

上越数学教育研究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 35 号

目 次

これからの算数・数学教員に求めること —アイデンティティ研究を通して見えてきたもの—	高橋 等...	1
ディスコースの観点からの算数の授業の検討 —小学校 2 年「分数」の場合—	布川 和彦・笠井 将人...	29
算数教育における探究型学習に関する研究 —研究者の活動をモデルにした SRP の授業を通して—	柳 民範...	45
<i>Y.Engeström</i> の活動理論から見た主体的・対話的な学びのある高校数学授業の様相	澤邊 基...	53
高等学校における数学と情報の教科横断的な探究型学習に関する研究	根津 雄一...	63
算数・数学科の自力解決・討論型授業における教師の役割に関する一考察	武田太久実...	71
非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計	高橋 勇介...	79
日本の高校数学学習指導要領と中国の高校数学課程標準の比較研究	余 申航..	87

2020

上越教育大学数学教室

* 上越数学教育研究は 2020 からウェブ上での刊行のみとなりました.

これからの算数・数学教員に求めること —アイデンティティ研究を通して見えてきたもの—

高 橋 等
上越教育大学

この稿は 2019 年 6 月 1 日に開催された上越数学教育研究会における講演会(於上越教育大学学校教育実践研究センター, 講師高橋等)のために準備した原稿である。

1. はじめに

この社会は, 我が国が法治国家であることを土台として, 一人ひとりが自由を享受しているのが実際である。法を遵守している者が, 法そのものを意識して仕事や生活をしないし, 法をもちだされると何かしら, 権力に縛られるような妙な気持ちになることもあるかも知れない。しかしながら, 学校教育が教育基本法に謳われてるからこそ, 現在の学校教育制度があり, その制度のもとで教員免許状が発行され, 教員であることが保証されていることは, 先生方にとっても事実である。勿論, 法は常に改正される可能性を含むものでもある。

ここで, 教育基本法を紹介することは, 釈迦に説法ということにもなるが, 第一章教育の目的及び理念の一部を抜粋する:

第一章 教育の目的及び理念

(教育の目的)

第一条 教育は, 人格の完成を目指し, 平和で民主的な国家及び社会の形成者として必要な資質を備えた心身ともに健康な国民の育成を期して行われなければならない。

(教育の目標)

第二条 教育は, その目的を実現するため, 学問の自由を尊重しつつ, 次に掲げる目標を達成するよう行われるものとする。

一 幅広い知識と教養を身に付け, 真理を求める態度を養い, 豊かな情操と道徳心を培うとともに, 健やかな身体を養うこと。

二 個人の価値を尊重して, その能力を伸ばし, 創造性を培い, 自主及び自律の精神を養うとともに, 職業及び生活との関連を重視し, 勤労を重んずる態度を養うこと。

三 正義と責任, 男女の平等, 自他の敬愛と協力を重んずるとともに, 公共の精神に基づき, 主体的に社会の形成に参画し, その発展に寄与する態度を養うこと。

四 生命を尊び, 自然を大切にし, 環境の保全に寄与する態度を養うこと。

五 伝統と文化を尊重し, それらをはぐくんできた我が国と郷土を愛するとともに, 他国を尊重し, 国際社会の平和と発展に寄与する態度を養うこと。(姉崎他 2019, pp.37-38)

第一章第一条で, 教育の目的の第一が人格の形成であること, 目的の下位に位置付く教育の目標として, 第二条の五つが述べられている。

学校教育で行う算数教育, 中学校数学教育, 及び高校数学教育は, 法的拘束力をも

つ学習指導要領によってその目標、内容が定められているものの、それらの記述は、本来的に教育基本法の目的と目標とを踏襲するものでなければならない。即ち、学校教育で行う教科教育は子ども達の人格の形成を図るものである。

学習指導要領に記載されている算数、数学の内容は、第二条の目的の一に記載されている、幅広い知識と教養であり、目的のうちのごく一部に過ぎない。真理を求める態度、豊かな情操と道德心、創造性、自主及び自立の精神、勤労を重んずる態度、自他の敬愛と協力の重視、主体的な社会形成の態度など、これらの育成はどの様に行えばよいのだろうか。

一言で言えば、教科の内容の学習を通して人格を形成することが、学校教育で行うべきことである。算数数学教育では、教材の学習を通して人格を形成すること、授業を通して真理を求める態度、豊かな情操と道德心、創造性、自主及び自立の精神、勤労を重んずる態度、自他の敬愛と協力の重視、主体的な社会形成の態度などを育成することが、第一義となる。算数数学の知識技能、数学的思考方は子ども達により豊かに構成されればそれに超したことはないけれども、それはこの第一義の中では付加的なことに過ぎず、資質能力、学びに向かう力・人間性等に巻き込まれて、初めて意味をなす、幅広い知識と教養、の範疇に入るものである。

当方が現在おこなっている算数数学に係るアイデンティティの研究は、算数数学学習を通して如何なる人格形成がなされているかという問題意識によるものである。アイデンティティとは、広義には自己に対する意識のことで、日常語にもなっているけれども、数学教育学研究としては新しく、数学教育学として我が国でこの種の研究に着手したのは当方が最初ではなかろうか。

本日は、当方の数学教育学としてのアイ

デンティティ研究を紹介すると共に、その知見を基にして提出し得る、算数数学教員はどうあればよいのか、どの様な授業をすればよいのかについて述べる。

2. 数学的アイデンティティとは何か

算数数学に関する子どもの活動に対する認識論的な立場と社会学的な立場との双方からの接近は、互いに対立するものではなく、寧ろそれらの融合的な論点の確立を必須とする。科学哲学を背景とする知識論では Polanyi(1958, 1966)が科学者たちの鎖状に結び付いた学術社会を論じ、主体性を伴う個人的知識の形成が同時に知識共同体を形成することを挙証した。そうした個人性と社会性とを融合的に論じる視点の一つとしてアイデンティティがある。

数学教育学においてアイデンティティを取り上げた研究は、この語の汎用性と規定の難しさがあってか、必ずしも多くはなかったものの、最近、増えてきている(例えば、Bishop, 2012; Cobb, Gresalfi & Hodge, 2009; Empson, 2003; Sfard & Prusak, 2005)。

ところで、アイデンティティなる語を最初に使用し、その定義をしたのは、Erikson, E.H. である。Erikson (1968)はアイデンティティを定義した際に、William James による妻に宛てた手紙 (James, 1920)の引用において強調した "*This is the real me!* (これこそが真実の私だ)" という言葉を取り上げている。自分とは何者であるかを探し続けていた James は、そのとき、遂に自分が何者であるかを意識し得たのであろう。Erikson (1968) は、続いて、James のもつアイデンティティの描写として、能動的な緊張感をあげている。アイデンティティとは、自己の能動的な緊張感において形成されるものなのであろう。

算数数学的活動をする際、算数数学に係るアイデンティティを形成することは想像

に難くない。算数数学に関する自己に対する意識、即ちアイデンティティは、活動に没頭していれば、自覚され難いものである。しかし、意識されるか、されないかに係わらず—即ち、アイデンティティが暗黙知 (Polanyi, 1958, 1966) にあったとしても—、幼少期より形成される算数数学のアイデンティティが学習に何らかの影響を及ぼすことは間違いない。子ども達が算数数学学習に躓いたとき、しばしば自分は何故算数を、何故数学を、学習しなければならないのだろうかということを意識することは、よく知られている。そのとき自分が算数数学学習をする理由をうまく見つけることができれば、その後の学習は好転するだろう。子ども達が見つけるその理由は、幼少期より形成されている算数数学のアイデンティティに、肯定的、否定的の如何に係わらず、強く影響を及ぼされる。

人間形成を標榜する数学教育において、算数数学授業を通し、学力として何を形成させるかという論点を避けて通ることはできない。算数数学学力とは、凡そ認知的領域と情意的領域とに分類されてきた。国立教育政策研究所 (2010) は、認知的領域の評価基準例として数学的思考方、数量や図形についての技能、及び数量や図形についての知識・理解をあげ、情意的領域の評価基準例として算数への関心・意欲・態度をあげている。

他方で、算数数学のアイデンティティとそれに関連する態度や自信、信念を含む情意的構成物は、算数数学学習に対する児童生徒の粘り強さ或いは積極性に結び付く (Bishop, 2012)。算数数学の情意的領域を学力であれば、それを含む算数数学のアイデンティティを学力とすることを伴う。

3. 数学的アイデンティティの定義

これまで算数数学のアイデンティティと

呼んでいたものを、ここからは数学的アイデンティティと呼ぶことにする。

Erikson (1959)が、子どもが集団の中で承認されていく過程で自我統合が起きアイデンティティを形成していく (p.21), と述べている通り、アイデンティティの形成は発達のより早い時期である児童期にも起こる。Erikson(1950)は児童期に形成されるアイデンティティは青年期のアイデンティティ形成の足掛かりになる (p.235), と述べている。アイデンティティの形成は、しばしば青年期に特有と捉えられがちだが、それはアイデンティティの拡散がその時期に起こり、自我アイデンティティの一応の成立がその時期にあるからである。

Erikson(1959)の言うアイデンティティには個人的アイデンティティと、それが発達し青年期に形成される自我アイデンティティ、集団アイデンティティの三つがある。個人的アイデンティティはその人間の存在が正にその者唯一の存在であるという意識 (斉一性)と、その人間の存在が過去から現在に連なっているという意識 (連続性)とからなる。Erikson(1959)によれば、個人的アイデンティティをもつことは、斉一性と連続性の直接の自覚、および斉一性と連続性を他者が承認することの自覚という二つの自覚に基づく。

集団アイデンティティは集団のもつ規範性の自我への取り込みによって形成される。しかし、この集団アイデンティティは、今日では、より広義に用いられている。即ち、集団アイデンティティは、自分の存在が共同体に所属しているという帰属意識からなる (Goffman, 2012)。帰属意識は共同体において社会的規範の共有と、その共同体からの存在の承認とを特徴としてもつ。

数学教育学としてアイデンティティを扱った研究は米国を中心に最近、急速に増え、幾つかの研究では数学的アイデンティティ

を定義している。Bishop (2012) は数学的アイデンティティを、“私はアイデンティティを、特定の社会的文脈で交渉され、過去の歴史、出来事、個人の物語、経験、慣例によって生気を与えられた自分の動的考察、及び参加の仕方として定義する。アイデンティティは与えられた共同体で彼(女)が何者であるかに依存し、そういうものとして個人において及び集団において定義される。アイデンティティは、参加における役割や方法 (例えば、数学授業での問題の提出者としての役割) に関連するけれども、私はアイデンティティをより広い意味で定義する。アイデンティティは、存在の仕方や話し方、物語、及び役割という語には必ずしも含まれない側面である感情、態度、信念といった情意的構成要素をもまた含む (p.39),”と定義している。Bishop (2012) による定義は情意的領域に明確に言及している点で卓越したもののだろう。

他方で、高橋 (2013) は Erikson (1959) に基づき、“この研究では、基底においては、個人的アイデンティティを斉一性と連続性から、集団的アイデンティティを共同体への帰属意識から捉える”(p.218), と数学的アイデンティティを規定している。高橋 (2013) の規定は、Bishop (2012) による自己への意識と、共同体への参加やそこでの役割とに対応する。Bishop (2012) は Erikson (1968) を引用しつつも、アイデンティティの定義を巡っては、Erikson (1968) に直接には言及していない。しかし、彼女の定義の内容が Erikson (1968) の言うアイデンティティの規定に沿っていることから、Bishop (2012) もまた、Erikson, E. H. によるアイデンティティの捉えを踏襲しているとしてよいだろう。

高橋(2014)では、Erikson (1968) の言うアイデンティティを算数数学に関してより発展させた Bishop (2012) の定義を、高橋

(2013) によるアイデンティティの規定に含ませ、算数数学のアイデンティティの規定に、より具体性をもたせている。Bishop (2012) の定義では明確には言及されていない、人種や集団を含む広く社会的歴史的な要因の強調という観点を、高橋(2014)では取り込む。勿論、我が国におけるそれらの要因は、米国などに比較すれば多様性が小さいけれども、諸外国に比較して我が国に特有な算数数学教育実践史を鑑みれば、人種や社会歴史的要因を直接に論ずることがなくとも、それを数学的アイデンティティの規定に包含させるべきだろう。

高橋 (2015) では、高橋 (2013) や高橋 (2014) における算数数学のアイデンティティの定義を踏襲し、更に Bishop (2012) による定義も考慮し、算数数学のアイデンティティを次の様に定義する、“算数数学のアイデンティティとは、算数数学に係わることによって形成される、自己の存在と経験への意識、及び共同体への参加の仕方や役割への意識である。自己の存在と経験への意識は、特定の文化や社会的文脈、特定の共同体における社会的歴史的な慣例、個人の過去の歴史、出来事の影響を受けて形成され、かつ共同体への参加の仕方や役割への意識は共同体への帰属意識によって形成される。それらの意識は信念や価値観、情意などを伴う (pp.5-6). ”

4. 数学教育学におけるアイデンティティ研究の動向

我が国の数学教育学において信念的要素を扱うメタ認知 (例えば、清水, 1989; 重松他, 1990) や態度 (例えば、湊 & 鎌田, 1997) は数学的アイデンティティと関連する。特に、湊による一連の態度研究(例えば、湊&鎌田, 1997)では、暗黙知に相当する概念の内法的意味としての数学に対する態度を統計的に分析している。外見上は言語的、

形式的に表象される知識乃至概念であったとしても、表出しない暗黙的な領域が人間の知識には内在し、その暗黙知は表出する知識と一体をなしている。湊&鎌田 (1997) の研究は暗黙知を統計的測定用具によって、言わば人類の文化史上最も形式的で数学的な手法によって白日の下に曝し、情意的学力と認知的学力との関係性という見地から明らかにしたものである。

湊による一連の研究 (例えば、湊&鎌田, 1997) の系列において、高橋の一連の研究 (高橋, 2013, 2014, 2015) もまた、暗黙知の中にあるアイデンティティを扱っているが、それに先立って Takahashi (2000) は、子どもの *internal frames of reference*, 即ち内的参照枠という観点から算数・数学学習を行う際に形成される個性を論じている。内的参照枠は自己を多角的かつ具体的に捉えたものであり、信念の他、様々な特長を有し、アイデンティティとも関連する。

高橋 (2013) は、一名の小学二年生へのインタビュー結果を解釈し、算数が得意な者であるとの自覚などを、算数数学のアイデンティティとして見出した。高橋 (2014) は、一名の二年生期から三年生期にかけて四時点を設け、授業の参与観察とインタビューとをした結果、算数数学の一貫したアイデンティティとして、算数数学と生涯係わるとのアイデンティティ、算数数学の情意としてのアイデンティティ、算数授業で級友と比較するアイデンティティ、及び算数授業で教師を信頼するアイデンティティを見出した。高橋(2015)は、一名に対し二年生期から四年生期にかけての六時点で算数授業の参与観察、インタビューなどを実施し、情意としてのアイデンティティの変容と自己の認知への評価があり、算数に対する好意性が低くなった後でも、情意的な肯定性があることを見出した。高橋によるこれら三つの研究を後ほど詳しく述べる。

米国を中心とした、数学的アイデンティティを扱った研究を幾つかあげる。Cobb, Gresalfi & Hodge (2009) は八年生を調査参加者とし、授業における生徒の一般的な義務、特定の数学的な義務、自分の数学的能力の評価、および級友の数学的能力の評価が算数数学のアイデンティティの形成に影響を及ぼすことを見出している。Solomon (2009) は、五年生、七年生、九年生、10年生が数学的リテラシーを学習する授業において形成するアイデンティティを扱い、教室文化への帰属意識や個人のもつ物語性としてのアイデンティティを議論している。Bishop (2012) は七年生を調査参加者とし、数学授業での談話分析とインタビューを行い、同じ局所的な文脈であっても談話をしている複数の生徒の算数数学のアイデンティティが異なることを見出している。

小学生のアイデンティティを扱った研究として、Empson (2003) は小学一年生の学習遅滞児のアイデンティティと数学的知識の形成との関連を論じ、算数授業で参加を促されることにより、アイデンティティを高め、知識形成を促進させることを見出している。Wood (2013) は小学四年生一名の短時間で変容するアイデンティティの一単位時間の分析により、算数学習から離れさせるマイクロアイデンティティが算数を生産的に学習させるマイクロアイデンティティに変容する様を見出している。

ところで、アイデンティティを、自我アイデンティティを指すものとし、専ら青年期に特有の課題として扱おうとする考えもある。しかし、Empson (2003) や Wood (2013) の様な小学生のもつ数学的アイデンティティを扱った研究が示す通り、変容し難いと言われる小学生期のアイデンティティ (Erikson, 1968) にも特長や変容がある。小学生期から高校生期、大学生期の数学的アイデンティティの実際を明らかにす

る必要性は高い。

5. 高橋による一連の研究

(1) 高橋 (2013) の研究

高橋 (2013) の研究目的は、算数に関して子どもが形成する素朴なアイデンティティの様態と、それらのアイデンティティの形成に影響を及ぼす幾つかの要因を明らかにすることであった。

高橋 (2013) による研究方法は以下の通りである。算数授業への参与観察というフィールドワークを実施するとともに、インタビューを実施することによって、子どもの形成するアイデンティティを複数の方向から探った。授業の参与観察については、箕浦 (1999) のマイクロエスノグラフィーを参考とし、学級集団と抽出児の観察を行った。インタビューではカウンセリング法 (Moustakas, 1990) を用いた。主たるデータとなったインタビュー結果は、幾つかの質問からの自由連想を促すことによって得た。インタビュー時にはインタビューアーによる同意、沈黙の共有、言葉の繰り返しなどの技法を用いた。

調査参加者のアイデンティティとそれらが形成される要因は、授業やインタビュー、作文での繰り返しの発言や文章、インタビューアーとの親密なリレーションのもとでの強調される発言から解釈し、同定した。

① 調査参加者とデータ収集

調査参加者が所属する学校は新潟県にある大学附属小学校であり、小学二年生が調査参加者であった。データ収集はその小学校二年生二年级で行い、各学級の授業をビデオに記録するとともに、各学級で四名ずつ抽出した調査参加者の授業での活動をビデオに記録した。さらに、抽出した全八名に対してインタビューを実施し、その様子をビデオに記録した。子どもの抽出は学級担任の推薦によるもので、様々な学力の子

どもが抽出された。調査参加者全員に算数に関する作文も書かせた。

高橋 (2013) では、それら二年级のうちの一学級に所属する一名の子どものデータを解釈、考察した。この一名をニックネームで Waku と呼んだ。また、インタビューアーを I とした。

② 参与観察した授業

二単元の授業を参与観察した。一つ目の単元は、かけ算であり、2012年10月24日から11月28日の間に21回の授業が実施された。参与観察した学校の授業では30分を一モジュールとして単位授業時間としており、二モジュールを続けて実施する場合があった。この21回の授業のうち、二モジュールを続けて実施したのは15回であり、残りの六回は一モジュールでの実施であった。

二つ目の単元は、はこの形であり、2013年2月25日から2月28日までの間に四回の授業が実施された。四回のうち二モジュールを続けて実施したのは二回であり、残りの二回は一モジュールでの実施であった。

③ インタビュー

インタビューを各抽出児について合わせて二回行った。一回目を単元かけ算の最中に、二回目を単元はこの形の最中に実施した。各々のインタビューの実施時間は、小学二年生という学齢に対する配慮から10分から20分であった。インタビューに際しては、この研究の実施者がインタビューアーとなった。インタビュー時においてインタビューアーには公立高校での三年間の勤務経験と大学での15年の勤務経験、および研究調査における約17年のインタビューアーとしての経験があった。インタビューアーと抽出児の間には、授業の参与観察時に信頼関係が形成されており、インタビュー時には抽出児は安心感をもって話す状況にあった。

④ 作文、わたし(ぼく)と算数

調査参加者である小学二年生の自分と算数との関係への意識を探るために、調査参加者全員に、一回目と二回目の参与観察中にそれぞれ一回ずつ、わたし(ぼく)と算数、という作文を書かせた。作文用紙は調査した小学校で用いられているものを使い、殆どの子どもが 200 字以上の分量を書いた。参与観察した授業とインタビューのビデオからプロトコルを作成し、それらと作文とを合わせて解釈し、考察した。

⑤ 高橋(2013)の結果

i) 単元かけ算での Waku の活動

単元かけ算では Waku は授業に積極的に参加し、発言も多かった。Waku は多くの授業で教師の指示がある前に教科書を開き、授業が開始される前から教科書に書き込みをして問題を解いていた。Waku は教師による挙手を促す発問に対してほぼ総ての場合に挙手し、度々指名を受け、発言した。次のプロトコルはかけ算の七回目の授業において、Waku が黒板に左から縦に二個、四個、四個、二個と並べられたおはじきを線で囲み、教室の前で説明をした場面である。

プロトコル 1

Waku : はいっ, はいっ, はいっ, はいっ.

