線
第二節　三角形	第三節　三角形
第三節　平行線及平行四邊形	第四節　平行四邊形
第四節　作圖題	第五節　軌跡
第五節　軌跡	問題
第二編　面積ノ相等シキ事	第貳編　圓
第一節　定理	第一節　本原ノ性質
第二節　作圖題	第二節　中心ニ於テノ角
第三編　圓	第三節　弦
第一節　原質	第四節　弓形ニ於テノ角
第二節　弦	第五節　切線
第三節　弓形ノ内ノ角	第六節　二ッノ圓
第四節甲　切線（直接法）	第七節　内接形及外接形
第四節乙　切線（極限法）	第八節　作圖題
第五節　二圓	問題
第六節　作圖題	第参編　面積
第七節　圓及面積	第一節　定理
第四編　比例ノ基本命題	第二節　作圖題
第一節　比及比例	問題
第二節　基本ノ幾何学的命題	（これ以降「巻の貳」の項目になると考えられるが記載がないので，次は第四巻と第五巻の本文から復元した。）
第五編　比例	第四編　比 及 比例
豫説	第一節　定義 及 緒論
第一節　相似形	第二節　定理
第二節　面積	問題
第三節　軌跡及び作圖題	第五編　比 及 比例ノ鷹用
	第一節　基本ノ定理
	第二節　相似形
	第三節　面積
	第四節　軌跡及び作圖題
	問題

科書用に改良した点として，次の大きく三つが挙げられる。

一つ目は，『平面幾何学教授条目』は，ユークリッド『原論』には現れなかった「作図」を前面に出し，作図題を積極的に設けていることである。「幾何學作圖之條目」の冒頭に次が記されている。

「作圖ニハ定規ト兩脚規ノミヲ使用スルモノトス定規ハ直線ヲ引キ及ヒ之を延長スル為メニ，両脚規ハ圓ヲ畫キ及ヒ距離ヲ徙ス爲メニ用ユルナリ」(菊池訳，1887，幾何學作圖之條目 p.1)。

更に，作図題の前後で，ユークリッド『原論』にはなかった「軌跡」についても取り扱っている。このように，『シラバス(AIGT)』全体を通して，論証幾何学の学習の中に，作図を中心とする活動的な要素を積極的に取り入れることにより，中等教育の幾何学教科書用として適したものにしようとする内容構成上の工夫が確認できる。

二つ目は，ユークリッド『原論』では説明もなく使われていた「公理」や「定理」などの用語について丁寧な説明を加えている点である。『平面幾何學教授條目』には次のような記述がある。

「一、證明ヲ要セスシテ許諾スル命題ヲ公理(ｱｸｼｵﾑ)ト稱ス（略）三　定理(ｾｵﾚﾑ)トハ已知ノ命題ニ由リテ證明ス可キ命題ナリ已知ノ命題ハ或ハ公理或ハ定理タルヲ得　四　定理ハ二部分ヨリ成ル第一、假設(ﾊｲﾎﾟｾｼｽ)即假ニ然ナリトスル所ノ事第二、斷言(ｺﾝｸﾘｭｰｼｮﾝ)即假設ヨリ起リ來ル可シト主張スル事」(菊池訳，1887，平面幾何學教授條目 pp.6-7)。

他に「転換法」や「同一法」等の証明法の説明もなされている。上の引用は一例であって，『シラバス(AIGT)』全体を通して，論証幾何学の体系に関わる基本的な用語を丁寧に説明することにより，中等教育の幾何学教科書用として適したものにしようとする記述上の工夫が確認できる。

三つめは，論証幾何学の根幹ともいえる公準・公理の再構成及び命題配列の再構成を行っていることである。まず，公準・公理についてである。ユークリッド『原論』の第１公準から第３公準の「直線を引くこと・延長すること」と「円をかくこと」は，前頁に引用した「幾何學作圖之條目」の冒頭での定規・コンパスを使用することの説明に置き換えられている。第４公準「総ての直角は互いに等しい」は，公準ではなく「定理１」に位置付けられている。公準に当たるものを定理に位置付けるに当たって，幾何学公理として新たに次の公理を設けている。

「公理二　同一ノ二點ヲ有スル二直線ハ全ク一直線ヲ為ス」(菊池訳，1887，p.20)。

第５公準「1 直線が 2 直線に交わり同側内角の和が 2 直角より小さいならば，この 2 直線は限りなく延長されると 2 直角より小さい角のある側において交わる」は他のものに比べて複雑であり，長年に亘りこれは公準ではなく定理ではないかと考えられ証明が試みられてきたもので，非ユークリッド幾何学の発見の契機にもなったものである．この第５公準は，『平面幾何学教授条目』にはない．第５公準に代わり，次の公理が設けられている．

「公理三　同點ヲ過リ一與直線ニ平行ナル直線一ッョリ多クヲ引ク能ハス」(菊池訳，1887，p.20)。

このように，ユークリッド『原論』の角に関する公準から直線や二直線の関係に関する定理へという道筋ではなく，その逆の直線や二直線の関係に関する公理から角に関する定理へという道筋をとるものにしようとする公理設定の工夫が確認できる。その工夫と相まって，命題構成にも工夫がみられる。ユークリッド『原論』のように円をかくことを伴う三角形の作図の定理から始めるのではなく，直角や平面角に関する定理から始めるものとしたことで，初学者の学習の取掛りとしては平易で自然なものになっている。その後の命

題構成も学習者に配慮し平易で自然な流れを心掛けることにより，中等教育の幾何学教科書用として適したものにしようとする命題構成の工夫も確認できる。この書は未完成であり更なる改良の基となるものであるが，当時の幾何学教育を前進させた有意義な書であることは間違いないであろう。

６．『初等幾何学教科書』（菊池，1888）

『初等幾何学教科書』の「凡例」において，本書が『シラバス（AIGT)』及びそれを基にAIGT によって編纂され出版された幾何学書（邦訳『あっそしえーしょん 初等平面幾何学』)（以下『AIGT 幾何学書』と略記する）に拠るものである事が述べられている。『初等幾何学教科書』は『シラバス（AIGT)』,『AIGT 幾何学書』を大いに参考にしているが単なる翻訳ではない。菊池は自身の教育観に基づき，これら AIGT の書に改良を加えると共に,独自の工夫によって執筆をしている。菊池の教科書(1888･1889)の解説書である『幾何学講義 第一巻』の「第一章　総論」には，幾何学教科書編纂の目的として，延いては普通教育中における幾何教育の目的として，実質的な面と形式的な面の二つが強く語られている。実質的な面は，ユークリッド幾何学に基づく厳密な論証体系，延いては西洋の学問としての数学の性格を教授しようというものである。形式的な面は，その教授を通して正確な思考を養い推理力を錬磨することをねらいとするものである。この二つは，菊池にとって幾何教育における大きな柱であり，相互に作用しあい進められていくものであった。菊池はこの目標の実現のために，次のような具体的な主張と取り組みを行っている。その主なものは，後の数学教科書の様式となる横書きの実施，代数と幾何を分離しての言文一致体の創造，厳密な論証体系の学習を通しての日本人の思考様式の改革等である。

『初等幾何学教科書』に次の記述がみられる。

「幾何學ニ於テ，吾々ハ吾々ノ經驗ニ由リテ眞ナリト認メタル若干ノ事項ヲ基礎トシ夫ヨリ唯推理ニ據リテ以テ他ノ眞理ヲ得ルナリ。」（菊池，1888，pp. vii-viii）。

上の引用は，推理力錬磨の重視の一端を伺わせる記述であり，量の技術であるという幾何学の捉え方は消え，演繹体系である論証幾何学という幾何学の捉え方が獲得されている。菊池は,「作図」を前面に出すなど中等教育の幾何学教科書用として適したものにと編纂された『シラバス（AIGT)』,『AIGT 幾何学書』を基に，わが国の数学教育のために洗練された論理の道筋を整然とさせることにより，数学教育の意義として「推理力の錬磨」という付加価値を正式に付ける改良を行ったものと考えられる。

７．おわりに

明治 21（1888）年，単なる「翻訳」ではない，西洋数学の意義を捉えた，日本人独自の日本語の「幾何学教科書」の初めてのもの，『初等幾何学教科書』が完成した。(その少し前のイギリスの系統にある日本語の「幾何学教科書」である，明治 18（1885）年の田中矢徳『幾何教科書』(国立国会図書館デジタル化資料) をみても，その構成はユークリッド『原論』にほぼ沿うものであり，翻訳的傾向を脱しているものではないことがわかる。）この『初等幾何学教科書』の完成の背景にある，その完成を可能にした大きな要因として，次の３つを挙げることができる。

① わが国の中等教育にユークリッドの精神に基づく最適な初等幾何学の教科書を編纂しなければという明確で強い意志が菊池にあったこと。

② 本格的な（中国の洋算書ではない）西洋数学書の翻訳の段階において，訳語の統一が進んだことと翻訳書が充実してきたこと。

③ 英国幾何学教授法改良協会（AIGT）の『平

面幾何学教授条目』(『シラバス (AIGT)』) が作成され世に出されたこと。

これらの要因を背景として，実質的・形式的両面のねらいの実現に向け，菊池自身の行った改良・工夫により，『初等幾何学教科書』の完成に至ったと言えよう。本稿に述べたことは菊池の改良・工夫のほんの一点にしか過ぎない。ユークリッド幾何学の受容における菊池の貢献は多大であり，菊池の教育観の検討や『初等幾何学教科書』の内容的検討を加えていかなければならない。今後の課題として取り組んでいきたい。

引用・参考文献

安大玉(2007). 明末西洋科学東伝史. 知泉書館.

伊達文治(2013). 日本数学教育の形成. 溪水社.

ジョゼフ･ニーダム(Joseph Needham)著，東畑精一他監修，芝原茂他訳(1991). 中国の科学と文明. 思索社.

菊池大麓訳，英国幾何学教授法改良会編纂(1887).平面幾何学教授条目.博聞社蔵版.

菊池大麓(1888).初等幾何学教科書 平面幾何学. 大日本図書.

菊池大麓(1889).初等幾何学教科書 立体幾何学. 大日本図書.

菊池大麓(1897). 初等幾何学教科書 随伴 幾何学講義 第一巻. 大日本図書.

菊池大麓(1906). 初等幾何学教科書 随伴 幾何学講義 第二巻. 大日本図書.

公田藏(1998).「近代数学」と学校数学ー数学の普及の歴史から. 数理研講究録 1064 巻，数学史の研究，75-91.

公田藏(2006). 明治前期の日本において教えられ，学ばれた幾何. 数理研講究録 1513 巻，数学史の研究，188-202.

松原元一(1982).日本数学教育史Ⅰ算数編(1).

松原元一(1983).日本数学教育史Ⅱ算数編(2).

松原元一(1985).日本数学教育史Ⅲ数学編(1).

松原元一(1987).日本数学教育史Ⅳ数学編(2). 風間書房.

長澤亀之助訳，川北朝鄰閲(1884). 宥克立. 東京数理書院

中村六三郎訳(1873). 小学幾何用法 上中. 正榮堂梓.

日本学士院日本科学史刊行会(1960). 明治前日本数学史 第五巻. 岩波書店.

小倉金之助(1935).数学史研究 第一輯. 岩波書店.

澤悦子(2008).中等数学教育における『原論』第 III 巻の受容に関する研究. 三重大学修士論文.
http://hdl.handle.net/10076/10936
(2019.2.13 最終確認).

柴田清亮訳(1879). 幾何学 前篇. 葆光社.

田中矢徳(1885). 幾何教科書. 丸善商社. (国立国会図書館デジタル化資料).

上野清校閲，三木留三訳述，英国幾何学教授法改良協会編纂(1891). あっそしえーしょん 初等平面幾何学 上巻. 版権所有.

上野清校閲，三木留三訳述，英国幾何学教授法改良協会編纂(1892). あっそしえーしょん 初等平面幾何学 下巻. 版権所有.

瓜生寅編(1872). 測地略. 文部省.

山田昌邦訳(1872-1873). 幾何学 全三巻. 開拓使.

参考古典籍資料

『幾何原本』第 1-6 巻 (1607)，利瑪竇口訳･徐光啓筆受，早稲田大学所蔵.

『数理精蘊解』(1816 年の書写)，延岡内藤家旧蔵資料，早稲田大学所蔵.

『幾何原本』15 巻(1857)，(前六巻) 利瑪竇口訳･徐光啓筆受 / (後九巻) 偉烈亜力口訳･李善蘭筆受，ECHO – Cultural Heritage Online.
http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuView?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/PGATTE3A/pageimg
(2019.2.13 最終確認).

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.23-38

三角比の定義がもたらす概念理解

～記号論的表現の視点から～

宮　川　　健
上越教育大学

1. はじめに

高等学校における指導内容の一つである三角比の重要性は，解析や代数，幾何を学習する上で言うまでもないであろう．しかしながら，その学習は，定義や定理の暗記に頼ることが少なくない．正弦は sin の頭文字の筆記体の *S*, 余弦は cos の *c*, 正接は tan の *t* と，まったく数学とは関連のない暗記法（暗記には有効かもしれないが）が，しばしば利用され，教科書の教師用指導書にまで紹介されている（大島ほか, 2003, pp. 164, 167；松澤ほか, 2003, pp. 121, 124）.

一方，三角比は，高校生に十分には理解されていないようである．三角比・三角関数の学習困難性が報告されている（cf. 長岡, 2003）のみならず，平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査においても，三角比に関する問題の通過率は 24%と低かった（国立教育政策研究所, 2004）．三角比学習の困難性と暗記法との関連は定かでないが，暗記は一般に概念の十分な理解へは導かない．暗記されたものは，多くの場合その概念の特定の側面もしくは特定の表現でしかなく，本来備えられるべき他の側面や他概念とのつながりが薄い．

では，三角比の学習はなぜ暗記に頼ることが多いのか．暗記に頼るしかないのであろうか．そもそも教科書は三角比のいかなる概念理解をもたらしているのか．教師用指導書にまで暗記法が紹介されていることからすると，暗記に頼る要因は，生徒個人にではなく，学校数学における概念の扱われ方にあるのではないだろうか．

これらの問いに答えるため，本稿では，今日の教科書[1]がもたらす三角比の概念理解の様相を明らかにすることを試みる．また，三角比と言ってもその領域は広いことから，三角比領域において最初に暗記に依存することが少なくない三角比の導入部，つまり定義に焦点を当てる．数学学習において，定義は前提であり暗記するものである，と考えるのであれば，本稿は意味をなさない．しかしながら，次章でより詳細に述べるが，数学一般において，定義は所与ではなく徐々に構成され変化すること，定義が与える“意味”，つまり可能となる概念理解が変化することを考慮すれば[2], 今日，教科書で与えられている定義がもたらしうる概念理解を明らかにすることは，十分意義のあることと考える．

なお，本研究の位置づけは，教授学的転置理論 (Chevallard, 1991; 1992) の視点からすれば，教科書に見られる知識，教科書が生徒に学習可能としている知識である「教えるべき数学」としての三角比の本性の一部を探ることである．転置理論の枠組

みでは,「教えるべき数学」の他概念との繋がりやその存在条件など「知識の生態(*écologie de savoir*)」を探ることが多いが,本稿では，概念理解という，より認知的な側面を探る.

さて，概念理解の分析には様々なアプローチが考えられる.本稿では,その中でも,認知的側面から概念理解をモデル化する「記号論的表現のレジスター」(Duval, 1995; 2006; 2017) を分析ツールとして採用する．暗記という活動が個人の認知的な活動であるとすれば，この分析枠組みを用いて今日の教科書の三角比の定義が生徒にもたらす概念理解を明らかにすることにより,三角比学習を暗記に導く要因も明らかになると期待する．分析の主たるデータは教科書である．だが，本稿ではさらに，レジスターの視点から別の概念理解をもたらすと判断されるものを比較対象として提示する.この別の概念理解は, 19 世紀の教科書を分析し導き出す．教科書の定義がもたらす概念理解の他に，別の概念理解の可能性を例示することは，今日の教科書がもたらす概念理解の追究に対する助けとなる.同時に,実際面を検討する上でも有用であろう．しかしながら，本稿は，三角比指導の現状の批判や，より優れたと思われるカリキュラムや指導法を提案・主張することを目的とするわけではない．現状の批判より，むしろ現状の把握を目的とする．その現状に対し，何らかの対策をとる必要は喚起するかもしれないが，ある特定の指導法を提案・主張するわけではない．なぜならば，指導法の提案・主張には,その実現可能性など,本稿で扱わない，より実際的な側面を考慮する必要があると考えるからである．本稿は，あくまで基礎的な研究報告であり，実際面は別の機会に検討したい.

本稿の目的と方法をまとめると，次のとおりである.

教科書における三角比の定義がもたらす概念理解を明らかにすることを目的とする．そのために，今日の教科書をレジスターの枠組みを用いて分析するとともに，19 世紀の教科書から導かれる別の概念理解を提示する．これらを通して，三角比の学習が暗記中心になっている要因を明らかにする．

本稿は 7 章からなる．第 2 章では，定義に焦点を当てることが数学教育学の研究としていかなる意味をもつのか示す．第 3 章では，本研究の分析ツールとなる記号論的表現のレジスターを概説するとともに，記号論的表現を通していかに数学の活動や思考を認知的な側面から分析できるか述べる.第 4 章では，今日の教科書に用いられているレジスターとその機能を特定する．つまりこの章はデータ(教科書)の分析である.さらに第 5 章では，データの分析結果をもとに，それがもたらす概念理解について考察する．第 6 章では，古い教科書に見られるレジスターとその性質を考察し，別の概念理解の可能性を示す．そして，第 7 章を終章とする.

2. 定義について

公理的にきれいに体系立てられ整理された数学は，長きにわたる数学的な活動の所産であり，脱文脈化の結果である (cf. Brousseau, 1997, pp. 21-22)．実際，このような数学では，その数学体系に含まれるある概念が発生した際の文脈が削除され，あたかもある重要な定理を導くためにその概念が必要となったかのように記述されることが多い.ラカトシュの言葉を援用すれば,

「演繹主義的スタイル」で記述されることが多いのである (1980, pp. 172-174). 例えば，ユークリッドの『原論』第 1 巻（cf. 中村幸四郎他訳, 1971/1996）は，平面幾何学の数学体系を非常に公理的に記述している．その体系の提示の仕方は，当たり前のことだが，より基礎的なものから，より複雑なものへと配列されている．そして，最初の方に出てくる公理（及び公準）・定義・命題は，その多くが，後々の命題の証明に必要となる．第 1 巻では，三平方の定理（の逆）はあくまで最後の命題であり，最初の方では扱われないのである．こうした数学体系は，あたかもこの公理的な体系や順序に基づいて数学概念が発生してきたかのような印象さえ与える．しかし，数学概念の発生は，この公理体系のように順序立ててなされるわけではない．それは，後世には消えてしまったかもしれない何らかの文脈における必要に応じて発生してくる．そして多くの場合，数学における厳密性という要請に応えるために，後にその概念の定義が公理等とともにより明確にされ，数学体系が整備されるのである．つまり，概念の定義はその文脈に応じて変化しているのである．これらのことは，近代のヒルベルトによる平面幾何学の公理化において，様々な概念が再定義されていることからもよくわかる．『原論』では「点は部分をもたないもの」であり（idem., p. 1），ヒルベルトの公理化においては「三種類の物の集まり」の「第一の集まり」が「点」である（ヒルベルト, 2005, p. 15）．この例はやや極端かもしれないが，ラカトシュ (1980) では，より厳密な証明の要請に応えるために，多面体等の概念が拡張されることが数学史上の例とともに示されており，概念形成の過程における定義の変化が容易に見て取れる．

一方，定義の変化は，それが与える“意味”の変化でもある．ある概念が扱われ始めた頃に，その定義から知ることができる意味と，整理され無味乾燥になった数学体系における定義から知ることができる意味とは異なる．先の「点」の例においても，それぞれから考えられる意味は大きく異なるだろう．ヒルベルトの定義からは，通常考えられる図形の“点”のイメージは浮かばない．実際，どんな“物”でも“点”になりうる．したがって，公理化され整理された数学の定義は,脱文脈化の結果であり，定義からうかがい知ることのできる意味や個人にもたらす概念理解は，その過程で変化するのである．

そこで本稿は，今日の学校数学で扱われる三角比の定義が与えうる意味を探ろうとするものである．数学教育学における定義の研究は，定義の役割や本性，定義する活動など，これまで様々な側面を扱ってきた (e.g., Vinner, 1991; Borasi, 1992; De Villiers, 1998; 清水, 2000; Ouvrier-Buffet, 2006)．本稿は，こうした定義という概念そのものの性質を研究対象とするのではなく，三角比の場合の定義がもたらしうる意味，つまり学習者にもたらしうる概念理解の様相を研究の対象とする．そして，さらに三角比の定義が暗記に依存する要因を探りたいと思うのである．

3. 数学の活動･思考における記号論的表現

数学教育学における記号論 (Semiotics) に関する研究は少なくない．数学的な対象（関係を含む）の筆記された表現のみならず，ジェスチャーなど人間の動きをひとつの表現と捉え，学習者による数学的な意味

の構築における表現の役割なども議論されている（cf. Edwards, et al (Eds.), 2009）．記号論は，言語学の領域で扱われることが多いため，数学教育学研究においても，言語学の用語がしばしば援用される．しかし，数学では数学特有の記号が用いられることから，本稿では，数学（数学教育ではなく）における記号論的表現に焦点を当てた数学教育学（厳密にはフランスを起源とする数学教授学）の理論を用いる．Duval (1995; 2006; 2017) の認知記号論である．

(1) 記号論的表現

表現が，数学において重要であることは言うまでもない．わが国においても，数学教育における様々な表現の重要さが指摘されてきた (中原, 1995)．今日の学習指導要領における数学的な表現の強調も，その重要さ故と考えられる．しかし，本稿で記号論的表現に焦点を当てる理由は，数学教育におけるその重要性にあるのではなく，数学の活動や思考を認知的な側面から記述するために記号論的表現の分析が非常に適していることにある．つまり，記号論的表現が，数学的な活動と思考の認知モデルになりうると考えるのである．

ここで言う「記号論的表現 (semiotic representation)」とは，Duval に従い，「記号 (*signes*) を利用することによって作られたもの」 (1995, p. 2) とする．日常言語，数字，式，グラフ，図など，あくまで記号による表現を想定しており，内的な表現（つまり内的表象）は想定していない．

ところで，わが国の先行研究には，「記号的表現 (symbolic representation)」という概念が存在する (中原, 1995, pp. 251-271)．これは，一見，Duval の「記号論的表現」に近いように思える．だが，両者は必ずしも一致しない．Duval のものは，数学的対象を表現する記号として図なども「記号論的表現」に含め，「記号的表現」より広く捉えたものである．むしろ，「記号論的表現」は中原 (1995, p. 194) で「表現」と呼ばれているものに近い．両者とも“表現”を扱うため共通する点はいくつか見られるものの，表現に対するアプローチの仕方や焦点の当て方は異なる．実際，Duval は，数学教育における表現ではなく，数学における記号論的表現に，そしてさらに記号論的表現の中でも本章 3 節で扱うレジスターという記号体系にのみ焦点を当てる．それにより，数学的な活動や思考の認知モデルの構築を試みるのである．そこでは，教育学でしばしば考慮される規範性は見られない．

二つの枠組みにはこれら以外にも様々な相違があるであろう．理論枠組みの詳細な比較はそれだけで一つの研究課題となるため別の機会にゆずり，本研究では，三角比の概念理解をより詳細に分析できると思われる Duval の記号論的表現についての枠組みを分析ツールとして採用する．

(2) 数学における記号論的表現の役割

数学における記号論的表現の役割は，主に二つ考えられる．一つは，数学的対象を表現し伝達することである.数学的対象は，抽象的な存在であり，それを直接知覚することはできない．記号論的表現を通してのみ，人間はそれに触れることができる．先にあげた平面幾何学における「点」を例に考えてみよう.「点」は「部分をもたないものである」が，そのようなものは物理的には存在しない．紙に描いた点も，顕微鏡で拡大すれば，幅があり部分がある．紙に描いた点は，あくまでも数学的対象としての点を物理的に表現したものである．抽象的

な点を表現できるものは紙に描いた点に限らないが，表現を通してのみ，数学的対象としての点を知覚し伝達できるのである．

一方，記号論的表現の役割は数学的対象の表現・伝達のみではない．記号論的表現は，われわれが数学的対象を扱い，数学的な活動を行なうことを可能にする．これがもう一つの記号論的表現の役割であり，Duval が強調する機能である (1995, pp. 1-14; 2006, pp. 106-107)．ここで言う数学的な活動とは，問題への解答や新たな数学的対象を生み出したり，妥当性を判断したりすることである．数学においては，表現を通してのみ数学的対象を扱うことができるため，数学的な活動や思考，さらにその発展は表現に大きく依存する．

Duval の前提は「sémiosis なしに noésis はない」(1995, p. 4) である．前者の sémiosis は，記号論的表現を捉え作り出すこと（つまり記号の操作）を指し，後者の noésis は，ある対象を概念的に把握することや他の対象との違いを区別すること，ある推理を理解することなどの認知的な行為とその結果を指す (idem., p. 4)．ここで，人間は記号論的表現を通してのみ数学的な活動や思考をなすことができるとし，sémiosis と noésis は切り離せないとするのである．

このことは，数学史からもよくわかる．代数記号を例に考えれば，16 世紀のカルダノらの時代と現代の代数記号を用いる時代では，可能な数学的思考が大きく異なる．カルダノらは，方程式を解くために図と日常言語を駆使した（cf. 『カジョリ初等数学史』 (1997, p. 319)）．しかし，現代では代数記号の計算のみで比較的容易に解けるのである．

この Duval の前提を認めるのであれば，研究者は，記号論的表現の分析を通して，学習者の考えや知識獲得の過程を明らかにでき，困難性の根源を発見できる (Duval, 2006)．逆に言えば，記号論的表現を通さない思考の分析は，知識獲得の過程や困難性の根源の解明には不十分なのである．

(3) 記号体系と記号論的表現のレジスター

記号論的表現もしくは記号の同種の集まりは，特有な規則とともに一つの体系を作り上げる（「記号体系」と呼ぶ）. 例えば，“1, 2, 3 …” という数字の記号と “+, –, =, …” の演算記号の集まりは，一つの記号体系を構成する．ここで，数学における異なる記号体系を考慮することが，Duval の認知記号論で鍵となる．実際，数学教育学の研究において，数学における記号論的表現の全体を一つの記号体系として捉え，異なる記号体系は必要ない，とする主張もある (cf. Ernest, 2008a)．しかしこの後者の立場は，数学や数学教育の特徴を統一的に説明しようとする立場であり，学習者の数学的な活動や思考とその発展を認知的側面から解明しようとする Duval の立場とは目的が異なると考える．

さて，Duval は数学における主な記号体系を「記号論的表現のレジスター (register of semiotic representation)」と呼ぶ（以下では，簡潔に「レジスター」とする）．ここで「主な」としたが，これはすべての記号体系が人間の知的活動や思考を可能にするわけではないからである．記号体系の中で，次の三つの基本的な機能を備えるものが「レジスター」である (Duval, 1995).