教師 : Waku さん, じゃあ聞いてみよう.

Waku さんは動かすの,それとも囲むの?どうする?

Waku : 囲む.

教師 : じゃあ黄色で囲んで.

Waku : ええと, あ, あ, 違った, 違った, こうだ(おはじきを左から二個, 八個, 二個ずつ線で囲む).

教師 : なるほど, じゃ, 式を教えて.

Waku : $8 + 2 + 2$.

プロトコル 1 に表れるように, Waku は算数授業に積極的に参加して発言をし, 教師もそれに応じていた。Waku の発言には他の級

友も注目し, Waku の発言の内容を発展させたりした。Waku と教師, 級友との相互作用が単元を通して随所で見られたことから, Waku の単元を通しての授業への参加は学級への帰属意識を反映していたと解釈する。

ii) Waku への一回目のインタビュー

Waku は算数をどう思うかという質問に対して次のように答えた。

プロトコル 2

I : Waku 君にとって算数とはどんなものですか.

Waku : ゲームみたいで面白い. 何か暗算とか筆算とか, やり方が色々あって面白い.

Waku にとって, 算数はゲームみたいで面白いものであった。さらに, Waku は算数が教科の中で一番好きであり, 教科の中で一番得意であると述べ, 算数に対する好意と得意さを自覚していた。Waku は算数が大事なものであると言い, その理由として, かけ算の意味と若干の実用性とを関連させて述べた。さらに, Waku は次のように述べた。

プロトコル 3

Waku : 僕が考えていることか. ううん, うううん. もっと算数の勉強, 好きになりたい.

Waku は算数に対して好意をもっており, さらにその好意を高めたいという意識をもっていた。この意識は自己の情意を制御しようとするメタレベルの意識であると解釈する。さらに, Waku は算数授業中に級友のことをどう思うか, という質問に対し次のように述べた。

プロトコル 4

I : お友達ってどういう人たちなの, 算数の時間.

Waku：うううん、近くにいる人。

I：近くにいる人・・・あとは？

Waku：それぐらいかな。

I：じゃあ、自分とお友達を比べたとき、どういうふうに思う？

Waku：僕の方が算数得意だって思う。

Waku にとって、算数の授業中の級友はただ近くにいる人であり、この時点ではその存在に重要性をもたせていない。Waku は自分と級友を比べたときは自分の方が算数が得意だと言い、級友に対する自分の優位性を自覚していた。その理由として Waku は自分が先の学年の内容まで学習しているからであると言った。Waku は教師について次のように述べた。

プロトコル 5

I：じゃあ、先生についてはどう思う？

Waku：先生。優しく、いろんなことを教えてくれる。

Waku は教師に対しては好意をもっており、しかも数学的知識を教えてくれる者として意識していた。さらに、Waku は将来に就きたい職業について、次のように述べた。

プロトコル 6

I：数学者、すごいね。何で数学者に。

Waku：うううん。何でだろう。数学者。算数についていろいろ詳しくなりたいから。

Waku は将来就きたい職業として数学者をあげ、さらに数学者は数学や算数を研究している人と述べた。Waku は数学者になりたい理由を問われると、算数について詳しくなりたいからと答えた。

iii) 作文わたし(ぼく)と算数(一回目)

次は Waku の書いた一回目の、わたし(ぼく)と算数、という作文の全文である。

算数に出会えて、よかったと思うのは、自分で数字や暗記法を持つことは、とても大切だと思ったからです。ぼくは、自分の家でも、数学を、もう勉強しています。だから、学校の数学は、かんたんです。それでも、まだ、家でも、もう勉強しています。ぼくは、自分の勉強を、持ちつつ、他の勉強法をやっています。でも自分の勉強法の方がよく使います。ぼくの勉強法は、ドリルのうすめのをやって、学年より、上の勉強をやるという、勉強法です。他の勉強法は、ドリルではなく、プリントを使って、学習するという勉強法です。問題は、いんさつされているのをを使って、5まいあって、うらおもていんさつされているのを使います。これもいっぱい学習して、学年先まで使っています。だけど、たまに、自分で問題を作ってふくしゅうしています。ぼくは、本当に算数出会えてよかったと思います。(原文ママ)

Waku は塾に通っており、プリントは塾から配付されるものである。Waku の塾での学習は二年生よりも進んだ学年の内容であり、学校での学習は、その復習的位置にある。

iv) 単元はこの形での Waku の活動

単元かけ算での授業と同様に Waku は単元はこの形の授業においても終始、積極的な活動をしていた。次は単元はこの形の三回目の授業で直方体の箱の正しい展開図を選ぶ教科書の問題を一斉指導で子どもたちが考える場面での Waku の発言である。

プロトコル 7

教師：はい。Maka さん。

Maka：四番。

Shu：言われた。

Waku：言われたとかないよ、答え一つしかないもん。

Waku は教師の発問に対しては指名されるよう返事をし続け、授業に積極的に参加し、指名されなくとも、自分の考えの一端を発言したりしていた。その種の発言が教師に取り上げられることはなかったとしても、授業への Waku のこうした係わり方はこの単元にわたり随所に見られた。

v) Waku への二回目のインタビュー

Waku は最近の算数の授業について問われると次のように答えた。

プロトコル 8

I: じゃあ、最近、授業どうですか、算数の。

Waku: 面白い。

I: 面白い。どういうところが面白い？

Waku: んんん、例えば、箱の、こういう形の箱とか(箱の形を描く)、箱の分け方が面白い。

単元はこの形では、子どもが自宅から持ち寄った様々な箱を分解するなど、いわゆる工作的な側面があり、子どもは手操作をすることが楽しかったと解釈する。続いて算数のことをどう思っているか尋ねたところ、次の発言となった。

プロトコル 9

I: 箱の分け方が面白い。Waku 君は算数のことをどう思っていますか。

Waku: んんんん、僕の体の一部。

I: 僕の体の一部。それはどういうことかな。もうちょっとちゃんと教えてもらえる？

Waku: ううん、僕がしなきゃいけないことなんだと思ってる。

Waku は算数は自分の体の一部であり、自分のしなくてはいけないことであると述べるものの、その理由までは言語化できなかった。Waku は算数の活動をするのに対して楽しみをもっているものの、算数をする

ことに対して一種の義務感も同時にもっていると解釈する。算数が好きかどうかを Waku に尋ねたところ、次の展開となった。

プロトコル 10

I: 全部。教科の中では何番目ぐらいに好きなの？

Waku: 二番目。

I: 二番目。一番好きなのは何？

Waku: 総単。

Waku は一回目のインタビューに続いて算数に対する好意を示すが、算数が二番目に好きな教科となっている。Waku の一番好きな授業は総合単元での驢馬の世話であった。Waku は算数は得意であると言い、家では塾から配付されたシートを一人で学習し、塾では分数の引き算を学習していると述べた。さらに、Waku は算数は大事なものであると言い、その理由を次のように述べた。

プロトコル 11

I: どういうところが大事ですか。

Waku: どういうところかなあ、ま、社会で役立つってことかな。

I: 社会に役立つ。どんなところが役立つの？

Waku: ん、どういうところかな、ん、例えば学者になったとき、えっと、開発するときの数、数えるとき、そういうとき。役立つと思う。

Waku は算数が社会に役立つと言い、その理由として学者になったときに開発や発明をするため、数を数えたり、材料の分析をすることに役に立つことをあげた。さらに、算数授業の際に、級友や教師のことをどう思うかという質問に対して、Waku は次のように述べた。

プロトコル 12

I: じゃあ、算数の授業でお友達や先生のことをどう思ってる？

Waku: うん、一緒に、何か、頼れる仲間。

I: 頼れる仲間。お友達のことは？

Waku: も、同じ。

I: 先生は？

Waku: 同じ。

Waku は級友や教師のことを頼れる仲間と言い、仲間という点で級友や教師は Waku にとって同様の存在である。Waku は仲間が頼れることの理由を級友や教師は自分が知らなかったことを優しく説明してくれるからだと述べた。さらに、Waku は将来就きたい職業について次のように述べた。

プロトコル 13

I: ああ、優しく説明してくれる、そうなんだ、へえ。Waku 君はところで、将来どんなお仕事に就きたいですか。

Waku: 数学者。

I: 数学者。それは何ですか。

Waku: んん。算数をもっと得意になりたいから。

I: 算数をもっと得意になりたいから。数学者のどんなところがいいと思いますか。

Waku: 算数の、ひ、例えば、2 掛ける、2 掛ける、2 桁の、11 掛ける 11 は、こうやって、こういうのはぱっぱってやるんだけど(11×11 の筆算を書く)、そういうことを僕も考え出したい。

Waku は将来就きたい職業として数学者をあげ、その理由として算数をさらに得意にしたいことをあげた。Waku にとって算数が得意であることは数学的知識を発明することを含み、そうした数学的知識を発明する存在としての数学者に対する素朴な同一視があるものと解釈する。

vi) 作文わたし(ぼく)と算数(二回目)

次は Waku の書いた二回目のわたし(ぼく)と算数という作文の全文である。

ぼくにとっての算数は、とっても大事なものです。なぜかという、ぼくのみまわりにも、算数があるからです。たとえば、給食の牛乳です。これは、牛乳のかさ(りょう)です。ほかには、クラスは、40 人です。これは、かずです。もう一つ、ぼくがわかるのがあります。それは給食のはしの長さは、どのくらいか、です。これは、長さ(センチメートル)です。ぼくは、これからも、算数を大切にしたいです。(原文ママ)

この二回目の作文では Waku は算数で学習した内容を身の回りの具体物と関連させ、自分にとっての算数の重要性への意識を記述するとともに、算数を大切にしたいという情意を記述している。

⑥ 高橋 (2013) の考察

i) 素朴な個人的アイデンティティの同定

Waku が算数を学習する存在として自分を意識し(作文一回目、作文二回目)、自分の活動が家庭、塾、および学校で連続していると意識している(プロトコル 1、作文一回目)ことから斉一性と連続性を自覚している。他者による Waku の存在の承認の自覚については、授業における教師や級友による Waku の存在の受け入れ(プロトコル 1、プロトコル 7)や教師が優しく教えてくれる(プロトコル 5)という発言から、Waku はその自覚をもっている。以上より、Waku は素朴な個人的アイデンティティを有していると判断する。その素朴な個人的アイデンティティとは、算数が得意で好きである者としての自覚であり、Waku が期間のあいた二回のインタビューにおいて、将来就きたい職業として数学者をあげたのは、この素朴な個人的アイデンティティと関連する。なお、他者からの承認については、教師と

いう庇護者的な位置にある存在からの承認と、ピアグループ的性格を一面でもつ集団からの承認ということで、Waku はその承認を年長者程には意識し得ていないだろう。

ii) 素朴な規範的アイデンティティの同定

様々な素朴な規範的アイデンティティを Waku は形成していた。それらは教師の学級経営や算数授業を行う上での方針が規範化し、参与観察した学級の殆ど総ての子どもの素朴な規範的アイデンティティとなったものである。例えば、授業中に発言するときは挙手をする、グループ学習のときは決められたグループを作るなどは参与観察した授業において見られた素朴な規範的アイデンティティを反映する行動であった。

算数に関して形成された素朴な規範的アイデンティティとしては、考えたことを式で表す(プロトコル 1, プロトコル 13)が例としてあげられる。子どもが自分で考えたことを直ぐに数学的言語・記号を使って表そうとすることは、数学的言語・記号が一種の文化的道具だとすれば、それは素朴な規範的アイデンティティを反映する。たとえば、一般的な言語・記号であったとしても、共同体で用いられる限り、それはその共同体の規範を反映する。ただし、人類を超えた普遍性と一般的な言語・記号との関連についてはここでは議論しないでおく。何れにしても、Waku は教師による学級経営と算数授業の実施の中で、学級の規範を受け入れ、算数授業で用いられる言語・記号を共有し、算数授業が行われる学級への帰属意識である素朴な規範的アイデンティティを形成した。

iii) 素朴なアイデンティティを形成する諸要因

Waku の素朴なアイデンティティを形成する諸要因としては、心的には、算数が得意であること、算数に対する強い好意性、この得意さや好意性あるいは社会環境と連

関する算数学習に対する素朴な義務感、数学的知識の重要性に対する意識などがあった。塾での学習は Waku に自分の勉強法(作文一回目)を自覚させる社会環境的要因ともなっていた。これらの諸要因は Waku が自分と算数とを関連させて複数回、言語化したことや強く主張したことから同定したものである。

アイデンティティと情意との関連はしばしば取り上げられる。この研究においても、Waku の算数への好意性(プロトコル 2, 3, 8, 10)は、Waku の素朴な個人的アイデンティティを形成する、算数が得意であることの自覚(プロトコル 1, 作文一回目, 作文二回目), 好意性を高めなければならないとの自覚(プロトコル 3)の支えとなっている。算数が好きだから得意ないしは得意だから好きという相互方向の関係は低学年の児童にはよく見られ、驚く程のことではない。驚くべきことは Waku が好意性をさらに高めなければならないという意識をメタレベルでもっていることである(プロトコル 3)。その意識は算数についてもっと詳しくなりたから数学者になりたいとの発言(プロトコル 6, 13)や数学の重要性に係る発言(プロトコル 11, 作文二回目)とも関連し、素朴に同一視している数学者(プロトコル 6, 13)が Waku の将来像になっている。なお、他者への同一視が児童の素朴な個人的アイデンティティと関連することは Erikson (1959) も指摘している。

Waku の小学二年生にしては強い素朴な個人的アイデンティティは、算数に対する一種の義務感(プロトコル 9)とも関連する。素朴な義務感の形成には家庭や塾での学習という社会環境も影響を及ぼしているだろう。この素朴な義務感は、ただし、Cobb, Gresalfi & Hodge (2009) が扱うほど、儀礼的ではない。Waku の場合、授業中は楽しんで授業に参加しており(プロトコル 1, 2, 8),

如何なる強迫性をも受けている様子はない。

Cobb, Gresalfi & Hodge (2009) の言う自他の数学的能力の評価を Waku も示し(プロトコル 4, 12), その評価には変化があった。一回目のインタビューでは Waku にとって級友は自分より算数が得意でない者(プロトコル 4)であったが, 二回目では頼れる仲間(プロトコル 12)となっている。これは Waku の素朴な個人的アイデンティティと規範的アイデンティティが特に自他の評価という点で変化したことによる。算数授業においてピアグループ的な学級集団の構成員であった級友が, 信頼し得る探求者であり協力者であることを, 授業を経験するうちに Waku は意識し得た。その背景の一つには, 単元かけざんでは Waku が自力で学習できる教材が扱われた一方で, 単元はこの形では級友と協力して活動をしなければならない教材が扱われたことがある。

(2) 高橋 (2014) の研究

高橋 (2014) による研究の目的は, 児童が形成する数学的アイデンティティのうち, 比較的長期にわたり保持される一貫性のあるものに焦点を当て, その特徴を明らかにすることであった。

高橋 (2014) では高橋 (2013) と同じ研究方法を用いており, 両者の相違点を以下に述べる。

① 調査参加者とデータ収集

高橋 (2014) では調査参加者が二年生期と三年生期の四時点でデータを収集し, 一名の児童 (女子) のデータを解釈, 考察した。この一名をニックネームで Yuri と呼んだ。インタビューアーを I とした。

② 参与観察した算数授業

Yuri が所属する学級の担任は, 二年生時では 30 代の教師経験が約 12 年の男性であり, 三年生時では 40 代の教師経験が約 21 年の男性であった。算数授業を何れの年度でも学級担任が担当した。

Yuri が所属する学級で参与観察した時点 1 での単元はかけ算であり, 2012 年 10 月 24 日から 11 月 30 日の間に 21 回の授業が実施された。この 21 回の授業のうち二モジュールを続けて実施したのは一回であった。

時点 2 での単元ははこの形であり, 2013 年 2 月 25 日から 2 月 28 日までの間に四回の授業が実施された。四回のうち二モジュールを続けて実施したのは一回であった。

時点 3 での単元は大きな数であり 2013 年 10 月 25 日から 11 月 5 日までの間に七回の授業が実施された。七回のうち二モジュールを続けて実施したのは三回であった。

時点 4 での単元は重さであり 2014 年 2 月 21 日に一回の一モジュールの授業が実施された。なお, 時点 4 での参与観察は, インフルエンザによる学年閉鎖のため, この学級では, この一回の授業についてのみ実施された。

③ インタビュー

高橋 (2013) と同様である。

④ 高橋 (2014) の結果

参与観察した授業とインタビューを記録したビデオからプロトコルを作成し, それらと作文とを合わせてデータを解釈した。

Yuri の算数学力は学級の中でも上位にあり, 参与観察した全授業を通して教師の発問に対して率先して挙手をするなど, Yuri は授業への参加という点で, 数学的アイデンティティが高い児童であった。

Yuri は約一年四ヶ月にわたる四時点での調査で, 一貫した数学的アイデンティティを形成していた。それらは次であった。

i) 算数数学と生涯係わるとのアイデンティティ

時点 1 のインタビューにおいて, Yuri は算数は仲良しで友達みたいと言った。その理由を Yuri は次のように述べた。

プロトコル 1

Yuri: 大きくなったら, お母さんとお父さんみたいに, 計算がうまくなりたいから. 小学生の時も, 中学校も, 高校の時も, 仲良くしてたら, きっとうまくなれると思うから.

Yuri のこの発言には, 両親の数学的能力を同一化し, 自分も算数を一層得意なものにしたいという希望が反映している. Yuri にとってそれは算数数学と進学後も係わることにより達成される. さらに時点 1 では, Yuri は次のように発言した.

プロトコル 2

I: 大人になっても.