> 「ある決まった体系において，<u>何らかの表現として</u>特定可能である知覚的な形跡もしくはその集まりを構成すること．次に，体系に特有な規則のみにより，もと

の表現と比べてある知的貢献ができる別の表現が得られるような仕方で，表現を変換すること．最後に，ある体系において作られた表現を，別の体系の表現に転換すること．この際，後者の表現は表現されているものに関わる別の意義 (*signification*) を明らかにする」(p.21)[3]

それぞれの意味するところを例とともに見ていこう．第一の機能は，与えられた記号が何らかの対象を表現し，同じ体系において別の対象の記号とは区別されることである．例えば，代数記号体系の ab^2 と $(ab)^2$ は，体系の規則に従い，異なる数学的対象を示している．第二の機能は，体系内においてある表現から別の表現に変換できる，つまり別の表現を作り出せることである．本稿では，この機能を Duval にならい「処理 (treatment)」(2006, p. 111) と呼ぶ．例えば，演算記号を含んだ数記号体系では，2 + 3 という記号が 5 という記号に変換・処理できるところに，この機能が見られる．第三の機能は，ある記号体系の表現から別の記号体系の表現へ翻訳できる，つまり別の記号体系の表現を作り出せることである．本稿では，この機能を「転換 (conversion)」(Duval, 2006, p. 112) もしくは「翻訳」と呼ぶ．例えば，小数記号体系における 0.5 という記号と，分数記号体系の 1/2 という記号は，同じ数学的対象を表現しているため，一方の記号体系から他方へ翻訳可能である．

記号体系のこれらの三つの機能は，乱雑な考えの整理や情報の探求などを可能にする．数学であれば，様々な推論や計算を進めることが可能となる．一方，上の三つの機能をもたない，つまりレジスターでない記号体系も存在する．Duval (1995, p. 21) は，体系内での処理をほとんど可能にしない交通標識の記号体系やモールス信号を例としてあげている．また，先に触れたジェスチャーなども，記号体系内での処理機能を備えていないことや記号体系の規則が曖昧なことなどから，Duval の意味ではレジスターではない．

なお，「レジスター」の語は，Duval の理論に限らず，言語学でも利用される．Halliday が中心となって構築した「機能言語学 (Systemic Functional Linguistics)」と呼ばれる言語学の一領域がその例である (cf. Halliday and Matthiessen, 2004)．この領域の枠組みは数学教育学研究でも近年援用されるものだが (cf. Ernest, 2008a; 2008b)，そこでも「レジスター」の語が登場し，言語が使用される領域や場を意味するものとして用いられている．わが国では「言語使用域」と訳されるようである．しかし，この語は Duval のものと大きく異なり，関連はない．

(4) レジスター分析のもたらすもの

本稿では，レジスターの「処理」と「転換」の機能に焦点を当て，教科書に用いられている記号論的表現を分析する．換言すれば，記号論的表現の処理と転換の視点から三角比の概念理解を追求しようとするのである．一見，記号論的表現の操作のみに焦点を当てると，主体の認知的な活動の表層しか捉えていないように思える．しかし，用いられるレジスターを同定し，その処理と転換の仕方を明らかにすることは，認知的な活動について多くの情報を提供する．簡潔に処理と転換において明らかにできることを見ておこう．

レジスターの処理においては，個々のレジスターに固有な処理規則が存在し，レジスターによって，その規則が異なる．そのため，用いられたレジスターを同定するこ

とにより，可能となる処理操作や，操作に伴う考えが明らかにできる．例えば，小数と分数それぞれのレジスターを考えると，0.05 + 0.75 と 1/20 + 3/4 という記号はそれぞれ同じ数学的対象を表現している．しかし，計算結果の 0.8 と 4/5 を生み出す処理操作はそれぞれ大きく異なり，その処理に伴う考え（例えば，繰り上がり，通分など）も異なれば，経済性も異なるのである．

一方，レジスターの転換・翻訳の視点からすれば，相互に翻訳可能なレジスターにおいては,記号レベルで対応関係がある(例えば 0.5 と 1/2)．数学の問題を解決する過程では，あるレジスターから別のレジスターへこの対応関係を通して転換することにより別のレジスターで処理を施すことが可能となる．しかし，レジスター間の対応関係は必ずしも一対一とは限らない．対応関係をもつ記号もあれば，対応関係をもたない記号も存在する．そして，この対応関係つまり翻訳可能性は，ある程度事前に決定されているのである．さらに，たとえ対応関係があったとしても，相互に対応する記号それぞれが形成する「意義 (*signification*)」も「意味 (*référence*)」も一致しない．言語学のソシュールの言葉を用いれば，記号体系における「記号表現 (*signifiant*)」が異なれば，たとえ数学的対象（指示対象：*référent* もしくは *objet*）が同じであっても，主体がもつ「記号内容 (*signifié*)」は異なり，形成される「意義」や「意味」も異なるのである．ここで「意義」と「意味」は，フレーゲに倣って用いており，前者は「記号表現(*signifiant*)」と「記号内容」との関係，後者は「指示対象」と「意義」との関係として捉えられる (Duval, 1995, pp. 62-64)．したがって，レジスターの対応関係を明らかにすることにより，可能となる数学的な活動や思考，さらには子どもが形成可能な「意義」や「意味」が明らかになってくるのである．

4. 今日の教科書における三角比の定義

本章では，教科書における三角比の領域がいかなる数学的な活動・思考を可能としているか探るため，教科書に用いられている記号論的表現のレジスターとその本性を分析する．ここでは三角比の導入部(定義)，特に鋭角の三角比に焦点を当てる．分析には，川中ほか (2006), 飯高ほか (2007), 岡本ほか (2007), 3 社の教科書を用いた．

(1) 三角比の導入

三角比は高等学校の数学 I で最初に登場する．いずれの教科書も，相似から直角三角形の辺の比が一定であることに注目し，三角比を定義する．川中ほか (2006)の教科書では，図 1 のような相似の直角三角形をもとに，直角三角形の底辺と高さの比が一定であることを確認したのち，「PQ/OQ を角θの正接またはタンジェント (tangent) といい，tan θで表す」 (p. 108) と正接を定義している．

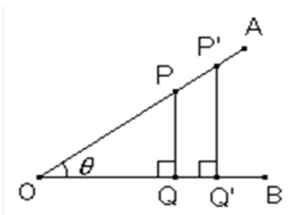


図 1　川中ほか (2006, p. 108)

その後さらに，図 2 のように，新たな直角三角形の図とともに定義がまとめられている．正弦と余弦の定義は，正接を定義したのち,ほぼ同様の文言と図で与えられる．3 つの概念が類似の導入方法を採っているため,以下では正接を中心に分析を進める．

正接
右の図の直角三角
形 ABC において

$$\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$a = b\tan\alpha$$

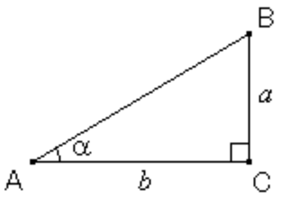


図 2　川中ほか (2006, p. 109)

(2)　教科書に用いられている記号体系

いずれの教科書でも，図表現，数表現，代数表現，日本語表現の記号体系が混用されていた．なお，本稿では，「図的な記号体系」「数的な記号体系」「代数記号体系」「日本語の記号体系」をそれぞれ簡潔に「図表現」「数表現」「代数表現」「日本語表現」と呼ぶことにする．

図表現は，相似の関係を示す際，定義を与える際に，例・例題などに用いられている．その記号は，図 1 と図 2 で見られるように，直角三角形とその部分（辺となる線分や角など），直角三角形に付随する図的な記号（直角の印と角の印など）が中心である．このレジスターでは，線分の長さや角度などを視覚的に捉え（例えば，どちらが長い，大きい，直角），処理することが可能になる．三角比については，特に代数表現における記号間の関係（例えば，角 A の対辺の長さが a）を視覚的に捉えること（この場合，代数表現と図表現間の翻訳がなされている）が可能になる．

数表現は，三角比の導入にはほとんど用いられていないが，例や練習問題で，辺の長さや角度，三角比の値を表現する際（例えば，$\tan 45° = 1$）に利用されている．このレジスターは，生徒がもっともなじみ深く，数値計算の処理が容易なことから非常に操作的な記号体系である．しかしながら，教科書では定義が一般的な形で与えられるため，次に記す代数表現が数表現の代わりに多く用いられている．

代数表現は，図表現と同様，頻繁に利用されている．相似の三角形において辺の比が一定であることが代数表現における処理によって示され，定義の命題も代数表現の記号で与えられている．さらに図の中にも代数記号が用いられている．上の図に関連したものでは，ローマ字やギリシャ文字を用いた P, Q, PQ, OQ, P’Q’, OQ’, A, B, C, a, b, θ, α や，分数の記号とともに少し塊となった記号の PQ/OQ, tan θ, a/b, さらにいくつかの記号を結ぶ “=” の記号などが代数表現の要素となっている．このレジスターは，具体的な数値を用いずに一般形を示したり，問題における未知数を表わしたりできる．さらに，操作的（代数処理ができる）であることは言うまでもない．

最後に，日本語表現（もしくは日常言語表現）は，図表現と代数表現との記号間の対応の説明（例えば「図のように」「半直線のなす角θ」），他のレジスターにおける操作・処理の説明（例えば「垂線を下ろす」），三角比の名称・定義（例えば「正接という」）などに用いられている．頻繁に用いられる記号体系ではあるが，その操作性が代数表現や数表現，図表現より乏しいことは否めない．特に，「正接」や「タンジェント」の語は，日常では用いられない数学用語であり，他の用語との関連がほとんどない．少なくとも，日本語として漢字だけを見れば，一定の比と「正接」の語とのつながりはない．若干「正しく接する」などともとの語の処理は可能だが，生成された語を正接の定義で与えられた他の記号体系（図表現，代数表現）へ翻訳はできない．このように考えると，「正接」や「正弦」，「余弦」の語は，教科書の中で日本語表現としてほとん

ど操作的でなく，レジスターとして捉えられるかどうかも疑問である．

(3) レジスター間の対応関係

ではこれらの異なるレジスターがお互いにいかなる関係にあるか明らかにしたい．ここで扱われている数学的対象は，点，線分，角，その大きさ，正接，比の値などである．これらの表現として用いられている記号を，記号体系間の対応・翻訳の関係から見ていく．

① 基本図形単位とその大きさ

数学的対象としての点，線分，角，その大きさの表現をまず見ていこう(以下, 点, 線分，角を「基本図形単位」と呼ぶ)．代数表現においては，これらはすべて P, Q, PQ, OQ, P’Q’, OQ’, A, B, C, a, b, θ, α の記号で表現されている．図表現においても，基本図形単位は，図 1 と図 2 のように表現される．点は線の交わるところ，線分はまっすぐな線，角は 2 本の交わる線で表現されている．同じ数学的対象を代数表現の記号と図表現の記号によってそれぞれ表現しているため，教科書では，基本図形単位においては記号体系間の対応関係が一対一に存在し，相互に翻訳可能と判断できる．

一方，基本図形単位の大きさ（長さ，角度）も，代数表現の記号のみならず，図表現の記号として表現されている．線分の長さは，線として図に示されており，角度は 2 本の交わる線として図に与えられている．ここで,線分の長さと角度いずれの場合も，図表現の記号は，ある基本図形単位とその大きさという二つの数学的対象を表現している．実際，図に描かれた線は，線分を表現しているとも，線分の長さを表現しているとも解釈できる．言語学の言葉を用いれば，一つの記号表現 (*signifiant*) が二つの指示対象 (*référent*) を表現していると言える．一方，代数表現においては，線分と線分の長さに異なる記号が用いられている（例えば，BC と a)．このことから，図表現と代数表現においては，記号体系間の対応関係はあるものの，一対一の関係ではないと判断できる．しかし，大きさの代数表現が図の中に与えられていることから，高等学校では，これらの対応関係に対して大きな認知的混乱は生じないであろう．

このように，基本図形単位とその大きさにおいては，代数表現の記号と図表現の記号との間に対応関係があり，ほぼ相互に翻訳可能と言える[4]. この翻訳可能性により，代数表現の記号を図表現上で視覚的に捉え処理できるとともに，図表現の記号を代数表現に翻訳し処理を施すことができるのである．

② 正接と比の値

次に正接と比の値の表現について見ていこう．代数表現では tan α や a/b, PQ/OQ などの記号が与えられている．まず，a/b や PQ/OQ は基本図形単位の大きさの記号を分数の記号で組み合わせたものであり，これらは比の値を表現したものである．ここで，この代数記号を比の値ではなく PQ:OQ のように関係（つまり，比）と見ることもできる．しかし教科書では,「PQ/OQ の値」や「値を求めよ」などの語が定義の前後に利用されていることから，比の値と捉えるのが妥当であろう．

さて，この比の値は図表現の記号としていかに表現されているか．教科書の図表現には，この比の値を表現する記号は見当たらない．実際，与えられた図において「この比の値 (a/b) はこの線分の長さ（もしくは面積）です」といった情報は得られない．

教科書では，対辺と底辺の比の値という数学的対象は，a/b という代数表現の記号でしか与えられていないのである．これは，a/b として定義されている tan α についても同様である．このことは当たり前のようだが，レジスターの視点からすると非常に重要な点である．代数表現の記号である tan α や a/b が図表現に対応する記号をもたず，相互に翻訳することができないとなると，その数学的対象（比の値，正接）の図表現での操作・処理も不可能となる．

なお，教科書の定義では，代数表現の PQ/OQ の比の値が一定であることが，図表現の複数の相似直角三角形により表現されている（図 1）．平行線の定理に慣れ親しんだ者や，複数の相似三角形を見れば一定の比の値を考えることができる者であれば，ここで，この図表現に「一定の値」といった記号内容を与え，代数表現の PQ/OQ = c や日本語表現の「一定の値」に翻訳可能であろう．しかし，これはあくまで値が一定であることに対する記号論的表現であり，正接の値の記号論的表現ではない．

③　等号：二項関係

正接の定義では $\tan \alpha = a/b$, $a = b \tan \alpha$ の記号が与えられ，等号が用いられている．等号は，数学的対象としての二項関係もしくは同値関係を表現した記号である．代数表現のみならず数表現にも用いられる．この数学的関係の表現を見ていこう．$\tan \alpha = a/b$ については，代数表現のみを考えれば，代数的に表現された何かの値 (a/b) が tan α という別の記号に恣意的に定義として結びつけられたものと捉えられる．ここでは，両辺が同値だという以上の意味はない．また，上で述べたように比の値 a/b は図表現に対応する記号をもたないことから，この等号に対応する記号が図表現に存在するわけでもない．したがって，代数表現の $\tan \alpha = a/b$ における等号を図表現へは翻訳できない．

一方，$a = b \tan \alpha$ の等号はどうであろうか．代数表現のみを考えれば，等号は両辺の同値関係を表現しているだけである．しかし，教科書では示されていないが，左右の記号の起源によっては，等号は他の記号体系に表現をもちうる．

例えば，$a = b \tan \alpha$の両辺の記号は，それぞれ図表現から翻訳されたものと考えられる．実際，a は図表現に対応する線分 BC をもつ．さらに，$b \tan \alpha$ の値も線分 BC として表現されていると考えうる．すると，両辺にある代数表現の記号が，それぞれ同じ線分として表現されているから等号で結ばれている，つまり等号は図表現における「同じ線分」であることを代数表現に翻訳したものと解釈できる．しかし，教科書で「線分 BC の長さを $b \tan \alpha$ と書き表わそう」としているわけでもないため，この解釈はあくまで勝手な解釈であろう．

また，$a = b \tan \alpha$ が $\tan \alpha = a/b$ から代数表現における処理の結果生じたものであるならば，等号は代数処理において保存されたものであり，図表現に対応する関係や記号は，やはりもたない．

④　日本語表現

ここまで主に代数表現と図表現の対応関係を見てきた．しかし，教科書で与えられた日本語表現も代数表現，図表現とそれぞれに対応関係をもつ．

図表現をもたなかった代数表現の記号 a/b は，「辺の比」もしくは「正接」などの日本語表現の記号に対応し，代数表現の等号は「〜を〜と書く」といった文章に対応

する．教科書では必ずしも代数表現のすべての記号に日本語表現の記号を与えているわけではないが，両者の記号体系には対応関係が多く，相互に翻訳可能である．

一方, 日本語表現と図表現の対応関係は, 代数表現と図表現の対応関係に近い.「辺の比」や「正接」の語は図表現に対応する記号をもたないが，基本図形単位とその大きさを表現する「点」「線分」「角」などの語は，図表現に対応する記号をもち，翻訳可能である．

(4)　分析結果のまとめ

以上，教科書の三角比の導入部における記号論的表現の分析結果を示した．今回は三社の教科書のみを分析に利用したが，三角比の導入部は高等学校数学 I の多くの教科書で類似したものであり，他の教科書にもあてはまる結果であろう．

ここまでの分析結果をまとめてみると，おおよそ図 3 のように図式化できる．図表現と代数表現の間には，点，線分，角などの基本図形単位において対応関係があるものの，正接の定義に用いられている比の値や等号においては対応関係がほとんどない．日本語表現においては，代数表現と多くの対応関係が見られるものの，図表現との対応関係は代数表現とそれとの関係と大きな違いはなく，さらに，記号体系内で処理を施すことが難しかった．

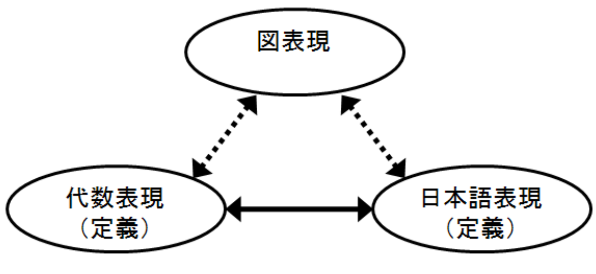


図 3　今日の教科書での記号体系間の対応

5．考察:今日の教科書がもたらす概念理解

ここでは，第 4 章で得られた分析結果をもとに，今日の教科書がもたらす三角比の概念理解について考察してみたい．

(1)　図表現の小さな役割の帰結

レジスターの転換・翻訳の視点からすれば，三角比の導入部において，図表現と代数表現（さらには日本語表現）の記号体系間の対応関係は貧困であった．定義に用いられる基本図形単位（点，線分，角）においては，相互に翻訳可能であったが，比の値や同値関係については，代数表現にはその表現をもつものの（a/b など），図表現にはもたなかった．そのため，図表現では，点や線分，角などの位置関係を示すことが主となり，三角比自体の処理や操作が行なえなかった．図表現が，記号体系として，限られた役割しか果たしていないと言える．このことは，代数表現のレジスターで三角比を扱うことに導く．代数表現において三角比に対する十分な意味を生徒に構築させることができればよいが，一つのレジスターのみでは限界があろう．

正弦の定義の概念理解を例に考えてみよう．ある直角三角形 ABC（角の対辺の長さを a, b, c とする）の正弦 sin A を考える．ここで，教科書のように，正弦が辺の比の値であるという考えを相似の直角三角形から学習していたとする．すると，正弦が，代数表現の記号としては m/n という形に表現されることに容易に導かれる．では，m, n に何を入れるのか．直角三角形は 3 つの辺をもつ．相似の直角三角形においては，いずれの 2 つを取ってもその比は等しく，3 つの組み合わせが可能である．そのうちいずれか 1 つの組み合わせが正弦の m, n に用いられ，他の組み合わせは正弦として認め

られない．さらに，正弦に用いる 2 辺において，その長さの比の値は，a/b と b/a の 2 つの可能性があり，どちらか一方のみが正弦である．前者が正弦であれば，後者は正弦ではない（実際，後者は「余割」「コセカント」と呼ばれる）[5]．

したがって，正弦を与えるためには，2 つの決定を下さなければならない（どの 2 辺，どちらを分母にするか）．しかし，教科書の図では，正弦が表現されておらず，図表現で，この 2 つの決定は下せないのである．代数表現でそのことをうまく決定できればよいが，$\sin A = m/n$ という記号のみでは，m と n に何を入れるべきか教えてくれない．すると，図表現のどの辺・どちらを分母にするかの決定は，教科書において数学的な根拠をもちえない．そのため，$\sin A = a/b$（対辺／斜辺）の理由づけを「教科書もしくは教師が言っているから」などという権威的な根拠に頼らざるを得なくなり，m, n に何を入れるのかは暗記に委ねられる．

このように，今回分析した教科書では，正弦等を図表現の記号で表現・処理できないために，権威と暗記に頼った正弦の概念理解しか可能にしないのである．

(2) 三角比の暗記法

なお，わが国の高等学校でしばしば用いられる三角比の暗記法（正弦・余弦・正接に筆記体の S, c, t をあてる）[6]は，まさに前節の問題を解消するためのものである．この暗記法は，図表現が本来備えるべきもの,教科書に欠けていたものを補っている，と捉えられる．実際，この暗記法では，図表現が，用いる 2 辺と分母・分子の位置の 2 点を同時に教えてくれる．しかし当然ながら，暗記法で与えられた図的な意味は，数学的な意味ではない．筆記体の S, c, t は数学的対象の図表現の記号（例えばある線分）ではないため，数学の他の概念との関係をもつことや何かの処理を施すことはできない．つまり，この暗記法では，教科書同様，図表現というレジスターで三角比を扱えず，教科書以上の概念理解を可能とはしないのである．

(3) 実社会の文脈：三角比の実用性

以上のように，レジスターの視点からすれば，教科書の定義も三角比の暗記法も大した概念理解を促さない．ところで，三角比の領域では，測量など現実世界の文脈がしばしば利用される．これは，生徒が数学の意義を感得できるように，と考えられたものであろう．測量の文脈は，生徒の概念理解を促進するか．

三角比の起源は，測量や天文学の計算にあると言われている．すると，三角比を必要とする測量の文脈を三角比の導入に利用することは，三角比という概念に大きな意味を与えそうである．しかし，レジスターの視点からすると，この文脈は必ずしも概念理解を促進するものではない．なぜならば，測量の場面は，新たなレジスターを三角比に提供するわけではなく，新たな処理や転換を既存のレジスターに促すわけでもないからである．教科書で与えられた現実の場面はすでに紙上に表現されており，それを少し一般化した紙上の三角形の図と比べてみても，記号体系としては，さほど違いがない．小学校の算数では，現実社会の文脈や具体物の利用がしばしばなされるが，これらは三角比の測量の文脈とはその本質が大きく異なるのである．例えば，四則演算の授業で具体物（例えば，おはじき）を利用することは，演算において数表現とは異なるレジスターを用いることである．実

際，具体物には操作や配列の規則が存在し，処理が施せるものである．一方，測量の場面は，レジスターとして何か特別の処理を施せるものでもない．

なお，これらの見解は，あくまでレジスターの視点から測量の文脈を捉えた場合のものである．別の視点からすれば，別の概念理解をもたらすとの判断も可能だろう．例えば，概念が必要となる状況を考慮に入れる教授学的状況理論 (Brousseau, 1997) の視点からすれば，測量は三角比の必要性や発生に対して一つの文脈を与えると判断されうる．したがって，いかなる分析枠組みも十全ではなく，説明できる概念理解は用いる枠組みによるのである．しかし，本稿から，少なくともレジスターの視点が三角比の概念理解の中心的な部分を説明していると言えるのではないか．

6. 19 世紀の教科書における正弦・余弦等

ここまで，今日の教科書の三角比におけるレジスターの特徴，特にレジスター間の対応関係が貧困であることを示し，それがもたらす三角比の概念理解について考察した．しかし，これはあくまで今日の教科書においてのことである．数学が発展してきた過程では，レジスターの働きが大きく異なる．以下，異なる概念理解の可能性を示し，今日の教科書のもたらす概念理解に対する比較対象を提示するとともに，三角比指導へのヒントを示したい．

三角比は，それに相当するものが古くは古代ギリシャ時代から異なった地で測量に使われてきたと言われる．しかしそこまでさかのぼらずとも，18, 19 世紀の平面三角法や測量の教科書を見れば，そこにはレジスター間の対応が非常に多い，特に図表現での処理を可能にした「三角比」の定義[7]が見られる．

正弦・余弦等は，ヨーロッパの教科書を見ても，わが国の教科書を見ても，19 世紀頃までは円における弧（もしくは角度）に対する線分として定義されていた[8]．例えば，重版を重ねたラクロワの三角法の教科書 (Lacroix, 1807) では，正弦が「弧の正弦 (*sinus*) は，その弧の一方の端点から他方の端点を通る半径へおろした垂線である」(p. 4) と定義されており，余弦は「任意の弧の余弦 (*cosinus*) は，その弧の残り (*complément*) の正弦であり，中心と正弦の足との間の半径の一部に等しい」(p. 4) とされている．線分として定義されているために，フランスでは正弦・余弦等をまとめて「三角線 (*lignes trigonométriques*)」(cf. Lacroix, 1807; Guilmin, 1863)と呼んでいた．また，わが国においても，福田理軒 (1856) の『測量集成 四』の二編巻之一では，「八線」の名のもとに線分の名称として，図 4 のようにある角度に対する線分として正弦・余弦等が定義されている．ここで，正弦は角の正面の半弦であり，余弦は余角の正弦つまり余角の正面の半弦であり，正接は正面の接線との交点までの線分である．

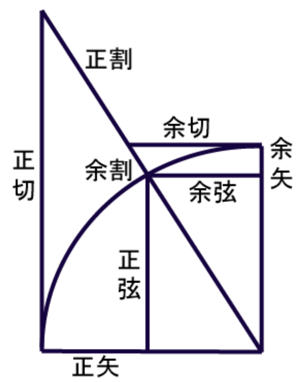


図 4　福田理軒『測量集成 四』(1856)

このように正弦・余弦等が図表現で線分として定義されると，レジスターにおける

処理と対応関係は，今日の教科書と大きく異なる．三角比を図表現で扱うことのできなかった今日の教科書に対し，古い教科書では図表現で処理することが可能になるのである．例えば，正弦と余弦の値を比べること，正弦と余弦のそれぞれの長さの自乗の和が円の半径の自乗になること，余弦と正弦との比が正接と半径の比に等しいこと（図 4 のもっとも大きな直角三角形は底辺が半径で高さが正接，その中の直角三角形は底辺が余弦で高さが正弦)，などが図表現の処理で導かれる．さらに，図表現で定義されているため，先に述べた正弦にどの 2 辺を用いるか, *a*/*b* か *b*/*a* かといった問題も生じない．

また，日本語表現においても，それぞれの漢字が図表現において対応する記号が存在し，日本語表現から図表現への翻訳も容易になる．今日の教科書では,「正接」などの日本語表現から別の日本語表現はほとんど生成できない．生徒にすれば,「正接」でなくとも他のいかなる語でも変わりはない．しかし，上述の正弦・余弦等の定義（図 4）では，日本語表現における処理も可能になり，レジスターとしての機能も備わる．例えば,「余弦」から「余角の弦」を作り出すことができるとともに，日本語表現の「余角の弦」から，さらに図表現の対応する角や線分への翻訳も可能となる．つまり，図表現と日本語表現の間で定義に関して，対応関係をもつことができるのである．

ここで示した正弦・余弦等の定義におけるレジスターの相互関係をまとめると，図 5 のように図式化できるだろう．三つの記号体系間の対応・翻訳においても，さらにそれぞれの記号体系での処理が今日の教科書以上に可能になる．つまり，これらのレジスターのもたらす概念理解は，今日の教科書より豊かなものとなるのである．

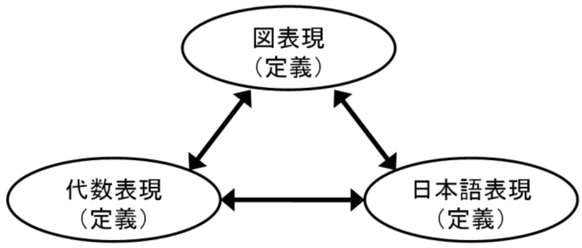


図 5　測量集成での記号体系間の対応[9]

7. おわりに

本稿の目的は，レジスター分析により，教科書の三角比導入部の定義が生徒にいかなる数学的な活動や思考，また，いかなる概念理解をもたらすかを示すことであった．その結果として，今日の教科書が複数のレジスターでの十分な処理と転換を可能としないことを明らかにし，それが暗記中心の学習に導いていること，教科書のみを用いて三角比の概念を十分に理解することは難しいことを示した．特に，今日の教科書で与えられている図表現はレジスターの役割を十分果たしていなかった．三角比領域の学習・指導において暗記依存を望まないのであれば，代数表現のレジスターだけでなく，三角比自体の処理をはじめとする操作（認知活動）を可能とする他のレジスターが必要である．

また第 6 章では，古い教科書から正弦・余弦等を線分として定義する場合を取り上げ，そこでのレジスターの機能が，今日の教科書と大きく異なることを示した．この定義で与えられた図表現は，レジスターとしての機能を果たしており，三角比の操作を可能にした．近年，三角比を線分もしくは線分の長さとして導入することが提案されている（長岡，2003；熊倉，2006; 楠田，

2007)．これらの提案が三角比の概念理解をより豊かにすることを本稿が裏付けていると言えるのではないか．

なお，本稿では，あくまで平面幾何における三角比についての扱いについて述べた．これが解析領域で三角関数として拡張して扱われる場合は，座標表現など新たなレジスターが用いられることもあり，その概念理解の様相はさらに異なったものになると思われる．その検討は今後の課題としたい．

注

[1] 本研究は少し前に実施したものであり，分析した教科書はそのときのものである．ただし，三角比の定義の仕方に実質的な変化はない．

[2] 本稿では，「概念理解」という語と「意味」という語をほぼ同義に用いる．いずれもレジスターという概念によってモデル化されるものである．しかしながら，「意義 (*signification*)」や「意味 (*référence*)」という語は，言語学の概念でもあるため，その際は明記することにする．

[3] 筆者訳．下線は原文で斜体．

[4] 基本図形単位とその大きさにおける対応関係をより詳細に見ると，翻訳規則が存在する．大文字のローマ字が点に，大文字のローマ字を二つ合わせたものが線分に，小文字のローマ字が線分の長さに，ギリシャ文字は角度に対応している．

[5] これは比としてやや特殊である．黄金比であれば，$(\sqrt{5}+1)/2$ としても，その逆数である$(\sqrt{5}-1)/2$ としても，さほど問題はないが，三角比はそうはいかない．

[6] フランスや米国では，この暗記法ではなく，SOH, CAH, TOA (O: opposite; H: hypotenuse; A: adjacent) の暗記法がしばしば用いられる．

[7] 本節で述べるように，18, 19 世紀の教科書では，線分の名称として「正弦」や「余弦」の語が用いられているため，「三角比」の語は不適切である．そこで本稿では，線分で定義されている場合には，「三角比」の代わりに「正弦・余弦等」の語を用いる．

[8] 線分として正弦・余弦等を定義した場合，線分の長さがその値となる．すると，単位円を用いなければ，当然ながら今日の三角比の値には対応しない．Lacroix (1807) では，単位円ではなく半径 R の円で定義され，様々な公式に半径 R が出てくる．例えば，加法定理は，$\sin(a+b) = (\sin a \cos b + \cos a \sin b) / R$ である (p. 30)．また，福田理軒 (1856) においても，半径が 10,000,000 の場合の正弦・余弦等の長さが求められている．一方フランスでは，19 世紀中期になると，線分として正弦・余弦等を定義したのち，その値を単位円における線分の長さとする (Guilmin, 1863, pp. 3-5)．

[9] この図では，「代数表現」としたが，『測量集成　四』では，代数表現の代わりに数表現が用いられている．

参考文献

Borasi, R. (1992). *Learning mathematics through inquiry*. Portsmouth, New Hampshire: Heinemann.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 – 1990.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné* (2nde édition). Grenoble: La Pensée Sauvage (1ère édition, 1985).

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(2/3), 215-230.

De Villiers, M. (1998) To teach definitions in geometry or to teach to define? In A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 248-255). Stellenbosch: PME.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine.* Bern: Peter Lang.

Duval, R. (2006). A Cognitive Analysis of

Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, 103-131.

Duval, R. (2017). *Understanding the mathematical way of thinking: The registers of semiotic representations*. Cham: Springer.

Edwards, L., Radford, L. and Arzarello, F. (Eds.). (2009). Gestures and multimodality in the construction of mathematical meaning. *Educational Studies in Mathematics*, 70 (2).

Ernest, P. (2008a). Towards a semiotics of mathematical text (part 2). *For the Learning of Mathematics*, 28 (2), 39-47.

Ernest, P. (2008b). Towards a semiotics of mathematical text (part 3). *For the Learning of Mathematics*, 28 (3), 42-49.

Guilmin, P. A. (1863). *Cours élémentaire de trigonométrie rectiligne* (3ème édition). Paris : A. Durand.

Halliday, M.A.K. and Matthiessen, C.M.I.M. (2004). *An introduction to functional grammar 3rd edition*. London: Arnold.

Lacroix (1807) *Traité élémentaire de trigonométrie rectiligne et sphérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie* (4ème édition). Paris : Chez Courcier (1ère édition, 1789).

Ouvrier-Buffet, C. (2006). Exploring mathematical definition construction processes. *Educational Studies in Mathematics*, 63, 259–282.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

飯高茂ほか (2007). 数学 I, 東京書籍.

大島利雄ほか (2003). 数学 I [高等学校指導書], 数研出版.

岡本和夫ほか (2007). 高校数学 I, 実教出版.

小倉金之助補訳 (1997). カジョリ初等数学史（復刻版）, 共立出版.

川中宣明ほか (2006). 改定版 数学 I, 数研出版.

国立教育政策研究所 (2004).「平成 14 年度高等学校教育課程実施状況調査科目別報告書の概要」(http://www.nier.go.jp/kaihatsu/katei_h14/)

楠田貴至 (2007). 「三角比の指導についての提案」, 数研通信, 57 号, 10-12.

熊倉啓之 (2006). 「学ぶ意義を実感させる三角比の指導に関する研究」, 日本数学教育学会第 39 回数学教育論文集. pp. 335-360.

清水美憲 (2000). 「数学的定義の構成活動による定義の役割の理解に関する研究」, 数学教育学論究, 73/74, 3-26.

長岡耕一 (2003). 「三角比の指導に関する考察と指導順序についての提案」, 日本数学教育学会誌, 第 85 巻, 第 9 号, 32-37.

中原忠男 (1995). 算数・数学教育学における構成的アプローチの研究. 聖文社.

中村幸四郎他訳・解説 (1971/1996). ユークリッド原論（縮刷版）. 共立出版.

ヒルベルト, D. (2005). 幾何学基礎論（中村幸四郎訳）, ちくま書房.

福田理軒著, 花井喜十郎編 (1856). 測量集成 四, 浪花：敦賀屋九兵衛.

松澤亮ほか (2003). 高校数学 I [高等学校指導書], 実教出版.

ラカトシュ, I. (1980). 数学的発見の論理：証明と論駁（佐々木力訳）, 共立出版.