Yuri: 大人になっても, 勉強した方が, 頭に, 記憶が残るから, した方がいいと思う.

プロトコル 1, 2 から, Yuri は算数数学と生涯係わるとの意識をもっていると解釈する.

時点 2 において Yuri は算数が大事なものであると言い, さらに次のように述べた.

プロトコル 3

Yuri: 大人になって, 子ども達に, あれ, 教えようとしても, 何か, 覚えていないと, 子ども達に負けちゃうみたいな.

Yuri のこの発言は, 大人は子どもよりも優れた存在であるとの彼女の信念と係わる. 他方で, この発言の背景には, 大人になっても優れた数学的知識を保持しなければならず, 自分はそういう人間でありたいという意識がある.

時点 3 で Yuri に算数のことをどう思っているか尋ねると, 自分のためだと言い, さらに次のように述べた.

プロトコル 4

Yuri: 自分が大きくなってから, もし, 子ど

もができたなら, その時に, 教えたり, 自分の頭つくる, 頭に憶えさせるとかそういう時に, 必要な.

Yuri のこの発言の背景の一つには, 彼女が家庭で算数学習の支援を受けている母親への同一化があるが, 他方で, “自分の頭つくる” という発言はメタ的意識であり, 算数を学習する理由としては母親への同一化から独立的な理由である.

時点 4 では Yuri の算数数学と生涯係わるという意識が一層明確に言語化された. Yuri は, 算数は友達みたいなもので, 一生係わるものであると言い, その理由を次のように述べた.

プロトコル 5

I: 一生, ついてなきやいけないもの. Yuri さんにとって, 何でそういうふうに思うの. Yuri: いろいろなところで, 計算とか, いろいろするから, そのときに, できないと, あれだから, ずっと一緒にいなきゃだめだと思う.

時点 4 では算数数学と生涯係わる理由として計算などを “いろいろなところで” することをあげており, この意識は時点 3 におけるよりも相対的に社会化されていると解釈する.

ii) 算数数学の情意としてのアイデンティティ

Yuri は算数授業が楽しい, 或いは算数が好きであるという, 算数に対する好意的な感情や態度を四時点の調査で一貫してもっていた.

時点 1 のインタビューにおいて, Yuri は算数が好きであると言い, さらに次のように述べた.

プロトコル 6

I: どういうところが.

Yuri: 何か, 初めて分かったり, ここはこう
なんだと分かるから.

Yuri は算数に対する好意をもち, その理由を算数の教材を理解できるからとしていた. 時点 1 での作文でも Yuri は次のように記述していた.

作文 1

すきなさんすう一つ

わたしのすきなさんすうは, なにもありません. でもかけざんとわりざんがすきです. でもりゆうはわかりません. でもすきです. なぜかというとき, 「このこたえは?」ときかかれたら「はい」といえるからです. あたしは, いきなり九のだんだったらしいのになとおもいました. りゆうはもう九九をぜんぶおぼえているからです. わりざんだってやりかたもわかります. (原文ママ)

時点 2 のインタビューでは, Yuri は分数が楽しいと言い, 次のように発言した.

プロトコル 7

I: 分数とかが楽しい. どんなところが楽しいですか.

Yuri: 分ける, あれ, 四分の一に分けるときに, あのお, まだ, きりが無いっていうか.

Yuri は時点 2 のインタビューの直前の単元であった分数が楽しいという感情を表していた. Yuri は分数が楽しい理由として, 折り紙を繰り返し折ることで分母が 2^n になる無限に存在する単位分数の不思議さをあげていた. 時点 2 の作文でも Yuri は次のように記述していた.

作文 2

わたしと算数 ありがとうさんすう

もうすぐ, 楽しかった算数がおわりです.

いままでならった, 九九, 分数, はこ長さなどです. この中で一番楽しかったのは, 分数です. りゆうは, 分数は, 先生が, 「けんかをしないようにわけましょう。」と言ってくれました. なのでわたしは, くふうをしました. そしてわかった! と思ったときに 1 ぼ大人になれた気がしたからです. 3 年生になっても算数をがんばりたいと思います. (原文ママ)

時点 3 のインタビューでも Yuri は算数に対する好意を示し, 次のように述べた.

プロトコル 8

I: 楽しい. どういうところが楽しい.

Yuri: んん, あ, 大きな数で, 何か, 簡単に分かるところとか, 分かんないところとか, あのお, 何か, 差が, 一気につくから.

Yuri は算数が楽しい理由として, 時点 3 で幾つかの大きな数の問題の困難度の違いをあげていた.

時点 4 のインタビューにおいても Yuri は次のように問題解決の成功と関連させて算数に対する好意を述べていた.

プロトコル 9

I: ええ, どういうところが好きなの.

Yuri: たまに分かんない問題とかでてきて, で, 解けるとうれしいから, 好き.

以上のように, Yuri の算数に対する情意は, 四時点を通して一貫して好意的なものであった.

iii) 算数授業で級友と比較するアイデンティティ

アイデンティティの形成では, 共同体への参加という社会的側面もある. Yuri へのインタビューでは, 算数授業が行われる共

同体の構成者である級友と教師とを彼女がどの様に意識しているかを意図的に尋ねた。

時点 1 のインタビューにおいて Yuri は級友について次のように述べた。

プロトコル 10

Yuri: お友達のことは、最初は、友達に教えてもらってて、その人は、私より先に、もう、九九の合格をしたから、羨ましいと思っていたけど、私合格してから、他の友達が、何か、合格してなくて、かわいそうだなと思った。

Yuri は級友の学習の進度に比較し、授業での自分の位置を意識していた。他方で、Yuri は時点 1 のインタビューで、次のようにも述べた。

プロトコル 11

Yuri: 他に、友達は、みんな、算数のことに、夢中になると思うんだけど、何か、最初、私だけ、何か、最初算数が苦手だったから、だから、私だけ、違うところ、入っていない、仲間に入っていないっていう感じだったけど、今は、逆に、みんな仲間に入ってるって思う。

Yuri は学級共同体に帰属する理由として、算数の得意さ、即ち数学的知識を十分に獲得しているかどうかをあげた。Yuri にとっての算数授業への帰属意識は自分の認知的能力を評価し、級友のそれと比較することにより成立していた。

時点 2 のインタビューでは、Yuri は級友について次のように述べた。

プロトコル 12

Yuri: 何か、お友達は、あれ、私、あれ、何か、分数で、折り紙とかのやつを、他にも見つけたり、して、すごいと思うし、先生は、

私たちのために頑張ってくれてるから、何か、頑張ってくれてるから、くれてるし、優しい。

時点 2 では Yuri は、級友のことをすごいと評価し、さらに次のように発言した。

プロトコル 13

Yuri: 算数の、関係あるものは、自分の力と、あと、仲間の助け合いみたいな。

時点 2 では Yuri にとっては、算数授業では自分の活動と級友との助け合いを行うのであり、級友は助け合いをする仲間であった。

時点 3 のインタビューでは、Yuri は級友について次のように発言した。

プロトコル 14

Yuri: たまに、私と、同じ答えじゃないときは、あれ、とか思うけど、そういうときに、たまに、自分が間違ってたんだとか、あの、やっぱ私の方が当たってるのかなって考えることも、あのお、自分で、あの、考えることができて、自分のためになるし。あのお、たまに、あのお、計算すごいなとか、そういうこともある。

時点 3 では Yuri は時点 2 で述べていた助け合いをする仲間としての級友との係わり合いを述べた。Yuri にとって級友は、係わることによって自分の学習を促進させる者であり、時には賞賛する者でもあった。

時点 4 のインタビューでは Yuri は級友について次のように発言した。

プロトコル 15

Yuri: 分かる人はすごいなって思うし、分かりにくい人がいたら教えてあげることができると、まあ、そんな感じかな。

Yuri にとっては、級友の数学的能力が自分の算数授業における位置を判断する一種の基準となっており、Yuri は自分より学習が進んでいる級友を意識することで、自分の学習への取り組みを充実させることを目指していた。

iv) 算数授業で教師を信頼するアイデンティティ

時点 1 のインタビューにおいて Yuri は算数の授業での教師について次のように述べた。

プロトコル 16

Yuri: 先生は、いつも算数とかも、お世話になってるし、教えてくれたのが先生だから、先生にありがたいと思ってる。

時点 1 では Yuri にとって教師は感謝すべき者であり、算数を教えてくれる者であった。時点 2 では、Yuri は教師についてプロトコル 12 のように述べており、彼女にとって教師は時点 1 と同様に、自分達のために頑張る優しい者であった。

時点 3 は、Yuri が三年生の秋であったが、その年度は四月に担任が交代していた。Yuri は時点 3 で算数授業での教師について次のように述べた。

プロトコル 17

Yuri: 先生は、あの、私た、あの、さっき言ったんだけど、私の頭の中に、あの、ずっといる人。

I: ずっといる人。

Yuri: 教えてくれる、あの、例えば、大きな数で、教えてくれたのが、頭に記録されると、それを教えてくれたのが、先生だから、ずっと頭の中に、いるような存在。

Yuri にとって、教師は授業で獲得した数学的知識とともに、記憶されるような者で

あった。

時点 4 では Yuri は教師について次のように述べた。

プロトコル 18

I: 教えてくれる大事な人。ふんん何でそう思うの。

Yuri: 教えてくれないと、できないと思うから。

時点 4 においても教師は、Yuri にとって信頼し得る大事な者である一方で、その理由が算数を教えてくれるからで、Yuri は教師が教えてくれないと学習を進められないと意識していた。

⑤ 高橋 (2014) の考察

調査結果から見出した一貫した数学的アイデンティティは、算数数学と生涯係わるとのアイデンティティ、算数数学の情意としてのアイデンティティ、算数授業で級友と比較するアイデンティティ、算数授業で教師を信頼するアイデンティティであった。

算数数学と生涯係わるとのアイデンティティは、時点 1 と時点 2、時点 3 では家族—特に母親—への同一化 (プロトコル 1, 3, 4) によって形成されている。その形成には両親への憧れ (プロトコル 1)、母親から家庭で勉強を教わっているという文脈 (プロトコル 3, 4) が係わっている。大人の代表である両親の数学的実践が算数とは生涯係わるものだという信念に基づく数学的アイデンティティを形成させたのである。身近な人間への同一化が児童期のアイデンティティ形成に影響を及ぼす (Erikson, 1950) ことは不思議ではない。他方で、時点 4 では算数と生涯係わることを述べながらも、両親への同一化に係わる言及がされていない。時点 4 では算数と生涯係わる理由として様々な場所で算数を使うことを Yuri はあげている (プロトコル 5)。時点 4

ではこの理由が両親への同一化から、より社会的な状況に移行している。勿論、時点4で言語化されなかったものの、Yuriにとって両親は最も影響を受ける人物として存在しているだろう。時点4での変容の理由として、発達により Yuri の意識が家族から社会的な状況に向かっていることがあげられるものの、このデータのみでは結論付け得ないだろう。

算数数学の情意としてのアイデンティティは、算数が好きで楽しいという好意的な情意によって四時点を通して一貫して形成されていた(プロトコル6, 7, 8, 9, 作文1, 2)。好意的な情意の形成は Yuri の認知的成功がもたらすもので、数学的知識の獲得(プロトコル6, 8, 作文1, 2)、問題解決の成功(プロトコル9)が、その形成の契機となっている。算数に関する認知的な成功経験が良好な情意を形成することは、高橋(2013)で報告した Waku のケースにも見られた。算数数学に関する中学生の認知と情意との因果関係(湊 & 鎌田, 1997)に比較すると、Yuri や Waku においても学年の進行に従ってより複雑な情意の様相が表れるものと予測できる。

Yuri の好意的な情意は算数授業で扱われた教材に影響されるものでもあった(プロトコル7, 8, 作文1, 2)。特に、分数には Yuri は繰り返し好意的な情意を示した(プロトコル7, 作文2)。Yuri にとって分数は折り紙を折ることによって、分母が無限に大きくなる数で、“きりがなくなる”(プロトコル7)のであり、“くふう”(作文2)が必要な数である。分数を巡っては、Yuri の情意と認知とが密接に関連している状態なのかも知れない。

算数授業で級友と比較するアイデンティティの一貫性は、Yuri が級友との認知的成功の違いを四時点を通して意識し、学級の中で自分を位置づけたことに見られた(プ

ロトコル10, 11, 12, 14, 15)。児童生徒の算数数学授業における級友との比較は、Cobb, Gresalfi & Hodge (2009) や 高橋(2013)においても議論されており、授業という知的活動がなされる学級という共同体では、構成員の認知的違いがアイデンティティの形成に影響を及ぼすことは起こり得ることである。Yuri の場合、時点1では自分が認知的に成功するか否かが学級への帰属意識を左右してもいる(プロトコル11)。こうした自他の認知的成功に対する評価が、時点1では“羨ましい”、“かわいそうだな”(プロトコル10)などの情意的な発言として、時点2では“すごい”(プロトコル12)、時点3では“計算すごい”(プロトコル14)、時点4では“分かる人はすごい”(プロトコル15)などの発言として表れている。

自他の認知的成功に対する評価の他に、Yuri は算数を行う学級集団を仲間と見做す意識をもっている。算数には“自分の力”と“仲間の助け合い”(プロトコル13)が関係するとの発言は、Yuri が自力解決と討論という我が国の特長的な算数授業に参加することで、数学的アイデンティティを形成していることを示す。算数授業に参加している際の級友は Yuri にとって切磋琢磨する存在である(プロトコル14)。

算数授業で教師を信頼するアイデンティティが、四時点を通して見られた(プロトコル16, 12, 17, 18)。Yuri にとって、時点1ではお世話をしてくれる教師が“ありがたい”(プロトコル16)者であり、時点2では自分たちのために“頑張ってくれてる”(プロトコル12)者で、時点4では教師は“教えてくれる大事な人”(プロトコル18)である。時点3では Yuri の教師への信頼がメタ的意識として表れた。Yuri にとって教師は“大きな数で、教えてくれたのが、頭に記録されると、それを教えてくれたのが、先生だから、ずっと頭の中に、いるような

存在”(プロトコル 17) である。時点 3 の年度では新担任となったことから、その影響がこのメタ的意識に影響を及ぼしたとも考え得るものの、算数授業では Yuri にとって教師は数学的知識と共に自分の頭脳に記憶される者として意識されている。Yuri のこの発言は重松他 (1990) の知見とも関連するだろう。

(3) 高橋(2015)の研究

高橋 (2015) による研究の目的は、小学生期に比較的長期にわたって形成される数学的アイデンティティの幾つかの様態と、それらのアイデンティティの連関性とを明らかにし、アイデンティティの自覚に関する仮説を示すことであった。

高橋 (2015) による研究の研究方法は、高橋 (2013, 2014) と同じである。以下にはそれらとの相違点を述べる。

① 調査参加者とデータ収集

調査参加者が二年生期、三年生期、及び四年生期において各々二時点、合わせて六時点で調査を行った。一名の小学生 (女子) の主としてインタビューデータを解釈し、考察した。この一名をニックネームで Aya と呼んだ。

② 参与観察した授業

Aya が所属する学級の担任は、二年生期と三年生期とは同一の 30 代の教師経験が約 11 年の男性であり、四年生期では 40 代の教師経験が約 20 年の男性であった。算数授業を何れの年度も学級担任が担当した。

参与観察した時点 1 での単元は、かけ算であり、2012 年 10 月 24 日から 11 月 28 日までの間に 21 回の授業が実施された。

時点 2 での単元は、はこの形であり、2013 年 2 月 25 日から 2 月 28 日までの間に四回の授業が実施された。

時点 3 での単元は、大きな数であり、2013 年 10 月 25 日から 11 月 5 日までの間に七回の授業が実施された。

時点 4 での単元は、重さであり、2014 年 2 月 21 日に一回の授業が実施された。なお、時点 4 での参与観察は、インフルエンザによる学年閉鎖のため、この一回の授業についてのみ実施された。

時点 5 での単元は、小数の割り算であり、2014 年 11 月 19 日から 12 月 2 日までの間に六回の授業が実施された。

時点 6 では 2015 年 2 月末に参与観察を予定したが、小学校の時間割の関係で実施されなかった。

③ インタビュー

高橋(2013, 2014)と同様である。

④ 高橋(2015)の結果

参与観察からの解釈では、Aya は算数の認知的学力が高い方ではないものの、算数授業への参加という点で帰属意識に基づく集団的アイデンティティの高い小学生であった。Aya は約二年四ヶ月にわたる六時点の調査で、算数数学の情意としてのアイデンティティの変容と自己の認知への評価を見せ、算数数学の重要性に関して一貫したアイデンティティを見せた。更に、情意的要素が算数学習を含む学習観としてのアイデンティティを転換させる様があった。

これらの算数数学の情意としてのアイデンティティ、算数数学の重要性に関するアイデンティティ、及び学習観としてのアイデンティティは、上述したインタビューでの質問からの Aya への自由連想の記録を、原則として予め観点をもたずに解釈し、洞察した結果として得たものである。ただし、これらの三つの数学的アイデンティティを分類し得たことに対して、インタビューの質問の影響を無視することはできない。なお、結果として、算数数学の情意としてのアイデンティティと算数数学の重要性に関するアイデンティティという分類は、高橋 (2014) の幾つかの分類とほぼ一致する。

i) 算数数学の情意としてのアイデンティ

ティ

時点1のインタビューで Aya は算数が好きかという質問に次の様に答えた。

プロトコル1

Aya: わああ、んんん、んんん、うんん、うんん、苦手。

Aya は情意に関する質問に対し、算数が苦手という自己の認知への評価を答えた。時点1で Aya は次の様にも述べた。

プロトコル2

Aya: わあ、ちょっと頭の中が、大変、ちょっと、頭の中で何かすっごい、絡まっちゃって、難しい。

Aya は算数を考える際の自己の認知を頭の中が絡まると言い、メタ認知的に捉えた。

時点2では Aya は算数の調子はどうかという質問に楽しいと答え、更に次の様に述べた。

プロトコル3

Aya: ええ、形の、で、ええ、正方形とか、ちょ、正方形とか、長方形とか、勉強しているところで、あのお、うん、形で、み、みんな、で、あのお、形を、ええ、うん、長方形とか正方形とか三角形とか、円形とかを、あのお、あの、みんなのと比べて、ああ、ん、き、ん、仲間に、あの、仲間にするのが、楽しかった。

Aya は算数が楽しい理由が図形の分類という認知的活動によることを発言した。時点2で Aya は算数の授業について次の様にも述べた。

プロトコル4

Aya: なぜかという、算数は、ん、みんな、で、みんな、で、話し合、ええ、九九の

答えとか、遊んだりすることもできるし、一人でも勉強できるから、楽しいと思います。

Aya は算数の授業が楽しい理由を皆で話し合える、一人でも学習できるという学習形態に関連させた。

時点3では算数の授業についてどう思いかという質問に対して、Aya は次の様に答えた。

プロトコル5

Aya: ええ、算数の授業では、算数は、ええ、あの、はっきり言って、あの、苦手なんですけど、あの、あの、ん、苦手なんですけど、とっても、ん、あの、あの、なぜか、とても、あの、面白く感じる。

依然として Aya の自己の認知への評価は苦手というもののだが、しかし情意としては算数が面白いという肯定的なものであった。

時点4で算数の調子について質問すると Aya は次の様に答えた。

プロトコル6

Aya: ああ、算数の調子。学力テスト、ト、いい方だったんです。

I: ああそうなの、すごいね。へええ、そうなんだ。算数の授業はどうですか？

Aya: ええと、算数の授業は、ええ、嫌いじゃなくなりました。

Aya は試験の成績がよかったという自己の認知的学力の評価により、算数の授業が嫌いじゃなくなったと述べた。時点4では算数のどういうところが好きかという質問に、Aya は次の様にも答えた。

プロトコル7

Aya: 算数の好きなところは、えっと、算数

の好きなところは、ええと、い、んん、んん、ちょっと友達がいるので言えないんですけど、算数の好きなところは、ちょっと Yuki さん、出てくれませんか。(Yuki 出て行く) やっと思って行きました。算数の好きなところは、えっと、何て言えばいいんだろ、大人になっても、ん、算数の好きなところ、はい、算数の好きなところは、友達と、一緒に、えっと、算数の問題が出たら、相談したり、するのです。

Aya は算数の好きな理由として、級友と相談するという学習形態をあげた。

時点 5 では Aya は四年生になって暫くするけどどうかという質問に次の様に答えた。

プロトコル 8

Aya: 前よりは、算数、好きになったけど、まだまだだから。

I: まだまだ。どういうところが、まだまだ。

Aya: まだ、よくできないし、あのお、まだ、ん、よくできない。

Aya は以前より算数が好きになったと言い、自分の認知をまだまだと評価していた。更に、時点 5 では Aya は次の様に述べた。

プロトコル 9

Aya: 算数、算数、算数のこと、ん、がんば、算数のこと頑張れる。

I: 頑張れる。

Aya: さっき言った、まだまだだから、何か、頑張ることが、できる。

Aya にとって自己の認知への評価が高くはなく、それ故に算数は頑張れるものであった。時点 5 では Aya は次の様にも述べた。

プロトコル 10

Aya: 算数、頑張ってるけど、そんな好きじゃない。

時点 5 では、Aya は算数が好きではないことを明確に自覚していた。

時点 6 では算数が好きかどうか質問すると Aya は次の様に述べた。

プロトコル 11

Aya: 好きさ度、算数の好きさ度、好きではない。

時点 6 では時点 5 に引き続き、Aya の算数の好意性における否定的な発言があった。時点 6 で Aya は算数は楽しいところもあるけど苦手なところもあると言い、次の様にも述べた。

プロトコル 12

Aya: んん、みんなで話し合ったりとか、自分の、自分ができるときの、安心感、あと、嬉しいという気持ち。

時点 6 での Aya の算数への好意性は全般的には高くはないものの、皆での話し合いという学習形態や認知的に達成したときの安心感や嬉しさを算数の楽しいところとしてあげた。

次は時点 6 における Aya の作文である。

作文 1

私は、算数は、苦手ですが、大事だと思います。

理由は、大人になっても、つかうと思うし、みじかに、あると思うので、これからも、気づき、学び、がんばりたいです！

今度の 5 年生も、心配ですが、算数などの勉強もやるので、しっかり、出来るといいなあーと思います。

苦手だから、やる気がでる算数。

大人のため、これからもがんばっていきたいです。(原文ママ)

この様に Aya の算数数学の情意としてのアイデンティティは、自己の認知への評価や、級友と係わる学習形態と関連している。この情意としてのアイデンティティは算数数学への好意性である態度に関しては、時点 4 以降のプロトコルから低くなっている(プロトコル 6, 10, 11) 一方で、情意としては肯定的で高いまま(プロトコル 3, 5, 7, 9, 11, 作文 1) であった。

ii) 算数数学の重要性に関するアイデンティティ

時点 1 のインタビューで Aya は算数は大事であると言い、理由を次の様に述べた。

プロトコル 13

Aya: だってさ、大人になっても使うしさ、算数を覚えないとさ、うん、算数を覚えないと、ん、大人になったら、うん、大人になったら駄目、駄目というか、ちょっと、大変なことになると思うから。

この様に Aya は算数を覚えないと大人になって大変なことになると述べた。

時点 2 では算数の重要性の理由を Aya は次の様に述べた。

プロトコル 14

Aya: 大人になって使うし、算数は、ん、大人になって使うし、あと、ぼ、あと、ええ、算数がなかったら、ん、なかったら、ん、数字も、数字もないし、足し算とか引き算とか筆算とか掛け算も全部ないし、何か寂しいから、何か、ないと嫌だし、あった方がいいと思う。

Aya は時点 2 では算数を大人になって使うこと、算数の存在それ自体と、その存在に

対する自己の情意を算数の重要性の理由としてあげた。

時点 3 では Aya は算数の重要性の理由を次の様に述べた。

プロトコル 15

Aya: あの、遊びにもなるし、あの、大人になっても、あの、なって、使うことあるから、あの、あの、面白いと思う。いろいろなことに、いろいろなことに算数使えるから、面白いと思う。

時点 3 では Aya にとって、算数は大人になっても使うし、面白いものであり、更に、世の中に算数がないと困るとも述べていた。

時点 4 では Aya は算数の重要性の理由を次の様に述べた。

プロトコル 16

Aya: ええ、大人になっても、大人になっても、算数を、あの、つか、使えるし、近くにも算数、数字や、形がいっぱいあるからです。

時点 4 では Aya にとって、算数の重要性の理由は、大人になって使うこと、数字や形が身の回りに存在していることであった。

時点 5 では Aya は算数の重要性の理由を次の様に述べた。

プロトコル 17

Aya: 苦手だけど、大事。

I: 大事、おお、どういうところが大事。

Aya: あのお、今まで、いろんな勉強してきたけど、それを大人につながって、あのう、大人にでも、よく、暮らせる、ため。だから、あの、とても、大事だと思う。

時点 5 では Aya にとって、算数は大人になってもよく暮らせるために大事なものであつ

た。

時点 6 では Aya は算数は嫌だが大事であると言い、算数の重要性の理由を次の様に述べた。

プロトコル 18

Aya: さっき言った通り、大人になって大事なかな、大人になると使うかも知れないし。

I: ああ、大人になって使うから、大事なんだ。大人になるとどんなところに使うかなあ。

Aya: 身の回りに算数で覚えたことが、あるから、あるので、役立つ、自分のために。

時点 6 では Aya にとって算数は嫌でも大事なものであり、その理由は大人になって使うこと、身の回りに存在し、自分のために役立つことであった。

時点 1 から時点 6 を通し Aya の算数数学の重要性に関するアイデンティティは、一貫して高いものであった (プロトコル 13, 14, 15, 16, 17, 18, 作文 1)。この重要性には大人になって算数を使うということの他に、算数の存在自体に対する Aya の意識が関連していた (プロトコル 14, 16, 18)。

iii) 学習観としてのアイデンティティ

時点 1 では Aya は家で学習するかという質問に次の様に答えた。

プロトコル 19

Aya: うん、えっと、計算カードとか、あのお、して、あ、遊んだり、えっと、遊んだり、えっと、遊んだり、うん、や、やっている。

I: やってる。塾とかも行ってる？

Aya: うん、行ってる。

時点 1 では、Aya は家で学習すると言い、塾にも通っていると述べた。

時点 2, 3 でも Aya は学校外での算数学

習について、塾に通い、家では塾のプリントや学校の宿題をすと言い、塾以外では英語、ギター、習字、水泳を習っていると述べた。

時点 4 では Aya は家で学習するかという質問に次の様に述べた。

プロトコル 20

Aya: は、はっきり言って、あまりしてません。

時点 4 では、Aya は、更に、塾に通い、他に英語、習字、水泳を習っていると述べた。

時点 5 では Aya は家での学習について次の様に述べた。

プロトコル 21

Aya: 学校以外で、え、あのお、あのお、家で、少し、するけど、めっちゃいっぱい勉強しているわけではない。

更に、時点 5 で Aya は塾について次の様に述べた。

プロトコル 22

Aya: 塾、塾は、ちょっと辛くて。

I: 辛くて。今も行ってる？

Aya: 今は、今は、辛くて、他の、習いごとのこともあって、やめちゃって、学校で、今、頑張ってる。

時点 5 では、Aya は塾をやめたと述べ、続けているのは英語と水泳の習い事であると述べた。

時点 6 では Aya は家では学校の宿題以外は学習しないと言い、更に次の様に述べた。

プロトコル 23

Aya: 楽しいことだけ。

I: ああ楽しいことだけってどんなのが楽しいの？

Aya: 何だろう, ああでも違うか, さっきの, 楽しいこと, でも, 家だから, 勉強, 学校行ってるんだから, 家ではもう, 自由, な, 気がして, 勉強は, やってない.

更に時点 6 では, Aya は塾については次の様に述べた.

プロトコル 24

Aya: 行っていない. 自分のやりたいことしかやらないことにした.

I: ああ, 自分のやりたいことしかやらないことにしたんだ.

Aya: 学校もあるし, 何ていう, どっちも, 学校もあるから, その分頑張ってる, 頑張りたいと思う.

時点 6 では, Aya は学習を学校で頑張りたいと言い, 英語以外の習い事は総てやめたと述べた. Aya は更に, 次の様に述べた.

プロトコル 25

Aya: 英語は自分でも楽しいって思ってるので, 英語は, 自分からやりたいって言って.

I: ああ, 英語は今もやってるの.

Aya: はい. 勉強もそう思ったら楽しくできそうな, そうなんだけどなあ.

時点 6 で, Aya は英語は楽しいから続けていると言い, 他の学習も自らしたいと思えば楽しくできそうだと述べた.

Aya は時点 1 から時点 3 までは塾や習い事に通うことに疑いをもたないものの (プロトコル 19), 時点 4 以降は家庭での学習に消極的になり (プロトコル 20, 21, 23), 時点 5 以降は英語や水泳以外の塾や習い事を止めている (プロトコル 22, 25). 時点 6 では, 楽しい学習しかない (プロトコル 23,

24), 他の学習も英語と同じく思えば楽しくできる (プロトコル 25) という趣旨のことを述べ, 自ら行う学習は楽しくできるという学習観としてのアイデンティティを形成している. これは, 学習を要求されて行うという意識から自ら行うという意識への, Aya の学習観としてのアイデンティティの転換であった.

⑤ 高橋 (2015) の考察

i) 算数数学の情意としてのアイデンティティの変容と自己の認知への評価

時点 1 において, Aya は算数に対する情意に係る質問に, 自己の認知への評価を答えた (プロトコル 1, 2). その理由は算数については認知に係る状態が Aya にとって問題点であったからだろう. 小学二年生がメタ認知的に自己の認知を捉えなければならぬほど (プロトコル 2), Aya にとって算数は難しかった.

自分は算数が苦手であるとの数学的アイデンティティが六時点のインタビューにおいて度々表れ (プロトコル 5, 8, 9), 情意的変容に影響を及ぼしていた. この影響は否定的なもののみでなく, 苦手だけど面白く感じる (プロトコル 5), まだまだだから頑張れる (プロトコル 9, 作文 1) という肯定的な情意とも関連するものであった.

時点 5, 6 で Aya は算数は好きではないという数学的アイデンティティを明確に表すけれども (プロトコル 10, 11), それ以前は算数が楽しいとも述べ (プロトコル 3), その後も肯定的な情意を表すことがあった (プロトコル 7, 12, 作文 1). しかしながら, 時点 4 での算数の授業が嫌いではなくなったという発言から (プロトコル 6), Aya の算数に対する好意性の低下が時点 3 から時点 4 に至る間にあったと考察する. この好意性の低さは時点 5 と 6 とでも表れた (プロトコル 10, 11).

Aya にとって算数が楽しい理由は, 教材

とその教材を巡る認知的活動（プロトコル 3），算数授業での学習形態（プロトコル 7，12），及び認知的達成感（プロトコル 12）であるが，時点 3 から時点 4 に至る間の算数への好意性の低下，及び時点 5 と 6 とでの好意性の低さは，教材とその教材を巡る認知的活動の自己の評価に強く影響を及ぼされるものであろう．実際，時点 6 では算数授業での学習形態や認知的達成感に関しては，Aya は肯定的な情意を表し（プロトコル 12），苦手だからやる気がでる算数とも述べている（作文 1）．

ただし，ここで，算数が好きであることと楽しいことの違いを考慮しなければならない．Aya にとって算数への好意性である態度と楽しさである情意とは，関連するものの異なる特性をもつものかも知れない．即ち，Aya の算数に対する態度の低下は，算数の教材としての知識それ自体に対する好意性の低下であり，他方で，Aya が保持し続けている算数授業の楽しさは，授業で級友と係わりながら学習することの楽しさである．このことは，算数数学の情意としてのアイデンティティが，自己の認知的経験と，授業における級友との人的係わりとの双方により，形成されることの証左である．

時点 6 で否定的な態度があり，算数が楽しいという情意もあるのであれば，この態度はメタ情意（DeBellis & Goldin, 2006; 山野, 2014）の位置にある．メタ情意では情意と情意との対立に関し，認知の介入があるとされるものの，Aya のケースでは，級友との人的係わりによって形成された集団的アイデンティティの関与がある．それ故，メタ情意の形成には，認知以外の要素があることもまた，強く推考できる．

ii) 算数数学の重要性に関するアイデンティティの一貫性

算数数学の重要性については，Aya は一貫して算数は大事であるとし，算数を大人

になっても使う（プロトコル 13，14，15，16，17，18，作文 1）という数学的アイデンティティをもっていた．このアイデンティティは，高橋（2014）での Yuri のもつ算数数学と生涯係わるとのアイデンティティと同様のものである．更に，大人になっても使うのみでなく，Aya はそれに関連した様々な状況を述べる．時点 1 では Aya は算数を覚えないと大人になったら大変なことになる（プロトコル 13），時点 5 では大人になってよく暮らせるために算数が大事（プロトコル 17）と言い，大人になっての算数の使用に関連した状況を連想している．

算数数学の重要性に関し，Aya は算数の存在自体についても言及する．時点 2 では算数がないと寂しいから嫌だから（プロトコル 14）と算数の存在への情意を表す．これは無くてはならないものとしての算数への共感であろう．更に Aya は，時点 4 では身近に数字や形が存在すること（プロトコル 16），時点 6 では身の回りに算数で覚えたことが存在すること（プロトコル 18）により算数数学の重要性を述べ，またその存在により算数が自分のために役立つこと（プロトコル 18）も述べている．算数数学の重要性をその存在自体に帰することは，実用性に帰することと共に，洗練された意識ではなかろうか．

iii) 学習観としてのアイデンティティの転換

時点 1，2，3 までは，Aya は自宅での算数学習として学校の宿題や塾のプリントを中心に行い，英語を含む複数の習い事に通っている（プロトコル 19）．しかし，時点 4 以後は自宅であまり学習をしなくなっている（プロトコル 20，21，23）．時点 5 以後は塾もやめ，習い事としては英語を続けているのみである（プロトコル 22，25）．自宅での算数学習をあまりしなくなった時期は，Aya の算数への好意性が低下した時期とほ

ば一致する。この一致は、小学三年生だった Aya に心的な転換期があったことを示すのではなかろうか。

この転換期は時点 5 と 6 とにおける Aya の発言により、更に明確になる。時点 5 では、Aya は塾を辛くなってやめ、学習は学校で頑張っている (プロトコル 22) と述べている。時点 6 では、Aya は楽しいことだけしかしない (プロトコル 23)、自分のやりたいことだけしかしない (プロトコル 24) と述べ、塾や習い事、学校での算数学習に関し、学習への、より強い自己意識を形成したことを表している。

Aya は英語は楽しいから自分からやっている (プロトコル 25) と言い、勉強もそう思えたら楽しくできそう (プロトコル 25) と述べる。ここでは、楽しさという情意的要素が、Aya の学習の取り組みへの大きな条件となっている。この情意的要素が Aya に自ら行う学習は楽しくできるという学習観としてのアイデンティティを形成させ、学習はさせられるものでなく自らするものだという学習観の転換を導いたのである。このことは、算数数学の情意としてのアイデンティティが肯定的になれば、Aya の算数学習が好転することをも示している。

iv) 数学的アイデンティティの連関性とアイデンティティの自覚に関する仮説

算数数学の情意としてのアイデンティティ、算数数学の重要性に関するアイデンティティ、及び学習観としてのアイデンティティには情意的要素を中心とした連関性がある。Erikson (1968) によれば、小学生期のアイデンティティは変容するとしてもその速度が極めて遅いものの、Aya のケースでは算数数学の情意としてのアイデンティティの態度的要素は低下していく。その一方で、算数数学の重要性に関するアイデンティティは一貫して高い。その背景には Aya の算数数学の重要性に対する認知的判断も

あろうが、しかし算数は大事であるという初等教育に係わる一種の社会的通念の影響がある。この影響は、算数は苦手だが頑張れる (プロトコル 9, 作文 1) という Aya の肯定的に保持される算数数学の情意としてのアイデンティティとも関連している。更に、この社会的通念の影響は身の回りでの算数の存在に対する Aya の共感 (プロトコル 14, 18) を呼び起こしている。この共感は、若しかしたら、中学数学や高校数学を学習していく過程で変容してしまうものなのかも知れない。何れにしても、算数学習の段階での、身の回りの算数の存在への気付きと共感、算数数学的知識を構成することと同じく、子どもに影響を及ぼすものである。

情意としてのアイデンティティが、学校外では好きな学習のみより行い (プロトコル 23, 24)、他の学習も英語と同様に楽しく思えたらできそう (プロトコル 25) という学習観としてのアイデンティティの形成に強い影響を及ぼしたことは先に述べた。このことは、情意としてのアイデンティティにより、Aya が自らの意思で習い事を選択をしたこと、Aya が自覚する楽しさという情意的要素が学習観の基礎にあることを示す。この自ら行うものという学習観は、苦手だからやる気がでる算数 (作文 1) という言葉と何ら矛盾するものではなく、寧ろ、Erikson (1968) の言う能動的な緊張感を生み出すものである。算数数学の情意としてのアイデンティティが、能動的な緊張感—もはや主体性と言い換えてもいい—をもたらせば、Aya の算数学習によって構成される知識は、その完成度はともかくとして、真に Aya の固有のものとなるだろう。

Aya の学習観としてのアイデンティティの転換をもたらしたのは、情意としてのアイデンティティの自覚 (プロトコル 23, 24) であった。この自覚は Aya が自ら気づいた

ものなので、インタビューで引き出した算数数学の情意としてのアイデンティティの自覚よりも、より強い。この種の自覚は、青年期の自己を探究するという行為により、しばしば見られるものであるが、しかし、Aya のこのケースは、小学三、四年生期で、自らの情意を自覚し得ること、その自覚は学習観としてのアイデンティティを転換させ得ること、という仮説を導く。勿論、この仮説は、Aya のケースに依るもので、直ちに一般化されるものではない。しかし、小学三、四年生期が子ども達にとって算数学習の或る種の転換期であることは多くの先生方の実感するところでもあろう。