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.39-48

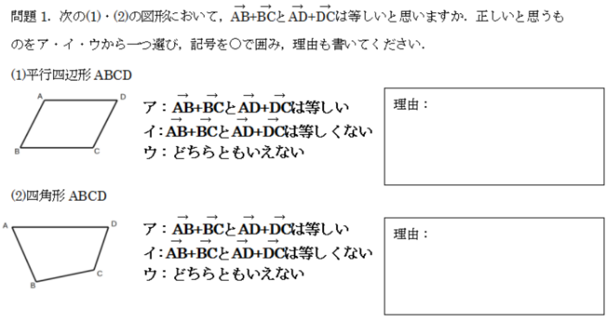
高等学校数学Ｂ「ベクトル」における概念形成過程に関する研究

佐々木　文弥
上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

昨年度末，高等学校学習指導要領が改訂された。今回の改訂の基本方針の一つとして「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進が挙げられている。高等学校学習指導要領解説数学編理数編には，「数学に関わる事象や，日常生活や社会に関わる事象について，数学的な見方・考え方を働かせ，数学的活動を通して，新しい概念を形成したり，よりよい方法を見いだしたりするなど，新たな知識・技能を身に付けてそれらを統合し，思考，態度が変容する「深い学び」を実現することが求められる。」(p. 133) と記述されている。現在，数学Ｂに位置づけられている「ベクトル」は，全く新しい概念を学ぶことができる単元であると考える。筆者は，ベクトルの学習は新たな概念を形成することや，思考，態度が変容でき，「深い学び」を実現できる単元の一つだと考える。しかしながら，学習指導要領改訂に伴い，これまで数学Ｂに位置づけられていたベクトルは，新設された数学Ｃへ移行となり，一部の高校生のみが履修可能の単元となった。その背景として，ベクトルには全く新しい概念を学習するにあたり，様々な困難性が指摘されていることが考えられる。

ベクトルの学習について，白川(2004,2005)は高校 3 年生を対象としたベクトルの理解に関するアンケート調査を行っている。その結果，学習者には内積の定義の混乱や，ベクトルの相等性の無理解などを明らかにしている。佐々木（2018）は，ベクトルを学習し，数年経過した大学生に対し次の図 1 に示したアンケート調査を行った。


問題 1．次の(1)・(2)の図形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しいと思いますか．正しいと思うものをア・イ・ウから一つ選び，記号を○で囲み，理由も書いてください．

(1)平行四辺形 ABCD

ア：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しい
イ：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しくない
ウ：どちらともいえない

理由：

(2)四角形 ABCD

ア：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しい
イ：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は等しくない
ウ：どちらともいえない

理由：

図１：大学生に対するベクトルのアンケート（佐々木，2018）

この問題に対し，「(2) 四角形 ABCD」を誤答（イ・ウ）する回答者が 28 人中 11 人おり，「平行四辺形ではないから」や,「辺の長さが異なるから」を理由として挙げていた。この調査から，ベクトルを学習し，数年経過した大学生には，ベクトルに対して適切な概念が身についていない事が明らかとなっている。

ベクトルは，算数・数学学習において全く新しい概念を身につけなければならず，高等学校の数学において，理解が困難な場面が多い単元である。山口（1995）は，ベクトルを規定する,「大きさと向きを持つ量」という表現が生徒にとって捉えづらいことや，位置が異なっても大きさと向きが等しいならば同じものとみなすベクトルの同等を理解することが,学習者にとって困難であると述べている。

実際の指導場面での「ベクトル」の学習においては,「ベクトルは矢印である」というような，誤った「ベクトル」概念が形成されていることがよく見受けられる。「ベクトル」の適正な概念形成のためには,現在の「ベクトル」学習における困難性とその要因を明らかにする必要がある。その上で，学習者がどの様にベクトルの困難性を乗り越え，素朴概念を新しい概念へと修正し，ベクトルの概念を形成していくのか，その過程を捉えなければならない。

本研究の目的は，心理学および数学教育学の概念変化研究を手がかりとし，高等学校数学B「ベクトル」の学習において，学習者がどの様にして「ベクトル」の適正な概念を形成していくのか，その概念形成過程を明らかにすることである。

2. 「ベクトル」の学習における困難性の要因

ベクトルの学習には，図など視覚的なものによる表現を用いることが非常に多い。ここでは，図や記号には，どのような機能を有するのか,Skemp(1973)の「心像」と,中原(1995)の「図的表現の抽象性モデル」を参考にする。

2.1. R.R.Skemp (1973) の「心像」(mental image)

Skemp (1973) は,「心像」(mental image)の特徴を，次のように説明している。

「すでに早く 1880 年代に，ゴールトンは，人々は極めて異なる種類の心像を持つことを見出している。ある人は，ゴールトンと同様，強い視覚的心像をもっているし，全く心像をもたず，主として言葉で考える人もある。これは，今日も依然として通用する。そうしてまた，どちらかを多用するにしても，両方を使いうる人もある（しかし，どんな種類のイメージを使うか，あるいは，実のところイメージを使うか使わないかさえ決定するのは容易ではない)。」(Skemp, 1973, p. 83 / 訳：藤永・銀林)

視覚的なイメージを持つか，持たないかは学習者に依存するものであり，どの様なイメージを持つのかについてもまた，学習者に依存するものである。

次に，Skemp (1973) は,「視覚的記号」という語を用いて，次のように写真と言葉の違いを説明している。

「写真と言葉との 2 種類の記号の主な相違とは，一方が，その集合中の典型であるように見えるのに対し，他方は，そのようには聞こえないという点である。それゆえ，この視覚的記号は，対応する言語記号よりも，いかなる意味でも，その概念とより密接な結び付きをもっている。同じことが，幾何学的記号についてもいえる。次は幾何学的記号である。

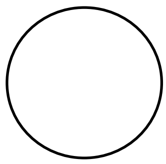


図 2：Skemp (1973) による幾何学的記号の例

これは，それに対応する言語記号である。

円

図 3：Skemp (1973) による言語記号の例

幾何学的記号の概念への近似性は,利点と欠点の双方をともに含んでいる。利点は，概念の特性を忠実に喚起できる点にある。このことは，とくに，幾つかの概念を一緒に視覚的に表現しようとするときによくあてはまる。図式的表現は言語的表現にくらべてこれらの概念のあいだの関係をはるかに明確に示すことができる。

視覚的記号のもつ不利な点は，それを伝達するためには書いて見せなければならない

ことである。―しかし，紙や鉛筆，黒板やチョークを使うのはやさしい。問題は，視覚的記号が特定の円や接線ではなくて，変数―現に見ているような中心や半径をもったこの円ではなく円一般を表すことを銘記しておかなければならないことである。言葉は，必然的にこの事情を意識させる。図式は，特定の円その他しか表すことができないから，われわれは，特定の性質を無視して，その表象する一般的性質を扱うように努めなければならないのである。それは，より具体的な段階にあるから，われわれは，自分自身である種の抽象を行わなければならない。」(Skemp, 1973, p.88-89 / 訳：藤永・銀林)

このことから，言語的記号と視覚的記号には，利点，欠点の両方を持ち合わせていることが分かる。視覚的記号の利点は，対応する言語的記号よりも，その概念とより密接な結び付きをもっていることである。視覚的記号の欠点は,他者への伝達が困難なものであり，特定の条件におけるものを示しやすいことが挙げられる。言語的記号の利点は，他者への伝達が容易なものであり，一般的性質を示しやすい。言語的記号の欠点は，視覚的記号に比べ，対象の概念との結びつきが弱いことである。

Skemp (1973) が述べている通り，視覚的記号は，その概念の特殊なものしか表すことができない。そのため，学習者は自分自身である種の抽象を行わなければならない。ベクトルの学習にもこのことは適用できるだろう。「向きと大きさをもった量」として黒板やノートに描かれる「ベクトル」とは,「有向線分」を示すものであり,視覚的記号にすることで,「位置に左右されない」性質は表象されなくなる。そのため，ベクトルの学習において困難性がみられる学習者には，与えられた視覚的表現を個人の中で抽象化できていないことが考えられる。このことは，ベクトルの学習における困難性の要因として挙げることができる。

次に，中原（1995）を参考にし，視覚的表現の類別を行う。このことは，ベクトルの学習の困難性の要因を更に浮き彫りにすることを狙いとしている。

2.2. 中原 (1995) の先行研究とベクトルの図的表現の抽象性レベル

次に，ベクトルの図的表現の抽象性レベルについて述べる。中原（1995）は，図的表現を表現方法の抽象性レベルに着目をして次の3つのレベルに分類している。

表1：中原（1995）による図的表現の抽象性レベル（p. 238）

具象的レベル	…実物の描写やそれに近い表現
抽象的レベル	…対象を基本的要素に還元して表現
記号的レベル	…符号化された記号による表現

この3つのレベルにおいて，中原（1995）は，数学教育における例として，金魚が12匹いることを表す次の図のような図的表現が挙げている。

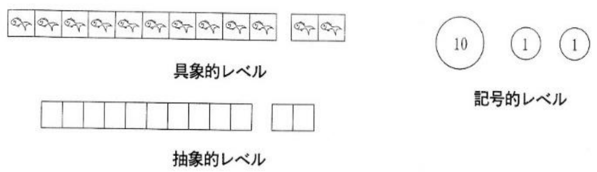
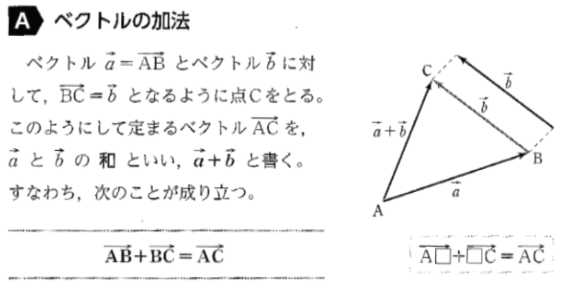


図4：中原（1995）による数学教育における抽象性レベルの例（p. 239）

これらの分類をもとにし，次に，数学Bの教科書（数研出版）におけるベクトルの図的表現を考察することとする。次に示すのは，現行の学習指導要領における数学Bの教科書（数研出版）による図の記述である。



A ベクトルの加法

ベクトル $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ とベクトル $\vec{b}$ に対して，$\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ となるように点Cをとる。このようにして定まるベクトル $\overrightarrow{AC}$ を，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の **和** といい，$\vec{a}+\vec{b}$ と書く。すなわち，次のことが成り立つ。

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

図 5：ベクトルの加法の教科書による記述（数研出版，2017，p. 8）

図 5 から，ベクトルの教科書による図的表現として，ベクトルを矢線で表している部分は，抽象的レベルによって記述されている。また，抽象的レベルに付随した記述として，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いた記号的レベルでの記述がなされていることがわかる。

ベクトルの学習における図的表現の抽象性レベルとして，具象的レベルでの記述はかなり難しいだろう。例えば，力の向きを表すような図を用意したとしても，ベクトルを矢線として表すことで，必ず抽象的レベルでの記述が含まれてしまうと考える。次に，具象的レベルと抽象的レベルの特徴の違いによって生じる困難性について述べる。

中原（1995）は具象的レベルによる表現と抽象的レベルによる表現とは，その機能に違いがあることを指摘し，次のような違いを挙げている。

表 2：中原（1995）による抽象性レベルの特徴（p. 239）

具象的レベル…特殊的，個別的な意味を伝える
抽象的レベル…一般的，包括的，本質的な意味を伝える

このことは，ベクトルの困難性に関わる大きな要因であると考えられる。具象的レベルにて，特殊的，個別的な意味を伝える。抽象的レベルにおいては一般的，包括的，本質的な意味を伝える違いがある。それに対し，ベクトルの学習では，具象的レベルの図的表現を記述することは非常に難しい。そのため，前節にて挙げた，ベクトルの学習においての困難性として示された,「ベクトルは位置に依らないこと」といった困難性の要因として，本来ならば具象的レベルでの図的表現から，抽象的レベルでの図的表現に段階を踏んで学習がおこなわれるのに対し，ベクトルの学習では，抽象的レベルのみでしか学習を行うことができないため,学習者にとって,特殊的，個別的な性質のものと一般的，包括的な性質のものの区別が非常につきにくいのではないかと考えられる。

2.3. 中原（1995）の表現方法の抽象性レベルについての分類

ここでは，具象的レベルの説明である「実物の描写やそれに近い表現」の捉え方について考察を進める。中原（1995）は,「金魚」という具体物を用いて具象的レベルを表現しているが,先述したようにベクトルそのものは,「動き」を表すものであるため，具象的レベルの図にすることはできないだろう。具象的レベルについて考察を進めるため，具象的レベルを 2 つの視点により更に分類をすすめる。1 つ目の視点として,具象的レベルを,「動的」なものと「静的」なものに分類することである。2 つ目の視点として，具象的レベルを「現実の場面で記述可能」なものと「数学の世界でのみ説明される」ものに分類することである。それぞれの視点を以下に考察していく。

2.3.1. 具象的レベルを「動的」なものと「静的」なものに分類すること

「静的」なものとは，中原（1995）の例示である「金魚が 12 匹」や，加減乗除の計算などが挙げられる。「静的」なものには，具体物そのものを用いて表現することが可能である。

「動的」なものとは,「ベクトル」や,「速さ（割合)」などが挙げられる。ベクトルは，図的表現をしようとすると，有向線分や，記

号表現を用いなければならず，抽象的レベルまたは記号的レベルでの記述になってしまう。そのため，具象的レベルで表現することは非常に困難である。速さについても，動的な表現を図として表すのは非常に困難である。

2.3.2. 具象的レベルを，「現実の場面で説明可能」なものと「数学の世界でのみ説明されるもの」に分類すること

「現実の場面で説明可能」なものとは，先に挙げた「金魚が 12 匹」，「速さ（割合）」などが挙げられる。その要素として，現実の場面に着目した文章題を作成できたり，実際の体験により問題の解答を確かめたりできる，ということが挙げられる。

「数学の世界でのみ説明されるもの」とは，「負の数の乗除」，「虚数，複素数」の数概念に関わるものが挙げられる。負の数の乗除の文章題では，「東の方角を正，西の方角を負とすると…」という前置きがよく見られる。先に述べた「現実の場面で説明可能」と大きく異なる点は，学習者の直観から離れ，現実場面を形式的に数学の世界に移行させなければならないことである。実数から拡張される「虚数，複素数」においては，現実の場面において説明ができるものは少ないと考える。この分類においては，「ベクトル」は，「現実の場面だが説明不可能」であるだろう。なぜならば，「物体を押す力」や「引っ張られる力」などは，速さと同じで直接目に見えなくても体験によって学習者が感得することが可能である。その点においては，「現実の場面」を表していると言える。しかしながら，「説明可能」という点では先述した通りベクトルそのものを具象的に表記することは不可能であるため，数学の世界でしか説明ができない。

2.4. 具象的レベルの分類について

以上の具象的レベルに対する捉え方から，具象的レベルに関して，次の図 6 を作成した。

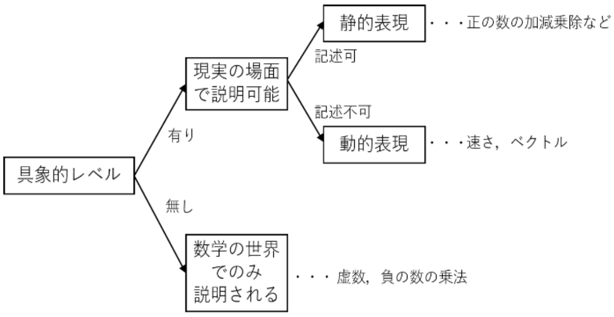


図 6：具象的レベルの分類

図 6 による分類とは，第一に，具象的レベルが有るものと具象的レベルが無いものに分類し，具象的レベルが有るものは，現実の場面で説明が可能であり，具象的レベルが無いものは数学の世界でのみ説明される。数学の世界でのみ説明されるものとは，例えば，負の数の乗法や虚数など，数学の言語の中から演繹されるものを指す。他方，現実の場面において説明可能なものとは，現実の場面に着目した文章題を作成できたり，実際の体験により問題の解答を確かめたりできるものが挙げられる。

さらに，現実の場面で説明可能なものを，図示による記述が可能であるか分類し，記述が可能であるものを静的表現，記述が不可能であるものを動的表現として捉える。記述が可能である静的表現とは，正の数の加減乗除など，具体物をそのまま図示することができるものが挙げられる。記述が不可能である動的表現とは，ベクトルや，速さなどが挙げられる。なぜならば，ベクトルを例に挙げると，「物体を押す力」や，「引っ張られる力」，「風力とその風向き」など，直接，目には見えなくとも実体験によってその存在を感得することが可能である。しかしながら，視覚的表現で図示するときに，ベクトルそのものを具象的レベルでの表現をすることは不可能であり，有向線分による抽象的レベルや，$\vec{a}$ や $\vec{b}$ といった記号的レベルの表現でのみ記述が可能である。

以上の分類により，ベクトルの単元は動的な表現を用いる単元であり，現実の場面で説明が可能であるが，具象的レベルでの視覚的な記述が困難である単元だと捉えることができる。しかしながら，現実の場面による説明が可能であるにもかかわらず，学習者はベクトルを抽象的レベルや記号的レベルで捉えていることが多い。具象的レベルとして捉えることが可能であるのに，抽象的レベルで捉えてしまうことによる問題点として，中原(1995)の表現方法のレベルの違いによる，伝達される特徴の違いが挙げられる。具象的レベルによる特殊的，個別的な特徴を，数学の世界において抽象的レベルに移行させることで，一般的，包括的，本質的な意味が見えてくるような学習段階が望ましい。しかしながら，抽象的レベルのみしか獲得していない学習者には,学習したことが一般的な性質であるのか,特殊的な性質であるのかの判別が非常に難しいものとなるだろう。このような表現方法の抽象性レベルによって，前節で挙げた佐々木（2018）のアンケート調査や，山口（1995）の指摘に見られるような困難性を生じてしまう一つの要因として同定できる。

3.本研究における「概念変化」の捉え

研究目的を達成するため，本研究では，心理学研究における「概念変化」と，算数・数学学習における「概念変化」の二つの視点を用い，その上で，認知的構造に関する研究であるVinner（1991）の「概念イメージ」の視点を用いる。佐々木（2018）は，心理学研究における概念変化と，算数・数学学習における概念変化を踏まえた上で，ベクトルの学習における概念変化の捉えを考察した。本研究では，佐々木(2018)を踏まえた上で，Vinner（1991)の「概念イメージ」の概略を記述し，概念変化の捉えを確立する。

3.1.数学学習における「概念イメージ」

Tall＆Vinner（1981）は，数学学習において,「概念イメージ」を次のように端的に述べている。

「概念イメージとは概念と結びついた総合的認知構造であり，心的図式や関連した性質や過程などすべてを含む。それはあらゆる種類の経験を通じて何年もかかって築き上がり，個人が新たな刺激を受けたり成熟したりするにつれて変わる。」（Tall ,Vinner, 1981, p.152 / 訳:磯田・岸本）

「概念イメージ」とは，概念と結びついた総合的認知構造であると捉えている。この認知構造を用い，概念変化を捉えていく。以上のことを踏まえた上で本研究における概念変化の捉えを確立する。

3.2. 本研究における「概念変化」の捉え

佐々木（2018）の概念変化研究の概観を踏まえ,本節では,本研究における「概念変化」の捉えについて，心理学における概念変化研究，算数・数学教育における概念変化研究，Vinner（1991）の数学学習における「概念イメージ」に関わる研究を加え，3 つの先行研究から立場を明らかにしていく。

算数・数学学習における，概念変化に関する先行研究には藤村（2011）や真野（2010）がある。藤村（2011）は概念変化について，多様な知識が関連付けられている知識構造の質的変化のプロセスだと捉えている。真野（2010）は概念変化を単なる知識の累積的な成長として捉えず，素朴概念が新しい概念と相互作用し，全面的に再構成されることだと述べている。これらは心理学研究のVosniadou(1994)の概念変化の捉え方と異なり，Vosniadou(1994)は既有の概念が新たな概念に「取り込むように変化」することだと述べている。本研究ではVinner（1991）の概念イメージ，Vosniadou(1994)，藤村(2011)

と真野（2010）の記述を取り入れる。その上で，本研究における「概念変化」の捉え方を明確にする。概念イメージには，素朴概念の中のものと，新しい概念の中のものがある（Vinner, 1991）。個人の概念定義は 2 つあり，素朴概念の中のものと，新しい概念の中のものがある（Vinner,1981）。素朴概念の中の個人の概念定義と素朴概念の中の概念イメージ同士の相互作用を経ることによって素朴概念の中の概念イメージが新しい概念の中の概念イメージに取り込まれるように変化し，全面的に素朴概念が新しい概念に再構成されることを本研究における「概念変化」の捉え方とする。次の図 7 は，本研究の数学学習における「概念変化」の捉えを表している。

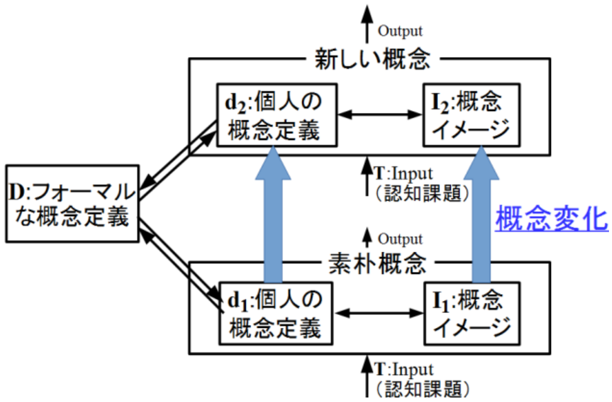


図 7：数学学習における「概念変化」の捉え

認知課題（T）が与えられると，素朴概念の中の個人の概念定義(d_1)と概念イメージ(I_1)を用いて課題の解決（Output）へと向かう。素朴概念によって行われる問題解決は，誤った概念定義や完全でない概念イメージを用いることがあるため，適切な課題の解決をすることができない可能性がある（Vinner, 1991）。そのため，新しい概念を身につけることで，与えられた認知課題を適切に解決することができるだろう。

素朴概念の中の個人の概念定義（d_1）は，教科書や教師の働きかけ等のフォーマルな概念定義（D）により，新しい概念の中の個人の概念定義（d_2）へと変化する。しかし，d_1 を d_2 に変化させることができたとしても，概念イメージは I_1 から変化しない場合もあることが予想される。その場合，D によって，学習者が一時的に d_2 を得ることができたとしても，学習者は習慣的に D を調べる必要性を感じていない（Vinner, 1991）ため，時間がたつに連れて d_2 を忘れてしまうことが考えられる。そこで，I_1 を I_2 へと概念変化させることを通して，d_2 を忘れたとしても，I_2 を所持していれば与えられた課題を適切に解決できるだろう。この捉え方を用いて，ベクトルの学習ではどのような概念イメージが存在するのか，フォーマルな概念定義と個人の概念定義は何かをそれぞれ分析していくこととする。

4. 調査の目的と方法

4.1. 調査の目的

数学 B「ベクトル」の単元を通して，前節で確立した概念変化の捉えを基に，素朴概念と新しい概念を捉え，概念変化の様相を明らかにする。

4.2. 調査の概要

日時：平成 30 年 5 月 7 日～5 月 14 日（全 10 時間）

対象：青森県内の県立高等学校第 2 学年から文型コース 1 クラス

単元：内積の復習から 2 直線の交点まで

4.3. 調査の方法

各授業を固定カメラ，手持ちカメラを用いて授業の様子，生徒の様子を撮影した。授業後 5 分程度学習者にインタビュー調査もしくは学習者同士の対話的な学習を記録した。

5. ベクトルの和に関する概念変化

この節では，ベクトルの和に関する概念変化の様相を分析，考察していくこととする。

5 月 14 日授業後プロトコル（8/10 時間目）を取り上げる。授業の中で提示された問題を

次に示す。

問：△ABC と点 P が$6\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}=\vec{0}$を満たすとき，点 P はどのような位置にあるか。

授業終了後，この問題について学習者（s1）が，他の学習者（s2）に対して次の 2 つの質問をしていた。

①ベクトルの差は，どのように表すのか。

②ベクトルの和をどのように考えれば良いか。

①に関してのプロトコルを次に示す。2 人の生徒と，調査者（R）の対話であり，s1 がベクトルの差の表し方について質問している場面であり，s2 は$\overrightarrow{PA}$を用いて問題の解法を説明しようとしている。

s1	終点－始点だったっけ(中略)全部 PA に合わせればいいの？
R	それって何で？
s2	合わせないとさ，いけない。合わせたほうがいい。
s1	じゃあ，AP−AB？ AB−AP か？
s2	違うって(笑) PA−BA。
s1	もっとわからん。意味わからん。

s2 は，s1 にベクトルの差について説明しようと試みている。s1 の発言から，s1 はベクトルの差において，s1 の概念イメージが不鮮明である事がわかる。

次に，s2 が s1 に対してベクトルの差の表し方を説明した。$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$を説明し，その後，$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+(-\overrightarrow{BA})$を説明しようと試みているが，s1 は，なぜ$\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AB}$となるのか，意味がわからない，といった様子であった。R は，s1 がベクトルの差の概念イメージや個人の概念定義を所持する以前に，s1 のベクトルの和に関する概念イメージと概念定義が適切なものではないと考えた。次のプロトコルは R が 2 人の対話に介入し，R が s1 に対してベクトルの和について，フォーマルな概念定義を与える場面を示している。

R	足し算がなぜ同じになるか？例えば，AB とかってあるときにさ，AP+PB って AB になるし，AC+CB も AB になるし，みたいなこと？
s1	え，なるんですか？（中略）なぜなんですか？

ここでは，視覚的表現による説明は無く，R のが「$\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{AB}$や$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$は成り立つ」というフォーマルな概念定義のみを伝えている。 s1 の「なぜなんですか？」という発言から，s1 のベクトルの和の概念イメージの変化は起きていないことが読み取れる。その後，R は対話によって s1 がどのようなベクトルの和の概念イメージを所持しているのか明確にしようとしている。以下がそのプロトコルである。

R	(紙に平行四辺形 ABCD を書いて)例えばこういう平行四辺形があって，AB+BD=AD．これは分かる？
s1	わかります。
R	こう行って(A→B)，こう行ったら(B→D)。AD になる。(中略)AC+CD=AD，これもオッケー？
s1	はい．大丈夫です。
R	(四角形 ABCD を書いて)じゃあさ，これも，どう行ったって，AB+BD=AD，AC+CD=AD なのさ。一緒なのさ。形として。
s1	うーん？

R が s1 に対して，平行四辺形 ABCD を書いた上でベクトルの和の確認し，s1 はわかったという反応を示した。このことから，s1 は平行四辺形を用いたベクトルの和の概念イメージは所持していることが分かる。次に，平行四辺形でない一般の四角形 ABCD にてベクトルの和を確認すると，s1 は一般の四角形においてはよくわからない，という反応を示した。このことから，s1 のベクトルの和の素朴概念の中の個人の概念定義，それに伴う概念イメージは以下の 3 つであることが分かる。

ⅰ．△ABC において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$である。

ⅱ．平行四辺形 ABCD など，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$となっているときに限り，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

ⅲ．一般の四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものである。

以上の s1 の素朴概念の中の概念定義から，次の図 8 のような概念イメージが考えられる。なお図中のⅰとⅱ，ⅲは先に挙げた 3 つの概念定義と対応をしている。

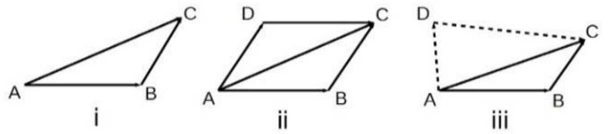


図 8：s1 のベクトルの和に関する概念イメージ

その後，R は s1 に一般の四角形 ABCD でも，視覚的な表現を用いて考えさせる必要があると考えた。次に，R が s1 にベクトルの和における新たな概念の中の概念イメージを一般の四角形 ABCD と位置に依らない点 O を用いて説明する様子である。以下がそのプロトコルである。

R	見た感じ違うように見えるけど。どんな形でも，上の式は成り立つんだよ。全然違う部分に点 O とかおいてもそうなるんだよ。AC っていうのは，AO って行って，OC。AC+OC=AC。
s1	おおー！はいはいなるほど！分かったわ！

R は，どんな点 O を取っても，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$となることを表し，s1 はどのような点 O においても$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$が成り立つことに対し，よくわかった，という反応を示した。

このとき，s1 のベクトルの和の概念イメージは，先に挙げた「ⅲ．一般の四角形 ABCD において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものである。」から，「四角形 ABCO（O は取る位置に依らない）において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。」へと概念変化が起きたと言えるだろう。また，R の「$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{AC}$」という発言から，R がフォーマルな概念定義を s1 に与えることで，s1 ベクトルの和における新しい概念の中の概念イメージと，新しい概念の中の個人の概念定義が適合したと見ることができる。これらの分析から，s1 のベクトルの和の概念変化の様相は次の図 9 にまとめられる。

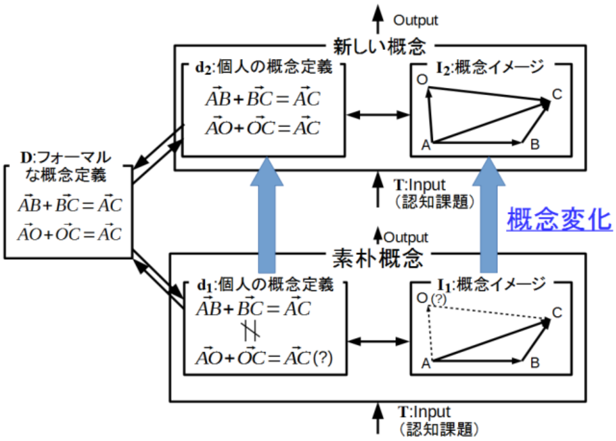


図 9：s1 に見られた概念変化の様相

本調査では，R がベクトルの和に関して，一般の四角形 ABCO を用いてベクトルの和を表現したことから，異なる経路のベクトルの和において，s1 の素朴概念から新しい概念への概念変化の様相を捉えることができた。

本研究における概念変化の捉えを基にした本調査の分析から，s1 のベクトルの和に関する概念変化の様相には次の 3 つの段階があることが明らかとなった。

①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$は異なるものである。

②平行四辺形 ABCD では，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表すが，一般の四角形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものを表す。

③一般の四角形 ABCO において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

②の段階には「平行四辺形だとベクトルの和は成り立ち，一般の四角形だとベクトルの和は成り立たない」という認知的葛藤が生じるような素朴概念が表出し，ベクトルの和の概念変化には，認知的葛藤の起こる素朴概念を通して，新しい概念に推移することが認められた。

6．研究のまとめと今後の課題

ベクトル学習の困難性の要因の一つとして，ベクトルの視覚的表現に関わる部分を挙げた。

中原(1995)の具象的レベルの分類をすすめ，ベクトルの学習における具象的レベルは，図的表現によって表すことが非常に難しいことを述べた。そのため，ベクトルの学習を進める上で，ベクトルを表す視覚的表現が，一般性を含むものであるか，特殊性を含むものであるか，といった，図的表現の抽象性レベルが捉えづらいことが困難性の要因の一つとして同定することができた。

また，学習者の授業直後の対話から，「ベクトルの和」に関する概念変化の様相を捉えることができた。特に，学習者のベクトルの和に関する概念変化の様相には，次の 3 つの段階が有ることが明らかとなった。①$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$は異なるものである。②平行四辺形 ABCD では，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表すが，一般の四角形において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$は異なるものを表す。③一般の四角形 ABCO において，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$と，$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OC}$はどちらも$\overrightarrow{AC}$を表す。

②の段階には「平行四辺形だとベクトルの和は成り立ち，一般の四角形だとベクトルの和は成り立たない」という認知的葛藤が生じるような素朴概念が表出し，ベクトルの和の概念変化には，学習者の持つ素朴概念が，認知的葛藤の起こる素朴概念を通して，新しい概念に推移することが認められた。

本研究は，数学 B「ベクトル」における概念形成過程に焦点を当てた。今後は，「ベクトル」の単元において今回作成した理論枠組みの，高等学校数学の内容全体における概念形成過程への適用可能性を検討し，高等学校数学における概念形成過程に関する研究を更に推進していきたい。

引用・参考文献

R. R. Skemp. 藤永保，銀林浩 訳（1973).『数学学習の心理学』. 新曜社.

Tall, D. 磯田正美，岸本忠之監訳(2016).『数学的思考―人間の心と学び―』. 共立出版.

Tall, D. Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Difinition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity *Educational Studies in Mathematics* Volume 12, Issue 2, pp 151–169

Vinner, S. (1991). The role of definitions in teaching and learning of mathematics. In D, Tall (Ed.), Advanced mathematical thinking. pp.65 － 81. Dordrecht:KluwerAcademic Publishers.