6. 数学的アイデンティティと学力

高橋による一連の研究 (高橋, 2013, 2014, 2015) は小学生を調査参加者としたものであるけれども、中学生時のデータも収集しており、現在、論文文化しているところである。これらの研究の結論として言えることは、良好な数学的アイデンティティの形成は主体的学習を支えるということである。湊&浜田 (1994) によれば、「主体的学習とは、まずもって学習者の個人的存在、個人の感性や内面性を認め、学習者が彼独自の価値基準をもって具体的世界と関わり、真理を絶対的存在として吸収するのではなく、自己との関係として真理を解釈し、判断し、自分自身の意味を構成し、不断に自己を創造することである (p. 6)」。この自らによる真理探究とは、不断の自己への反省、即ち自己を意識し、自己の向上を図ることを伴って初めて可能なこととなる。即ち、良好な数学的アイデンティティの形成である。

ここで、ならば良好な数学的アイデンティティを形成するように仕向ければ、認知的学力—教育基本法第二条で言う幅広い知識と教養—を考慮しなくてもよいのか、という御意見が、当然のこととして提出され

るだろう。しかしながら、この種の反対意見は、認知的学力が人格の形成と切り離されて形成されていると言う見解、より具体的に言えば、情意など暗黙知が認知的学力にとって無駄であり、負の影響より与えないものであるとの見解を抛り所とするものである。即ち、理性のみが数学的真理に到達させる知的機能であり、情意が係わるなどとはとんでもないという所謂プラトンの数学観の所有者による反対意見なのである。

ここに参加されている先生方は、既に、算数数学教育とは全人教育であるとの立場でおられることは、承知しているところであろう。情意を伴う暗黙知のうちに子ども達の知的達成を後押しする主体性が育まれてこそ、全人教育ができるのであり、その主体性こそが子ども達が真に活用できる数学的知識を構成させ得る。

プラトンの数学観が教え込みという授業形態を生じさせる (湊&浜田, 1994) ことは知られており、現在、高校教育が強力な改革期にあるのは先生方の授業観の転換を伴うことである。算数や中学校数学授業では、できうる限り子どもの活動を主軸とした授業展開をしたいという先生方が多いことは幸いなことである。尤も、生徒指導の問題点など学校が様々な事情を抱えていることは事実であるけれども、そういった場合は生徒指導さえうまくいけば、即ち子ども達が自己の生きる意味を真摯に考えることができていれば、子どもの活動を主軸とした授業を展開し得るのではなかろうか。

ここまでの話で、テストで測定できる様な認知的学力を高めることを軽視しているのではないかとの印象をもった先生方もいるかも知れない。しかし認知的学力は依然として重要である。但し、学力は教え込むことによって高まるものでは決してない。当方は秋田の教育実践も少しではあるが存じているが、秋田県で最も小中学生の学力

が高いと言われているのは、岩手県と宮城県との県境にある小村，東成瀬村である．東成瀬小中学級とも各学年の学級数は一の小規模校で，三世代家族も多い地域である．

東成瀬村小中学校関連の書籍は多いが，最近出版されたものに，主婦の友社編による秋田県東成瀬村のすごい学習法，2019年がある．その書籍で，鶴飼教育長の言葉として，「われわれが教育を進める上で大切だと思っていることの一つに，安心感と信頼感があります．子どもたちが「勇んで登校／次々と発表／満足して下校」できる学校にしようと，よく話すのです．子どもたちにはいっぱい発言させますよ．そのとき，みんなが正解できるわけじゃないですか．ですから子どもたちには，人が間違うから，そのときに笑ったり，後ろ指をさしたりするのはダメだよということをしっかり言うんです．間違ってもいい，みんな笑わないよという安心感と信頼感を持って授業に臨める環境をつくることで，子どもは堂々と発言します．そしてみんながそれをきっちり聞く．たとえ誤答であったとしても，それをもとにお互いが高め合うのが授業であり，学校なのです．「お互い高まるための場で笑われたりしたら，バカくせくてしゃべれねすべ」ってね（笑）．そうでしょう？（pp.130-131）」，という言葉がある．この言葉に代表される様に，高い学力は豊かな人間性に支えられる，正に人格の形成こそが，高い学力を生むということが言える．

東成瀬村小中の授業は，子どもの主体的活動を主軸にしながら，先生方が計画した授業である．勿論，計画通りにいかないことは承知の上で，先生方は総ての子どもの見取りをする．その手段の一つがハンドサインであり，子どもが指を何本立てるとかで，困っている，わかった，などの意思表示を授業中にする．教師から離れた状況で，子ども全員が教室を自由に動き回る状況で

は，教師はプロとしての力量を発揮できない．しっかりとコーディネートした授業で，想定外の子どもの反応からも子どもの活動を引き出す様な授業を展開する，そうした専門性がこれからの教師には必要なことである．

やはり，釈迦に説法のような話になってしまった．先生方の御意見をお聞かせ下さい．

御静聴ありがとうございました．

文献

姉崎洋一他編．(2019)．解説教育六法．三省堂．

Bishop, J.P. (2012). "She's always been the smart one. I've always been the dumb one": Identities in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 43, 1, 34-74.

Cobb, P., Gresalfi, M., & Hodge, L. L. (2009). An interpretive scheme for analyzing the identities that students develop in mathematics classrooms. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 1, 40-68.

Empson, S. B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: An interactional analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 34, 4, 305-343.

Erikson, E. H. (1950). *Childhood and society*. New York: Norton.

Erikson, E. H. (1959). *Identity and the life cycle*. New York: Norton.

Erikson, E. H. (1968). *Identity: Youth and crisis*. New York: Norton.

Erikson, E. H., 岩瀬庸理訳．(1973)．アイデンティティ：青年と危機．金沢文庫．

Goffman, E., 浅野敏夫訳．(2012)．儀礼としての相互行為—対面行動の社会学．法政

- 大学出版局.
- James, H. ed. (1920). *The letter of William James, Vol. 1*. Boston: The Atlantic Monthly Press.
- 国立教育政策研究所. (2010). 評価規準の作成のための参考資料(小学校). 国立教育政策研究所.
- Moustakas, C. (1990). *Heuristic research*. Newbury Park: SAGE.
- 湊三郎&浜田真.(1994).プラトンの数学観は子供の主体的学習を保証するか—数学観と数学カリキュラム論との接点の存在—. 日本数学教育学会誌, 76, 3, 2-8.
- 湊三郎, & 鎌田次男. (1997). 中学校における数学の学力と数学に対する態度との間の因果的優越関係. 数学教育学論究, 67・68, 3-28.
- 箕浦康子. (1999). フィールドワークの技法と実際. ミネルヴァ.
- Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The University Chicago press.
- Polanyi, M. (1966). *The tacit dimension*. Gloucester: Peter Smith Pub.
- Sfard, A., & Prusak, A. (2005). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34, 4, 14-22.
- 重松敬一, 勝美芳雄, & 上田喜彦. (1990). 数学教育におけるメタ認知の発達の研究—「内なる教師」の発達の変容調査—. 奈良教育大学紀要, 39, 41-57.
- 清水美憲. (1989). 中学生の作図問題解決過程にみられるメタ認知に関する研究. 数学教育学論究, 52, 3-25.
- Solomon, Y. (2009). *Mathematical literacy: Developing identities of inclusion*. New York, NY: Routledge.
- 主婦の友社編. (2019). 「学力日本一!」 秋田県東成瀬村のすごい学習法. 主婦の友社
- Takahashi, H. (2000). Modalities of student's internal frames of reference in learning school mathematics. In T. Nakahara & M. Koyama (Eds.), *Proceedings of the 24th international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.4, pp.185-192), Hiroshima, Japan: Hiroshima University.
- 高橋等. (2013). 算数に関し子どもが形成する素朴なアイデンティティの様態—Wakuの場合—. 数学教育学論究, 95, 217-224.
- 高橋等. (2014). 小学生のもつ算数に関するアイデンティティ — 二年生時から三年生時までの一貫性のあるものの特徴について —. 数学教育学論究, 96, 97-104.
- 高橋等. (2015). 或る小学生のもつ算数に関するアイデンティティ—情意的要素を中心としたアイデンティティの連関性と学習観の転換—. 日本数学教育学会誌, 97, 12, 4-15.
- Wood, M. B. (2013). Mathematical micro-identities: Moment-to-moment positioning and learning in a fourth-grade classroom. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44, 5, 775-808.

ディスコースの観点からの算数の授業の検討

－小学校 2 年「分数」の場合－

布川 和彦

上越教育大学

笠井 将人

上越教育大学附属小学校

1. はじめに

算数・数学の学習をディスコースの観点 (Sfard, 2008) から捉えようとする試みが行われてきている。この観点からは、数学の学習は「子どもの日常のディスコースを修正し」「数学的ディスコースを個人が自分のものにする」こと (Sfard, 2007, p. 575) であり、「他者とだけでなく自己とも数学的なコミュニケーションができるようになる過程」 (p. 575) とされる。教師は学習対象に関わる「明確な会話に学習者を引き込む (engage)」 (Nachlieli & Tabach, 2012, p. 24) ことが重要となる。

こうした観点は負の数や図形についての授業の分析 (Sfard, 2007) や関数の授業 (Nachlieli & Tabach, 2012; Viirman, 2011) の分析に用いられてきている。さらには、学習者が課題について考える際の思考過程を詳細に分析することに用いた研究も見られる (Wang, 2015)。

分数についても、それを数という数学の対象として扱い、操作をしていくようなディスコースを想定し、学習者がそこに参加し、他者や自己とそのディスコースにふさわしい仕方でのコミュニケーションができるようになることとして、分数の学習を考えることができる (布川, 2016b)。さらに、分数の演算等が行われず、分数を必ずしも数として捉える必要がない小学校 2 年の分数の学習であっても、分数が数として扱われる 3 年の学習への移行 (布川, 2016a) のための重要な前提要件を成す (布川, 2019) という点から、また低学年の子

どもたちには分数は日常的なものではなく、分数が話題にできるためには、彼らの日常のディスコースを数学的ディスコースへと変容させる必要があるという点からも、2 年生には 2 年生なりの分数についてのディスコースを想定し、学習者がそこへ参加し、分数に関わるコミュニケーションができるように支援を行う、と考えることができる。

そこで本稿は、小学校 2 年の分数の学習に関わるディスコースを教科書をもとに検討するとともに、それを視点として実際の分数の授業を分析することで、授業に関わる示唆を得ることを目的とする。なお以下では、分割された 1 つ 1 つの部分を等分かどうかに関係なくピース (piece) と呼ぶことにする。

2. 想定されるディスコース

ここでは教科書が、小学校 2 年で期待される分数についてのディスコースを反映していると仮定し、教科書の語り方からそのディスコースを想定してみることにする。

授業が記録された学級で用いられていた教科書では、折り紙を縦線で半分にした分け方と対角線で半分にした分け方を示し、次のように分数が導入される：「同じ大きさに 2 こに分けた 1 こ分の大きさを、もとの大きさの『二分の一』といい、 $\frac{1}{2}$ と書きます」。続く問題では横長の長方形を縦線で 2 等分した図と横線で 2 等分した図を示し、「もとの大きさの $\frac{1}{2}$ だけ色を塗りましょう」と問う。

次に折り紙を3通りの4等(2本の対角線、十字の縦横1本ずつの線、縦線3本)が示され、それぞれについて、元の折り紙の大きさが1つのピースの4個分であることを確認した後、1/4が導入される：「同じ大きさに4こに分けた1こ分の大きさを、もとの大きさの『四分の一』といい、1/4と書きます」。そして「1/2、1/4のような数を分数といいます」として「分数」の用語も導入される。問題では折り紙を十字に4等分した図と縦線で4等分した図が示され「もとの大きさの1/4だけ色をぬりましょう」と問うている。

続く問題では、折り紙を縦線で半分にすることを3回繰り返して8等分し、それを開き、一番左端のピースが塗られた図が扱われる。そして、このように「同じ大きさになるように」分けた時「色のついたところは、もとのおり紙の大きさの何分の一でしょうか」を考えさせる。最後の問題では、横線で8等分された折り紙、水平から45°傾けられた少し小さめの正方形を垂直と水平の線分で4等分した図、円を斜めの直径2本で4等分した図のそれぞれで1つのピースが塗られたものが示され、「色のついたところは、もとの大きさの何分の一でしょうか」と問う。

ここでは、一貫して「大きさ」を話題としている。1/2や1/4の導入では「1こ分の大きさ」を話題としている⁹⁾。また「もとの大きさの1/2」や「もとの大きさの何分の一」という語り方が見られるが、「もとの大きさの1/2」は「同じ大きさに2こに分けた1こ分の大きさ」のことであったので、この点からも大きさが話題になっていると考えられる。

田村(1978)は量に対する m 等分変換と n 倍変換の合成として分数 n/m を考え、またこれを分数倍変換と呼んでいる。この考えに倣うならば「もとの大きさの1/2」とは、元の大きさに分数倍変換1/2を施した時に得られる大きさを意味すると解釈できる。またこの

時の1/2は元の大きさに作用する分数倍変換という操作であり、また操作の結果や効果(Pegg & Tall, 2005)に着目するならば、元の大きさと操作で得られた大きさとの関係である割合や比を表すとも考えられる。後で「量に関する“倍”ないし“比”」(宮下, 1991)を取り出し、計算などの対象にしていく²⁾が、小学校2年では分数を操作の対象とはせず、分数という変換を何らかの大きさに施してできる大きさだけを話題とし、そこから逆に変換や関係としての分数を間接的に扱うようにしているものと考えられる。

さらに「同じ大きさに2こに分けた1こ分の大きさをもとの大きさの1/2という」という定義を見ると、「1こ分の大きさ」「もとの大きさ」「1/2」という3つの要素を含んでいる。そして最初の2つが1/2という分数倍変換の入力と出力である大きさを示しているので、この定義では2量に関係づけることが話題とされていることになる。こうした語り方が単元を通して用いられていることから、2年の学習では、2量がどう関係づけられているかを話題にすることが想定されていると考えられる。

これは教科書の図の提示とも整合する。単元冒頭では折り紙の大きさが元の大きさとされるが、続く問題では横長の長方形が扱われる。長方形は折り紙と同じ面積とは限らないので折り紙の半分の面積自体が問題なのではなく、元の大きさと1/2に当たる大きさとの関係を話題とし、一種の「比率理解」(糸井, 2008)や分数の「等値判断」(糸井, 2016)を求めていると考えられる。同様に、最後の問題で45°傾けられた正方形や円はそれまで示してきた折り紙より面積が小さいことから、大きさ自体ではなく元の大きさと1つのピースの大きさの関係を話題にし、両者の間に見られるパターンの記述(布川, 2019)を行うことが想定されていると考えられる。

以上の教科書の提示の仕方に基づく、2年の分数の授業では2つの大きさの関係が話題となるので、ディスコースにおける4つの要素 (Sfard, 2008)は次のように想定される。

用語の利用(word use)については「大きさ」という用語が中心的に用いられる。特に教科書のように折り紙を分けるという場面では、異なる半分の仕方が $1/2$ として同等に扱われていることから、「大きさ」は面積を指して用いられることになる。またピースの「1この大きさ」ではなく「1こ分の大きさ」とされている。「1こ分」を「1こに相当する」といった意味と解釈すると、特定の1つのピースの大きさというよりも、等分でできたピースに共通した抽象化された大きさを、「1こ分の大きさ」は意味すると捉えることができる。

$1/2$ 、 $1/4$ などの分数は、上での検討のように、元の大きさに作用する操作やその入力と出力の間の関係を表すものとなる。ただし2年ではある大きさに分数を施した結果に着目するとすれば、「もとの大きさの $1/2$ 」のように、格助詞「の」も今のディスコースにおいて重要な用語と言える。

視覚的媒介物(visual mediators)としては、折り紙に当たる正方形や長方形に分割の線が記入された図がある。また実際に折り紙等を渡して操作をさせる場合には、折り紙も視覚的媒介物となる。ただしそれは「ディスコースの参加者が彼らの話の対象を特定する」ものであり(Sfard, 2008, p. 147)、「ディスコースの対象の視覚的実現」(p. 302)でなければならない。それには媒介物をスキャンする(scanning)仕方(p. 134)が参加者間で共有されている必要もあろう。今の分数のディスコースにおいては、視覚的媒介物は2つの大きさの関係に着目する仕方ですキャンされる必要がある。また「 $1/2$ 」といったシンボルも分数の授業での視覚的媒介物に含まれると考えられる。

授業で2つの大きさの関係づけが話題となるならば、ルーチン(routines)として大きさの関係を確認をする行為のパターンが想定される。2年では等分されているという事実に基づく関係づけが主に行われるとすれば、元の大きさが等分されているか、またいくつに等分されているかを確認する行為のパターンが、今のディスコースのルーチンとして想定される。また教科書の $1/4$ の場合のように、分割で得られたピースにより元の大きさを測り直すという、ある種の測定のルーチンが行われる可能性も考えられる。

分数が2つの大きさに関係づけることから、2つの大きさの関係について述べたナラティブ(narratives)が中心となると想定される。つまり上述の、着目している大きさ、元となる大きさ、両者をつなぐ変換あるいは関係という3つの要素を含むナラティブである。

そうしたナラティブが、「世界の状態を反映」(Sfard, 2008, p. 298)した真の、承認されたナラティブ(endorsed narratives)となるためには、大きさ間の関係を保証する発話を伴うと予想される。そこでこの承認されたナラティブは、上述の大きさ間の関係を確認するためのルーチンを含むと想定される。

なお上述の測定のルーチンを含むナラティブが承認されるためには、元の大きさを n 等分することと、ピースで元の大きさを測ると n 個分になっていることが同じであること、つまり n 等分変換と n 倍変換の可逆性が共有されている必要がある。

3. 授業の概要

授業は小学校2年の1クラスで行われ、第2著者が授業者となり、第1著者がこれをビデオカメラを用いて記録した。

授業は全9時間であった。第1時は折り紙を半分にする活動を行ったが、子どもの中に半分の半分に折った子がいたことから、両者

の違いを併せて考えた。第2時は前時を受けて $1/2$ と $1/4$ を導入した。この際、元の大きさを明確にした表記を意図して「個別単位」

(中西と西村, 2016) を伴った「 $1/2$ まい」や「 $1/4$ まい」とした。第2時後半から第5時前半までは折り紙を折って分数を探し、見つけたものについてクラス全体で話し合うことが何度か行われた。第5時後半から第7時は教室や校内にあるものから分数を探し、分数カードに記録した。カードには選んだものの絵、それを表す分数、どうしてその分数になるかの説明を書く欄があった。第8時前半は子どもの作った分数カード12枚を用い、絵を見て同じ分数になるならとという神経衰弱を行った。第8時後半から第9時はとってよいか問題となったカードについて話し合い、元の大きさや等分の考えを確認した。

こうした授業を通して、2年生は $1/2$, $1/4$, $1/8$ だけでなく、子どもにとって困難性が大きいとされる $1/3$ (糸井ら, 2011)、さらには $1/16$, $1/5$, $1/40$ などの分数も自然に考えていた。また身の回りのものを分数で表す活動を通して、指導要領解説で新たに触れられている12個の $1/2$ のような、ものの個数を元の大きさとする分数についても考えていた。

他方で、第6時になっても右のような図が示された際に $1/6$ と答える子が見られた。あるいは第6時後半でも、大きな3



図1： $1/6$ とした図

段の棚を「 $1/3$ たな」と表すものの、個別単位の「たな」を分数全体ではなく分母の3の横に付け、どの部分が $1/3$ の大きさかと問われると棚全体を指で囲み、さらに説明には「3個が1個あるから $1/3$ 」と書いているような子も見られた。