Vosniadou, S. (1994). Universal and culture-specific properties of children's mental models of the earth. In L.A. Hieschfeld & S.A. Gelman (Eds.) , *Mapping the mind : Domain specificity in cognition and ulture* (pp.412-430) . New York : Cambridge University Press.

岡部浩司 他（2017).『改訂版　高等学校　数学 B』. 数研出版

佐々木文弥（2018).「数学 B「ベクトル」における概念変化に関する一考察」. 上越教育学研究, 33, 83-90.

白川嘉子（2005).「高等学校数学におけるベクトルの理解に関する研究(2):有向線分，ベクトル，内積，位置ベクトル，直線のベクトル方程式についての実態調査」. 数学教育学論文発表会論文集, 38, 709-714.

真野祐輔（2010).「算数・数学学習における概念変容に関する基礎的研究―「数」領域の展開を中心に―」. 広島大学. 学位論文(未公刊).

中原忠男（1995).『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』. 聖文社.

藤村宣之（2011).「教授・学習活動を通じた数学的概念の変化」. 心理学評論,54,3,296-311.

山口潤一郎（1995）.「線形理論に関する基礎的研究―ベクトルの同値性に関する教育的考察―」. 数学教育論文発表会論文集, 28, 449-454

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.49-58

メタ情意とメタ認知を視点とした中学生の数学学習における情意の様相

小林　祐希
上越教育大学大学院修士課程２年

１．　はじめに

新学習指導要領において育成すべき資質・能力の三つの柱の中の一つとして，学びに向かう力・人間性等が挙げられている。数学教育においても学びを支える情意面を大切にしながら数学的活動に取り組むことが重要視されている(文部科学省，2018)。

しかし，中央教育審議会答申(2016)において，諸外国と比べて我が国の数学における学習意欲面での課題があると指摘されている。加えて，2012 年 PISA 調査の結果(国立教育政策研究所，2013)からも，我が国の数学不安の生徒の割合は国際平均に比べて高い。

育成すべき情意の明確化も，数学教育の情意研究における課題点である。久保&長崎(2010)によれば，数学教師の 4 割が，学校数学の情意的な評価項目である関心・意欲・態度の評価に悩んでいた。北島(2010)も，関心・意欲・態度は他教科に比べ，授業内での評価が難しいと指摘している。こうした困難性を解消するためには，育成すべき情意を明確化する必要があり，そのためには子どもが数学を学ぶ過程で，どのような情意を形成しているかの実態を把握する必要がある。そこで，本研究では，中学生の数学学習における情意の様相を捉えることとした。

数学教育における情意研究は，これまでに統計的な研究を中心として数多く行われており，重要な知見をもたらしている(eg., 湊，1983；鎌田，1985；湊&鎌田，1997)。他方で，統計的な研究とは異なる方法で情意の様相を明らかにした質的研究もある(eg., DeBellis &Goldin，2006；桑原，2013)。DeBellis&Goldin (2006)が掲げるメタ情意という視点を用いた山野(2015)は，メタ情意を用いて分析を行うことで，情意及び情意と認知の相互関係を捉えられると述べている。

これらの問題意識や先行研究を基に，本研究では，Goldin(1987)やその他の先行研究で情意と関係すると述べられている，メタ認知の視点を取り入れ，認知と情意の様相を明らかにしてきた(小林，2018a；小林，2018b)。一方で，情意の中でも特に学習を方向付ける働きをしていた情意や，本研究における理論枠組み(小林，2018a)の傾向，メタ認知と情意やメタ情意との類似点について，修士論文以外においては詳述仕切れていない部分がある。そこで，本研究では，以上の点を記述し，学習を方向付けた情意の中では特に欲求に着目し，分析・考察を行う。欲求に着目する理由は 2 点ある。第一に，本研究や情意における先行研究の分析において，欲求にあたる情意を観察する場面が多く見られ，学習を方向付ける傾向にあったことである。第二に，欲求には本来的に備わっているものから，社会などとの相互作用の中で生成されたものまであり，その詳細について記述する余地があることである。

そこで本研究では，中学生の数学授業における情意について，欲求に着目しその性質を

捉えること，本研究の理論枠組みにおける情意，メタ情意，認知，メタ認知の関連性の傾向について詳述することを目的とする。

研究目的の達成に向け，第一に，本研究において立脚する数学観を規定し，情意に関する先行研究を概観する。第二に，本研究における理論枠組み(小林，2018a)を示し，分析・考察を行う。

２． 本研究で立脚する数学観

DeBellis&Goldin(2006)の挙げている数学的親密さ，数学的誠実さの 2 点を元に，本研究において依拠する数学観を述べる。

数学的親密さとは，数学には人の情意が深く入り込んでおり，数学に親しみを感じ，自分の近くに数学があることが望ましいとみなすことである(DeBellis&Goldin，2006)。数学的に親密な行動とは，例えば数学について語る際に生き生きと語ることや，数学の問題を解いている際に興奮することなどが挙げられる。

数学的親密さに関して，本研究での立場を明確にしておく。本研究では，学習者が，学習者自身が持つ情意を大事にしながら学習を行うことが重要であるという立場を取る。なぜなら，個人の持つ情意的側面を学習に傾倒させながら学習を行うことで，主体的学習がなされると考えるからである。湊&浜田(1994)は主体的学習の定義について，次のように述べている。

主体的学習とは，まずもって学習者の個人的存在，個人の感性や内面性を認め，学習者が彼独自の価値規準をもって具体的世界と関わり，真理を絶対的存在として吸収するのではなく，自己との関係として真理を解釈し，判断し，自分自身の意味を構成し，不断に自己を創造することである

(湊&浜田，1994，p.62)

一方で，湊&浜田(1994)は，主体的な学習とよく混同される自主的・自発的学習は，「他からの強制ではなく，自らの意志に従って行われる学習であり，そこには積極的な学習意欲が存在している」と述べた。

湊&浜田(1994)は，自主的・自発的学習と主体的学習との違いについて，前者は学習内容を一定のものとみなしても成立するのに対し，後者は同一の学習内容であっても学習者によりその意味づけは異なり，別のものを作り変えることが想定されているところが本質的に異なるとしている。本研究は主体的学習について，湊&浜田(1994)の定義の基で，学習者の持つ情意に基づいた主体的学習を重要視する。

数学的誠実さとは，数学的な真理への傾倒や数学的理解の探求，数学的研究を導く道徳的な人格である(DeBellis&Goldin，2006)。DeBellis&Goldin(1999)は，数学的誠実さは正直さとある程度の自由を伴い，特に数学的親密さとの相互作用を可能にするとしている。数学的誠実さの例には，数学的事象に対して規則性を見つけた際に，それが本当にどのような場合でも言えるかを確かめながら数学的活動を行うことが挙げられる。

数学的誠実さの表出として，本研究において重要視する視点は，反省的であること，困難や葛藤を乗り越えて真理を見出すことに価値を見出す情意的な在り様である。

３． 先行研究

3.1 情意に関する研究

情意に関する研究では，統計的な研究が盛んに行われていたが，D.B.McLeod をはじめとした，情意の詳細な様相に焦点を当てた質的な研究も発展している。

McLeod(1992)は，情意研究の課題点として記述の困難性などを挙げており，その解決のために，認知研究と情意研究を統合することが有効であるとしている。McLeod(1992)は認

知との関連や反応の強度, 安定性の観点から情意の構成要素として情緒，態度，信念を規定している。情意の様相を記述するためには, 情意と関連の深い認知との関わりの中からその様相を記述することが有効であることがわかる。

Goldin(2002)は，McLeod(1992)が情意の構成要素として挙げた信念，態度，情緒の三つに，新たに価値観を加え，情意をコントロールする役割としてのメタ情意という概念を開発した。これらの四つの要素を基に，DeBellis&Goldin(2006)は四面体モデルを作成し，情意の包括的な構造と，社会や文化の状況といった外部との文脈における相互作用が生じると述べた。

3.2 メタ情意に関する研究

DeBellis&Goldin(2006)はメタ情意を，生徒の情意に影響を与える, 情意の一番重要な面と説明しており, 情意に対する情意と認知の関係性をもって，(１)情意についての情意(２)情意の認知についてのさらなる情意，もしくは認知の中での情意(３)認知やさらなる情意についての情意のモニタリングと定義している。

山野(2015)は，メタ情意の視点を取り入れることで，生徒の情意を詳細に表し，情意の生成過程をより精緻に捉えることができるとした。山野(2015)は，情意が他の表象体系及び認知と密接に関わることや, 生徒の安定した情意の形成に, メタ情意が大きく作用すると述べている。

メタ情意が存在することで，嬉しい，楽しいといった情意が個別で存在するのではなく，混沌とした情意や，関係性を持った情意があることを示すことができる。例えば，問題を解くのが苦しいけど楽しいという相反する情意から起こるメタ情意は, 問題解決場面の特定の場面においても, 生徒の情意が複数存在することを示している。

メタ情意の概念を用いることで, 個別の情意や認知だけでなく, 関係性を持った認知や情意を背景に持つ情意についても記述することができ, 安定的な情意が形成される際にも情意の背景として根付いているメタ情意を観察することが有効である。

本研究では, メタ情意の関係を明らかにするだけでなく, 情意が持つ特徴や認知との関係に着目し, 小林(2018a)における理論枠組みを用いる。

3.3 メタ認知と情意の関係

数学教育におけるメタ認知の研究では, 認知とメタ認知の関係に焦点が当てられる傾向にあったが，メタ認知と情意の関わりもMcLeod(1989, 1992)が示唆している。McLeod (1989)は，メタ認知は情意と関連しており，認知のコントロールは問題解決の持続性の問題に関係すると述べている。McLeod(1992)は，信念，態度，およびメタ認知に関する研究を統合する必要があると述べている。

メタ認知と信念との関連もしばしば言及されてきた。清水(2007)はメタ思考の顕在化の方法と分析方法を適用し, 中学校の作図問題過程から得られたプロトコルによる分析結果から，学習者の持つ信念システムは，問題解決行為の根底にあり, 問題に対するアプローチの仕方を定めると述べている。

表象体系についての先行研究では, 学習場面においては様々な表象が複雑に相互作用しながら活動が行われており, 表象間の相互作用には経路の特徴や因果関係の傾向があることが明らかになっている(eg.，Goldin，1987；山田，1995)。本研究においても，表象間での影響について記述する中で, 影響の傾向を捉え, 表象間の影響の方向性にも注目することとする。

3.4 情意の中の欲求

新・教育心理学事典(1985)では, 欲求は「行

動を活性化し推進し統合する要因」と定義されており，欲求の分類について，マレーの一次的欲求，二次的欲求の分類を紹介している。一次的欲求とは，生理発生的なもののことを指し，例えば食べ物の欠乏に基づく欲求がある。二次的欲求とは，心理発生的な欲求であり，情緒的・精神的な満足がある。新・教育心理学事典(1985)では，二次的欲求には，無生物と関係した欲求，社会的な対象と関係した欲求，人間と関係した欲求，精神的なものとしての欲求があるとされている。例えば，社会的な対象と関係した欲求には，優越，承認などがある。

本研究において主として対象とする欲求は，数学学習をする中で発生する欲求であるため，二次的欲求について論ずることとし，本研究において欲求と述べる際は二次的欲求のことを指すこととする。

Goldin et al.(2011)は，欲求はその達成や不満に関連して特定の感情を引き出すと述べた上で，生徒たちは，異なる動機付けの欲求を持った上で，問題解決のために同様の行動をすることを指摘した。加えて，欲求は欲求が受け取られる社会環境によって誘発されるといった，欲求と環境との関わりについても言及している。他方で，動機づけの欲求には，特性として理解されるものも含まれることや，パーソナリティ理論などとも関連していることも示唆されている。このことから，Goldin et al.(2011)は動機づけの欲求において，一次的欲求と二次的欲求のように区別するのではなく，一体的に欲求を捉えていると考えられる。

横塚(1997)のプロトコル分析では，生徒が自分の間違いに気づいた後「間違いを直したい」という欲求が生まれていた。他方で，山野(2015)は中学生の情意を分析する際に「作業したい」「作図したい」「説明したい」など，欲求ととれる情意について言及している。

欲求には短期的なものから長期的なもの，表面的なものから本質的なものが存在するとされる。こうした側面についても本研究では検討することとする。

DeBellis&Goldin(2006)は，メタ情意が情意の最も重要な側面であると言及しているが，本研究では真理に向かう主体的学習を引き起こす情意は欲求であるという立場に立脚する。

４．情意を捉える理論枠組み

本研究では，DeBellis&Goldin(2006)や山野(2015)において情意を捉える枠組みの中で考慮されてきた情意，認知，メタ情意に加え，メタ認知を加えた四つの要素とその関係性を記述することを通して，生徒の情意の様相を明らかにすることとした(小林，2018a)。

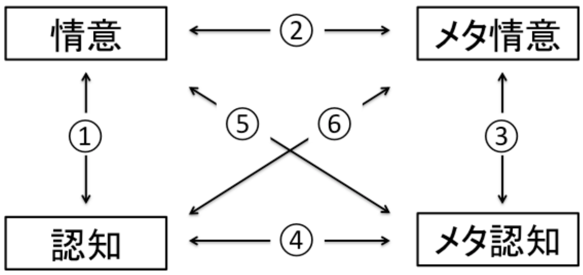


図１　小林(2018a)における理論枠組み

4.1　本研究における四要素の概念規定

DeBellis&Goldin(1997)は情意領域を，安定性，強度，認知が果たす役割の程度，要素が発達するために要する時間の長さの観点から，情緒，態度，信念，価値観に分類している。本研究では，これらの分類の視点を参考に，情緒，態度，信念，価値観について規定する。情緒は，活動をする際に最も頻繁に表出する情意であり，突発的な情緒と情意の他の要素や，認知，メタ認知が相互作用しているとする。態度は，D.B.McLeod が挙げる，情緒反応の自動化，既有の態度を関連する新しい場面に適用することの 2 点として規定する。信念と価値観については，価値に対する判断基準の視点から分類した。信念は，価

値に対する判断基準として事実判断を伴い，真偽に関わるものとする。価値観は，価値に対する判断基準として相対性を伴い，善悪の判断を伴うものとする。

メタ情意は，DeBellis&Goldin (2006)が先述した三つの定義として規定する。
本研究では情意同士の関係性の分類として，強化，対立，対象化の三点から整理する。

強化とは，一方または両方の情意が他方の情意に影響している場合のことを指す。対立とは，相反する情意が存在していることを指す。対立については，山野(2015)が情意的葛藤として挙げており，実際に授業場面において観察することができたと述べている。対象化は，メタという用語の一般的な捉えと同様に，情意の対象化から起こる情意とする。

認知についてはメタ認知を定義する際の基となる概念であるため，メタ認知とともに規定し，DeBellis&Goldin(2006)の表象体系モデルを基にする。認知について，本研究では，認知はDeBellis&Goldin(2006)の挙げる(a), (b), (c)の体系に対応するものとする。

メタ認知については，DeBellis&Goldin (2006)の(d) 問題解決の間の経験則的かつ戦略的な意思決定を支配する，計画と実行制御の体系を基に，重松(1994)が述べるメタ知識とメタ技能として規定する。

4.2　本研究における四要素間の関係の規定

本研究における理論枠組みの情意，メタ情意，認知，メタ認知の四要素間の関係について，先行研究との関連の視点から概観する。

第一に，先行研究において言及されてきた関係を取り上げる。これまで情意やメタ認知の先行研究で述べられてきた矢印①，④の関係については，これらの関係が直接成立しているのか，他の要素を媒介して成立しているのかも記述する。矢印②の情意とメタ情意の関係について，今井(2015)は，メタ情意には情緒をコントロールする役割と，学習で生じた情緒について振り返る役割の 2 点を挙げているため，本研究では機能的側面についても注視する。

第二に，本研究において新たに検討する関係を述べる。DeBellis& Goldin(2006)は，矢印③のメタ認知とメタ情意の関係があるとしている。本研究ではこうした関係性やその特徴について考察することとする。矢印⑤の関係については，DeBellis&Goldin(2006)が示唆しているが，本研究では，実際の分析を通してこれらの関係が見られるか確認する。

５． 調査の概要と分析・考察

5.1　調査概要

調査は新潟県の国立大学附属中学校二年生の一学級で行い，二名の生徒(Mon，Cha)を抽出し，第三学年まで継続して調査を行った。授業における生徒の様子をビデオ撮影し，生徒の情意の様相を捉えるために，刺激再生法によるインタビューを行った。

5.2　調査データの分析・考察

5.2.1 情意，メタ情意，認知，メタ認知の因果関係の傾向

本研究において構築した理論枠組みにおける傾向として，情緒からモニターへの影響，目的を持った情意からコントロールへの影響が見られた。

まず，情緒から認知をモニターする働きとして，否定的な情緒を回避する，もしくは肯定的な情意に近づくために，モニターによって状況把握をし，情緒の要因を特定しようとする傾向があった。確率単元において樹形図の問題を解く場面において，Mon のミスをしたくないというメタ情意における情緒が，学習場面において解いている問題を見るという認知を促すモニターの働きをした。

次に，コントロールが起こる際に，情意の中でも欲求と記述できる情緒，信念，価値観

からコントロールへ影響する傾向があった。安定的な情緒が存在する背景には，信念や価値観が情緒と結びついている。信念や価値観は，安定的な性質を持つため，信念や価値観が情緒と関係している際の情緒の性質も，変化する場合がある。

以上から，情意とメタ認知によるコントロールが起こっている場面を観察する際には，どのような目的を持って数学的活動が行われているかの側面にも着目し，目的となる情意の背景にある安定的な情意やメタ情意についても考慮する必要がある。

5.2.2 情意，メタ情意とメタ認知の類似性

情意やメタ情意とメタ認知の類似点や関係性が明らかになった。

情意やメタ情意とメタ認知の類似点について，情意やメタ情意にはメタ認知のコントロールと同様，認知的活動を方向付ける働きがあった。他方で，メタ認知，情意，メタ情意が持つ暗黙性を見出した。

情意やメタ情意とメタ認知との関係について，情意的葛藤を克服するためには，メタ認知によるモニター，評価により，自分の状況を把握し，メタ認知と認知による相互作用を習慣化することで，情意をコントロールすることが有効であることが明らかになった。加えて，メタ認知が情意をコントロールする働きがみられた。これより，学習を促進する情意は保持し，学習を阻害する情意は学習場面に表出しないように，情意に対してメタ認知によるコントロールを行えば，望ましい情意を育成できることが示唆された。

他方で，メタ認知，情意，メタ情意が持つ暗黙性を見出すことができた。情意やメタ情意と，メタ認知に共通して，情意やメタ情意のコントロールの働きも，メタ認知と同様に暗黙的に働くことが多い。中学生が数学学習を行う際の情意の多くは暗黙的なものが多く，今回のインタビュー調査でも，生徒が学習場面を振り返る中で，学習場面では意識していなかった情意，メタ情意，メタ認知を想起する場面が多く見られた。こうした側面は，重松&勝美(2010)が，メタ認知は言語化され記述される可能性が少ないと述べる，メタ認知の特徴とも共通している。

5.2.3 情意，メタ情意とメタ認知の関係

今までメタ認知のメタ技能としてのみ記述されてきた，モニタリング，評価，コントロールの働きの中には，情意やメタ情意の働きとしても記述できる要素があることが明らかになった。分析結果から，生徒の情意，メタ情意が認知にモニターやコントロールを促している場面を確認できた。

情意が認知のモニターをする例としては，教師の答え合わせがなかった際，Mon の中途半端が嫌いというメタ情意が，時間を確かめるという認知を促すモニターの働きをしていた場面があった(図２)。

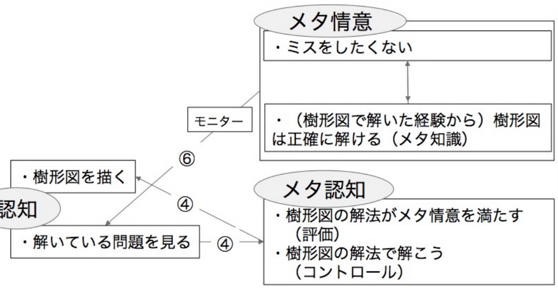


図2　情意が認知のモニターをした場面

情意によるモニターが起こった要因には，問題を解き続けるかの判断をするという目的があり，判断するための材料として，時間を確かめるという認知が起こっていた。つまり，問題を解き終えるという目的に基づいて，自分の学力を対象化した際に問題を解くことができる残り時間があるかをモニターしていた。この目的の背景には，中途半端は嫌いであるというメタ情意があった。加えて，メタ認知によって時間を確かめるという認知

が引き起こされた様相は確認できなかった。よって，メタ情意からメタ認知を媒介して認知に影響していたというよりも，メタ情意から認知に対して直接影響していたとするのが妥当である。

情意が認知のコントロールをする例としては，Mon の中途半端を嫌うメタ情意が，休み時間も問題を解き続けるという認知的活動を促すコントロールの働きをしていた場面があった(図３)。

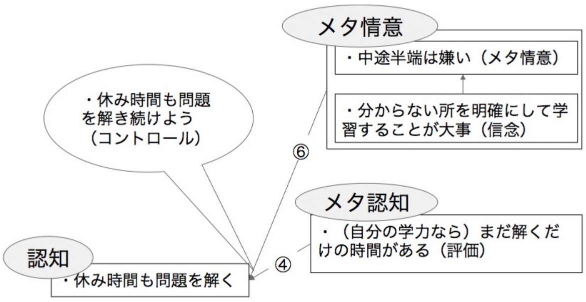


図3 情意が認知のコントロールをしていた場面

ここではメタ認知によるコントロールも働いているが，メタ情意が認知的活動における問題を解き終えるという目的と整合する働きをしているため，メタ情意も影響しているに違いない。この場面において，先述したモニターと同様に，問題を解き続けるという認知的活動は，問題を解き終えるという目的と合致した活動であり，真理を探求するという点において本研究の立脚する数学観とも整合する。

以上から，今までメタ認知によって認知のモニタリング，評価，コントロールという一連の流れがあるとされてきたことに対し，認知と情意の関わりの中で，情意にも同様の働きが見られた。

5.2.4 欲求と学習との関わり

(1) 自己を問題解決に誘う欲求

山野(2015)のインタビューの中で，生徒 Oti は授業場面において教師の解説が始まっても自分の作業を続けている場面について，以下のように答えている。

78　I　(中略)先生の話聞くよりもまずは
79　Oti　まずは自分で解きたいですね。
87　Oti　できないことを無くしたいんですかね。分かんないままにしときたくないんで，そのときにやらないと後で多分できないんですよ。(一部省略)

この場面では，Oti の持つ，問題をその場で解決しなければ後で解くことはできないという自己に関するメタ知識が，自分で解きたいという欲求に影響している。自分で問題解決を行いたいという欲求は，自己との関わりの中で学習を行うという点で主体的学習を促進し得る情意である。

一方で，できないことを無くしたいことや，わからない状態のままにしたくないという欲求は，探究を促す欲求であるという点で，主体的学習を促す欲求である。

(2) 価値基準を伴う欲求

Mon は，計算方法における情意について，インタビューで以下のように述べている。

【平成 30 年２月 23 日 Mon インタビュー①】
22 Mon 親に，なんか計算力が速すぎって言われて。(省略)
24 Mon だから，間違えやすいから書けって言われる。
25 I　それに対して自分はどういう認識なの？書いた方が正確に解けるみたいな
26 Mon それはわかるんですけど，やっぱりめんどくさいっていうか。頭の中でやっちゃいたいな。一括でやっちゃいたいな。

Mon は簡単に解くことのできる解法を探究するという意味で，自己の価値基準を持ちながら学習を行っている。

他方で，Mon は，確率の解法についてインタビューで以下のように述べている。

【平成30年３月２日　Monインタビュー②】

15 I　表か。表と樹形図って，なんか，それぞれ，どう使ってて？それぞれの良さとかさ，あると思うんだけど。

16 Mon 樹形図は，本当に速く，正確に求めることができて，表もまぁ間違えることはないですけど，表を作るのにちょっと時間がかかる。どっちかっていうと樹形図の方がやりやすい。

28 Mon ずっと計算してると，一個計算ミスがあると全部崩れちゃう。それだったら図で一発の方がミスが少ないかな。

Mon の持つ速く，簡単に，正確に解くことのできる解法で解きたいという欲求は，このような解法が自分の中で望ましいという自己の価値基準を持ちながら学習と関わっており，主体的学習のための素地となる欲求である。この欲求の背景には，学校教育の中で問題解決を速く，簡単に，正確に行うことが望ましい文化があるのではないか。

(3) 欲求と他の情意との関連

Cha は，数学の好意性について，インタビューで以下のように述べている。

【平成30年２月27日 Chaインタビュー①】

4 I　最初に，数学は好き？

5 Cha 好きです。

6 I　どういうところが好き？

7 Cha 計算が好き。

9 Cha 数学って昔，ずっと計算しかないと思ってた。計算が数学なんだなって思ってて，あんまり図形とか得意じゃなくて，ただ計算してたい。(一部省略)

図形よりも計算を好む Cha の態度につながる，計算に対する肯定的な欲求がみられた。このことから，図形よりも計算に対する欲求が強く，それが態度と関連して現れていることがわかる。他方で，図形領域と，計算が多く行われる領域という異なる領域に対する欲求の違いがあった。個人の持つ主体性も，領域によって程度が一定でない場合がある。

６． 総括的考察と結論

本論では，情意，メタ情意，認知，メタ認知の因果関係の傾向，メタ認知と情意やメタ情意との類似点，情意の中でも特に学習を方向付けていた欲求について詳述してきた。

第一に，情意，メタ情意，認知，メタ認知の因果関係の傾向については，情緒からモニターへの影響，目的を持った情意からコントロールへの影響が見られた。

第二に，メタ認知と情意やメタ情意との類似点については，情意やメタ情意にはメタ認知のコントロールと同様，認知的活動を方向付ける働きがあった。他方で，メタ認知，情意，メタ情意が持つ暗黙性を見出した。

第三に，数学学習における欲求について，本研究や先行研究のデータを基に記述することができた。分析の結果から，望ましい欲求とは，本研究において望ましいとする数学観である数学的親密さと数学的誠実さと密接に関連した欲求であった。

しかし，欲求を捉えることは容易ではない。例えば，勉強ができるようになりたいという欲求が，生まれ持った本能的なものなのか，社会的文脈の中で生まれた欲求なのかを判断することは困難である。探究活動を促す欲求は生来的に備わっている可能性もあり，学校教育において豊かにされることが望ましい。人間社会における文化の中から生まれた

欲求との関わりから, 本質的な欲求についてさらに考察する余地がある。

本研究では詳述することはできなかったが, 欲求は動機付けや欲望, 要求といった概念と関連しているため, 今後さらなる検討が必要である。

指導への示唆として, 教材が持つ特徴や価値が, 情意やメタ情意を形成する上で鍵となる視点であることが明らかになった。教材が持つ価値について教師が多面的に理解することや, 生徒が教材に対してどのような価値を見出しているのかという実態を把握することが, 生徒たちが相互作用の中から価値観を形成するための手がかりとなるのではないか。加えて, 教材研究を行うにあたっては, 教材そのものが持つ価値などを吟味した上で, 生徒が教材の価値を感得することができるような授業設計を行っていくことが有効ではないか。

今後の課題としては, 数学という教科や教材の持つ価値について, さらに検討が必要である。本研究においては, 確率単元での樹形図が持つ価値が生徒の価値観の形成に影響していることが明らかになったが, 確率単元の他の教材や他の単元において同様の場面を確認するまでには至らなかった。教材の持つ価値について検討することは, 教材が持つ価値と生徒の価値観がどのように相互作用しながら生徒の数学や数学学習に対する価値観が形成されていくのかを記述する手がかりになる。教材そのものの持つ価値について検討することは, 数学が有する新たな社会的, 実用的な価値を見出すことにもつながる。教材が持つ価値や, 教師に対する価値観が主体的学習にどのような影響を与えるのかについても, 今度さらなる研究が必要である。

情意研究の分析手法に関しては, 情意的な側面は通常の観察のみで分析することが困難であるため, 横塚(1997)のような情意の変容過程をグラフに記述するなどの, 生徒が持つ情意を客観的に記述できる方法の検討も必要である。

引用・参考文献

DeBellis, V. A. & Goldin, G. A. (1997). The affective domain in mathematical problem solving. in E. Pehkonen (ed.), *Proceedings of the Twenty-First Annual Meeting of PME*, Vol. 2, 209-216. Lahti, Finland: Univ. of Helsinki.

DeBellis, V.A.& Goldin, G.A. (1999).Aspects of affect: Mathematical intimacy, mathematical integrity. in O. Zaslavsky (ed.), *Proceedings of the Twenty-third Annual Meeting of PME*, Vol.2, 249-256. Haifa, Israel: Technion Printing Center.

DeBellis，V. A. & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131-147.

Goldin, G.A.(1987). Cognitive representational systems for mathematical problem solving. *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*, 125-145.

Goldin, G.A.(2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structure. In G.C.Leder, E.Pehkonen & G.Törner(Eds). *Beliefs:A hidden variable in mathematics education?*, 59-72. Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., & Warner, L. B. (2011). *Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning*, 43, 547–556. ZDM.

依田新監修(1985).新・教育心理学事典(普及版).金子書房.

今井敏博(2015).算数の学習における情動の喚起と情意形成.日本数学教育学会誌，数学教育学論究 (臨時増刊)，17-24.

鎌田次男(1985).測定器具を用いた我国中学

生の数学に対する不安の研究．日本数学教育学会誌，67，59-62.
北島茂樹(2010).中学校数学における観点別評価の課題と展望−数学意識調査委員会調査報告書を元に−.数学教育論文発表会論文集，43(2), 477-482.
小林祐希(2018a). 中学生の数学学習における情意の様相についてーメタ情意とメタ認知に注目してー．上越数学教育研究，第33 号，91-104.
小林祐希(2018b). 数学授業における中学生の情意の様相ー確率単元の学習において働くメタ情意とメタ認知の分析を通してー．日本数学教育学会，第 51 回数学教育論文発表会論文集，565-568.
国立教育政策研究所(2013). OECD 生徒の学習到達度調査，2012 年調査国際結果の要約 .http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/053/siryo/__icsFiles/afieldfile/2016/12/12/1380468_1.pdf (2018.2.9 確認).
久保良宏&長崎栄三(2010).中学校数学科教師の経験年数による数学の指導上の悩みと課題.日本数学教育学会誌，92(7), 2-11.
桑原利恵(2013).情意的領域を統合する新たな枠組みとしての態度から見た子どもの算数的活動と算数の理解について.上越数学教育研究，第 28 号，59-63.
McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: New views of affect in mathematics education. *In Affect and mathematical problem solving: A New Perspective*, 245-258. Springer, New York.
McLeod, D.B. (1992). Research on affect in mathematics education:A reconceptualization. *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*，575-591.
湊三郎(1983).算数・数学に対する態度を測定するために開発された SD について.日本数学教育学会誌，数学教育学論究, 39-40, 1-25.
湊三郎&浜田真(1994). プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか−数学観とカリキュラム論との接点の存在−．日本数学教育学会誌，76，3，58-64.
湊三郎＆鎌田次男(1997). 中学校における数学の学力と数学に対する態度との間の因果的優越関係. 数学教育学論究, 67･68, 3 −28.
中央教育審議会(2016). 幼稚園，小学校，中学校, 高等学校及び特別支援学校の学習指導要領の改善及び必要な方策等について(答申).
文部科学省(2018). 中学校学習指導要領解説(平成 29 年告示)数学編．日本文教出版.
重松敬一(1994).数学教育におけるメタ認知の研究(9)-メタ認知の内面化モデルとその検証-.数学教育論文発表会論文集，27，185-190.
重松敬一＆勝美芳雄(2010). メタ認知．日本数学教育学会, 数学教育研究ハンドブック, 310-317.
清水美憲(2007). 算数・数学教育における思考指導の方法．東洋館出版社.
山田篤史(1995). G.A.Goldin の「問題解決のコンピテンス・モデル」の再検討．数学教育学研究. 全国数学教育学会誌, 1, 37-44.
山野天士(2015).数学授業における中学生の情意の生成とその様相に関する研究:メタ情意の働きに関連して形成される数学的な価値観に焦点を当てて．平成 26 年度上越教育大学院学校教育研究科，修士論文.
横塚昌平(1997).数学の授業における生徒の情意の変化に関する研究−情意反応グラフの有効性とその限界−.平成８年度上越教育大学院学校教育研究科，修士論文.

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.59-70

中学校数学における生徒同士の「支援する－受ける」という場面での話し合いに関する研究
－生徒個人の理解に焦点を当てて－

渡部　陽平
上越教育大学大学院修士課程２年

１．問題の所在と研究の目的

数学の授業において、グループによる協同学習には、生徒同士が話し合うことで新しい数学的な概念や性質を獲得したり、協働的に問題解決を図ったりするというねらいがある。しかし、実際に筆者や他の教師の授業において、生徒同士の話し合いの内容を観察すると、協同学習のねらいに沿った話し合いになる前や話し合いの途中で問題解決の前提となる既習内容などについて、「分かっている生徒が分からない生徒に教える」という場面が多く含まれていた。そして、その内容がグループ内の生徒の中で理解されていないと、本来のねらいに沿った話し合いが進まないことがあった。

このような生徒同士の「支援する－受ける」という場面は、グループ学習だけに限らず、一斉授業においても自然に見られていた。

さらに、筆者は話し合いの後、支援を受けた生徒について以下のような姿が見られ、理解が深まっていないと感じることがあった。

○　改めて他者に説明する時、説明を受けた以外のことが言えない。
○　他の生徒や教師の質問に答えることができない。
○　値や条件を変えた事例や課題に対応することができない。

ここまで述べたことから、生徒同士の話し合いの中で「支援する－受ける」という場面は、普段の授業において多く自然に見られていることから、生徒にとって身近な学習の場であるととらえられる。しかし、そのような場面が支援を受けた生徒の理解に必ずしもつながっていないという問題点も含まれていることが考えられる。

本研究では、生徒同士の「支援する－受ける」という場面における話し合いを分析し、支援を受ける生徒にとって理解が促進される話し合いの手立てを検討することで、今後の授業においてそのような場面を生徒の理解を促進するために役立てたいと考えた。

２．先行研究の成果と課題

(1) 生徒同士の「支援する－受ける」という場面で期待される効果

町，中谷（2013）は、理解や思考を深める言語活動として協同学習に着目し、国内外の先行研究を整理している。協同学習の定義については、「定まった統一見解が築かれていない」という立場から、「ペアを含む小グルー

プの生徒全員が協力して共通の課題に取り組み、全員が利益を得ることを志向する学習活動」と広義にとらえ、協同学習場面における生徒の相互作用が学習効果を促進する理由について３つの視点で整理し、その中の１つとして「能力の低い者がより熟練した者の支援によって、１人では実行できなかった課題を実行でき、新しいスキルや知識が獲得される」を挙げている。

また、山路（2014）は、自力で問題を解決できない困難に直面した時に他者からの援助を受けて学習するための方略として、「help－seeking（援助要請)」という概念に着目している。この「援助要請」については、「近年の研究では、効果的に教室での学習に参加するのに役立つスキルとして定義づけられている」として、「他者との協働における積極的な情報のコミュケーションを促進する概念として、グループ学習過程の研究に根付いている」と述べている。

このように「援助要請」は、学習効果を促進するためのコミュニケーションスキルとして期待されている一方、これまで日本の算数・数学の授業においては積極的に評価されてこなかったという指摘がある。

関口（2018）は、算数・数学の協働的な問題解決の授業において、「最初に自分なりの考えが作れないと、次の『練り上げ』に参加しにくく、自分の考えが作れない子どもたちにとっては無駄な時間を過ごすことになる」と指摘し、これを解消するため「援助要請」に着目している。そして、これまで日本の算数・数学の授業では、「自分なりの考えを持つことが大切であり、人に頼ってばかりいたのでは主体性や自律性が育たない」や「試験では誰にも頼れないから、日頃から一人で解く習慣をつけなければならない」という伝統的な社会規範や数学教育観により、「他者に援助を要請することは、積極的に評価しないところがある」と述べている。

その上で、子ども同士による援助の要請および提供をすることは、問題解決に向けた話し合いで「自分の考え」を作るための知識や技能を身に付けるという点に加えて、クラスの仲間からすぐに援助が受けやすく、教師などから否定的な評価を受けるリスクも少ないという点において重要な役割が期待されていると述べている。

ここまで取り上げた先行研究から、生徒同士の「支援する－受ける」という場面は、「能力の低い者がより熟練した者の支援によって、１人では実行できなかった課題を実行でき、新しいスキルや知識が獲得される」という学習効果が期待されることが明らかになった。さらにこれらの場面は、日本の算数・数学の授業において積極的に評価されてこなかったが、「問題解決に向けた話し合いの土台となる基礎的な知識や技能、および話し合いのスキルを身に付ける」という重要な役割が期待されていることが明らかになった。

しかし、Webb, Farivar & Mastergeorge（2002）は、精緻化された支援について、支援する側は達成度にプラスの効果があるが、支援を受ける側は達成度にプラスの効果があるかは研究結果が一貫しないことを指摘しており、本研究において焦点を当てている支援を受ける生徒の理解を促進する話し合いになるためには、何らかの手立てが必要であると考えられる。

(2) 支援が精緻化される過程で見られる生徒の行動

Webb & Mastergeorge（2003）は、支援を受ける生徒の中で質の高い説明を受けて理解できる者とできない者がいることを指摘し、同じ課題に取り組んだ複数のグループにおける生徒の振る舞いの違いに着目して談話を分析している。

分析の結果から、支援を受けて理解できた（事後テストが解けた）生徒において、支援が精緻化される過程で以下の「望ましい振る舞い」があったことを明らかにしている。

○　混乱を認めて告白した上で、計算過程だけでなく、特定の値がもつ意味など具体的な説明を求める。
○　納得するまで質問を修正しつつ、支援を求め続ける。
○　説明を受ける前、受けた後それぞれにおいて、自力で問題を解いてみる。

また、山路（2014）は、Webb & Mastergeorge（2003）の研究をもとに、日本の中等教育学校前期課程の生徒を対象として、数学の課題を目的によって「解決志向課題」と「意味理解課題」に分け、普段の授業におけるグループでの談話（教室談話）から、それぞれの課題における生徒の振る舞いの違いを分析している。

分析の結果から、支援を受ける生徒の振る舞いについて、「納得するまで質問を修正しつつ、支援を求め続ける」は Webb & Mastergeorge（2003）の研究と同様の結果が得られ、それに加えて、「誤りをおそれずに自分の考えを述べること」や「受けた説明を自分の言葉で言い換えること」という振る舞いが重要な役割を果たしていることを明らかにしている。

Webb & Mastergeorge（2003）および山路（2014）の先行研究から、生徒同士の「支援する－受ける」という場面において、支援が精緻化される過程で、生徒の中にある種の振る舞いが見られることが明らかになった。このことから、生徒同士の話し合いの中で、何らかの行動（振る舞い）が見られるようになることが、支援を受ける生徒の理解を促進する手立ての１つになることが考えられる。

(3) 課題

協同学習による学習効果を促進する方略として、町，中谷（2013）は「話し合いの構造化」や「グループによる改善手続き」などを提案しているが、「話し合いにおける生徒の行動」という点から提案し、実際の学習場面において実証している研究は少ない。

また Webb & Mastergeorge（2003）や山路（2014）は、生徒同士の話し合いにおいて、支援が精緻化される過程で見られた生徒の振る舞いを分析し、それらの特徴を明らかにしている。しかし逆に、学習効果を促進する方略として、これらの振る舞いが生徒の間で意図的に共有され、話し合いの中で見られるようになった時、支援が精緻化されたという効果は示されていない。

ここまで述べた先行研究の成果と課題から、生徒同士の「支援する－受ける」という場面による学習効果を促進する方略の手がかりとして、生徒同士の話し合いの中で、何らかの行動（振る舞い）が見られる時、支援を受ける生徒の理解が促進されるのかを分析し、授業への示唆を与えることは意義があると考えられる。

３．支援を受ける生徒の理解が促進される話し合いになるための手立て

(1) 予備調査の概要

先行研究の考察から、生徒同士の「支援をする－受ける」という場面において、支援を受ける生徒の理解が促進される話し合いになるためには、どのような行動を取ればよいのかを検討するため、予備調査として実際の授業における生徒同士の話し合いを分析した。

具体的には、公立中学校第２学年の生徒を対象に、「確率」の授業を計 12 時間観察し、生徒同士の話し合いにおいて、ある生徒が他の生徒に対して「分からない」などと発話し、支援を要請した場面を抽出した。その中から、

支援を受けた生徒の「理解の促進につながった」および「理解の促進につながらなかった」と考えられる話し合いをそれぞれ分析した。

「理解の促進につながった」と考えられる話し合いでは、支援する生徒が支援を受ける生徒に対して理解状況を確認し、支援を受ける生徒も自分の分からないところなどを伝えることで、支援する生徒はそれに沿った説明をすることができた。

一方で、「理解の促進につながらなかった」と考えられる話し合いでは、支援を受ける生徒が支援する生徒に対して、個人で考えたことや分からないことを伝えても、支援する生徒が、「前の授業（問題）で学習した」などと述べたり、自分の考え（解き方）だけを説明したりして、支援を受ける生徒の分からない部分に沿った説明にならなかった。

これらの事例から、支援する生徒が支援を受ける生徒の理解状況を把握することに加えて、数学的な概念や性質など問題の背景にある既習内容について具体的に説明したり、「どうしてそのような解き方や答えになるのか」という理由を説明したりすることで、支援を受ける生徒の理解の促進につながると考えられる。

(2) 支援を受ける生徒の理解が促進される話し合いになるための行動モデル

予備調査の考察から、生徒同士の「支援する－受ける」という場面において、支援を受ける生徒の理解が促進される話し合いになるためには、支援する生徒、支援を受ける生徒それぞれが、「考えの理由や背景にある概念, 性質をお互いに尋ねたり、伝えたりする」という行動を取ることが必要なのではないかと考えられる。（このことを以降においては「行動モデル」と呼ぶことにする。）

４．調査の概要

生徒同士の「支援する－受ける」という場面において、モデルに示された行動が見られる時、支援を受ける生徒の理解が促進される話し合いになるのかを検証するために調査を行った。

(1) 調査期間、対象学年・学級、単元

平成 30 年６月～７月、公立中学校３年生・２学級、「平方根」および「２次方程式」

(2) 調査の内容

調査期間中に行われた全 19 時間の授業を観察するとともに、３時間目の授業の後に前半調査を、19 時間目の授業の後に後半調査を実施した。

(3) 前半調査

本調査では、生徒同士の「支援する－受ける」という場面が見られうる最も少ない人数であるペア（２人１組）での話し合いに着目した。そして、対象学級の生徒の中から、調査者（筆者）と対象学級の授業を担当する教師が相談し、教室において座席が隣りまたは前後の生徒の中から、普段の授業で教師が話し合うよう指示した場面以外でも自然に話し合う姿が見られるペアを４組編成した。

これらの生徒を授業以外の時間帯（放課後）に呼び出し、既に学習した内容に関する問題を１題出題し、個人で取り組ませて解答状況を把握した。その後、それぞれのペアに対して、個人で取り組んだ時と同じ問題を提示し、「問題について、２人とも『分かった！』と思えるようになるまで、話し合ってください。後で同じような問題を解いたり、いくつかの質問に答えたりしてもらいます」という指示を出し、話し合う様子をビデオカメラで記録した。そして、ペアでの話し合い直後に、話し合った問題と類似した問題にそれぞれ個人で取り組ませるとともに、個別にインタビューを行い、その様子をビデオカメラで記録した。

(4) 授業観察

普段の授業（単元の授業）については、通常授業を担当する教師（教科担任）が行い、その様子を調査者がビデオカメラを２台使用して記録した。１台は教室後方に固定して設置し、学級全体での教師や生徒の発話および板書を記録した。もう１台は、生徒同士が話し合っている時、調査者が手で持ち、自由に移動しながら前半調査において調査したペアを中心に、複数の生徒の発話を記録した。

(5) 後半調査

前半調査で調査したペアに対して、前半調査とは異なる複数の問題を個人で取り組ませて解答状況を把握した。その後、それぞれのペアに対して、個人で取り組ませた問題の中から１題を提示し、話し合いをさせた。それ以外の内容は、前半調査と同じである。

(6) モデルで示された行動が生徒同士の話し合いで見られるようになるための手立て

Webb & Mastergeorge（2003）の「支援をする側および受ける側双方の振る舞いは、教師が生徒に伝える言動に影響を受けることがある」という示唆に基づき、生徒同士の話し合いの中で、モデルに示された行動が自然に見られるようになるための手立てを実践した。

具体的には、調査期間に行われた９時間目の授業の後に特設の授業を行い、生徒同士の話し合いに関する具体的な事例を取り上げ、生徒に「みんなが『分かった！』となる話し合いにするためにはどんなことに心がけたらいいか」ということについて考えさせた。生徒からは行動モデルを含む多くの意見が出され、それらを学級全体で共有した。

さらに、普段の授業において、モデルに示された行動を授業者自身が率先して実践した。例えば、生徒が学級全体などで発言する時、「どうしてそのように考えたの？」と尋ねたり、一斉授業において例題などを解説する時、計算手続きの説明に加えて、「どうしてそのような計算（手続き）をするのかというと…」というように説明したりした。

このような実践により、行動モデルが教師と生徒の間で共有され、モデルに示された行動が一斉授業だけでなく、生徒同士の話し合いにおいても見られるようになることが期待された。

(7) 分析の方法

前半調査および後半調査、普段の授業において記録した生徒および教師の発話についてプロトコルを作成し、話し合いで使用したプリントやホワイトボードなどの記述と合わせて分析した。

(8) 分析の視点

プロトコルに基づき、生徒同士の話し合いの中でモデルに示された行動が見られたと考えられる発話をとらえ、その前後における支援を受ける生徒の理解状況に着目した。さらに、普段の授業における生徒同士の話し合いについても同様にとらえた。

それらの分析結果から、生徒同士の「支援する－受ける」という場面の話し合いにおいて、モデルに示されている行動が見られる時、支援を受ける生徒の理解が促進されるのかについて考察した。

ここまで述べた内容および方法により調査した４組のペアの中から、本稿では生徒ＫおよびＳからなるペアと、生徒ＴおよびＮからなるペアにおける話し合いの分析を取り上げることにする。

５．「Ｋ・Ｓ」ペアによる話し合いの分析

(1) 前半調査

①話し合い前の理解状況

＜問題＞
$(x-y)^2+4(x-y)-5$ を因数分解しなさい。

＜Ｋの解答＞
$(x-y)^2+4(x-y)-5$
$x-y=M$ とおく
$=M^2+4M-5$

＜Ｓの解答＞
$(x-y)^2+4(x-y)-5$
$=x^2-2xy+y^2+4x-4y-5$

②ペアでの話し合い

Ｓ　まず、お互いにどこまで解いたか書いてみよう。
Ｋ　分かんないんだけど…
（それぞれ話し合い前に個人で解いた時と同じものを書く）
Ｓ　（Ｋの解答をのぞく）そっち解けそう？
Ｋ　俺もＳの解答と迷った。
自分の解答だと－５があるから、因数分解できない。
Ｓ　因数分解できない？ちょっと待って。
（図１を書く）

$(x-y)^2+4(x-y)-5$
$x-y=A$
$=A^2+4A-5$
$=(A-4)(A-1)$

図１　話し合い中に書いたＳの記述①

Ｓ　たして、かけてだから…
こうするんだっけ？
Ｋ　あー、そうじゃないよ。ちょっと待って。
（図２を書く）

$(x-y)^2+4(x-y)-5$
$x-y=M$ とおく
$=M^2+4M-5$
$=(M+5)(M-1)$

図２　話し合い中に書いたＫの記述

Ｋ　これで因数分解できない？
Ｓ　あー、できる。
（２人とも最後まで解答を書き、正しく因数分解することができた）

③話し合い後の理解状況

＜類似問題＞
$(x+y)^2-16$ を因数分解しなさい。

＜ＴおよびＮの解答＞
$(x+y)^2-16$
$=M^2-16$
$=(M+4)(M-4)$
$=(x+y+4)(x+y-4)$

＜インタビュー＞
この問題では、どうして $x+y=M$ に置き換えて因数分解するのでしょうか。

Ｋ　計算しやすくするためです。問題の式は文字の種類が多くて、ごちゃごちゃしているからです。同じものがあるから、１つの文字に置いても変わらないと思います。
Ｓ　同じものがいくつかある式をかんたんに因数分解するためだと思います。

④考察

話し合い前の解答状況から、どちらか一方が支援する側、支援を受ける側という明確な役割がないまま話し合いが始まった。

話し合いの中では、Ｋが因数分解できないことについて理由を含めて説明した。その理由として挙げた「－５があるから」という発話から、Ｋは共通因数でくくり出して因数分解する方法しか想起できなかったと考えら

れる。それを受けて、Ｓが「本当に因数分解できない？」と発話し、因数分解できない理由について検討することで、「同じ多項式を別の文字に置き換える」という計算手続きを想起したとともに、Ｋとは別の方法で因数分解することを試みることにつながった。このことがきっかけとなり、その後もお互いが相手の考えを受けながら話し合いを進めたことで、正解に導くことができたと考えられる。

そして話し合い後、ＫおよびＳは類似問題を正しく解くことができたことに加えて、この問題を解くために行った計算手続きをする理由について説明することができた。

(3) 後半調査

①話し合い前の理解状況

<問題>
（ｘ－５）（２ｘ＋３）＝０を解きなさい。

<Ｋの解答>
無答（何も書いていない）
<Ｓの解答>
$(x-5)(2x+3)=0$
$2x^2+3x-10x-15=0$
$2x^2-7x-15=0$

②ペアでの話し合い

Ｓ　まず展開するから…
Ｋ　うん。
Ｓ　（個人で解いた時と同じものを書く）
Ｋ　両辺を２で割ると、(因数分解が) できないじゃん。
Ｓ　うん。
Ｋ　両辺を２で割ると、$x^2-\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}=0$ になるじゃん。かけたら $-\frac{15}{2}$ になるような数の組み合わせはないんだよ。
Ｓ　（図３を書く）

$(x+5)(2x+3)=0$
$2x^2+3x-10x-15=0$
$2x^2-7x-15=0$
$x^2-\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}=0$

図３　話し合い中に書いたＳの記述②

Ｓ　できないじゃん。
Ｋ　整数と分数の組み合わせでもできるかもしれない。
Ｓ　１と $\frac{15}{2}$ かもしれない。
Ｋ　そうすると（たして）$-\frac{7}{2}$ の部分がおかしくなるね。（方程式の各項の）係数が小数や分数にならないような気がする。
Ｓ　（図３を消す）
（しばらく無言の状態が続く）
Ｋ　そもそもｘ－５と２ｘ＋３をかけると０になるってことでしょ。ｘ－５が０になるためには、(ｘに) ５を入れればいいし、２ｘ＋３が０になるためには、$\frac{3}{2}$。
Ｓ　どうして？
Ｋ　$2\times\frac{3}{2}$で３になるじゃん。
Ｓ　もう１回言って。
Ｋ　あっ、$-\frac{3}{2}$ だった。２ｘ＋３のｘに$-\frac{3}{2}$を代入すると、２ｘは$2\times-\frac{3}{2}=-3$で（２ｘ＋３の値が）０になるから。
Ｓ　$-\frac{3}{2}$ はどこから出てきたの？
Ｋ　２ｘ＋３の部分を２で割って $(x-5)\times(x+\frac{3}{2})=0$ になるから。
解は５と$-\frac{3}{2}$。
Ｓ　あー、本当だ。

③話し合い後の理解状況

<類似問題>
（３ｘ－１）（ｘ＋７）＝０を解きなさい。

<ＫおよびＳの解答>
$(3x-1)(x+7)=0$
$(x-\frac{1}{3})(x+7)=0$
$x=\frac{1}{3},\ -7$

<インタビュー>
２次方程式を解く時、どうして左辺を因数分解するのでしょうか。

Ｋ：左辺が因数分解されていない状態だと、ｘに１つ１つ適当な数を代入していって何分もかけないと探せないけど、左辺

を因数分解するとどちらかのかっこが０になればいいから、ｘに代入する数（解）をかんたんに探せるからです。因数分解すると、どっちかのかっこが０になればもう一方のかっこが何になっても答え（積）が０になるからです。

Ｓ：例えば$x^2+x-12=0$のままだと、ｘに何が入るのかが見えにくいけど、左辺を因数分解すると$(x+4)(x-3)=0$になって、ｘに－４と３を入れると、（左辺の式の値が）０になるっていうのがすぐに分かるからです。

④考察

話し合い前の解答状況から、前半調査と同様にどちらか一方が支援する側、支援を受ける側という明確な役割がないまま話し合いが始まった。

話し合いでは、Ｓの考えをもとに、２人で左辺を因数分解することを試みるが、うまくいかなかった。そのため、Ｋは最初に提示された問題の式の意味について考えたことで、授業で学習した「$A\times B=0$のとき、$A=0$または$B=0$である」という性質（以下、「整域の性質」とする）を想起し、代入した時に等式をみたす値（解）をみつけることができた。しかし、Ｓは理解できなかったので、Ｋに対して「どうして？」と説明を求めた。このＳの「どうして？」には、「どうしてそのような値が出てくるのか？（どのようにして値をみつけたのか？）」という考えの理由を尋ねる意味が含まれていたと考えられる。

それ以降の話し合いは、Ｋが支援する側として、Ｓに説明する形で進められた。Ｋの説明に対してＳは当初理解できなかったが、「$-\frac{3}{2}$ はどこから出てきたの？」というように質問の内容を具体的にして再び尋ねたことで、Ｋは解き方について背景にある性質（整域の性質）と結びつけて説明することができた。

そして話し合い後、ＫおよびＳは類似問題を正しく解くことができたことに加えて、計算手続きをする理由や解き方の背景にある性質について説明することができた。

６．「Ｔ・Ｎ」ペアにおける話し合いの分析

(1)前半調査

①話し合い前の理解状況

＜問題＞
$(x-y)^2+4(x-y)-5$を因数分解しなさい。

＜Ｔの解答＞

$(x-y)^2+4(x-y)-5$

$x-y=A$とおく

$=A^2+4A-5$

$=(A+5)(A-1)$

$=(x-y+5)(x-y-1)$

＜Ｎの解答＞

$(x-y)^2+4(x-y)-5$

$=x^2-2xy+y^2+4x-4y-5$

②ペアでの話し合い

Ｎ　まず$(x-y)^2$と$4(x-y)$の部分を展開して計算したでしょ？

Ｔ　因数分解だから、最終的には(　)×(　)の形にしないとダメだよね。

Ｎ　そうだね。

Ｔ　だから、授業でやったように、$x-y=F$と置き換えると、F^2+4F-5になる。次に、例えばx^2+4x-5を因数分解すると、$(x-1)(x+5)$になるから、同じようにF^2+4F-5は$(F-1)(F+5)$になる。Ｆを元に戻して、$(x-y-1)(x-y+5)$。分かる？

Ｎ　分かった。同じ部分を大きな文字に置き換えて、因数分解していって、最後に元に戻すんでしょ？

Ｔ　そう。最終的に因数分解は、(　)×(　)の形にしたら完成だから、これでオッケーだと思う。

③話し合い後の理解状況

＜類似問題＞
$(x+y)^2-16$ を因数分解しなさい。

＜ＴおよびＮの解答＞

$(x+y)^2-16$
$=M^2-16$
$=(M+4)(M-4)$
$=(x+y+4)(x+y-4)$

＜インタビュー＞
この問題では、どうして $x+y=M$ に置き換えて因数分解するのでしょうか。

Ｔ：分かりません。最初は展開してから因数分解しようと思ったけどしっくりこなかったので、他に思い付く方法でやってみようと思いました。

Ｎ：分からないです。

④考察

話し合い前の理解状況から、Ｔが支援する側、Ｎが支援を受ける側として、話し合いが進められた。

話し合いでは、Ｔが因数分解のゴールイメージを示すことでＮの間違いを暗示的に指摘した後、計算手続きを説明した。それを受けてＮも計算手続きについて自分の言葉でまとめたが、２人の間で計算手続きをする理由などについては話題にならなかった。

そして話し合い後、Ｎは計算手続きを理解したことで、類似問題を解くことができたが、インタビューではそのような計算手続きをする理由については説明することができなかった。

(3) 後半調査

①話し合い前の理解状況

＜問題＞
$(x-5)(2x+3)=0$ を解きなさい。

＜Ｔの解答＞

$(x-5)(2x+3)=0$
$2x^2+3x-10x-15=0$
$2x^2-7x-15=0$

＜Ｎの解答＞

$2x^2+3x-10x-15=0$
$2x^2-7x-15=0$
$x^2-\frac{7}{2}x-\frac{15}{2}=0$

②ペアでの話し合い

＜前半部分＞

初めにお互いの理解状況が共有され、左辺を因数分解しようと試みるがうまくいかず、話し合いが止まってしまった。

調査者（Ｒ）はこれで話し合いが終わってしまう可能性があると考え、計算手続きをする理由を中心に２人の話し合いに介入する判断をした。

Ｒ　じゃあ、質問してもいい？どうして左辺を展開したのかな？

Ｔ　今までの授業でもずっと展開してきたので…

Ｎ　（Ｔくんの考えと）同じです。

Ｒ　展開した後、何をしたの？

Ｎ　同類項をまとめて、（x^2の係数の）２がじゃまなので、すべての項を２で割ろうとしたんですけど、ｘの項と定数項が割れなかったので、どうすればいいかこれ以上進まなかったです。

Ｒ　一応、２次方程式の基本形になったんだよね？２次方程式の基本形になったんだけど、解けないのはなぜ？

Ｔ　左辺を因数分解するために、かけて 15 になる数の組み合わせを探すと、1×15, 3×5 なんですけど、たしてもひいても７にならないです。

Ｒ　そもそも２次方程式を解く時、どうして左辺を因数分解するの？

T　（少し考えてから）かっこ同士をかけるので、どっちかのかっこの中が０になればいいから。

R　Ｎくんはどう思う？Ｔくんの説明、分かった？

N　いや、分からなかったです。

以上のような話し合いを行った後、中盤部分および後半部分の発話を以下に示す。

＜中盤部分（左辺を因数分解する理由について話し合う）＞

R　じゃあ、「どうして左辺を因数分解するのか？」っていうところからまた２人で話し合ってみて。

T　例えば、（ｘ＋４）（ｘ＋５）＝０の場合、ｘに－４を代入すると０×１＝０になって、解を求めやすいから左辺を因数分解する。①

N　（少し考えてから）最初からもう１度説明して。

T　例えば、（ｘ＋４）（ｘ＋５）＝０の解は、ｘ＝－４，－５じゃん。因数分解するとどっちかのかっこが０になれば、もう一方のかっこが何になっても答え（積）が０になるから。
一番かんたんに解を求められる方法が（左辺を）因数分解すること。②

N　･･･

T　どこが分からない？Ｎはどうして左辺を因数分解すると思うの？考えを聞かせて。

N　２次方程式の基本形にすると、だいたい自然に左辺を因数分解するっていうイメージがあるから。特に理由は考えたことがなかった。
どっちかのかっこが０になればもう一方のかっこが何になっても（積は）０になるっていうことは分かった。

T　どっちかのかっこを０にすると、答え（積）が０になるっていうのが因数分解だから。③

N　あー。ちょっと理解できた。

T　じゃあ、俺に説明してみて。

N　んー。

T　うーん、説明が難しいわ。因数分解すると、例えば、（ｘ＋△）（ｘ＋□）＝０になって、どっちかのかっこを０にするために△の符号を逆にした数をｘに入れる。△が－４だったら、ｘに＋４を入れれば０になるじゃん。④

N　例えば、かっこの中がｘ＋６のとき、ｘに－６を入れると、＋６と－６で（たして）０になる。だから、解を求めるために因数分解をする。

T　そう。そうすると、方程式の解を求めることができるじゃん。だから（左辺を）因数分解するっていう感じ。
x^2＋○ｘ＋△＝０のままだと、ｘに何が入るか求めにくいじゃん。例えば、x^2＋５ｘ－14＝０だと、ｘは何かっていうのは求めにくいけど、（左辺を）因数分解して（ｘ－２）（ｘ＋７）＝０にすると、－２の符号を逆にした数が解になるじゃん。⑤

N　（左辺を）因数分解すると解が求めやすくなる。

＜後半部分（この問題の解き方について話し合う）＞

T　そうそう。じゃあ、話を元に戻そう。
（ｘ－５）（２ｘ＋３）＝０の解の１つはｘ－５から＋５でしょ？
２ｘ＋３の方はどうしようかな･･･

N　２ｘ＋３の方は、ｘに－３を入れるんじゃないの？

T　２ｘ＋３のｘに－３を入れて計算すると、（式の値が）－３になる。２ｘ＋３を０にしたいから、２ｘ＋３＝０の方程式を立てて、＋３を移項して２ｘ＝－３。そして、両辺を２で割って $x=-\frac{3}{2}$ 。

逆に、ｘに$-\frac{3}{2}$を入れると、２ｘ－３の値は０になる。

Ｎ　２ｘ＋３を０にするために、２ｘ＋３＝０の式を作って、これを解いてｘ＝$-\frac{3}{2}$。

③話し合い後の理解状況

＜類似問題＞
（３ｘ－１）（ｘ＋７）＝０を解きなさい。

＜ＴおよびＮの解答＞

（３ｘ－１）（ｘ＋７）＝０
３ｘ－１＝０　ｘ＝－７
３ｘ＝１
ｘ＝$\frac{1}{3}$

ｘ＝$\frac{1}{3}$，－７

＜インタビュー＞
２次方程式を解く時、どうして左辺を因数分解するのでしょうか。

Ｔ：因数分解すると、どっちかのかっこが０になればもう一方のかっこが何になっても答え（積）が０になるからです。どっちかのかっこを０にするために一番かんたんな計算が因数分解だからです。

Ｎ：左のかっこと右のかっこをかけると０になるということは、どちらかのかっこを０にしなければならないからです。

④考察

話し合い前の理解状況から、どちらか一方が支援する側、支援を受ける側という明確な役割がないまま話し合いが始まった。

前半部分では、話し合いが止まってしまった２人に対して、調査者がこの問題を解くことができない理由を尋ね、「左辺が因数分解できないから」ということが共有された。それを受けて、調査者がさらに左辺を因数分解する理由を尋ねた。Ｔはこの質問について考えることを通して、この問題の解き方には整域の性質が使われていることを想起することができたと考えられる。

中盤部分では、前半部分において既に理解することができたＴが支援する側としてＮに説明した。その中で、ＴはＮが理解したと考えられるまで、内容を変えながら５回の説明を試みた。（プロトコルにおいて下線①～⑤で示した部分）具体的には、①で「解を求めやすいから」というように計算手続きをする理由を、②で解き方の背景にある性質（整域の性質）をそれぞれ説明した。

Ｔの①および②の説明について、Ｎは理解していない様子だったので、ＴはＮの分からないところを尋ねると、Ｎは整域の性質については理解し、計算手続きをする理由については分からないことを述べた。それを受けてＴは、④および⑤で計算手続きをする理由について、具体例を挙げながら背景にある性質と結び付けて説明した。この④および⑤の説明によりＮは理解し、具体例を挙げながら自分の言葉で説明することができたと考えられる。

後半部分では、この問題の解き方について、再び２人とも分からない段階から話し合いが始まった。初めにＴが「整域の性質から１次方程式を立て、その解が問題の２次方程式の解になる」ということを想起することができ、支援する側としてＮに説明した。その中で、Ｎの考えが間違いであることを具体的に指摘するとともに、整域の性質を使って「２ｘ＋３＝０」という１次方程式を立てて、解くことを説明した。このようにＴがこの問題の解き方について背景にある性質と結び付けて説明することで、Ｎは理解することができたと考えられる。

そして話し合い後、ＴおよびＮは類似問題を正しく解くことができたことに加えて、計算手続きをする理由や背景にある性質についても説明することができた。

７．研究のまとめ

(1)成果

「Ｋ・Ｓ」ペアにおける話し合いでは、前半調査から生徒の中からモデルに示された行動が見られ、後半調査においても同様に見られた。具体的には、お互いに考えの理由を尋ねたり（伝えたり）、支援する生徒が解き方について背景にある性質と結び付けて説明した。その結果、いずれの調査においても支援を受けた生徒の理解が促進された。

一方、「Ｔ・Ｎ」ペアにおける前半調査の話し合いでは、生徒の中からモデルに示された行動は見られなかった。そして、支援を受けた生徒は類似問題を解くことができたが、計算手続きをする理由について理解するまでには至らなかった。また、後半調査においても同様の行動は見られず、途中で話し合いが止まった。しかし、調査者が２人の理解状況を確認しながら、計算手続きをする理由について尋ねることで、先にＴの理解が促進された。さらに、それ以降の話し合いでは、Ｔが支援する側として、計算手続きをする理由や解き方について背景にある性質と結び付けて説明することで、支援を受けた生徒（Ｎ）の理解が促進された。

以上のことから、生徒の中から「考えの理由や背景にある概念，性質を尋ねたり、伝えたりする」という行動が見られる話し合いでは、支援を受ける生徒の理解が促進され、見られない話し合いでは、意図的に考えの理由や背景にある概念，性質を話題にすることで、理解が促進されることが明らかになった。

また、生徒同士の話し合いにおいて、いずれの生徒も理解していない状況で話し合いが始まった場合でも、考えの理由や背景にある概念，性質が話題になることで、どちらか一方の生徒が先に理解し、途中から「支援するー受ける」という場面に移行しうることが明らかになった。

(2)課題

生徒同士の話し合の中で、「考えの理由や背景にある概念，性質を尋ねたり、伝えたりする」という行動が自然に見られるようになるために、調査では４(6)で述べた手立てを実践したが、この手立てが有効であったかについての検証には至っていない。

本研究で明らかになったことを生徒同士の「支援するー受ける」という場面における学習効果を促進する方略として活用するためには、この手立てについてさらに長期的な実践や検証が必要である。

引用・参考文献

町岳，中谷素之（2013）．協同学習における相互作用の規定因とその促進方略に関する研究の動向．名古屋大学大学院教育発達科学研究科紀要，*60*，83-93.