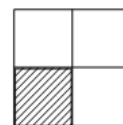
こうした子は分数についてのディスコースを「自分のものに」できていないと考え、教師が分数についての「明確な会話に学習者

を引き込む」ことに不十分な点があったのではないかと推測される。そこで以下では、いくつかの特徴的な場面を取り上げ、分数についてのディスコースの観点から分析を行う。

4. ディスコースの点で特徴的な場面

(1) 半分の吟味と分数の導入

第1時で折り紙を配布して半分を作らせたところ、縦に2等分したものと対角線で2等分したものが出された。ただし子どもは折っただけだったので、黒板に貼る際に教師が折れ線に色を付け、1つ分に当たるピースをそれぞれ塗った。さらに図



2のような半分の半分が発表された。なお左下の

ピースは教師に促されて 図2：半分の半分 子どもが塗った。これが半分かが問題となり、教師は「半分なの？」と板書して考えさせた。意見をきくと、半分だとする子は、半分に折ることを繰り返していることを指摘した。半分ではないとする子は半分の長方形をかい「半分はこういう形だから」としたり、「半分って同じ量だと思う」としたり、2回折ると四角が4つになることを指摘したりした。

教師は「おり紙1まいの」を板書に追加し、「おり紙1まいの半分なの？」として、半分とはどういうことかを尋ねた。指名された子は折り紙を縦に2つに折って開いた。教師は「こうやったら同じ」と確認した。次の子が1回折った半分と2回折った半分に言及したことから、教師は図2を指し「このまま見たら半分じゃないんだよね」「半分は同じ量だよ、同じ大きさだよって言ってくれてるよね、これ[図2]はどう？赤[塗った部分]と白は同じ大きさ？」と問うた。子どもたちが「違う」と言い、図2は半分と言えないことが確認された。最後に教師は半分の半分が折り紙1枚の半分ではないことを再度確認した。

第2時冒頭で2枚や1枚の言い方と対比さ

せ、「1枚を半分になっているから $\frac{1}{2}$ 枚」として分数を導入した。そして「1まいのおり紙を2つに分けた1つ分」と板書した。同様に半分の半分について「1まいのおり紙を4つに分けた1つ分」と板書し、「この大きさのことを」として「 $\frac{1}{4}$ まい」と板書した。また半分の2通りの折り方に対して「こうやってやる $\frac{1}{2}$ 枚もあればこうやってやる $\frac{1}{2}$ 枚もあるんだね」と説明もしていた。

(2) 等分ではない事例についての検討

第2時中程で教師は図3のような $\frac{1}{4}$ だという分割を示し、等分について話題にした。

「これって $\frac{1}{4}$ 枚?」と問い、考えさせた後で意見を聞くと、上側の幅が「大きく」て下側が「小さい」こと、折



図3：「 $\frac{1}{4}$ 枚?」

り紙が真ん中で折られていないことが発表された。教師は「半分に分けてない」と板書し、半分に分けてないとはどういうことかと問うと、折り線が真ん中になく、縦線がないと考えると半分になっていないことが指摘された。ここから子どもたちは $\frac{1}{4}$ ではないとしたので、教師は $\frac{1}{4}$ にするにはどうしたらよいかを問うた。ある子が線を真ん中に引くとしたのを受け、教師が「ぴったり重なる」ように「折り曲げたところで線引くとききれいな $\frac{1}{4}$ に」と言うと、子どもは「なる」と発話した。また第1時の「同じ量」という考え方を想起させ「同じりょう」と板書した。

その後、自分で $\frac{1}{4}$ を考える活動が行われ、子どもは図4左や中の考えを教師に示した。記録者に話しかけた子は図4右のような棚を考えると $\frac{1}{6}$ ができると話していた。他方で、

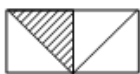
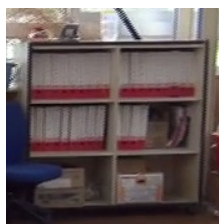


図4：新たな $\frac{1}{4}$ と $\frac{1}{6}$



この活動の際に、図5のように、等分がされていなかったり、どのピースも塗られていない事例も見られた。最後に教師がいくつかの考えを紹介し、確認をしたが、その際、教師は「これ1枚のうちの [塗った部分を指し]ここ $\frac{1}{4}$ 」としたり、「4つに分けた1つ分」として確認した。

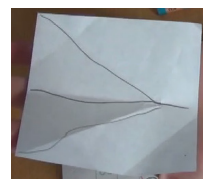


図5：不等分の4分割

(3) 等分の再確認と図形の変形

第3時冒頭で教師は図6の4つの折り紙を黒板に貼り、「この4つは分数でしょうか、分数じゃないでしょうか、分数なら何分の何でしょうか」と問うた。

全体での確認では一番左に対し子どもは「 $\frac{1}{2}$ 」とだけ発話し、教師が「大きい1枚の折り紙を2つに分けた1つ分だから $\frac{1}{2}$ なんだね」と補足し、「 $\frac{1}{2}$ まい」と板書した。2番目について教師は「折り紙を2個に分けた

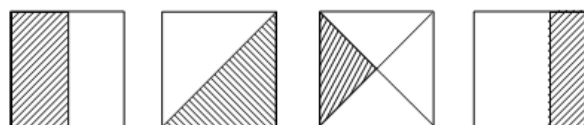


図6：分数かどうかの吟味

うちの何個塗ってある?」「1つだけ塗ってある」「2個に分けた1つ分だから $\frac{1}{2}$ だよ」と確認した。3番目について子どもから「だって4個と1個」との声が出た。また指名された子は「だって折ってあるから」と答え、さらに「色が1個で塗ってない数が4個ある」とした。次の子は塗った三角形を指し「この三角が4個あるから」と、その次の子は「1枚の折り紙が4個に[聴取不能]」と発話し、教師は「1まいのおり紙が4こに切れている」と板書した。教師が「ただの $\frac{1}{4}$ じゃなくて」と問うと子どもたちから「まい」との発話が聞こえた。教師は「 $\frac{1}{4}$ まい」の板書の分母と分子を指し「これ分数、4つに分けた1つ分という意味なんだよ、[「まい」を指で囲み]1枚の折り紙を[分母を指し]4つに

分けた[分子を指し]1つ分、これ分数って言います」と説明した。

図6右端が1/2ではない理由としてノートには、次のようなことが書かれていた：「大きさがちがうから」；「半分になってねーぞ」；「左だけ大きくて右だけ小さいからおなじりょうじゃない」；「まっぶたつじゃないから」。確認の際には「[2つの部分の境目が]この線[中央の線]にぴったりじゃないから」や「形が違うから」といった意見が出た。教師は1/2と言えないことは確認したが、大きさを確認する行為は見られなかった。

第3時中ほどで図7の折り紙が提示される

と2/4と発話した子もいたが、他に2/2や1/4とした子もいた。1/4の理



由を説明した子は「4個 図7：2/4の折り紙あるでしょ、それが1つ分あるから」とし、1つ分を確認すると「それが1枚」と答えた。別の子は「1枚の折り紙が4こに分けてあるから」1/4だとした。2/4の理由として「今までは1箇所しかなかったけど、これは2箇所あるから2/4だと思う」「この折り紙は4個に折って、そのうちの2個塗ってあるから2/4だと思う」と述べた。教師は1/2の意味を「1枚の折り紙を2個に分けた1つ分だよ」と確認してから、図6の左から3番目で「これ[1/4]は、[4つの三角形を順に指し]4個に分けた[塗った三角形を指し]1つ分だな」と説明した。その上で図7を指し「じゃあこれは、[小さい4つの正方形を順に指し]4個に分けた、何個ある？」と問うと、子どもたちから「2つ分」の発話があり、そこから教師は「これは2/4って言います」とまとめた。

さらに図7について1/2とした人がいたことを紹介した。1/2と言える理由について、子どもたちは最初「塗ったところが2個あってそれが1枚あるから」「塗ってあるところが2個あるから」「[塗ったところが]2つある

から[縦の2等分線を手でなぞる]これ2つに分けた」などとした。教師が折り紙を縦に2等分してできる長方形を見せて1/2であることを確認してから、図6を指し「どれかの形にできないかな」と問うたところ、左下の塗った部分を右下に移動すると図6左端になるとの意見が出た。「ほんとに？」と教師が確認すると子どもたちは「そうだよ」と承認した。教師は折り紙を切って確認をし、「これも1/2」と板書した。

教師は図8も提示したが、多くの子が4/8と答



え、さらに1/2の「見え 図8：4/8の折り紙た」理由を、塗った部分

を一方に移動するとして説明した。教師は折り紙を切って変形を確認し、「こうやってやると、また一緒の形になるってこと」と説明した。最後に「形がちがっても大きさが同じだったら同じ分数になる」と板書し、変形後の折り紙を指し「形は違うんだけども同じ分数、1/2になるよってね」と説明した。

なお、次の第4時で折り紙を用いて分数を見つける活動を行った際、等分になっていない事例が多く見られた。例えば、図9左端を作った子は1/3と考えた。また中央を作った子は1/4とし、記録者がどこかを塗るように言うと右端のように塗った。また折り紙を

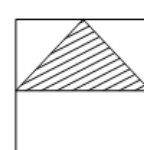


図9：等分が意識されない場合

4×4に16等分して右下1マスを塗った上で、教師に「16分の何？」と尋ねた子も見られた。他方で折り紙を図2のように十字に4等分し、3マスを塗って1/3とした子もあった。

さらに第4時から、「おりがみをもっとちっちゃくしたかった」という感想に見られる、折り紙をできるだけ細かく分割し、分母

を大きくしようとする行為が多く見られた。折り紙に線を引いて分割する子も見られたが、その際にピースの大きさを揃えることには注意が向けられていないようであった。

(4) 形は違うものが混在する等分の確認

第5時冒頭で教師が図10左を示すと、教師が何か問う前に子どもたちから「分数になるよ」「分数じゃない」の両方の意見が出た。

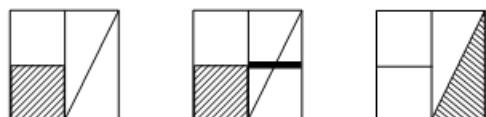


図10：異なる形を含む“等分”

分数でないとする理由として「同じ量じゃない」ことや形が違うことがあげられた。分数だという理由としては、図10中央のように線を引けばよいこと、ピースが4つあることがあげられた。教師はどのピースも折り紙の半分の半分の大きさであることを確認した。しかし子どもたちが納得したように見えず、教師は図10右も示して「この分数とこの分数は同じかな」と問うた。子どもたちは同じとし、理由として左の図の右半分と右の図の左半分を入れ換えることを述べた。「[小さい正方形と三角形を指し]この大きさとの大きさって同じ？」とさらに問うが、子どもたちの反応はなかった。教師は再度、どちらも半分の半分なので大きさは同じだと確認した。

(5) 等分がわかる形への変形

第6時前半で教師が図1を示すと、何か問われる前に1/6とする子が見られた。他方で「これいけないよ、これ形違うじゃん」「これ半分だったらできるけどさ、これ半分じゃないからできない」と反論する子もいた。教師が「何分の何々、分数を書いて下さい」と問うと、「分数じゃない」との発話があった。分数にならないとした子どもは「小さいの4つでしょ、大きいのが2つ」などと説明し、教師も「大きさがちがう」と板書した。

教師が「大きさが違うからこれは分数に表せない？」と確認すると「変えればできる」

との意見や、図1に線を加えて図11左のようにするとの意見が出された。教師は「こうしたら分数じゃないのを分数にできるってこと？」と確認した。これに対し子どもたちは「同じかずになる」「かずが同じになる」と答えた。また分数が2/8であるとの意見も出された。教師は「この形、ここに線を引くと分数に見えるってことなんだね」とまとめた。さらに図11中央を提示しすると4/8という発話があったが、教師が「違う分数も見つけてた」として図11右のように直すと、4/4と発話した子が数名いた。最終的には1/2になることを確認し、「全然ばらばらなんだけどこれ[図11右]も1/2に見えるし」「[図11左を指し]この線がなかったら分数に見えないものも分数に見えるってこと」とまとめた。

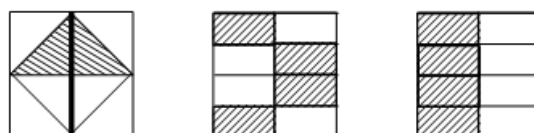


図11：図形の変形

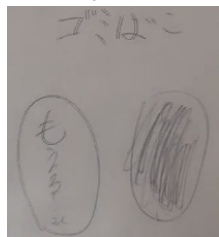
次の第6時後半で、教室の中のを題材に分数を探し、分数カードに記録したが、第3節で述べたように、3段に分かれた棚の絵をかいて「3個が1個あるから1/3」とするものがあった。他にも2枚の扉の絵で2枚とも塗り1/2としたり、3列6段に分かれた棚の絵をかいて3/6とする子も見られた。さらに円の中にミカンの房のような8個の穴をかき、円を横線で2つに分けて4/8とした子がいたが、その説明は「8個のあなを4個に分けた1つ分の大きさ」であった。同様に、10個の引出しのついたケースの絵で上半分の5個を塗った絵をかいて、5/10と書いた子もあった。

(6) 身の回りのものに関わる確認

第6時後半と第7時前半で教室や校内にあるものを題材に分数を探し、分数カードに記録した。教師は同じ大きさであることに注意を向け、絵の着目した部分に色を塗ることも確認した。第7時後半では子どもの書いた分

数カードをもとに学習が行われた。

まずゴミ箱の絵(図12)が示され、ここにどのような分数を見つけたかを全員が考えた。分数が



$1/2$ であることはすぐに共有され、その説明とし 図12: ゴミ箱の図で「1つのごみばこ2こ分の $1/2$ の大きさ」「もえるごみともえないごみの2つの $1/2$ の大きさ」という意見が発表された。

次に週予定表のホワイトボード(図13右)の絵(図13左)が示され、これに対して $1/5$ 、 $1/15$ 、 $3/15$ 、 $4/20$ という4つの意見が出された。 $4/20$ は最上段の日と曜日を書く欄も含めて考えたものであったが、その欄の高さが他のマスの部分より明らかに低いことから、マスの大きさの違いが確認され、 $4/20$ の考えは適切ではないとして合意が得られた。

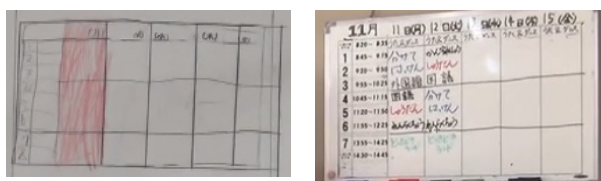


図13: 週予定表のホワイトボードとその絵

$3/15$ は適切とする子どもが、教師が板書した絵(図14)の下3段の



15マスを数えたことを受け、教師はその部分を黄色で囲った。その後それらのマスが同じ

図14: 15マスの部分大きさであるのかが問題となり、実際のホワイトボードの前に何人かの子どもが集まり、調べた。結局 $1/5$ が適切ということにまとまり、教師は「何を1としたの?」「この[分子]1って何?」と問うた。ある子が図13左の塗られた部分を囲むと、教師は5列それぞれを青く囲み「この大きさが、5つあるうちの1つ分の大きさだから $1/5$ はあってる」とした。そして「ホワイトボードの5日かんの $1/5$ の大きさ」と板書し「ホワイトボードの5

日かん」の部分が大切であることを説明した。

なお子どもの説明では次が見られた: 「ホワイトボードのよていをいれるますのぎょう」; 「ホワイトボード5日分」; 「5このかたまりが1つぶん」; 「1つのホワイトボード5こ分」; 「ボードを5この分 $1/5$ の大きさ」; 「1つのホワイトボード5こ分の $1/5$ の大きさ」; 「ホワイトボード1つを5つに分けた1つ分の $1/5$ の大きさ」。

(8) 元の大きさの多様性

第8時で分数カードによる神経衰弱のルールを説明するため、教師はりんごの半分が塗られた絵を示した。子どもは「 $1/2$ 」とだけ答えたので、教師は「何の?」と確認をし「りんご1つの $1/2$ の大きさ」と板書した。次に折り紙の半分が塗られた絵を示した際も子どもは「 $1/2$ 」とだけ答えたので、教師は折り紙1枚を折ったことを補足し「おり紙1まいの $1/2$ の大きさ」と板書した。

授業後半で図15左のフロアケースとそれが4つ並んだものを取り上げた2枚のカードについて、同じ分数と考えられるかが話し合われた。教師が左側の絵を指し「これ何分の何て見えますか」と問うと「 $1/10$ 」との反応があったので、教師は「10個に分けた1つ分だから $1/10$ ってことね」と言い、「 $1/10$ の大きさ」と板書した。



図15: フロアケースとその絵

右の絵についてはある子が「40個に分けた1つ分だから $1/40$ 」と発話したのを受け、教師は「 $1/40$ の大きさ」と板書した。また $1/10$ の絵で上5段だけを考えると $1/5$ だとする子があり、教師は「ロッカーの半分の $1/5$ 」と

板書した。さらに右の絵でも4列のうち1列だけ見れば $1/10$ だとする子があった。教師は「いろいろな分数が見える」と板書し、「形が違って同じ分数に見えたり、1つの中でもいろんな分数が見えたりして」とまとめた。

第9時で再度、これらの絵が話題にされた際、「引出しの付いてるボックスのぜーんぶの $1/10$ 」「これでっかいの1つ見ると」「これでっかいの2組囲んである」「ここだけだったら $1/20$ に見えると」などと元の大きさに当たる部分に子どもたちの注意を向けた。さらに「何を20個に分けてるの？」などとも問うた。最終的に教師は「何を全部で見ているかによって見える分数は違う」とまとめた。

5. ディスコースの観点から見た授業の特徴

(1) 分数に関わるルーチン

分数の単元では元の大きさが等分されているか、等分されているとすればいくつに分けられているかを確認する行為や、あるピースで元の大きさを測定する行為がルーチンとして確立することが期待されていた。

いくつに分かれているかを確認する行為と等分されているかの確認は、第1時で半分に折った折り紙と図2を対比する中で現れた。折り紙を半分にする操作やその結果として得られる形に基づき説明する者も見られたが、ある子の「同じ量」への言及から2つのピースの大きさ間の関係へと話題が移り、等分になっているかの確認が明示的に実行された。また第2時で図3を検討した際には、この「同じ量」という用語が想起された。

この後、単元を通して、ピースの大きさが異なる場合には、見た目に基づいて大きさが等しくないとして用語「大きさ」の使用を伴うナラティブが生成され、それがクラスで承認されていた。

例えば第6時で図1が「分数じゃない」と

する子は、「小さいの4つでしょ、大きいのが2つ」と、見た目の大きさの違いに基づくナラティブを構成し、クラスで承認された。また第7時でホワイトボードが取り上げられ、 $4/20$ は適切でないとの意見が出された際も、欄の幅の違いからマス目の大きさの違いが確認され、その説明により $4/20$ は棄却された。

他方でピースの大きさが同じという場合は、等分かを確認する行為が明示的には実行されない場合が多かった。例えば第3時で図7を検討した場面では、塗った部分の大きさと塗られていない部分の大きさが等しいことを直接確認するのではなく、ピースの移動により、図6左端の $1/2$ についての典型的な形の配列(arrangement) (Simon, 2006)への変形に基づくナラティブが生成され、それが承認されることで $1/2$ という結論が共有された。第3時の図8、第5時の図10左端、第6時の図1や図11中央の場合についても同様であった。さらに第8時で分数カードによる神経衰弱をした際、図16のカードを $1/2$ のカードと一緒にとってよ

いかが議論になると、図16の形の配置を換えて図6左端と同様にすると
のナラティブが承認され、 $1/2$ と一緒にしてよ
図16 : $4/8$ のカード
いことが共有された。

Simon(2006)は、合同ではない図形により4等分された場合を用いた課題を取り上げ、これで $1/4$ と判断できるには、分数が形の配列にではなく大きさの関係に関わるものであることを理解していなければならないと述べている(p. 368)。図10左端の場合が $1/4$ で表せることを、横線を加えて(図10中央)図2のような見慣れた配列に直すというナラティブにより子どもたちが説明したことは、大きさに基づく判断になっていなかった可能性を示唆する。

確かに第2時の図3についての議論では、「ぴったり重なる」ことの確認が行われていた。しかしそれは半分に折る真ん中の線を見つけようとして行われたため、直前で「同じ量」が想起されながらも、「『ぴったり重なる』のだから『同じ量』である」といったナラティブは明確な形では生成されなかった。結果として、等分を確認する手続きとして明示的には実行されなかった。

図3の検討に続く第2時後半の活動で子どもたちが、図4のような考え方をしたり、同じ大きさに区切られた棚から1/6を考えようとしていたことは、等分に注意が向きつつあったことを示唆する。しかし他方で図5のように明らかに等分ではないものを分数と関連づけている事例も多く見られたことから、等分かを確認する行為がルーチンと言える程には確立されていなかったと言えよう。さらに図4についても、折り方や見た目から等分が自明なために、Yoshida & Sawano (2002)が指摘するように、等分を確認する必要性が曖昧になった可能性も考えられる。

実際、第4時でも図9に見られるように、等分かを確認する行為を伴わない事例が多く見られた。特に分母を大きくしようとする試みでは等分に注意が向けられず、しかも他の子がそれを指摘する様子も見られなかった。

このように、等分かを確認するルーチンが確立されず、等分を保証することに言及していないナラティブでも承認されていたことが、第6時になっても、分数について自己とのコミュニケーションを行う際に、図1に見られるような、等分かの確認を欠いた状態を生み出したと考えられる。

なお小学校2年生の場合には、大きさが同じであることを比べるルーチンとして、1年の広さ比で学習したものしかない点には、注意が必要であろう。例えば、図10で小さい正方形のピースと直角三角形のピースの大

きを比べようとした際に、一方を他方に等積変形することを既習とは想定しにくい。実際、この2種類のピースについて「同じ量じゃない」という意見が出され、また教師は「この大きさとこの大きさが同じ？」と問題提起をしたが、これら2つの大きさを直接比べることは授業では行われていない。

この際、教師は2種類のピースがどちらも1枚の折り紙の半分の半分の大きさであることから、これらが同じ大きさであることを説明した。しかし Simon ら (2004)が、正方形を縦線で半分にした時の1つのピースと横線で半分にした時の1つのピースについて、どちらも半分だと認めながら、一方が他方より大きいと考えた子どもが多かったと報告している (p. 315) ことを想起するならば、半分の半分であることに基づき同じ大きさであるとするナラティブが、子どもたちから承認されたと限定しない。2年の学習において等分かの確認のルーチンを検討する際は、こうした大きさを比較する行為のレパトリーの少なさも考慮する必要がある。

第2時の最後に、等分の意識化のために分数として表せる場合とそうでない場合について感想を書かせた際、「ちがいがあります。それはかたちです」とした子があった。合同から大きさが等しいことまでを含む考えなのか、単に形の配列に基づいているのか、その区別の難しさの問題もここには見られる。

(2) 3つの要素を含むナラティブ

第1時で半分を考えた際、教師は半分に折った一方のピースに色を塗ったり、図2で着目しているピースを子どもに塗らせたりした。また話し合いを通して「折り紙の1まいの」半分なのかの注意を向けるなどしており、3つの要素が明示的なナラティブとなっていた。第2時冒頭で分数を導入する際にも「1/2まい」について「1まいのおり紙を2つに分けた1つ分」と板書するなど、元となる1枚

の折り紙と「1つ分」との関わりで $\frac{1}{2}$ についてのナラティブが生成された。子どもたちの考えの確認も、「これ1枚のうちの、ここ $\frac{1}{4}$ 」などと、元の大きさの「1枚」、着目する大きさの「ここ」、両者の関係である $\frac{1}{4}$ の3つの要素を含むナラティブとなっていた。

第3時で図6に関わる確認の際にも、子どもは「 $\frac{1}{2}$ 」と2つの要素が欠落した発話をするが、教師は「大きい1枚の折り紙を2つに分けた1つ分だから $\frac{1}{2}$ なんだね」と3つの要素を含むナラティブとなるよう補足していた。図6の左から3番目についても「1枚の折り紙を4つに分けた1つ分」として $\frac{1}{4}$ を確認しており、分数が2量をどのように関係づけているかに言及している。

単元後半の第7時でも、分数カードを記録する際の注意として、教師は同じ大きさである点に注意して考えること、絵をかく際に着目した部分に色を塗ることを伝えた。こうした指示もあり、図12について考えた際の子どもたちの説明は「1つのごみばこ2こ分の $\frac{1}{2}$ の大きさ」「もえるごみともえないごみの2つの $\frac{1}{2}$ の大きさ」などとなっており、右側の塗られたゴミ箱が、2個のゴミ箱を元にした時に、その $\frac{1}{2}$ に当たるとして、3つの要素を含んでいた。

さらに第7時でホワイトボードが取り上げられた際には、子どもが1つ分の大きさを塗り、教師が「この大きさが、5つあるうちの1つ分の大きさだから $\frac{1}{5}$ はあってる」として、着目している「この大きさ」、元の大きさである「5つある[枠]」、それらを関係づける $\frac{1}{5}$ という3つの要素を含むナラティブが生成された。教師は「ホワイトボードの5日かんの $\frac{1}{5}$ の大きさ」と板書した上で「ホワイトボードの5日かん」の部分が大切と、元の大きさの重要性を強調し、3つの要素に注意を向けていた。

第9時で図15の絵を取り上げた際には「引

出しの付いてるボックスのぜーんぶの $\frac{1}{10}$ 」や「これでっかいの1つ見ると」「これでっかいの2組囲んである」「ここだけだったら $\frac{1}{20}$ に見える」などと、元の大きさに当たる部分に子どもの注意を向けている。「何を20個に分けてるの?」とも問い、最終的に教師は「何を全部で見ているかによって見える分数は違う」とまとめている。着目している1つの引出しは絵で塗られていることもあり、それへの言及は明示的ではないが、元の大きさという要素との関わりで分数を説明するナラティブを確立しようとの意図が伺える。

このように単元を通して3つの要素を含むナラティブが生成されていたが、しかし常にそうしたナラティブとなっていたわけではなく、いくつかの要素が明示的でないナラティブも多く見られた。

例えば、第2時において子どもたちの考えたものを確認した際、「これ1枚のうちの、ここ $\frac{1}{4}$ 」と3つの要素を含むナラティブを生成する一方で、直後の「4つに分けた1つ分」という発話では何を分けたかは明示されず、元の大きさが含まれないことになる。

第3時で図6について問う際には、教師は「この4つは分数でしょうか、分数じゃないでしょうか、分数なら何分の何でしょうか」としたが、「この」が黒板に示された4枚の折り紙それぞれを指すとすれば、分数により関係づけられる2つの要素は明示的には言及されていないことになる。

第8時で引出しが10個あるフロアケースを取り上げた際は「10個に分けた1つ分だから $\frac{1}{10}$ ってことね」と言い、「 $\frac{1}{10}$ の大きさ」と板書した。ここでは、何を10個に分けたのか、つまり元の大きさに言及されないナラティブが生成されている。同様に、4列のフロアケースに対する「 $\frac{1}{40}$ の大きさ」との板書も、元の大きさは示されていない。10段の上5段だけを考えて $\frac{1}{5}$ とした考えに対しは

「ロッカーの半分の $1/5$ 」と板書しており、ここでは「ロッカーの半分」という元の大きさと格助詞「の」の使用が見られる。しかしその後で「いろいろな分数が見える」と板書し、「形が違って同じ分数に見えたり、1つの中でもいろんな分数が見えたりして」とまとめており、元の大きさのとり方により1つの引出しとの関係づけが変わり、それにより「いろんな分数」が見えるといった、3つの要素を含むナラティブにはなっていない。

こうしたいくつかの要素が曖昧なナラティブの方も繰り返されることで、この授業で生成すべきナラティブは3つの要素を含むべきであることが、曖昧になっていた可能性がある。その場合、授業で何を話題にしているかということ、あるいは分数が何を表すものかということも、曖昧になる。

例えば第2時に見られた図5ではどのピースも塗られていない。このようにどのピースも塗られていない事例が単元を通して見られたが、これは、1つ分の大きさが分数についてのナラティブに必要な要素であること、そのナラティブは2つの大きさがどのように関係づけられているかに関わるものであるとの理解が、十分でないことの現れとも考えられる。第4時で折り紙を 4×4 に16等分して右下1マス塗りながら、教師に「16分の何？」と尋ねた児童は、塗った1つのピースの大きさが分数とどのように関わるのかを理解していなかったと考えられる。

分数が何を表すのかが曖昧であると、分子と分母も関連づいたものとしては捉えられなくなる。第4時で折り紙を図2のように4等分し、3マス塗り、1/3とした子の場合、1/3で塗った3マスと塗っていない1マスを表したことがうかがえる。ここでは元の大きさは欠落し、また分数は折り紙の中に見える2種類の個数をそれぞれ記録したものとなっている。同様の理解は他の時間にも見られ、例

えば、第6時後半で3段の棚の絵をかいた子の「3個が1個あるから $1/3$ 」も、分母は棚が3段あること、分子の1は3段の棚が1個あることの記録と考えられる。2枚の扉を塗って $1/2$ としたものも、2が扉の枚数、1はそれが1組あることを記録した可能性がある。3列6段の棚に対する $3/6$ は列数と段数の記録である。8個の穴を線で区切って $4/8$ とした子では、自身の説明である「8個のあなを4個に分けた1つ分の大きさ」が分母と分子の関係を適切には反映しておらず、むしろ全体の個数と半分の個数を記録しているように見える。

第2節で見たように、小学校2年では分数を量に作用させ、それにより得られる量を話題にすることが期待されていた。授業では、3つの要素には触れていても、「大きさ」を扱っていることが不明確な場合も見られた。

確かに、第1時で図2を考えた際には、上述のように3つの要素に注意を向けるとともに、「半分は同じ量だよ、同じ大きさだよ」と大きさを明示的に話題としたり、第3時で図8や図9を考えた後のまとめで「形がちがっても大きさが同じだったら同じ分数になる」と大きさを明示的に話題とすることもあった。

しかし例えば、第2時最初で分数が導入される際に、教師は着目した大きさを「 $1/2$ まい」と表現し、また「この大きさのことを」と「大きさ」を話題にしながらも、板書では「1まいのおり紙を2つに分けた1つ分」としており、「1まいのおり紙」についても、「1つ分」についても用語「大きさ」の使用を伴わないナラティブを生成した。

第2時の図3の確認における「これ1枚のうちの、ここ $1/4$ 」や「4つに分けた1つ分」といった教師のナラティブ、あるいは第3時の図6の確認における「大きい1枚の折り紙を2つに分けた1つ分だから $1/2$ なんだね」

や「1枚の折り紙を4つに分けた1つ分」といったナラティブも「大きさ」を話題にしていることが明示的ではないものになっていた。個別単位も格助詞「の」の使用も伴っていないので、分数が元の大きさに作用していることも曖昧になっている。

以上より、分数に関わる3つの要素や、大きさを話題とすることに関わり、授業の中でそれらを明示的に含むナラティブも生成されていたものの、常にそうしたナラティブが生成されていたわけではなく、要素のいくつかが欠落したナラティブや、大きさを話題にしていることが明示的ではないナラティブも混じる形で生成されていたと言える。

分数についての期待されるディスコースにとって適切で、承認されうるナラティブを生成することは、教師のナラティブに一度触れればすぐにできるものではないと考えられる。実際、第3時で図6の検討をした際、教師は「大きい1枚の折り紙を2つに分けた1つ分だから $\frac{1}{2}$ なんだね」などと3つの要素を含むナラティブにより説明していたが、直後の子どもの発話は「4個と1個」「折ってあるから」「この三角が4個あるから」などと、3つの要素を含まないものとなっていた。また第3時の「こうゆうかたちは分数にはならない。もしかしたら $\frac{1}{3}$ になるかもしれないと考えました」とした感想は、図6右端を $\frac{1}{3}$ に対応させており、分数について一定の理解を示すが、「大きさ」という用語の使用は見られない。

適切なナラティブの生成がすぐにはできないとすれば、ディスコースにとって適切なナラティブに、子どもたちが単元を通して継続的に接することが必要となる。

なお、第7時で図12に対する子どもたちの説明は3つの要素を含んでいたが、この場合は、ゴミ箱の「大きさ」を問題にしているのではなく、個数に着目している。個数を扱う

ことは、平成29年告示の小学校学習指導要領の解説(文部科学省, 2018)でも2年の学習の例として載っている。しかし分数を分数倍変換として考える場合は、元となる「量空間」(田村, 1979)として別のものを想定していることになり、「大きさ」として個数を考えるディスコースが必要となる。また「大きさ」が面積であった際の分数と個数である分数とが統合されるディコースへと拡張される必要がある。

特に Cobb & Wheatley (1988)が「10個の1(ten ones)」と10を1つの合成単位とする「1個の10(one ten)」とを区別したことを想起するならば、何個かのものを元の大きさとして1つのものと見ることは、1枚の折り紙を1つのものと見ることもより難しい可能性がある。実際、第7時で学内のものから分数を探した際、4枚の鏡に対して「 $\frac{1}{4}$ まい」³⁾として「かがみ1つを4つに分けた1つ分の大きさ」と書いたり、「ハンガー4この4こ分の大きさ」として $\frac{1}{4}$ と書いたりしたのは、この難しさを示唆するものと言えよう。さらに第9時で教師は「何を全部で見ているか」としているが、「全体」の用語が分割を想起させるのに対し、「全部」は個別のものを集めることを想起させる。この点でも、ディスコースが単元前半のものから変容している可能性が考えられる。

第7時で取り上げたホワイトボードの場合、元の大きさとした部分は、面積ともとれ、また1日の予定を書く欄の5個分ともとれるため、説明の書き方も多様なものとなっていた。その中には「1つのホワイトボード5こ分の $\frac{1}{5}$ の大きさ」や「ホワイトボード1つを5つに分けた1つ分の $\frac{1}{5}$ の大きさ」のように、どの2つの量に着目して $\frac{1}{5}$ としているのかが不明な説明も見受けられる。元の大きさが子どもにとって捉えやすいもの、あるいは表現しやすいものを用いることも、子どもの生

成するナラティブが大きさに関わるようにするためには必要と考えられる。

(3) スキャンの仕方と3つの要素

3つの要素や用語「大きさ」の使用が発話の中に明示的に含まれないとしても、視覚的媒介物で補うことも考えられる。例えば、図3に対し「これって」として、あるいは図6に対し「この」として語り始めるとしても、この提示された折り紙という視覚的媒介物を、塗られた部分の大きさ、元の折り紙の大きさ、そしてそれら2つの量の間がどのように関連づけられるかに焦点を当てたスキャンの仕方により子どもたちが見ようとするならば、3つの要素を含むナラティブの生成につながり、期待される分数についてのディスコースの成立が可能となる。

しかし、逆にそうしたスキャンの仕方が子どもたちの間に確立しない場合、代わりに、折り紙の中に現れる形の配置に注意が向く可能性が考えられる。その結果として、3つの要素が明確ではないナラティブの生成が行われ、それが何度も承認されていくことで、分数について期待していたものとは異なるディスコースが構成されることになる。

前項で述べた3つの要素を含み、今のディスコースにとって適切なナラティブを子どもたちが生成したり、承認したりするようになることは、折り紙などの視覚的媒介物に対して、教師が期待するスキャンの仕方を子どもたちと共有できることと併せて考えていくことが必要と考えられる。

例えば、第3時最後に教師は図7や図8に関わり「形がちがっても大きさが同じだったら同じ分数になる」と板書した。ここでは形の配列としては図6左端の1/2の場合とは異なっているが、塗られた部分の大きさは同じであることに着目している。さらに3種類の折り紙では元の大きさが等しいこと(equal-whole, Yoshida & Sawano, 2002) から、元の大

きさと塗られた部分の大きさとは同じように関係づけられている。「これ」「この」の指示語により教師は、その関係づけを捉えるように折り紙をスキャンすることを期待したのであろう。しかし実際には図7でも図8でも、ピースの並べ替えにより形の配列を変えることに基づき、それらが1/2であるとするナラティブが生成され、承認された。子どもたちも感想に次のように書いていた：「こんなかたちに大へんしんしました。そうしたら同じ」；「クッキーのかたちのを1/2まいにしました」。これらは、形の配列に着目して折り紙をスキャンしており、3つの要素に着目したスキャンの仕方にはなっていない。(1)で述べたように、形の配置を換えることに基づくナラティブが単元終盤まで用いられたことは、こうしたスキャンの仕方における教師と児童の違いが、単元を通して残っていたことを示唆する。

この違いを埋めるためには、教師が適切なスキャンの仕方を明示的に示すことも必要であろう。例えば第5時で図1を図11左のように直した際、教師は「この形、ここに線を引くと分数に見えるってこと」と補足したが、ここでの「見える」が、ある種の形の配置が「見える」ようになることなのか、それとも大きさの関係が「見える」ようになることなのかは、明示的には語られなかった。また同じ場面で「こうしたら分数じゃないのを分数にできるってこと？」との教師の発話も見られたが、分数に「できる」とした場合、変形以前の状態では分数に「できない」ようにも聞こえ、折り紙をスキャンする際に形の配置の変化に注意が向きかねない。今のディスコースにとって適切なスキャンの仕方を反映したナラティブを教師が生成することは、学習者がスキャンの仕方を確立するために重要なことと考えられる。また適切なスキャンの仕方が生じやすいかという観点から、用いら

れる視覚的媒介物を検討することも必要であろう。例えば、3つの要素ができるだけ子どもに見えやすい視覚的媒介物の方が、適切なスキャンを行いやすいと考えられる。

6. おわりに

等分を確認するルーチンが確立されにくい場合に、完全には等分されていない図形について考えさせる課題(石井, 2011; Yashida & Sawano, 2002)を用いて、意図的に等分を行わせることも1つの手立てと考えられる。あるいはSimonら(2004)が提案するような、ピースに当たる短い長さの方を調整して、5つ分でちょうど与えられた長さになるようにするという課題も、「意図的に、授業の中で、部分と全体の相互参照を活動として位置づけること」(石井, 2011, p. 68)になろう。

しかしそうした特別な課題を取り上げることと同時に、着目している大きさや元の大きさ、そしてそれらがどのように関係づけられているかを、単元を通じて一貫して話題とし、3つの要素が明示的に示されたナラティブを教師が生成し続け、学習者も自然にそうしたナラティブを生成したり承認したりしようとするよう配慮することも、数学的ディスコースへの参加を促すという点からは、重要なことであると推測される。

なお、こうした議論は、期待されるディスコースとしてどのようなものを想定するかにより、異なってくる。仮に分数倍変換を直接取り上げることとし、例えば「元の大きさを同じ大きさに2こにわけ、その1つ分をとることを $1/2$ という」などとして分数を定義した場合には、期待されるディスコースも別のもとなろう。そこでは等分を確認するルーチンは同様に想定されるとしても、得られた大きさを元の大きさと関係づけて「もとの大きさの $1/2$ 」とするナラティブよりも、「もとの大きさを $1/2$ にする」操作を話題とした

ナラティブが主要なものとなると予想される。大切なのは、分数を定義するナラティブや他の承認されうるナラティブ、用語の使用、スキャンの仕方などが、期待されるディスコースと整合的だということである。

註および引用・参考文献

- 1) ただし「 $1/2$ と書きます」で何を $1/2$ と書くのかに関し、「同じ大きさに2こに分けた1こ分の大きさを」 $1/2$ と書くのだとすると、分数 $1/2$ 自体が大きさであるとも読める。
 - 2) 宮下(1991)は「生活に現れる分数は、つねに単位つきである」(p. 85)と指摘し、「それのみで自立しており、量に依存していない」分数を不用意に扱うことや、量の援用に関わる理論が欠落していることを問題だとしている。
 - 3) この時の「まい」も分母の「4」の横に書かれている。
- 石井康博. (2011). 異なる具体物による等分活動がインフォーマルな知識と方略に及ぼす影響. 日本教育工学会論文誌, 35 (1), 59-71.
- 糸井尚子. (2008). アナロジーによる幼児の比率理解：図形の形状が及ぼす効果. 発達心理学研究, 19 (3), 243-251.
- 糸井尚子. (2016). 初期の分数能力の発達に関わる要因. 東京学芸大学紀要・総合教育科学系, 67 (1), 93-102.
- 糸井尚子, 坂根佳奈, 藤村麻美. (2011). 分数を等分割図により作図する能力と分数学習課題の達成との関連. 科学教育研究, 35 (1), 27-37.
- 宮下英明. (1991). 分数の教材研究. 日本数学教育学会誌, 73 (4), 84-90.
- 文部科学省. (2018). 小学校学習指導要領解説(平成29年告示)算数編. 日本文教出版.
- Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, 51/52, 10-27.