関口康広（2018）．算数・数学科協働学習におけるヘルプ・シーキング．日本数学教育学会第 51 回秋期研究大会発表集録，283-286.

Webb, N. M. , Farivar, S. H. & Mastergeorge, A. H.（2002）. Productive helping in cooperative groups. *Theory Into Practice*, *41*（1）, 13-20.

Webb, N. M. & Mastergeorge, A. M.（2003）. The development of students’ helping behavior and learning in peer-directed small groups. *Cognition and Instruction*, *21*(4), 361-428.

山路茜（2014）．中学校数学科のグループ学習における課題の目的に応じた生徒のダイナミックな関係．教育方法学研究，*39*，25-36.

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.71-82

主体的・対話的な学びのある数学授業設計のための Y.Engeströmの活動理論の捉え直し

澤邉　基
上越教育大学大学院修士課程２年

１．はじめに

実体験として，筆者がこれまでに受けてきた数学の授業を振り返ると，小学校生活，中学校生活に比べ，高校生活では言語活動が少なく，ひたすら問題を解くような試験，受験のための授業が主になっていた．このような授業は，子どもたちを「なぜ学んでいるのか理解出来ない」という状態に陥らせ，数学嫌いな子どもを増やしていってしまうのではないだろうか．

平成30年7月30日に文部科学省によって公示された高等学校学習指導要領解説数学編(文部科学省 2018)には，数学科改訂の要点として「数学的活動の一層の充実」と記されている．また，そこには「数学的な問題発見・解決の過程では，主として日常生活や社会の事象に関わる過程と，数学の事象に関わる過程の二つの問題発見・解決の過程を考え，これらの各場面において言語活動を充実し，それぞれの過程を振り返り，評価・改善して学習の質を高めることを重視している」と書かれている．このことから数学的活動を通して言語活動の充実に取り組む必要性が伺える．また，三枝(2010)は「数学的活動を通して楽しむ事が実感できれば，数学嫌いは減少し，やがて創造性の基礎も育成され，生涯にわたって主体的に判断し活動できると考える.」と述べている．

ここまで言語活動を充実させた授業の必要性について述べてきたが，このような授業を高校数学においても単に行えばいいかというとそう単純な問題ではない.「高等学校におけるアクティブラーニングの視点に立った参加型授業に関する全国調査」（木村ら 2015）によると，数学について「アクティブラーニングは以前から取り組んできた学習である」とする回答が5教科中最も低く,「イメージが湧かない」の回答は5教科中最も高くなっている．このことから高校数学におけるアクティブラーニング実施の困難性が伺える．そこでまずは実際の主体的・対話的な学びのある数学の授業では子どもたちが学習のもとでどのように学習集団としての集団を発展させていくのかを明らかにする必要がある．

本研究では,生徒の活動を分析対象として，新たな授業デザインを生み出すためにY.Engeströmの「活動理論」を援用して活動を動的に捉える．また，このように動的に捉えることで数学の主体的・対話的な学びのある授業において,子どもたちが「活動システム」のもとでどのように集団を発展させていくのかを捉えることができるのか，実際の授業の分析を通じてその妥当性を判断する．

２．活動理論

活動理論とは，人間の学び，遊び，科学・芸術，技術，労働，生活などの「活動」を，社会的・協働的な「活動システム」として分析し，その文化・歴史的に新しい形態やパターンを，実践者自らによる発達や転換として

現実につくりだそうとする理論である.
（山住 2004）

２．１． 活動理論の歴史的展開

Engeström(1987)は,活動理論の歴史的展開を「三つの世代」という考えから述べている．第一世代は，L.Vygotsky を中心とするものである．L.Vygotsky は，人間行動を対象に向けられた行為と捉え,その発達がツールや言語，シンボルやアイデアやテクノロジーといった「文化的人工物」(道具）の創造と使用に媒介されていることを明らかにした．山住(2004)によるとここにおいて，人間の行動を「文化や歴史に媒介された社会的実践活動」として理解することができるようになったという．第二世代は A.Leont'ev の活動理論によるものであるという．A.Leont'ev の活動という概念の革新性は，活動に「分業」「協業」という新たな要素を関係づけ，対象に動機づけられた活動が個人の次元ではなく集団的な次元において成立することを示したところだという．そして Engeström(1987)は，活動システムの変化と発展の原動力として「内的矛盾」というアイデアを概念化し，2 つ以上の活動システムの相互作用に着目した第三世代へと発展させている．また,Engeström(1987)は「活動」という理解を，システム的なモデル化へ発展させている．次の図 1 のような活動システムのモデルである．

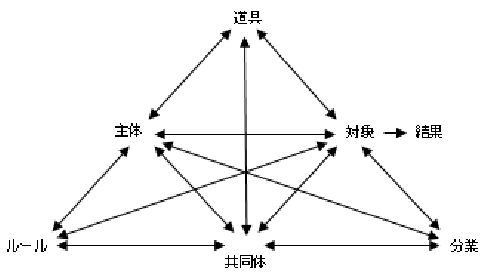


図 1　Engeström(1987)による
活動システムモデル

山住(2004)によるとこのシステムにおける「道具」とは,「主体」が「対象」に働きかける時に用いる道具や手段となるものである．これには，物だけでなく，理論やアイデアなど物質として存在しないものも含まれる広い概念である．「ルール」は社会的な規範，統制や慣習のことであり,「分業」は，知識や課題によって分けられるものと，権力や地位によって分けられるものを指す．以上の全てが関連しあっているのが活動理論であり，基本的関係である「主体」「対象」「共同体」は私たちが直接，行為として目にするものであり，その他の部分は行為としては目に見えない基底部分である，というように分けられる．

松下(2010)は図 1 の各構成要素において重要なことは，互いに他と分離しては存在しえず，他との関係において初めてその位置を得るということであると述べる．

Engeström (1987) は，活動システムを,「内的矛盾」を原動力として「絶えず再構成されていく」ものと述べる．Engeström (1987) によれば，この「内的矛盾」は 4 つのレベルであらわれる．第一の矛盾は，各々の構成要素内における交換価値と使用価値の矛盾であり，第二の矛盾は，構成部分のあいだの矛盾であり硬直した階層的分業が，道具の進化によって開かれた可能性を遅らせたり妨げたりすることを例示している．第三の矛盾は，文化的により進んだ中心的活動の対象とのあいだの矛盾であり，文化的により進んだ対象と動機は，中心的活動の主体そのものによっても積極的に探し求められるという．そして第四の矛盾は隣接する諸活動とのあいだにある矛盾であるという．このうち，第三の矛盾，及び第四の矛盾のように少なくとも 2 つの「相互作用する活動システム」へと分析単位を拡張したのが第三世代である．

Engeström(1991)は,活動が抱える矛盾を出発点とし，実践者自身が，自らの生活活動のシステムを分析しデザインすることを目指す介入法を「発達的ワークリサーチ」と呼び,

新しいパラダイムにほかならないとしている．また，Engeström(1987)は，そうした矛盾に迫りながら，新しい対象，新しいコンセプト，持続性のある新しい実践形態を生み出すようなレベルの学習を「拡張的学習」という概念で説明している．

３．先行研究

３．１． 学校学習と活動理論

人間活動の全体を統一的に把握するための分析単位を拡張させてきた活動理論であるが，授業研究に援用する場合にはその限界も指摘されている．松下（2010）は，「拡張的学習と学校学習との間には，大きな隔たりがある」とし，「活動システム」理論の授業研究への援用は，「説明の道具としては有効でも，介入の道具にはなりにくかったと述べている．本研究においてはこの松下の立場に立脚し，実践者と研究者が協働して行う「発達的ワークリサーチ」ではなく，集団が対話を通して学習集団を形成していく過程を解釈する枠組みとして，「活動システム」のモデルを用い，活動を 6 つの要素によって動的に捉えることとした．

３．２． 加登本ら(2014)の研究

加登本ら(2014)は，松下の立場に立脚し，小学校 4 年生を対象とし，フラッグフットボールの授業で子どもたちがどのような「活動システム」のもとで学習集団としての集団を発展させていくのかを事例的に明らかにしている．加登本ら(2014)は，フラッグフットボールの単元全 15 時間で実施した「仲間づくり調査票」について，学級全体及び抽出した班の子どもの平均値の変化を示したグラフを用い，「仲間づくり」の成果において，単元前半で低い値を示していた授業と，単元後半で高い値を示した授業について活動システムを援用し，肯定的な変容に影響を与えた要因を考察している．

３．３． 和田(2019)の研究

和田(2019)は活動理論に基づきながら数学の道具性を活かすような授業構成について考察し，数学を問題解決のために行われる活動性の所産と見たとき，数学の道具性を活かすためには問題解決の過程の中で数学とその使用価値を発明し，実際にそれを適用することが必要であることを明らかにした．また，教師が子どもに与える事象は，その後の学習活動を見越した，整備され考え抜かれた事象でなければならないと述べ，そのような事象の設定は数学の道具性から逆算した事象であることが必要で，場合によって対象を生み出すための補助的な活動が必要であると述べている．

４．本研究における活動理論の利用

４．１． 本研究での数学観

本研究では，数学が個人に内在的であり，共有できるという立場に立脚する．また，活動を 6 つの要素に着目し，動的に捉えることで数学的知識が主体的・対話的な学びの場面において幾度となく変容していくと考える．よってまずは主体的・対話的な学びの場面における各要素に内在する数学的知識を定義するために実際に行われた授業を動的に捉え，分析する．

４．２． 活動システムを用いた授業分析

４．２．１． 下平(2011)のプロトコルから

生徒に仮想のオリンピックの採点表を見せ，どちらの国が金メダルかを予想させる問題を提出して，実際に取り組んだ課題を以下に示す．

信州オリンピック 2010（アクロスキー）団体戦決勝は，C 国対 H 国の組み合わせになりました．この競技は 7 ヵ国の審判の採点により勝敗が決まります．7 人の審査員の採点は右の表のようになりました．果たして，金メダルはＣ国とＨ国のどちらのチームになったで

しょう．

審判	C 国	H 国
①	9.0	9.2
②	9.3	9.2
③	9.7	8.8
④	9.2	9.1
⑤	8.9	9.1
⑥	9.0	9.3
⑦	9.2	9.2

この課題を提示するまでのプロセスとして，バンクーバーオリンピックの映像を見せ，生徒の関心をひいている．課題も復唱させ，しっかりと内容を理解させたうえで，ますは，どちらのチームが優勝したかを予想させた．

116 教師 で，決勝戦どことどこの国になったって？
117 全員 C 国対 H 国．
118 教師 で，審判は？何人いるの？
119 全員 7 人．
120 教師 で，みなさんのワークシートにもう審判の採点が書いてあると思うんだけど，もう見てるね．これ（拡大採点表）はい．
121 教師 見通し，予想のところ，直感でいい，どっちが優勝，金メダルを取ったか書いてみよう．（〇をつけさせる）

これについて 40 秒ほど時間を取り，考えさせた．そのあとでどちらの国が金メダルなのかと予想したかを挙手させると 8 割の生徒が「C 国が金メダル」と考えていることがわかった．この後で教師は理由について考えさせるよう以下のように話をつづけた．

133 教師 さて，それではねえ，これからみなさんに 5 分ぐらい時間をあげます．この採点表をじっくり見て，今自分が C 国，もしくは H 国，もしくはわからないって判断したものをちょっと周りの人に伝えてもらうために，えー，個人追究って書いてあるよね？そこんところにどうしてそうなのかなぁーっていうことをこれから検証していただきたい，確かめてもらいたいということです．で，数字がいろいろとね，得点が書いてあるから，何か必要なものある？何か欲しいものありますかね？
134 数名 電卓，電卓…
135 教師 電卓使いたい人？はーい．
136（挙手）
137 教師 電卓使いたい人は，あの，ここに置いてあるから各自好きなように持って行ってください．好きなように 3 つも 4 つも持っていくなよ．
138 クラス内 あっはっは．
139 教師 で，それで，電卓でわかんないことがあったら先生とか隣の人に聞きながらやってみてください．

この場面では活動システムの変容が顕著に表れている．プロトコル前半部での【対象】は 121 の発言から「優勝国を予想すること」にある．後にどう予想したか問うた場面では，全体が挙手している様子が記されていることから，この【対象】について取り組む【主体】である，生徒全体の活動が起きていたことがわかる．この背景には，バンクーバーオリンピックの映像という【道具】，それによって【共同体】全体を同じ【対象】へと方向づけたことが大きく影響していると考えられる．

この【対象】が達成されたことを受け，【共同体】に属する教師は 133 の発言をするが，この発言は【主体】の【対象】を「理由を考える」というものに変えたことに大きく影響を与えているものと考える．また，【道具】として電卓が使えるという【ルール】が新たに追加されたことで，生徒の主体的な活動を促した．

また，優勝国を予想した結果，8 割の生徒が C 国と判断したが，これの判断材料は採点

表のみであろう．生徒はそこに書かれている数字のみから数学的に優劣をつけた．つまり，採点表という【道具】に数学があることを見いだしたと考えられる．また，135,136 からも【主体】が計算の必要性を感じていたことがわかる．

課題解決の場面では，挙手している人の中から Takeo，Hayato，Arisa，Taro，Koichi を指名し，発表させた．また，このとき，発表を聞く人はワークシートに他人の考えを記入するという【ルール】が与えられた．よって【対象】は広い意味では「考え方の吟味」ということになるが，4 人発表者が変わることで【分業】として発表側と聞く側のメンバー，つまり，【共同体】内の関係が毎回変化しているため，これを通じ，生徒は数学的知識を洗練していっているのだと考える．

4 人の発表の後で，【主体】である生徒は【対象】である「考え方の吟味」を終え，C 国が金メダルということを結論付けた．これは以下の 311 の教師の発言が大きく関わっていると考える．教師の「じゃあ，C 国金メダルでよろしいですか？」という発言に対し，生徒は「はい.」と答えている．【主体】が一つの【対象】を達成したことを確認できる．

311 教師 じゃあ，C 国金メダルでよろしいですか？
312 多数 はい．
313 教師 で，今日の授業をこれで終ろうと思ったんだけど，ごめんね，今，1 個言うのを忘れちまった．すんげー大事な情報を言うのを忘れちまった．参ったな，ごめん，やり直しかもしれない．
314 数名 えっ？
315 教師 うっかりしていた．資料の活用だよね．資料だよね．情報が大事だとか言っておいて，情報を伝えるの忘れちまった．1 個….
316 （冷たい雰囲気）
317 教師 これ審判何人いる？
318 全員 7 人．
319 教師 いろんなやり方があったんだけど，結果はどっちだった？
320 全員 C 国
321 教師 ごめん，許してくれるかな～（と言いながら拡大採点表の審判番号の箇所を剥がす）
322 クラス内 えっ？あれ？
323 教師 本当に申し訳ない．実は，審判国の国の人…（省略）
333 クラス内 あー，あー，あれ，わかった，えー…，どっちが，あーC 国が，C 国はひどすぎだよこんなの，あー．
334 教師 さあ，周りで話し合おう．

313 の教師の発言は新たな活動の契機となるものであった．これまで【共同体】の一員として【対象】を【主体】と同じ目線で捉えていた教師が，313 の発言によりその【共同体】内の関係を変化させたのである．この逸脱した発言が【主体】の取り組むべき【対象】を変化させている．

審判	C 国	H 国
A	9.0	9.2
B	9.3	9.2
C	9.7	8.8
D	9.2	9.1
E	8.9	9.1
F	9.0	9.3
G	9.2	9.2

「審判の国籍」という見方が加わったとき，どのような問題があるか問う場面が下記の通りである．

357 教師 さて，この審判の国が出たときこれを見てどういうふうに思ったのか，感じたのか，こうじゃねえかということが絶対あると思います．はい，それを言ってくだ

さい．手がどのくらいがるのでしょうか．はい，どうぞ．
358 教師 はい，そうすると 5 人，6 人ぐらいしか挙がらない．はい，どんどん挙がってきた．書いたんじゃない．さあどう？
359 教師 はい，それじゃあ，Rin どんなふうに感じたか？
360 Rin えっと．H 国の
361 教師 うん．
362 Rin 審判がいなくて，C 国の方には審判がいて，自分の国にだけに，こう点数を高くしているっていうのは，それはちょっと卑怯な感じに思われるのかなぁっと，もう一度ちょっと，採点みたいなものをした方がいいと思いました．
363 教師 ほぉ，どう同じように感じた人？はい．ほら，今手挙がるでしょ？頑張ろうね．はい．

この場面では 357 から教師が【対象】を「審判の国籍という見方が加わったときの問題点」に設定している．ここで，発表者の Rin，それを聞く他の生徒，それらを結び付ける教師という【分業】の形を取ることで，改めて 1 つの【共同体】として【主体】に【対象】を把握させようとしている．この後で，教師は「どちらの国が本当の金メダルなのか，自分なりの採点方法を考えて説明していただきたい」と発言し，再度【対象】を共有している．このことに対して生徒から疑問はなく，スムーズに作業にとりかかっている様子が見られたことから 357～363 での教師の誘導は生徒にとって無理のないものであったと考えられる．

課題解決の場面では，挙手している人の中から Suguru，Yuka，Daiki，Kenji，Koichi を指名し，発表させた．また，この場面においても発表者が変わることで【分業】として発表側と聞く側のメンバー，つまり，【共同体】内の関係が毎回変化しているため，これを通じ，生徒は【対象】に取り組んでいるように見える．ではここで【主体】は数学的知識を獲得できているのだろうか．第一時では，各発表者とも C 国が金メダルとし，それを計算過程と共に説明した．第二時では，各発表者とも H 国が金メダルとし，それを計算過程と共に説明した．両者同じプロセスを経ているが，後者は数学的知識の獲得という点において前者に比べ劣っていると考える．

550 教師 大逆転したね．だけど本当に個々，それぞれのやり方があるんだけど，どれがいいかっていうのは，どうです？ちょっと一応聞いてみようか？う～ん，いろいろあったんだけど，やっぱり C 国を除いた方がいいかなと思う人？はい．
551 （半数程度が挙手）
552 教師 はい，下ろして．先生の質問がよくなかったかな．C 国は，まあ，切っちゃうのはよくないけど，何か操作して C 国の得点をちょっとでも加味してあげたほうがいいのかなぁって思う人？
553 （1 人が挙手）
554 教師 あっ 1 人しかいない．あっほほほほ…．なるほどね．
555 教師 で，いろんなやり方があったんだけども，まあ結果的にはね，H 国になったんだけども，こうやってやって，一つの数値を，ね，数値は変わんないんでしょ，ここ（採点員の国別）を見せた途端，みなさんは，何と思ったかというと，C 国の審判員は…．
556 数名 ず，ずるい．
557 教師 ずるいとか．
558 数名 せこい．
559 教師 せこいとか．
560 数名 不公平，不公平．

550，552 に対して反応したのは半数程度であるから残り半数の生徒に関しては発表を聞いてもそういった計算方法が正しいかどうか

判断しかねている状況であることがわかる．よって同じようなシステムの変容に見えるが数学的知識の獲得という点においては第一時より劣っているといえるだろう．

一方で発表のプロセスを経ることで，C 国の採点について見つめなおさなければならないという考えはより強まったものと考える．教師は，発表以前に 362 の Rin の発言から C 国は卑怯であるということを【共同体】に共有していた．しかし，発表のプロセスを経ることで 556，558，560 の発言にあるように再度，【共同体】でこれを【対象】としてとらえる必要性が増したであろう．

565 教師 ただそのまんま計算する，足せばいい，平均出せばいいじゃなくてその数値の裏を読んでいく必要があると思います．なので，何を言いたいかっていうと，この言葉を，国語でやった？（板書）

566 クラス内 あー(ぼそぼそとした声で….)

567 教師 この言葉（客観的）の意味わかります？客観的と言います．せーの．

568 全員 客観的．

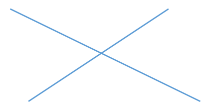
569 教師 この C 国のように，やっぱり，本当かどうかわかんないけど，やっぱりこの辺り（拡大得点表の C 国の部分を指し示しながら）はね，自分の国に少し気持ちをっていうのはあるでしょ．そういう風に見るんではなくて，第 3 者からやっぱり見ていかないといけない．わかる？そのものを見たときに気持ち，感情が入っちゃうと，数値というものは，あ，ある程度操作できちゃう部分もあるんだよ．

565，569 の発言はさらにその必要性についてを述べたものとなっている．そしてこのあとで，【主体】は平均値という用語を学ぶが，【主体】の新たな数学的知識の獲得までのプロセスにより洗練された数学的知識が獲得できたと考えられる．

４．２．２． 松井(2009)のプロトコルから

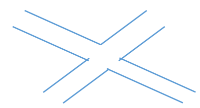
教師は次の問題を出して，授業を展開している．

交わる 2 本の棒から，わかることを書きなさい．また，なぜそうなるのかを答えなさい．



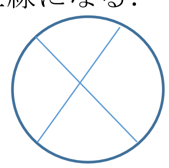
上の問題を出されたことで【主体】である生徒の【対象】はこの問題に取り組むこととなった．教師は，生徒に，【道具】として 2 本の線分の模型を与える．生徒は，【ルール】として模型を自由に動かすことができる．以下は授業の初めに，生徒それぞれが，図から見てわかることを発表する場面である．

16 Kita 4 つの三角形の角の先で交わっている．ここなんですよ．これをバラバラにすると，ここの先で交わっているわけです．



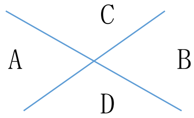
Kita は，16「4 つの三角形の角の先」と，2 つの線分の交わりを 4 つの三角形の頂点の重なりと捉えている．

18 Asa ここ（棒）とここ（棒）が同じ長さになります．横の角が 55°で，縦の角は 125°になります．形的には，X に似ています．で，この直線とこの直線はねじれの位置にあります．あと，回すと円になり重ねると一直線になる．



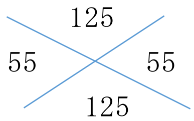
Asa は，18「回すと円になり，重ねると一直線になる」にあるように，【道具】を回していく操作を通して，図を動的に捉え，線分の軌跡を円と表現している．

26 Fuku で，全部の角度の和が 360° になって，あと，対角の角度が同じ．A と B が同じです．



Fuku は，角度を，文字を使って表現している．このことは，図が変わっても，同じことがいえるため，図を特定の図とはみていないといえる．

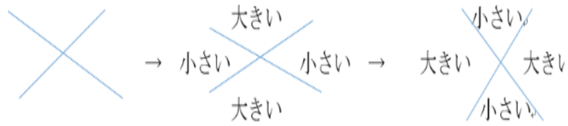
30 Naka ここ（55）とここ（55），ここ（125）とここ（125）が等しくなる．



Naka は，対頂角が等しいと捉えているが，その根拠は,実測による帰納的なものである．

Asa，Kita，Fuku は，図を一般性のあるものと捉えているが，これは模型の操作により，視覚的に明らかであるという判断をしたものである．これより，模型という【道具】，動かしていいという【ルール】が【主体】に大きく影響しているといえる．また，この場面では【対象】は同じであるが，その捉え方が【共同体】内でいくつかにわかれていた．そこで発表者とそうでないものとで【分業】の形を取ることで【共同体】内に知識を共有した．

教師は，Naka の考えを受け，対頂角がいつも等しいことの理由を考えることへと【対象】を変化させる．生徒が【対象】に取り組む過程で生まれた疑問ではなく，教師が【対象】を変化させた場面であるが，元の【対象】が抽象的であったことや【共同体】内の知識の差がなかったことから，この移行は自然なものであると考えられる．これより生徒は，2 直線の位置が変化していっても，対頂角が等しいことの理由を考えるようになる．Nemo は，次のように対頂角を捉える．



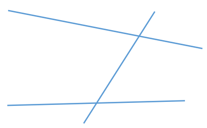
61 T どうですか．
62 Saka 比例と言うより，反比例．
63 T 今の Nemo くんのをもう 1 回いうと，
64 Nemo 上下の幅が大きくなると，左右が小さくなる．上下が小さくなれば，左右が大きくなる．
65 Saka 反比例でいいんじゃないですか．
66 T 反比例って何だっけ？
67 Saka y=a/x．
68 Fuku y が 3 倍になると，1/3 倍になる．
69 T じゃあ，10゛（左）が 30゛になると，こっちは何度になる？
70 Kita マイナス 30．
71 Yoshi はっ？
72 Fuku ×1/3．
73 Naba 10．
（中略）
85 T 反比例とはいえるかな．
86 複数 いえないでしょ．
87 T 比例といえますか．
88 複数 いえない．

比例や反比例ではないが，Nemo は，64「上下の幅が大きくなると左右が小さくなる」というように，隣りあう 2 角について，一方が増加した分だけ，もう一方が減少することから【対象】を関係的に捉えていたといえる．また，Saka や Fuku は，それを，もともと持っている数学的知識を道具として捉えようとした．

対頂角がなぜ等しいのかという【対象】に関しては，Naka の実測，Fuku の視覚による【対象】の捉え方と Nemo の隣の角による関係的な【対象】の捉え方がみられた．しかし Nemo は，隣りあう 2 角の和が 180° であるという

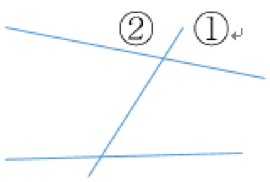
一般性を示す説明には，至っていない．そのため，Nemo の隣の角に注目した対頂角の【対象】の捉え方は,【共同体】での共通の【対象】の捉え方とは成り得ていない．そして，帰納的な説明で十分という判断により，実測，視覚による【対象】の捉え方が，【共同体】共通の捉え方と成り得た．このようなことから【対象】を変化せざるを得なくなり，教師は次のような 2 つ目の問題を用意した．

交わる 3 本の棒から，わかることを書きなさい．また，なぜそうなるのかを答えなさい．

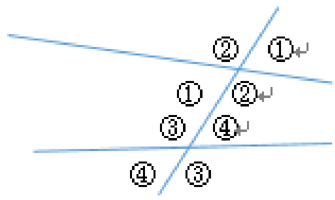


一つ目の問題と同様，教師は，生徒に，【道具】として 3 本の線分の模型を与える．ここにも生徒は，模型を自由に動かすことができるという【ルール】が存在している．以下は授業の初めに，生徒それぞれが，図からわかることを発表する場面である．最初，対頂角が等しいことを示した後だけに，2 組の対頂角が等しいと捉える生徒が多くいた．

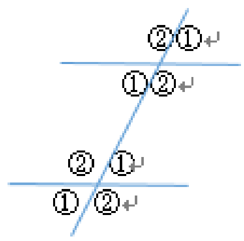
105 T これ①にするね．
106 Naba ②（②と対頂角の位置)，②．



107 Nemo ②じゃないよ．③でしょ．
108 複数 ②．
109 複数 ③．
110 T ②という人は等しいの？
111 Naba 等しい．
112 T なんで．
113 Yoshi さっきと同じで．
114 T ああ，対頂角，じゃあ，②でいい？
115 Yoshi いいです．で，そこが①．
116 Yoshi で,（下側）③にすれば大丈夫.④．
で．③，④．



対頂角が等しいということについて，Naba は 113「さっきと同じで」と既に正しいとしている．【対象】だったものが知識という【道具】として使用されていることが見て取れる．次に，教師は，2 本の線分が平行な場合の等しい角を探すことを指示する．これに対して，Naba は，次のように，黒板に番号を記入していく．



Naba は，同位角，もしくは，錯角を等しいとしている．ここでも，視覚に依存して考えている．対頂角の例から捉え方の知識の差（【分業】）はなく，【共同体】内にそのような考え方での捉え方が共有されたからであろう．そこで，教師は，視覚的以外の説明を求める．それに対して，Nemo は，次のように説明する．

150 T なんでかは言えます？Nemo くん．
151 Nemo ここで切断すれば同じ形になる．
上と下．

Nemo は，上と下の角はぴったり重なると主張している．ここでも，視覚的に同位角，錯角が等しいと判断している．この授業ではこれ以上の議論は成されなかった．「平行ならば，

同位角が等しい」ことを前提にして，錯角が等しいことを演繹的に証明する問題(【対象】)を生徒の間だけで行うことは難しい．知識として【道具】の不足分を物理的【道具】では十分の補えなかったことがよくわかる場面である．このあとで,「視覚的に，模型や平行移動によって等しい」という説明以降の議論は成されなかった．角が等しいことを関係的，もしくは，演繹的に説明しようという活動は生じず，帰納的な説明で十分という判断によって，同位角，錯角という【対象】が捉えられた．

５．6つの要素の連関と数学的知識の位置付け

前節のように動的に授業を分析することで活動システムにおける各要素に数学的知識が在ると言える．

下平(2011)の授業における「優勝国を予想する」という【対象】に対して生徒は採点表，電卓という物理的な【道具】を用いて取り組んだ．松井(2009)の授業においては，「どんなことが言えるか」という【対象】に対して生徒は模型という物理的な【道具】を用いて解決しようとした．この【対象】の設定は【主体】にとって，数学的知識が在るとはとらえにくいものであると考える．しかし，実際に【対象】を数学的に捉え，解決しようとしていた．これを方向付けた要因として物理的【道具】に数学が在ることを見いだしたからだと考える．つまり，【対象】が漠然としていても物理的【道具】の設定により【主体】を数学的活動の取り組みへと方向づけることが出来る．物理的【道具】の在り方として数学が在ることを理解させるようなものであることが必要であると言える．下平(2011)の授業で言えば，採点表に数字が並べられていること，電卓が与えられていることであり，松井(2009)の授業で言えば．動かせる直線が与えられているということである．なお，そこには，その物理的【道具】の使用に関する【ルール】も大きく関わっていてそれが活動を方向付けている．松井(2009)の授業で言えば「動かしてよい」という【ルール】が【主体】に内在する数学的知識を引き出した．このように【対象】を数学的に捉えられることがわかると【主体】は自身に内在する数学的知識をも，対象を捉える【道具】として扱う．よって知識としての【道具】にも数学的知識が内在する．つまり主体は物理的【道具】と知識としての【道具】の双方を駆使して【対象】に取り組んでいくことがわかる．松井(2009)の授業から授業デザインにあたっては【主体】の持っている知識としての【道具】を十分に把握し，それをひきだせるような物理的な【道具】を教材として扱う必要があると考えた．

また，【共同体】内の在り方も主体的・対話的な学びを引き起こす重要なものであると考える．本研究では【主体】を生徒という集団としてとらえているが，教師を含めた【共同体】個々人に内在する数学的知識には差がある．この差こそが主体的・対話的な学びを引き起こすのではないだろうか．松井(2009)の提出した課題という【対象】は抽象的なものであるが，先述した物理的【道具】と【ルール】が【主体】の活動を方向付けた．抽象的であるがゆえに多様な考え方が生まれた．これは個人に内在する数学的知識が異なるからである．教師がこの数学的知識の差を利用することは，自然に目の前の取り組むべき課題という【対象】を変化させ，活動を起こすのみならず，松井(2009)の授業に見られるように教え合いという対話的な学びをも引き起こす．よって本研究では【共同体】内の数学的知識の差も【分業】として現れるものと捉える．下平(2011)の授業のように役割をつくることによって生まれる形態も【分業】の形であり，このような【共同体】内の関係の変化は知識の洗練につながり，主体的・対話的

な学びを引き起こす一つの要因である．つまり【分業】には二重性があるものと捉えている．また，役割を与えずとも生まれる【分業】の形もある．下平(2011)が審判の国籍を提示したことは，教師を含む【共同体】内の関係が，教師とその他生徒との形で【分業】の形を形成した．このことが【対象】を変化させ，新たな活動の契機となった．よって教師が関係を逸脱することで現れる【分業】の形も有効であるといえるだろう．

６．まとめと今後の課題

これまでは，数学が個人に内在的であり，かつ共同体で共有されるという立場を取って数学授業を捉えていたが，数学的知識はすべての要素に連関して存在しており，このように数学授業という活動をシステムの要素に着目し，動的に捉えることで，主体がどのように数学的知識を獲得しながら対象に取り組んでいくのかを捉えることが出来た．また，活動を動的に捉えることで今後の課題である主体的・対話的な学びの設計にあたっての知見を得ることが出来た．

よって本研究においては，数学における主体的・対話的な活動というものを，先述のように動的な見方を取り，6 つの要素が連関しながら数学的知識を洗練していくものと捉える．

今後は，分析対象とする授業を増やし，得られる知見をより一般なものにしていく必要がある．そのあとで得られた知見をもとに主体的・対話的な学びのある授業を設計し，その授業を分析することで授業設計の妥当性を判断していく．

７．引用参考文献

三枝正(2010)．高校数学科における言語活動の充実を目指した指導方法－思考力・判断力・表現力を高める数列指導のあり方－山梨県総合教育センター紀要．

木村充他(2015)．高等学校におけるアクティブラーニングの視点に立った参加型授業に関する実態調査:第一次報告書．東京大学−日本教育研究イノベーションセンター．

松下佳代(2003)．学習のコンテクストの構成－活動システムを分析単位として－．京都大学博士論文．

松下佳代(2015)．アクティブラーニングへの誘い．松下佳代・京都大学高等教育研究開発推進センター(編)，ディープアクティブラーニング．勁草書房．

Engeström(1987)．山住勝広他訳(1999)．拡張による学習:活動理論からのアプローチ．新曜社．

加登本仁他(2014)．小学校体育科のボール運動の授業における学習集団の形成過程に関する事例研究－エンゲストロームの活動理論を手がかりとして－．日本教育方法学会紀要「教育方法学研究」第 39 巻．

山住勝広(2004)．活動理論と教育実践の創造:拡張的学習へ．関西大学出版部．

山住勝弘(2017)．拡張する学校―協働学習の活動理論―．東京大学出版会．

松井守(2009)．議論のある活動における中学生の証明する過程について．平成 20 年度上越教育大学学校教育研究科修士論文．

下平将揮(2011)．資料活用単元におけるグラフ電卓を使用した中学生の数学的モデリングに関する考察．平成 22 年度上越教育大学学校教育研究科修士論文．

和田陸(2019)．活動理論に基づく数学の道具性を生かした算数・数学の授業構成に関する研究－小学校四年生面積単元に焦点を当てて－．全国数学教育学学会誌数学教育学研究口頭発表資料．

文部科学省(2018)．高等学校学習指導要領解説数学編．文部科学省．
www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2018/07/17/1407073_05.pdf

（平成 31 年 2 月 19 日最終確認）

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.83-96

数学授業における教師と教材の役割に関する一考察

ー社会的構成主義及び生態心理学の知見から得た知識観に基づいてー

武田　太久実
上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

数学の哲学である「社会的構成主義(Social Constructivism)」を数学教育の哲学として確立した P. Ernest 氏の文献が我が国に与えた影響は大きい。氏が提唱した社会的構成主義は 1990 年代，我が国の数学教育学研究においてもこの哲学的立場が評価された。具体的には，中原(1994)，高橋(1994)，佐々木(1994)，高橋(1996)などがある。こうした背景には湊・濱田(1994)の論文が与えた影響が大きかった。湊・濱田(1994)は，長年に亘って国内の数学教育に広く流布してきたプラトン的数学観は，実存主義の立場から定義される主体的学習を保証しないことを明確に指摘している。氏らは明言をしていないが，我が国で望ましいとされ社会的構成主義に応じる自力解決・討論型授業(e.g. 湊 2018)が主体的学習を保証する。そして氏らの研究を発展させる形で高橋(1996)は主体的学習と社会的構成主義が整合的関係にあることを示した。

また近年では松島(2013,2014)，橋本・渡邊(2017)，そして湊(2017)がある。氏らの研究は協調的問題解決，数学的リテラシー，算数観念の同定とあらゆる領域で社会的構成主義の視点から数学教育学研究に重要な示唆を与えた。こうした動向から，社会的構成主義が数学教育学研究におけるあらゆる領域で重要な哲学的視点となっていることが分かる。

このように国内で関心高い P. Ernest 氏の社会的構成主義を数学教育の哲学としてさらに発展させるためには，数学学習の重要な要素である「教師と教材」についての認識論的議論が残されている。特に「教材」は後述するように多くの対象を含むものであり，学習者とともに数学学習を捉える上で重要な要素の 1 つである。また，教材はそれを生み出す教師とは知識の視点から乖離できない関係にある。そのため，数学授業における教材の役割の議論と同時に教師の役割の議論も重要となる。本研究では，社会的構成主義に基づく知識観の視点から数学授業における教師と教材の役割を明らかにする。

2. 研究方法

本稿は，多くの文献より哲学的研究に基づいて行う。第一に，現状の教師・教材の役割に関する先行研究を概観し，本研究の意義を明らかにする。第二に，社会的構成主義について P. Ernest 氏の文献を概観し，その知識観を明らかにする。第三に，社会的構成主義の数学の知識観に基づいて，数学的知識の構発生に関して主体と他者(主体にとっての環境すべて)との関わりに着目し，生態心理学からの知見を得ながら教師・教材の役割を考察するための視点を設定する。最後に，数学授業における教師と教材を定義し，その役割について考察を行う。

3. 数学授業における教師・教材について

まず, 本節では本研究の対象である教師と教材について確認する。本研究の問題の所在は，教師と教材の役割が曖昧，不明瞭な点にある。この問題について教師と教材の役割に関する先行研究から鮮明にする。その結果，数学教育の哲学として社会的構成主義が充実すること, それに基づく授業実践が現実離れしないためには, 教師と教材の役割が明瞭になることが必須であることが伺えた。

3.1. 教師について

第一に, 教師についての教育分野での捉え方から問題の所在を鮮明にする。以下のように, 教師の役割というものは多く論じられる一方で，明確，明瞭に論じられるものは少ないのではないか。

学校教育事典(2014)によれば，教師とは「その道や分野において教え導いたり模範となってモデルを示す人」と示されている。この語義には学校教育に限定される職業「教員」も含まれている。この語義は他の教育事典でも大きく変わりがないため, 本研究ではこの語義を念頭に置いて考察する。

続いて, 役割に関する先行研究に焦点をあてる。算数・数学科に関らず教師の役割に関する研究をリサーチすると, その役割についての論じ方は多くの場合に目的論的文脈が付帯するという点で特徴的である。こうした研究は実践研究に多い。実践研究では，教師が学習者の特定の能力を育成することなどの目的に応じた教師の役割, 換言すれば手段, 方法が語られている(e.g. 佐藤, 2018 など)。しかしながら, 役割に関する哲学的立場からの考察は筆者の知る限りでは見られなかった。その一方で，目的論的文脈と完全に独立した研究もある。こうした研究では，教師について心理学的な分析や教育史的考察などが見られる(e.g. 岸本，2018 など)。しかし，こちらも社会的構成主義に基づいた哲学的考察は見られない。

こうした教師の役割に関する先行研究が多くある中で, 本研究のように何らかの知識観に基づいた哲学的考察が見られないことから, 社会的構成主義に基づく議論を展開する余地があるといえる。

3.2. 教材について

第二に, 教材についての捉え方から本研究の問題の所在を明らかにする。教材に関する先行研究は膨大にある中で, 少なくとも本研究と同様に社会的構成主義の知識観から教材の役割への哲学的考察を展開している研究は本研究のリサーチでは見られなかった。

教師の語義と同様に学校教育事典(2014)によって教材の語義を確認する。教材とは「授業において教師の授業活動と児童生徒の学習活動との間を媒介し，教授・学習活動の成立に役立つ材料すべて」を指す。こちらも教師の語義と同様の理由から, 本研究ではこの語義を念頭に置いて考察を進める。

教材について先行研究をリサーチすると国内の研究だけでも枚挙に暇がない。それほどに我が国での教材に関する研究が盛んであることが分かる。そこで本研究では，社会的構成主義の知識観に基づくこと, 固有の分野, 単元に拠らない教材全般の役割であることという制限を設ける。この制限内においては筆者の知る限りでは研究が未踏であることが分かった。つまり，社会的構成主義の知識観から教材の役割は議論が為されていないということである。これは，社会的構成主義の数学の本性を論じることが, 即ち教材の本性を論じていると考えてきたことに由来

する(e.g. 橋本・渡邊，2017 など)。しかしながら, 授業実践において教師が有している社会的構成主義に基づく数学の本性を子どもに押し付けるだけとなってしまう恐れも含んでいる。よって，教師の存在に焦点をあてると, 教材の本性も改めて緻密に論じることが求められる。

以上のように, 先行研究のリサーチから教師と教材の役割に関して哲学的考察は不十分であることが分かった。この不十分さは，数学教育の哲学として社会的構成主義の進展を以下の点で阻む。社会的構成主義が数学教育の哲学として理論的に充実しても，教師・教材の役割が不明瞭であれば，教育実践において現実離れした実践が為されることが疑い得ない。つまり，社会的構成主義の哲学が理論研究として重要なものとして扱われても, 見当違いの授業実践を生んでしまう契機にも成りかねない。例えば，自力解決・討論型授業を謳いながら, 教師が単に学習者を放置するものは明示的な例として挙げられる。こうした点は本研究のも目的に限らず, 自力解決・討論型授業に関して重要な示唆を与えるものとなり得る。

4. 数学の哲学としての社会的構成主義

本節では, 本研究が立脚する社会的構成主義について論じ，その知識観，特に客観的知識と主観的知識の関係について記述する。

P. Ernest 氏の社会的構成主義に関する主要な文献としては，アーネスト（2015，原著1991），Ernest (1998) が挙げられる。本稿の主張は，主としてこれらの文献に拠る。

アーネスト(2015)によると，社会的構成主義とは規約主義と可謬主義の見方を推敲し，発展的に含む構成主義の哲学である。ゆえに，社会的構成主義では数学を社会的構成物と見なす。また，数学的知識は，数学的発見の論理(LMD)を利用しながら, 推測と論駁を通して成長する。

社会的構成物として数学を記述することの根拠として，アーネスト(2015)は次の 3 点を挙げる。

(１)数学の知識の論拠は，言語の知識，規約，規則であり，言語は社会的構成物である。
(２)個人間の社会的な過程は，個人の数学の主観的知識を，公表後に，認められた数学の客観的知識に変えるために必要である。
(３)客観性そのものが社会的なものと理解される。

（アーネスト，2015，p.76）

社会的構成主義の主たる焦点は, 数学的知識の発生にある。社会的構成主義は，主観的知識と客観的知識が互いに更新に貢献する循環の中で, 両者の知識を結び付ける(図 1)。この知識のつながりを論じている点で社会的構成主義は特徴的である。この図 1 での循環の中では, 個人が得た知識が主観的知識となり，これが社会に公表され，公的批判と再定式化という過程を経て社会で公的に受容される。この受容された知識が客観的知識となる。そして，客観的知識が表現されたことでその知識を得た個人の中で個人的再定式化が行われ主観的知識が構成される。これらの過程から成る図 1 の循環で新たに生成された数学的知識は, 主観的知識でも客観的知識でもあり得るといえる。

図 1 の循環が表すものは, 人間社会における歴史的な知識の発展過程を表現するが, それだけに限らない。数学授業に関してもこの図 1 の循環は, 一授業の中や一単元の中といった局所的な期間においても見てとることができる。例えば，学習者はある事柄につい

ての数学の主観的知識を有しているとする。この主観的知識をグループや学級全体の場で発言，発表し，他者からの応答を受ける場面がある。換言すれば，考えの共有の場面である。ここでのやりとりでは，発言した内容に批判があったり，その共同体での考えに影響を与えたりすることがある。こうしたやりとりを経て，共同体で受け入れられていた知識が新たな形に更新される。これが，図１の循環の主観的知識から客観的知識までの流れである。そして，共同体で受け入れられた知識を各学習者が見聞きして自身の考えを見直し，修正する場面がある。例えば，授業のまとめの場面である。この場面が，客観的知識から主観的知識への流れの一例である。さらに，この循環の期間を拡げた単元全体の流れを見ても，学習者とその共同体で受け入れられた知識が漸次的に更新されていくことは容易に想像できる。

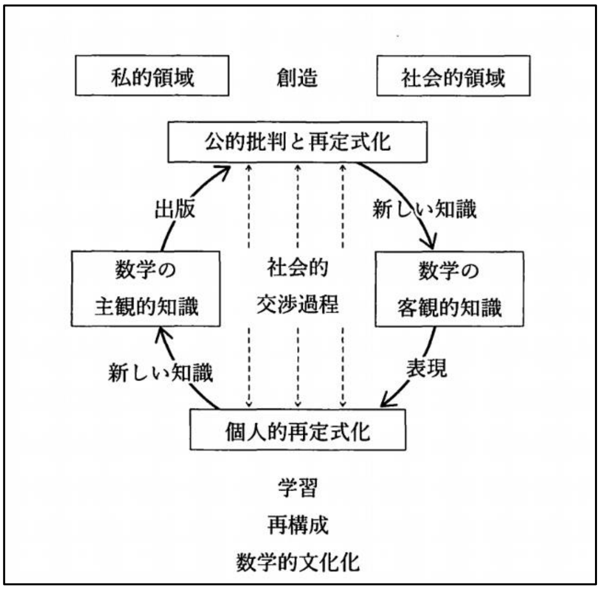


図 1．数学の客観的知識と主観的知識の関係
(アーネスト, 2015, p.138)

このように，P. Ernest 氏が確立した社会的構成主義の知識に関する循環(図 1)は，あらゆる共同体の規模と期間において，その知識の更新を捉えることに大きな効力を有する視点である。

5．社会的構成主義における数学の知識観

本節では，社会的構成主義の知識観に基づいて数学授業における教師・教材を捉える為に，社会的構成主義において，中心的な役割を果たす客観的知識と主観的知識について整理する。

5.1．数学の客観的知識

まず，客観的知識の概要について整理し，教師と教材を捉える視点を得る。ここでは，客観的知識の発生過程，特に共同体における知識の正当化の過程と，そこで構成された客観的知識が社会的構成物である数学の対象の存在を支えていることを中心に展開する。

４の(３)に記したように客観的知識の客観性は社会的と理解される。これは D. Bloor 氏の客観性の社会理論(e.g. ブルア,1985)に基づく。アーネスト(2015)によれば，このことは「私たちのなにがしかの信念に付随する非個人的で安定している性質やそれらの信念を参照する際に付随する実在感はこれらの信念が社会的慣例であることに由来している」(p.80)ということである。例えば，Ernest(1998)によると記号表現と記号内容の間に慣例があると捉えることにより，その慣例を維持するという意味で，論理的で数学的な真理の必要性を記述することができる。

また，共同体での知識の発生を考えるにあたって，数学的知識の歴史的側面に係わる客観的知識についても捉える必要がある。その本質は，客観的知識の創生と正当化についての捉えにある。このことは，共同体において

知識が「受容される」ということが鍵となる。数学の客観的知識においては，数学者たちの共同体でその共同体の慣例に基づいた「公的批判と再定式化」（図 1)が行われる。この過程で知識の正当化が行われ，新しい知識として「受容される」のである。この知識の正当化について，社会的構成主義は LMD を発展的に含んでいる。LMD とは，I. Lakatos 氏が提唱した数学的知識の発生の仕組みの基礎的過程を表したものである。Ernest(1998)は，この LMD を更に一般化した「数学的発見の一般化された論理(GLMD)」を提示し，社会的構成主義では数学的知識の客観性の正当化についてはこれに基づいて捉える。GLMD の過程は表 1 の通りである。この過程の例としては，論文の査読制度が明瞭である。また，共同体の規模は異なるが，数学授業における討論や同意といった活動も同様の過程がある。

こうした正当化された数学の客観的知識は，数学の対象を記述することに寄与する。アーネスト(2015)によれば，数学的知識の客観性が社会的で言語的な規則の受容に基づいていることから，数学の対象が独立に存在することの論拠を与えていると主張する。それはつまり，数学の規則や真理に埋め込まれているものは，数学の概念や対象が客観的存在を持つという仮定である。ここでは規約主義の言語ゲームが基礎となる。アーネスト(2015)によると，「共有された言語ゲームの集まりの存在は，いかなる個人からも独立な存在からなる実在の領域を伴う。特に，数学の理論や言説はそれに伴った実在の集まりが客観的に存在することへの関与をもたらす」(p.94)と捉える。但し，このアーネスト(2015)の和訳の理解には次の点で留意しなくてはならない。引用にある「個人」なる語は，原著 Ernest(1991)の “individual” に相当する。ゆえに，和訳「個人」の語が表すものは，1 人の人間という存在ではなく，個々人の個別性という性質である。つまり，共有された言語ゲームの集まりは人間の個体から独立な存在なのではなく，各個人の個別性から独立的な存在であるという意味と解釈できる。このことは，Ernest(1998)において氏が述べるように社会的構成主義の知識観では知識の暗黙性を考えることからも，個人の暗黙性が言語ゲームの集まりに含まれており，個人から引き離すことができないと考える。よって，数学の対象を考える上で，上記の解釈上の留意が必要である。

ここまでのことから，アーネスト(2015)が述べる「社会的構成主義では，すべての人間とそれらの所産が存在することをやめるならば，そのとき，真理，お金，そして数学の対象の概念も同様に存在するのをやめる」(p.97)という言葉は，我々の周囲にある社会的構成物は，共同体における客観的知識にその存在が支えられているということを示していることが分かる。よって，教師と教材，学習者と教材は知識において分離して考えることはできないことがいえる。

また，同様にアーネスト(2015)は，数学の客観的知識が数学的知識の発生と数学の科学への応用可能性に対して寄与することを主張する。数学的知識の発生に関して，Ernest(1998)は GLMD の機能によって多様な数学的創造が為されると述べる。この性質は，図 1 の循環を回すことを説明することに重要である。そして，アーネスト(2015)は数学の応用可能性について，数学と科学の知識体系の密接な関係，方法と問題を共有する探究の分野として密接な関係によって維持されると述べる。

表 1. GLMD の対話的形式
(Ernest, 1998, p.151 筆者訳)

<u>ステージｎに対する科学的文脈</u> 問題, 概念, 方法, 非公式的理論, 証明規準, 及びパラダイム, 言語, 及びメタ数学的見方を含む背景的な科学的で認識論的文脈. **<u>定立 ステージｎ(ｉ)</u>** 新たなもしくは改訂された推測, 証明, 問題解決, 証明の提案. **<u>反定立 ステージｎ(ⅱ)</u>** <u>その提案に対する対話的で評価的な応答</u> ▸<u>批判的応答</u> 提案についての反例, 反論, 反駁, 批判. ▸<u>受容的応答</u> 提案についての受容, 提案についての示唆された拡張. **<u>綜合 ステージｎ(ⅲ)</u>** <u>その提案についての再評価と変容</u> ▹<u>局所的な再構成</u> 変容された提案： 新たな推測, 証明, 問題解決, 問題, 理論. ▹<u>大局的な再構成</u> 再構成された文脈： 変化された問題の集合, 概念, 方法, 非公式的理論の証明のパラダイムと規準, 言語, またはメタ数学的見方. **<u>結果 ステージ n+1</u>** 新たに受け入れられたもしくは拒絶された提案, または修正された科学的で認識論的な文脈.

5.2. 数学の主観的知識

続いて主観的知識について整理し, 考察の視点を得る。主観的知識については, その発生について焦点をあてる。特に対話に基づく知識の発生過程に着目する。以下に述べるように主観的知識の発生には, 共同体での対話的な活動が寄与していることが分かる。

P. Ernest 氏の社会的構成主義において, 数学の主観的知識に関する考察では予め留意しなくてはならない点がある。アーネスト(2015, 原著 1991)では, この主観的知識については E. Glasersfeld 氏を引用(e.g. アーネスト, 2015, p.117)し, 急進的構成主義の理論(e.g. グレーザーズフェルド, 2010)を基礎として, それを発展させるように社会的構成主義の理論を展開している。一方で, Ernest(1998)では L. Vygotsky 氏の理論(e.g. ヴィゴツキー, 2001)を基礎に置いた上で理論を展開している。P. Ernest 氏のこの転換は大きな意味をもつ。社会的構成主義が急進的構成主義より発展している点は「社会性」に関する点であった(e.g. 佐々木 1996)。急進的構成主義は Piaget の理論の影響を受けながら, 個人の知識構成に焦点をあてる一方で, 主体と他者(主体にとっての環境すべて)との相互作用を通しての知識構成を記述した。この主体と他者との関わりを中心に置いた際に Vygotsky の理論はその基礎として重要な役割を果たす。Vygotsky の理論は, 発達の最近接領域の理論(ヴィゴツキー, 2003)にあるように, 主体は共同体の中で他者との関わりを経て自身の知識を発達させるという捉え方である。この理論は共同体に着目しているという点で, Ernest(1998)はこの理論を取り入れている。この点を踏まえ, 社会的構成主義における主観的知識は, 主体を取り囲む環境との関わりから構成されるものと

捉える。

社会的構成主義において主観的知識の役割は次のように論じられる。主観的知識は客観的知識を維持し更新するものがあるという点で，社会的構成主義において客観的知識とともに中心的な役割を果たす。図 1 に示される関係における数学の主観的知識の役割について，アーネスト(2015)は次のように述べる。主観的知識は「存在する知識の再創造と維持を説明するだけではなく，新しい数学の知識の起源を説明するのにも必要」(p.82-83)である。公的に表れ記録されるものは客観的知識であるが，それを更新するものは主観的知識であることは図 1 の循環から明示的である。ゆえに主観的知識は新たな知識の起源を論じる上で重要な役割を担っている。

こうした役割を有する主観的知識の発生過程が共同体での他者との関わりを通して次進展していくことを捉える視点として次のものがある。主観的知識の発生過程を Ernest(1998)は L. Vygotsky 氏の理論などから述べている。氏の理論(e.g. ヴィゴツキー，2001)は，思考と言語との関係から思考の発達過程を考察している。Ernest(1998)は，この思考と言語の関係から主体の主観的知識の発生を論じる。本研究は対話に基づく知識の発生過程という視点から，Ernest(1998)が提示している“Harré’s model of ‘Vygotskian Space’ ” (表 2 Ernest 1998 p.209)に着目する。この表 2 のモデルは L. Vygotsky 氏の理論を発展させた R. Harré 氏の理論から Ernest(1998)が作成したもので，主体が共同体での対話を通して知識の発生する過程を明示的に示している。

Ernest(1998)が示すモデル(表 2)から主観的知識の発生を本研究では Q2 から Q3 にかけての過程として捉える。表 2 は言語，思考の発達の過程を表明(公的・私的場合がある)と社会的位置(個別的・集合的がある)の 2 つから表現したものである。これは，Q1 から Q2，Q3，Q4 へと思考や知識が連続的に通過していく。各象限での通過について，「適用(Appropriation)」，「変換(Transformation)」，「公開(Publication)」，そして，「慣習化(Conventionalisation)」という語が当てられている。

表 2．Harré’s model of “Vygotskian Space” (Ernest，1998 筆者訳)

表明	社会的位置	
	個別的	集団的
公的	公的＆個別的 Q4	公的＆集団的 Q1
私的	私的＆個別的 Q3	私的＆集団的 Q2

Ernest(1998)は表 2 のモデルを次のように解説する。人間は如何なる個人であっても集団に位置し，初めに公的な表現の形式で Q1 の言語に出会う。つまり，人間は共有された集団的な言語活動に参加する。数学学習においては，数学の問題との出会いがその例として挙げられる。そして集団的な言語を適用する際に，Q2 で自己中心的な方法で言語を使用する。この使用とは話し相手であるように自分自身に話すことを示し，ヴィゴツキー(2001)の「内言」に相当する。この時の言語は表明としては個別的ではあるが，社会的には集団に位置したものである。具体的には，数学の問題を頭の中やノート上で再現する活動が挙げられる。その後，人間は Q3 の思考形式で言語を「内在化(internalize)」する。

この言語の私有化と個別化を変換という。この変換された言語は，私的で個別的な表明である。そして，これは集団的な言語や思考を局所的にかつ個別的なものに変換することを含んでいる。これは，数学の問題を自分の言葉や図などで表現している学習者がその例にあたる。次にQ4において個別的で公的に言語を公開することができる。ここで使用される言語的形式は，話し手が属する共同体で共有された会話または集団的なパフォーマンスの一部がQ1へ声を返すような言明が受け入れられる。これを「慣習化」と呼ぶ。この慣習化は，学級全体やグループ内での発表の場面がその例として考えられる。

本研究では，対話を通した主観的知識の発生については，Ernest(1998)が述べる表2の過程のQ2，Q3が中心的な位置を占めるものであると解釈する。これは，個人と他者の関わりという小さな共同体の循環として図1を捉え，図1の循環と表2の循環を知識の表現に関する点で対比することから論じることができる。

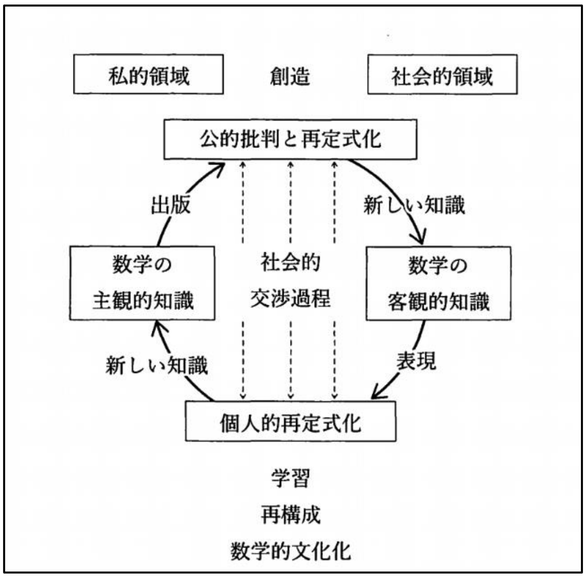


図1. 数学の客観的知識と主観的知識の関係
(アーネスト, 2015, p.138　再掲)

表2の4つの象限は，言語的な表現に関するものであった。それを踏まえて図1と対比すると次のように解釈できる。具体的には，「Q1(表2)」は「表現(図1右下)」に対応，「Q2(表2)」は「新しい知識(図1左下)」に対応，「Q3(表2)」は「出版(図1左上)」に対応，「Q4(表2)」は「新しい知識(図1)右上」に対応していることがいえる。

これらの対比から，表2のモデルにおけるQ2からQ3に架けての過程は，言語と思考との関係から見た主観的知識の発生過程といえる。

ここまで客観的知識，主観的知識の発生について，共同体における対話を通じた過程という視点から捉えた。しかし，筆者は対話を中心的な位置に置く社会的構成主義の知識観において，教師と教材と学習者の関わりという点で，次のことを明示的にする必要があると考える。それは人間の「知覚」に関する問題である。主体と他者との対話を成立させるためには，前提として人間が対話の内容を「知覚」できることが求められる。しかしながら，この点は暗黙的なものとされ，十分な議論が為されていない。次節ではこの点に関して考察を試みる。

6. 主体の知覚に関する生態心理学的知見

社会的構成主義の知識観の中心的な位置に対話があった。学習者と教師と教材といった主体と他者との対話には，対話内容を「知覚」することが暗黙的な前提となっている。本研究ではこの「知覚」は主体と他者との間に位置し，その相互に生じる行為を成立させるものと考える。そこで，主体と他者(環境を含む)の関係を論じる生態心理学から知見を得る。具体的には，教師と教材の役割を考察の視点を得るために，生態心理学の中心的

な視点であるアフォーダンス，ニッチを捉えていく。

6.1. 社会的構成主義と生態心理学

まず，生態心理学の知見を採用するにあたって，対象についての見方が社会的構成主義の知識観と整合的であることを確認する。生態心理学とは，J. J. Gibson 氏に代表される心理学における生態学的アプローチをとる領域である。伝統的な心理学は心的な世界と物理的な世界を設定するという二元論的な視点を長らくとってきたのに対し，生態心理学は主体と環境との関係についての視点を中心的に位置した現代的な視点である。この視点は心の境界線を曖昧なものとして捉える捉え方であり，「拡張した心(Extended Mind)」(e.g. 伊藤 2012)と表現される現代哲学の主流な見方である。この哲学史的背景に，伝統的な機械論的モデルでは記述不可能な事柄が多く明らかとなってきたことや，より人間そのものに重点を置く議論が求められるようになってきたことがある。これは，人間の心を機械で比喩していた構成主義から，対話する人間という比喩で表現される社会的構成主義への変遷過程(e.g. 佐々木，1996)と類似的である。そして，中心的な議論の対象が人間とその周囲の環境となっている点で生態心理学の見方と社会的構成主義の見方は整合的な関係にある。

6.2. アフォーダンスとニッチ

続いて，主体と他者(環境を含む)との間にある知覚に係わる視点を得るために，生態心理学からアフォーダンスとニッチという視点を概観する。

生態心理学において重要な視点である「アフォーダンス(affordance)」とは，提唱者である J. J. Gibson 氏の造語である。このアフォーダンスとは，端的に述べれば主体の行為の可能性を提供するものである。ギブソン(1985)によれば，「環境のアフォーダンスとは，環境が動物に提供する(offers)もの，良いものであれ悪いものであれ，用意したり備えたりする(provide or furnishe)ものである。」(p.137)という。ここでの環境には，主体にとっての他者である他人も含めて考えることができる。つまり，他人の行為が主体の行為に関するアフォーダンスを提供している関係にあると考えることもできるのである(e.g. ギブソン, 1985, p.146)。リード(2000)は，主体(人間を含む動物)の行動と意識は，周囲の重要な資源を見つけ出し利用すると述べる。ここでいう資源とは，行為の調整を通じて環境から情報を得るためのものを表す。この環境による資源の提示がアフォーダンスである。

またアフォーダンスは，生態学的概念である「ニッチ(niche)」とセットの関係にあるとギブソン(1985)は述べる。この「ニッチ」とは，主体が環境内で行為し環境を利用しているときのスタイルを指す。あるニッチは動物の種類を提示し，動物はニッチの種類を暗示している関係ある。つまり，主体と環境とは相補性があることがニッチから記述することが可能となる。

これらアフォーダンス，ニッチという視点は，以下の点で人間の知覚を説明する。リード(2000)によれば，生態心理学ではアフォーダンス，ニッチの視点から主体の意識について現代哲学的な見方を設定する。それは，行動は意識から分離できないものとする見方である。環境のアフォーダンスと関係を結ぶために，主体はそのアフォーダンスを少なくともいくらか意識していなければならない。

あるアフォーダンスとの関係において行為を調整するためには，そのアフォーダンスを特定する情報の検知が必要である。この検知自体が情報のピックアップという機能をもつ特殊な行動であり，リード(2000)はそれを探索的な活動と呼んでいる。つまり，主体は探索的な活動を通して，行為のためのアフォーダンスを特定，意識し，行動を実行している関係にある。これに基づけば，主体が何らかの行動を行っているのならば，主体は自身を取り巻く環境からアフォーダンスを得ていると考えることが可能となる。そして，主体は環境ごとのアフォーダンスによって行動の様式を変えることは，ニッチの視点から主体と環境の相補性によって保証される。

以上のことから，主体の知覚を環境と相補性がある主体が環境のアフォーダンスを探索していることと考える。そして，主体の知覚は主体の行為によって確認することができると考える。この視点から，社会的構成主義が論じる対話的な知識観における「知覚」をより明示的に論じることが可能となる。

7. 数学的知識の発生に着目した考察の視点

本節では，ここまでに記述した知識観から数学授業における教師と教材の役割を考察するための視点を整理する。視点は以下の 4 点である。

第一に，客観的知識について記述した 4 節から，①対象が社会的構成物であることについて議論されることが求められる。第二に，②学習者の主観的知識が発生することに関して論じる。第三に，客観的知識についての正当化の議論から，③数学授業における数学的知識の正当化の過程について論じる。そして，これらの視点での考察を支える視点として，④アフォーダンス，ニッチに基づく知覚があることを前提とするという①から④の 4 点を踏まえて，数学授業における教師・教材の役割を考察していく。

8. 教師と教材の役割についての考察

本節では，数学授業における教師・教材の役割について，前節で挙げた 4 点の視点から考察を行う。ここから 1 つの前提条件と 3 つの役割を捉える。

8.1. 対象が社会的構成物であること

前節①，④の視点から，社会的構成主義の知識観に基づいたとき，教師と教材は分離できない関係である前提と，学習者が数学授業というニッチで数学学習という行為を行うことができる共同体を教師・教材，学習者によって構成する役割があることの 2 点について示す。

8.1.1. 教師と教材との分離不可能な関係

まず前者について示す。社会的構成主義の知識観に基づくと，人間とその所産は分離不可能な関係にある。共同体における人間によって受け入れられた客観的知識によって，共同体における人間の所産とされる対象はその存在を支えられていた。そして，本研究で採用した教材の語義を確認すると「授業において教師の授業活動と児童生徒の学習活動との間を媒介し，教授・学習活動の成立に役立つ材料すべて」(学校教育事典，2014)が教材であった。初めに「材料すべて」という点から，教材は物理的な物質(例えば，教科書，プリントなど)に限定されず，教師の主観的知識なども含まれることとなる。さらに「教授・学習活動の成立に役立つ」という点は，教授・学習活動を行う人間によってそのように受け入れられたものでなくてはならない。

これらのことから，教材は少なくとも教師という人間で構成された共同体で「受け入れられた」知識，つまり客観的知識によってその存在が支えられている。よって，教材は教師の主観的知識も教師らの共同体で受け入れられた客観的知識も含む。このことから，教師と教材は分離不可能な関係であるということが分かる。

8.1.2. 共同体を構成するという役割

続いて，教師と教材は分離不可能な関係にあることを前提の上に後者に記した役割を示す。社会的構成主義の知識観に基づけば，知識の発達には共同体における対話が重要であった。ゆえに，数学授業という営み，またその中での対話が可能な共同体が構成されていることが前提として必要となる。そして，数学授業という営みが実行可能な共同体の構成は，(分離不可能な関係にある)教師と教材と学習者によって為されると考える。また，この数学授業という営みは，④の視点から教師・教材，学習者が自身らによって構成している共同体という環境の内で数学の教授，学習という行為を実行し，共同体を利用しているときのスタイルとして見なすことができる。つまり，数学授業とは，教師，学習者のニッチであるといえる。そして教師は，数学授業というニッチで学習者の数学学習という行為が実行可能となる環境である共同体を構成するという役割がある。例えば，学級などはその例となる。但し，学習という行為を行う共同体である学級は教室という場所だけに限定されない。ここでの視点に基づけば，教室内の学級に限らず，数学学習という行為が可能な環境である共同体を形成していれば，校外もそれに相当し，校外での体験的な学習活動という行為も実行されるものと考えることができる。つまり，数学授業というニッチにおいて，数学学習という行為を行うためには，そのアフォーダンスを有する教師と教材と学習者が最低限，存在しなければならないのである。換言すれば，教師・教材は学習という行為のアフォーダンスを有するという役割がある。

8.2. 学習者の主観的知識が発生すること

数学授業というニッチにおいて，学習者の主観的知識が発生することは，社会的構成主義の循環(図1)から必須のことであることは疑い得ない。前節では，教師と教材は数学学習という行為のアフォーダンスを有するという役割があるという考察を得た。この数学学習という行為のアフォーダンスを知識観の視点から，より詳細に考察する。具体的には，学習者の主観的知識の発生に係わる行為のアフォーダンスを有するという教師と教材の役割を示す。

数学授業というニッチで数学学習を起こすための環境として，教師と教材，学習者自身によって構成された共同体が挙げられた。この共同体での学習者の主観的知識の発生について，表2のモデルが示す過程から考察する。まず，数学授業において，教材は教師の主観的知識を含みながらも学習者に向けた言語的形式で示されることから，一時的に表2のQ4の言語的表明として学習者の前に現れる。具体的には，教師による学習課題の提示の瞬間がこれの例となる。そして，教師によって提示された教材が学習者ら共同体に「受け入れられる」ことによって，学習者にとってQ1の言語と見なすことができ，学習者は教材が示す言語と出会った状態となる。Q1の言語（具体的な例としては提示された学習課題など）としての言語と遭遇した学

習者は，それを「適用」するという行為を実行する可能性がある。この「適用」という行為は，学習者が Q1 の言語によって示された教材からその行為をアフォードされなくてはならない。リード(2000)によれば，アフォーダンスは環境に常に存在し，主体が行為するか否かは主体の探索的な活動による。つまり，教師・教材は，示された教材を学習者が「適用」できるアフォーダンスを学習者の行為の有無に限らず，有しているという役割があることになる。

学習者はこのアフォーダンスを探索できたとき，Q2 の言語的表明が可能となり，主観的知識の発生が起こる。そして，この主観的知識の発生は，教師・教材によって表 2 の「公開」という行為が実行されたときに視覚的に確認できる。この具体的な例としては，教師から学習者全体に自分の考えの共有を促される場面があると考える。

よって，教師と教材は，②の視点に関して，「適用」と「公開」という学習者の行為についてのアフォーダンスを有するという役割がある。

8.3. 数学授業における正当化の過程

最後に，ここまでの考察と③，④の視点から数学授業における数学的知識の正当化の過程における教師と教材の役割について考察する。ここでは，GLMD という共同体における数学的知識の正当化を一種のニッチと見なし，このニッチで教師，学習者が数学的知識の正当化を実行できるように教師・教材がアフォードするという役割を示す。

GLMD というニッチでの正当化という行為は，共同体において共有された知識の正当性を共同体の構成員で検討し，共同体において「受け入れられた」ときに客観的知識と見なされるという行為であった。これは，教師・教材によって学習者が「公開」という行為を実行することに続く。そして，教師・教材が GLMD というニッチで知識の正当化という行為の可能性を学習者にアフォードする。

より詳細には，共有された知識の正当性を検討するという GLMD における一貫した大局的な行為と，表 1 に示されるような批判的応答や大局的な再構成といった 1 つ 1 つの局所的な行為がある。教師・教材は，学習者にこれらの行為をアフォードする役割がある。具体的には，教材がオープンエンドでその正当性を学習者自身で確認することをアフォードしているもの，教師が学習者らの定立に対する反定立な言明を述べるという行為で，学習者に批判的応答という行為をアフォードすることなどがある。

9. 本研究の結論と今後の課題

9.1. 本研究の結論

本研究では，社会的構成主義の知識観に基づいて，数学授業における教師と教材の役割として，1 つの前提条件（P）と 3 つの考察（R1，R2，R3）を得た。それは次の通りである。

Ｐ：教師と教材は分離不可能な関係にある。
Ｒ1：学習者とともに共同体を構成すること。
Ｒ2：学習者の主観的知識が発生することに係わるアフォーダンスを有すること。
Ｒ3：GLMD による知識の正当化という行為のアフォーダンスを有すること。

これらの視点から，数学の授業実践について次のような分析ができる。社会的構成主義は自力解決・討論型授業と整合的な関係にあることは，高橋(1996)によって示されていた。このことを踏まえると，本研究の考察で挙げ

た上記の4点が不足している数学授業は，その哲学的視点として社会的構成主義を謳っていても，現実離れした授業実践となっている可能性がある。例えば，物理的な教材だけを教材と見なし，それだけを学習者に与え，教師は全く関与しない，もしくは学習者を放置するという授業は，特にＲ3の視点から本来的な自力解決・討論型授業での教師・教材の役割を果たしていない可能性がある。社会的構成主義に基づけば，共同体での知識の正当化は1つの重要な意味を成す。GLMD というニッチで共同体での知識の正当化が行われていない場合，それは旧来的な知識注入型の授業と大きく変わらない。知識の注入の方法が講義型授業(湊， 2018)と異なるだけで本質的には同等のものとなる。そして，このＲ3という役割を果たすためには，他の3点の役割も考えなくてはならなくなる。

このような授業実践への分析から，社会的構成主義が数学教育の哲学として，授業実践を含んで進展していくために議論，批判を進めなくてはならない点が明らかとなる。

よって，本研究の考察は，数学教育の哲学としての社会的構成主義の発展と，それに伴う授業実践について基礎的な視点を提示するものとなった。

9.2. 今後の課題

最後に，本研究には多くの課題が残されている。中でも以下の点は本研究が暗黙的に論を進めている点である。

第一に，数学授業というニッチについてである。本研究では，この点について曖昧さを有して論を展開してきた。授業とは何か，数学授業というものは如何に記述されるものなのかという点について明示的な記述が求められる。

第二に，主観的知識の発生に関して2点が挙げられる。本研究では，表2における「変換」に係わる考察は視覚的に観察できないという理由で，それについて記述すること除いている。次に，書き言葉による主観的知識の発生についての考察が不足している。本研究では主観的知識の発生を対話の観点から論じたが，Ernest(1998)はヴィゴツキー(2003)に基づいて書き言葉による思考の発達も論じている。書き言葉も数学学習という行為を考える上でも，この視点からの考察も数学授業において重要な意味をもつ。例えば，数式や図表といったものはこの視点と密接な関係にあることが考えられる。よって，この視点から数学授業における学習者の行為に関する考察が求められる。

加えて，アフォーダンスとニッチに関する視点である。本研究では，これらの視点から教師と教材の役割の概要を考察できたが，授業実践へ示唆を与えるにあたっては更に詳細な記述が求められる。

最後に，本研究では教師と教材に関して密接に関わる範囲を対象としていた。そのため，学習者どうしで教材を作成することについて議論が為される必要がある。

以上の点が本研究の主な今後の課題として挙げられる。

参考・引用文献

ブルア， D.(著)，佐々木力，古川安．(訳)．(1985).『数学の社会学 －知識と社会表象－』，培風館.

Ernest， P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education (Studies in Mathematics Education)*, The Falmer Press.

Ernest, P. (1998). *Social Constructivism as a Philosophy of Mathematics*. State Univ. of New York Press.

アーネスト, P.(著), 長崎栄三, 重松敬一＆瀬沼花子(監訳).(2015).『数学教育の哲学』. 東洋館出版社.

ギブソン, J.J.(著), 古崎敬, 古崎愛子, 辻敬一郎＆村瀬旻(共訳).(1985).『生態学的視覚論－ヒトの知覚世界を探る－』, サイエンス社.

グレーザーズフェルド, E.V.(著), 橋本渉(訳), 西垣通(監修).『ラディカル構成主義』, ＮＴＴ出版.

橋本善貴, 渡邊光.(2017).学校数学における関数とみなすことに関する一考察.『第50回数学教育論文発表会論文集』, 305－308.

伊藤邦武.(2012).『物語 哲学の歴史－自分と世界を考えるために』, 中公新書.

岸本忠之.(2018).算数・数学科の学習指導案の特徴,『富山大学人間発達科学部紀要』, 12(2), 129－134.

今野喜清, 新井郁男＆児島邦宏(編).(2014).『第３版 学校教育事典』, 教育出版社.

リード, E.S.(著), 細田直哉(訳), 佐々木正人(監訳).『アフォーダンスの心理学－生態心理学への道－』, 新曜社.

松島充.(2013).数学教育の社会的構成主義の視座から見た我が国の問題解決－Ernest, P.の主張を基にして－.『日本数学教育学会誌』, 数学教育学論究, 95(臨時増刊), 321－328.

松島充.(2014).算数・数学教育における強調的問題解決を実現する学習に関する研究. 愛知教育大学・静岡大学. 学位論文.

湊三郎, 濱田眞.(1994).プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するのか－数学観とカリキュラム論との接点の存在－.『日本数学教育学会誌』, 76(3), 2－8.

湊三郎.(2017).数学の哲学と数学的文化化論に基づき算数観念を同定する試み.『日本数学教育学会誌』, 数学教育学論究, 109, 3－24.

湊三郎.(2018).算数・数学の授業三型論－その正統版として－.『日本数学教育学会誌』, 100(8), 3-13.

中原忠男.(1994).数学教育における構成主義の展開－急進的構成主義から社会的構成主義へ－.『日本数学教育学会誌』, 76(11), 2－11.

笹原祐介.(2012).グラフ理論を教材とした中学生による数学的知識の社会的構成過程, 上越教育大学, 修士論文.

佐々木徹郎.(1994).数学教育における社会的構成主義の可能性.『第27回数学教育論文発表会論文集』, 7－12.

佐々木徹郎.(1996).数学教育における社会的構成主義の基礎理論.『全国数学教育学会誌』, 数学教育学研究, 2, 23－30.

佐藤優紀.(2018).算数・数学 子どものアイディアや感覚を活かす授業展開における役割 －第５学年「図形の角」の実践から－,『教育実践研究』, 28, 67－72.

高橋悦美.(1994).主体的学習と社会的構成主義に立つ学習との関連.『第27回数学教育論文発表会論文集』, 445-450.

高橋悦美.(1996).数学教育における主体的学習と社会的構成主義に立つ学習との関連.『日本教科教育学会誌』, 19(2), 41－46.

ヴィゴツキー, L.(著), 柴田義松(訳)(2001).『新訳版・思考と言語』, 新読書社.

ヴィゴツキー, L.(著), 土井捷三, 神谷栄司(訳).(2003).『「発達の最近接領域」の理論－教授・学習過程における子どもの発達』, 三学出版.

上越数学教育研究，第34号，上越教育大学数学教室，2019年，pp.97-100

石垣曲線のへこみについての考察

内田　菜月　曽根原　光　西堀　朱栄
町田　一生　村松　達
上越教育大学学校教育学部３年

1.　はじめに

日本の城郭の石垣の輪郭はそれぞれなんとも言えないきれいな曲線をしている．敵の侵入を防ぐため，また建築構造の力学的安定性を考慮して，石垣を積んだと考えられるが，昔の人はどのようにしてあのようにきれいに石垣を積み，美しい輪郭を持った石垣を作ることができたのだろうか．この小論では，城郭の石垣の曲線を数学的に考察し，その数学の中に，ある興味深い数列が現れることを示し，その数列の性質を石垣曲線の「へこみ」の観点から考察する．

日本には，昔中世の戦国時代から近世初頭の江戸時代にかけて，近江の国の穴太（アノウ）と呼ばれる土地に石垣建設の専門家集団がいた．彼らは穴太衆と呼ばれ，石垣建設のノウハウを決して外部に漏らさず秘伝とし，日本各地の城郭の石垣普請に携わっていた．穴太衆が持っていた石垣普請の方法は，北川総一郎［1］，喜内敏［2］によれば，主に２種類あったようだ．柳井浩［3］では，この２つの石垣曲線の作図方法を現代的な数学の観点から整理され調べられている（他にも，藤井一幸［5］参照）．

一つ目の方法は，加賀前田藩に仕えた後藤家に伝わる石垣作図法であり，後藤家に伝わる古文書に詳細が記されている（［1］，［2］参照）．金沢城の城郭もこの作図法によるものではないかと推測される．

二つ目の方法が，本論文で考察される熊本細川藩に伝わる石垣作図法であり，古文書「石垣秘伝之書」（［1］）にある作図法である．熊本城の城郭もこの作図法によるものではないかと推測される．この小論では，この二つ目の石垣作図法に注目し，石垣の輪郭の作図で得られる曲線の中に，ある興味深い数列が現れ，その数列を石垣の「へこみ」の観点から考察する．

2.　石垣曲線

柳井浩［3］により，「石垣秘伝之書」（［1］）にある作図法は，数学の言葉により，以下のように整理された．

与えられたデータ (b,d,h)

$\mathrm{b} \coloneqq$ 石垣の底辺の長さ

$\mathrm{d} \coloneqq$ 石垣の上辺の長さ

$\mathrm{h} \coloneqq$ 石垣の高さ

を石垣データと呼ぶことにする．石垣データ $(\mathrm{b},\mathrm{d},\mathrm{h})$ に対して $\delta \coloneqq \frac{n}{n-1}\frac{d}{h}$ とおく．　ここで，n は石垣の段の数を表わす．

（藤井一幸［5］32 ページより）

石垣の各段の傾きを

$$s_1=\frac{b}{h}\ ,$$

$$s_2=\frac{b}{h}-\frac{\delta}{n-1}\ ,$$

$$s_3=\frac{b}{h}-\frac{\delta}{n-1}-\frac{\delta}{n-2}\ ,$$

$$\cdots$$

$$s_{n-1}=\frac{b}{h}-\frac{\delta}{n-1}-\frac{\delta}{n-2}-\cdots-\frac{\delta}{2}\ ,$$

$$s_n=\frac{b}{h}-\frac{\delta}{n-1}-\frac{\delta}{n-2}-\cdots-\frac{\delta}{2}-\delta\ ,$$

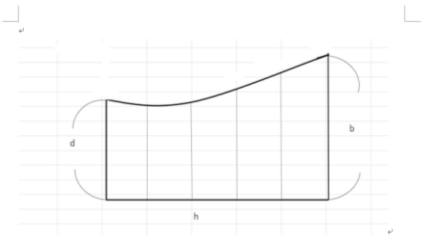
とする（柳井氏の記号 r_i では $r_i=s_{n-1}$，$\mathrm{i}=0,1,2,\cdots,\mathrm{n}-1$）．座標 (x_i,y_i) を

$$x_0=0\,,\quad x_i=i\frac{h}{n}\,,$$

$$y_0=d\,,\quad y_{i+1}=y_i+s_{n-1}\frac{h}{n}\ ,$$

$$i=0,1,2,\cdots,n-1$$

で定義する．



上図は，石垣の底辺を右辺に，上辺を左辺になるように 90° 回転した図である．

点 $P_i(x_i,y_i)$，$\mathrm{i}=1,2,\cdots,\mathrm{n}$ の $\mathrm{n}\to\infty$ の極限が石垣の輪郭を表す曲線 $\big(\mathrm{x},\mathrm{y}(\mathrm{x})\big)$ であり，［3］では

$$\mathrm{y(x)}=\mathrm{d}+\frac{1}{h}\left\{(b-d)x+dx\log\frac{x}{h}\right\}\qquad(1)$$

と求められている．簡単な計算で

$$\mathrm{y}'(\mathrm{x})=\frac{1}{h}\left(b+d\log\frac{x}{h}\right)$$

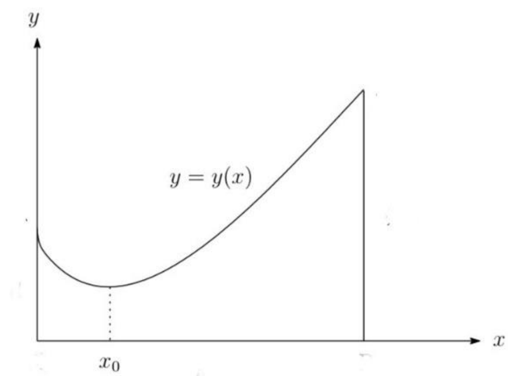
がわかるので、$\mathrm{y}'(\mathrm{x})=0$ となる点 $\mathrm{x}=x_0$ が

$$x_0=he^{-\frac{b}{d}}<h$$

と求められる．

$$\mathrm{y}''(\mathrm{x})=\frac{d}{h}\frac{1}{x}>0$$

なので，石垣の輪郭を表す曲線（1）には「へこみ」があることがわかる．（藤井一幸［5］参照）



3. 石垣のへこみ

石垣曲線の構成方法から石垣データ (b,d,h) に対して n が小さいと傾き s_n は負にならないので，石垣はへこまないが，石垣曲線(1)は必ずへこむので，n を大きくすると，石垣がへこんでくるのではと予想される．そこで，次のような定義を与える．

定義　石垣データ (b,d,h) に対して，n 段の石垣積で石垣がへこむ最小の n を石垣データ (b,d,h) の「へこみ指数」と定義し $\mathrm{H}(b,d,h)$ で表す．

この小論の目的はへこみ指数の数学的考察を行うことである．

s_n は，石垣を n 段積んだときの最上階の石垣の傾きを表しており，数列 s_n，$\mathrm{n}=1,2,\cdots$ は単調減少数列になっている．従って

$s_n<0\Leftrightarrow$ n 段の石垣でへこむ．

ここで，数列 H_n を

$$H_n:=\frac{n}{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}\ ,\ n=2,3,\cdots$$

とおく．すると

$$s_n = \frac{b}{h}\left(\frac{b}{d} - H_n\right)$$

により，

$$s_n < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{d} < H_n$$

従って，次の命題が示された.

命題1. $\mathrm{H}(b,d,h)$ は必ず有限な自然数として確定し，次で与えられる：

$$\mathrm{H}(b,d,h) = min\left\{n \in N \middle| \frac{b}{d} < H_n\right\}$$

従って，へこみ指数 $\mathrm{H}(b,d,h)$ は石垣の高さ h に依存せず，上辺 d と底辺 b の比のみで決まる.

上記の命題 1 を踏まえると，H_n , $n = 2,3\cdots$がどのような数列であるか興味がわく．そこで，以下H_n , $n = 2,3,\cdots$を調べてみた.

補題 2. $H_n < H_{n+1}, n = 2,3,\cdots$ であり $\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.

証明．簡単な計算により，$H_{n+1} - H_n = \frac{1}{n(n-1)}\left(n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)$ がわかる.

よって, $H_n < H_{n+1}$.　また　$H_n > \sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}$より，$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.

$$\gamma_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\ , \mathrm{n} = 1,2,\cdots \text{とおく.}$$

このとき, $\lim_{n\to\infty}\gamma_n = \gamma$ は有限な実数に収束しオイラーの定数と呼ばれており$\gamma = 0.5772156649\cdots$がわかっている（例えば文献［4］p.370 参照）.

補題3. $\alpha_n = H_n - \log n\ , n = 2,3,\cdots$とおく.

(ｉ) $\alpha_n > 0$，$\mathrm{n} = 2,3,\cdots$

(ⅱ) $\alpha_n > \alpha_{n+1}$，$\mathrm{n} = 2,3,\cdots$

(ⅲ)$\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\gamma_n$.

証明.

(ｉ) 簡単な計算で

$\alpha_n - \gamma_n = \frac{1}{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n} - 1\right) > 0$がわかるので,

$\alpha_n > \gamma_n$である．$\gamma_n > 0$ なので$\alpha_n > 0$，$\mathrm{n} = 2,3,\cdots$がわかる.

(ⅱ) 簡単な計算で

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \log(1 + \frac{1}{n}) - \frac{1}{n-1}$$

がわかる．不等式$\log(1 + \frac{1}{n}) > \frac{1}{n+1}$ より，

$$\alpha_n - \alpha_{n+1} > \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n-1}$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{n+1}\right)$$

を得る. $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{2}{n+1}$が正であることを数学的帰納法により示す．$\mathrm{n} = 2$ の場合は$\frac{1}{12}$である．$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} - \frac{2}{m+1} > 0$ と仮定する.

従って$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} > \frac{2m}{m+1}$.

このとき

$$\frac{m}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k} - \frac{2}{m+2} = \frac{1}{m+1}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k} + \frac{1}{(m+1)^2} - \frac{2}{m+2}$$

$$> \frac{2m}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+1)^2} - \frac{2}{m+2}$$

$$= \frac{m}{(m+1)^2(m+2)} > 0$$

従って$\alpha_n - \alpha_{n+1} > 0$，$\mathrm{n} = 2,3,\cdots$である.

(ⅱ) 簡単な計算で

$$\alpha_n = \frac{n}{n-1}\gamma_n + \frac{1}{n-1}\log n - \frac{1}{n-1}$$

従って $\lim_{n\to\infty}\alpha_n = \lim_{n\to\infty}\gamma_n$.

以上により, 次の結果を得たことになる. **定理4.**

(ｉ) 石垣データ (b,d,h) に対してその「へこみ指数」$\mathrm{H}(b,d,h)$ は必ず有限な自然数として確定し，次で与えられる：

$$\mathrm{H}(b,d,h) = min\left\{n \in N \middle| \frac{b}{d} < H_n\right\}.$$

(ⅱ) へこみ指数 $\mathrm{H}(b,d,h)$ は石垣の高さ h に依存せず，上辺 d と底辺 b の比 $\frac{b}{d}$ のみで決まる．
(ⅲ) H_n は n について, 単調増加数列であり，$\lim_{n\to\infty} H_n = \infty$.
(ⅳ) $\alpha_n = H_n - \log n$ とおくと，α_n は正の単調増加数列であり，$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \gamma$.
ここで $\gamma = 0.5772156649 \cdots$ オイラーの定数（[4] p.370 参照）.

実際の熊本城の石垣を例にしたとき，そのへこみ指数は斎藤敏夫氏 (上越教育大学) によれば
$\mathrm{h} = 10$ 間~18.18m　$\mathrm{b} = 5$ 間~9.09m
$\mathrm{d} = 0.6$ 間~1.09m
とすると $\mathrm{H}(\mathrm{b},\mathrm{d},\mathrm{h}) = 293$ である．つまり石垣を２９３段以上積めば,「武者返し」の石垣と言われるが如く本当に反り返るのである.

今回行ったへこみ指数の数学的考察は，もともとは石垣曲線の傾きを数学的に表すという試みから発展したものである．このように, 身の回りにあるあらゆる建築物やさまざまなものの中に隠されている考え方を数学的考察によって明らかにするという試みは，私たちにとってたいへん貴重な経験になったと感じる. この経験を生かして, これからもさまざまな数学的考察を行っていきたい.

謝辞: 本論文は、上越教育大学の授業である平成 30 年度実践場面分析演習での 3 年生 B グループの発表の際の斎藤敏夫准教授からの質問「石垣は何段積めば初めてへこみますか？」という質問に回答を与えるため, その後, B グループのメンバーが集まり，考察した結果をまとめたものである．この小論の最後にもあるように, 斎藤敏夫准教授には, 具体的な数値に対して，石垣がはじめてへこむ石垣の段数も求めていただいた．斎藤敏夫准教授に深く感謝の意を表する.

参考文献

[1]「石垣普請」　北川総一郎著　法政大学出版会 1987.
[2]「城石垣の秘法と資料」「探訪　日本の城」別巻，喜内　敏著　小学館 1978.
[3]「石垣の曲線ー様式の数理ー」　柳井浩著　オペレーションズ・リサーチ　33 巻 (1988)，281－286.
[4]「解析入門Ⅰ」　杉浦光夫著　東京大学出版会 1985.
[5]「熊本城の石垣曲線と数学」　藤井一幸著「ある数理科学者の履歴」(2017) ，15－34, 横浜市立大学学術研究会.

後記

「上越数学教育研究」第 34 号の発行に臨み，多くの方々より御協力を賜りました．心から感謝を申し上げます．

今年度は，3 名の教員の研究論文，3 名の今年度修了予定の院生，2 名の来年度以降修了予定の院生の研究論文，学部生による共同研究論文が掲載されています．第 34 号掲載論文はインターネット上でも公開しますので，そちらも是非ご覧ください．
http://www.juen.ac.jp/math/journal.html

（2019.2.21　宮川健）

「上越数学教育研究」投稿規定

1. 投稿資格　　上越教育大学に関係する研究者
2. 投稿内容　　数学教育および数学に関する研究論文，報告，資料
3. 編集・審査　投稿された論文は必要に応じ審査委員を委嘱し審査する
4. 投稿期限　　毎年 1 月 31 日

上越数学教育研究　第 34 号

発行日　　平成 31 年 3 月 14 日
発行所　　上越教育大学数学教室
〒943-8512　新潟県上越市山屋敷町 1 番地
TEL　025（522）2411　（代表）
印刷所　　（株）明間印刷所　TEL 0256（32）3090