- 中西正治, 西村徳寿 (2016). 分割分数から量分数への指導に関する一考察. 数学教育研究(大阪教育大学数学教室), 45, 11-24.
- 布川和彦. (2016a). 「数学=パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察. 日本数学教育学会誌, 98 (4), 3-14.
- 布川和彦. (2016b). 対象把握のためのディスコースと学習のパラドクス. 日本数学教育学会春期研究大会論文集, 4, 49-56.
- 布川和彦. (2019). パターンの記述とパターンの対象化の観点に基づく教科書における分数学習の展開についての検討. 日本数学教育学会誌, 101 (12), 2-15.
- Pegg, J. & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. ZDM, 37 (6), 468-475.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16 (4), 567-615.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
- Simon, M. A. (2006). Key developmental understandings in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8 (4), 359-371.
- Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K., & Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: Elaborating the construct of reflective abstraction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 35 (5), 305-329.
- Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understanding of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10 (3), 1-28.
- 田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
- Viirman, O. (2011). Discourses of functions: University mathematics teaching through a commognitive lens. In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2103-2112). Rzeszow, Poland: ERME.
- Wang, S. (2015). Identifying similar polygons: Comparing prospective teachers' routines with a mathematician's. In T. G. Bartell, K. N. Bieda, R. T. Putnam, K. Bradfield, & H. Dominguez (Eds.), *Proceedings of the 37th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 292-299). East Lansing, MI: Michigan State University.
- Yoshida, H. & Sawano, K. (2002). Overcoming cognitive obstacles in learning fractions: Equal-partitioning and equal-whole. *Japanese Psychological Research*, 44 (4), 183-195.

算数教育における探究型学習に関する研究

－研究者の活動をモデルにした SRP の授業を通して－

柳 民範

上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

(1) 背景

今日、「探究」という言葉がしばしばもちいられ、学校教育におけるその重要性が以前より指摘されている。これは、知識基盤社会と呼ばれる今日の社会において、必要な知識を自ら獲得・創造し、活用していく力がより重要視されていることが背景にある。そして、探究活動を学校教育に取り入れるさまざまな試みがなされている。

一方、「探究」とは何かということは必ずしも明確ではないものの、それを採用した指導・学習の方法は探究型学習などと呼ばれている。Artigue & Blomhøj (2013) によれば、探究型教授法 (inquiry-based pedagogy) は、学習者を数学者や科学者のような活動に導くことによって何かを教えようとする教授法とおおまかには定義されるようである。

この定義に従えば、日本の算数・数学の授業において一般的な「問題解決型授業」も、探究型教授法に含まれるであろう。なぜなら、この教授法は、科学者や数学者の探究をモデルに形成された、J. デューイの探究の理論や G. ポリアの段階説と対応させて語られることが多く (e.g. 手島, 1985; 夏坂, 2005), これらの影響を受けたと判断できるからである。

しかし、この問題解決型授業が、研究者のもつ自ら探究する力を培う探究型学習を可能にしてくれる授業であるかといえ、それも

やや疑問である。例えば、問題解決型授業では一斉指導を前提にしており、個々の学習の進度に合わせることは難しい。学習者が活動の途中であっても、教師により半ば強制的に次の段階に移行させられてしまうことがある。また、練り上げと呼ばれる全体で議論する段階では、教師が、特定の数学的知識が導出されるように議論を展開させるため、学習者は自然と教師の意図を読むような行為が生じ、自ら判断して探究を進めていくことは難しくなる。したがって、こうした活動では、学習者が自ら探究を進めるというよりは、教師が探究を主導していると考えられる。

では、より学習者主体の探究型学習はいかにして可能だろうか。筆者は、修士課程の 3 年間、このような問題意識のもと研究を重ね、その成果を修士論文にまとめた。本稿は、その 3 年間の研究成果の一部をまとめたものである。

(2) 研究目的

筆者は、研究を進めるに当たって、「教授人間学理論 (ATD)」の範疇で提案された“Study and Research Paths (SRP)” (Chevallard, 2015; 宮川他, 2016) と呼ばれる探究型学習の理論的枠組みをよりどころとした。この枠組みが新しい算数の授業をデザインする上で様々な示唆を与えてくれると考えたのである。その理由は、第一に、SRP が実際の研究者の探究のように、使えるものは何でも使い、必要な

ものは必要に応じて学習し、様々な分野を横断しながら行う探究活動を想定しているためである。これにより、従来の授業に比べて、学習者の関心に沿った主体的な学習が可能になると考えた。第二の理由は、SRP が、問題解決型授業のような段階ではなく、「問いと回答の往還」や「メディア・ミリューの往還」といった独特の概念で探究を捉えていることである。この捉え方が教師主導で段階を踏んで探究を進める授業とは異なる授業を可能にしてくれると考えたのである。

一方で、SRP に関する先行研究を振り返ると、これまでは中等教育や大学での実践、すなわち数学的な知識をある程度持ち合わせた学習者を対象とした実践が多い。確かに、必要なものは必要に応じて学習するとはいえ、数学の探究にはある程度最低限の知識が必要であるとも考えられ、既存の知識の乏しい小学校の児童には探究は難しいように思える。そこで一つの疑問が生じる。それは、既存の知識が少なくても、必要な知識は必要に応じて学習しながら探究していくことは可能なのだろうか、ということである。

そこで修士論文では、小学校の算数教育に、SRP のアイデアを取り入れることでいかなる探究型学習を可能にしてくれるのかを明らかにすることを目的とした。とりわけ、既存の知識や技能の少なさが探究にどのように影響するかを明確にしようと試みた。

(3) 研究方法

上述の目的を達成するために、本研究ではまず、SRP に基づいた授業を小学生を対象に設計し実践することとした。そして、その教授実験で収集したデータを ATD の諸概念を用いて分析し、そこでいかなる探究が生じていたのかを示す。さらに、その分析結果により明らかになった SRP の授業の様相と、一般的に行われている問題解決型授業とを比較しながら、SRP の授業ではどのような学習が生じていたのかを考察した。

2. 日本の算数授業

本章では、問題解決型授業と SRP の授業を比較する準備として、問題解決型授業とはいかなる授業であり、どのような課題があると考えられるかを明確にする。

(1) 問題解決型授業の概要

日本数学教育学会研究部小学校部会(2001)の調査によると、問題解決型の授業を「いつも行う」、「しばしば行う」と答えたのは全体の半数以上であり、「たまに行う」を合わせると全体の 96%であった。日本の算数授業では、ほとんどの場合、問題解決型でなされていることがわかる。

問題解決型授業とは、一般的には、「問題把握、自力解決、練り上げ、まとめ」といった段階を踏みながら、数学の新しい概念や、数学特有の考え方や態度を学ぶ授業のことである(中村, 2015; 藤井, 2015)。具体的には以下の通りである。

「問題把握」の段階では、主に教師から問題が提示され、その問題の場面を、学習者が理解するための活動が行われる。次に、その問題について学習者が、個人またはグループで考え、答えを導き出す、「自力解決」と呼ばれる活動が行われる。次に、数人の学習者が、自分の回答を発表し、それらの考え方について全体で話し合うことを通して、数学的な知識や考え方を明確にしていく、「練り上げ」という活動が行われる。最後に、そこで議論された数学的知識や考え方の要点を、主に教師がまとめる、「まとめ」と呼ばれる活動が行われる (cf. 夏坂, 2005; 溝口, 2010)。

(2) 問題解決型授業の課題

問題解決型授業の課題の一つに個人差に合わせることが難しいという点が挙げられる。例えば、授業で扱われる問題は、学習者にとって初めて取り組むものであり、解けなくて当然の問題である。であれば、「自力解決」の段階ですべての学習者が解答を求められるはずがない。中には、解法が思いつかず、教師

からの解答をただ待つものもいるだろう。そのような状況で、「練り上げ」を行った場合、その活動に主体的に参加できる可能性があるのは、解答を求められたもの、あるいは、解答までは導き出せなくとも解法を考えるために試行錯誤するといった数学的活動を行えたものだけである。学習者一人一人の準備状況や必要性に応じて学習が深まっていくように授業を展開することは極めて難しい。

また、学習の内容に多少偏りが生じていることが先行研究において指摘されている。例えば、西村・長崎 (2008) によれば、「算数・数学においては、算数・数学の理論的な内容を理解し発展させる側面と、算数・数学と現実のつながりを大切にする側面の両者のバランスの取れた教育が必要」(p.2) と考えられるものの、日本では、「ともすると前者の理論的な発展だけに偏りがち」(p.2) とのことである。さらに、阿部 (2009) は、ヴィットマンほか (2004) の、数学とは『『応用指向』と『構造指向』の2つの相補的側面をもつ『パターンの科学』であるという捉え方を引用しながら、これまでの数学教育は「構造指向」に重きが置かれてきたと指摘し、数学が明示的・暗黙的に実体化された今日の社会では、それを読み解く応用指向の数学の重要性が高まってくると述べる。このように、現実社会とつながりのある数学や、応用指向の数学を授業で扱う方法も考える必要がある。

3. 理論的枠組み

本研究では、「教授人間学理論 (ATD)」において定式化されている“Study and Research Paths (SRP)”という探究型学習の枠組みを基に授業をデザインした。以下では、SRPの背景にある「世界探究パラダイム」と、SRPにおける探究の捉え方（「問いと回答の往還」、「メディア・ミリューの往還」）について説明しつつ、SRPがいかなる活動なのかを示す。

(1) 世界探究パラダイム

ATD には、「世界探究パラダイム」という教育に対する考え方がある (Chevallard, 2015)。このパラダイムに基づいた数学教育では、細分化され整理された数学の内容を一つ一つ学習することを目的とするのではなく、大学院での研究のような活動を通して、研究者の態度を育むことを目的とする。それは、人が未解決な問題に直面したとき、それがどんなに前例のないものであっても躊躇せず、ときには他者の助けを借りながら、価値ある答えに向かって、粘り強く研究する態度である。このパラダイムに基づけば、研究者の探究によって数学教育を行うことが推奨される。

(2) Study and Research Paths(SRP)

SRP は「世界探究パラダイム」を背景として、研究者の活動をモデルに探究型の学習を定式化したものである。この SRP は、ある問い (Q_0) から始まり、一つの回答を作り上げる一連の営みであり、主に二つの仕組みによって特徴付けられる。

第一に、「問いと回答の往還 (dialectic between questions and answers)」と呼ばれる活動である。学習者は、最初の問い (Q_0) に対してすぐさま回答を発見するのではなく、 Q_0 に回答するために Q_0 に部分的な回答を与えるであろう新たな問いや、 Q_0 から導かれた新たな問いが生じ、これらに取り組むことによって、部分的な回答が得られる場合もあれば、さらに新たな問いが生じることもある。このような問いと回答を行き来することにより探究が進展する。ATD では、このような過程を図 1 のような樹形図 (Q-A マップ) で記述する方法が提案されている (Winsløw et al., 2013)。

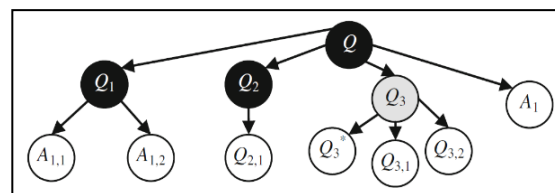


図 1 Q-A マップ (Winsløw et al., 2013)

第二に、情報を探索する営みと得てきた情

報を検討し試行錯誤して回答を作り出す「メディア・ミリューの往還 (media-milieu dialectic)」と呼ばれる活動である。ミリューとは「教授意図をもたないシステム」(宮川ほか, 2016) のことを指し、既存の解答や情報、実験結果などがその要素になる。

そして、SRP では、このミリューを形成する要素を得るために「メディア」の利用を前提とする。ここで言う「メディア」とは、一般的な意味でのメディア（雑誌、新聞、ビデオなど）をはじめ、書籍、論文、講義など、何らかの教授意図が付与された媒体を指す（宮川ほか, 2016）。SRP ではメディアの利用を含め、使えるものは何でも使い探究するのである。

4. 教授実験の概要

本章では、授業をいかに設計したのか、そして、その授業でいかなる活動が生じたのかを概説する。

(1) 授業の設計

SRP の授業を設計するにあたり、最も重要なのが最初の問い (Q_0) の設定である。SRP では、学習者が疑問に思うような自然 (lively) な、そして、そこから多くの問いが生まれるような生成的 (generative) な Q_0 が望ましいとされる (宮川, 2017)。加えて、「メディア・ミリューの往還」が活発に起こる問いである必要がある。これらを考慮して、本授業では次のような Q_0 を設定した。

Q_0 : このクラスみんなが 1 年間に使った鉛筆に木がどれくらい使われているか

ここで「このクラス」と限定したのは、インターネットの情報だけでは回答を得られないようにし、ミリューとの活発な相互作用を促すためである。また、手に取って観察しやすく、普段から触れている鉛筆を題材にすることで、実物と相互作用したり、経験を基に考えたりできると考えた。さらに、「どれくらい」と曖昧に問うことで、どの量で表すかに

よって多様な数学的活動が生じると考えた。

この問いから始まる SRP を、国立大学附属小学校、第 3 学年、35 名のクラスを対象に実践した。活動は、3~4 人一組の班で行うようにし、班ごとにタブレット PC を一台与え、自由にインターネットから情報を収集できるようにした。また、要望に応じてその他の道具（電卓、電子はかり、等）を与えた。

(2) 探究活動の概要

授業において、教師はまず Q_0 から思いつく問いを班ごとに考え、ノートに書き、その問いの答えを考えるように指示した。児童らは、様々な問いを發し、その中から自ら関心のある問いを選んで探究を進めていた。

最初は、インターネットに答えがあると考え、そこから答えを見つけ出そうとする班が多かったが、次第にそこには明確な答えがないことに気づき、実際の鉛筆の長さや重さを測定し始めた。そして、その数値を利用して答えを導き出そうとしていた。その際の数値はほとんどが小数であり、それを用いた計算をする中で「小数のわり算」や「循環小数」など、新しい数学的知識に出合っていた。このような活動はほとんどの班で行われていたが、教師の指示が特にあったわけではなく、班ごとの話し合いの中で活動を決めていた。

C 班の児童は、鉛筆の 2 つの長さを用いることで別の量が表せると考えたのか、「鉛筆の長さ×鉛筆の底面の半径」という計算をしていた。この発想は、未習の内容である 2 つの長さで「面積」を表すことに類似している。

また、A 班は、鉛筆 100 本をまとめて柱状の束にしたときの周りの長さはどれくらいかという問いに取り組んだ。これは、この班の児童が鉛筆の周りの長さを調べていたのを見て、教師が与えた問いである。児童らは、この問いに対して、1 本、2 本、3 本、…と、本数を増やしながら長さを測っていき、その数の増え方の規則性を見いだせば、100 本のときがわかるのではないかというアイデアを出

し探究していた。これはつまり、「比例的推論」という未知の知識を、教師に教わることなく、自ら用いて答えを導き出そうとしていたということである。

また、多くの班で、鉛筆の木の部分のみをカッターなどで削り、その重さを用いて Q_0 に回答しようとしていた (例えば、C 班)。

他にも、 Q_0 の回答からは多少離れるが、自らの関心に沿って収集した情報から、探究していった班もあった (例えば、B 班)。

以上のように、本授業では、すべての学習者が、共通の知識について同じ活動を行っていたのではなく、学習者が、自分の関心や判断に従って、主体的に探究を進めていた。また、学習者は、既習の知識だけでなく、未習の知識も躊躇せず学習し、それを用いて答えを導き出そうとしていた。

5. 探究型授業における学習者の活動

次に、実践した授業で収集したデータを SRP に関わる理論的道具を用いて詳細に分析し、いかなる探究が生じていたのか明らかにする。その結果から、既存の知識や技能の少ない小学校の児童が SRP をどの程度進めることが可能なのか、SRP がどのような学習を生じさせるのかを考察する。

(1) 学習者の活動の分析結果

本研究では、3 つの班の活動に焦点を絞って分析した。3 つの班に絞った理由は、そうすることにより、それぞれの班の活動をより詳細に分析し考察できると考えたためである。また、全ての班を対象にしなくとも、本研究の目的を十分に達成できると考えたためである。実際、本研究の目的は、SRP の視点を取り入れた授業が、一般的な授業とどのように異なる学習をもたらしてくれるのか、その可能性を検討することである。

具体的な分析としては、学習者の活動をより明確にするため、班ごとの言動の発話記録から問いと回答を特定し、Q-A マップを作成した。問いを抽出する際、「～とは何か」といった問いの形でないものでも、発話の内容から、なんらかの問いに対して活動していると捉えられるものや、児童たちの回答からどのような問いに取り組んでいたのか推測できるものを問いとして抜き出した。

本稿では、紙面の都合上、分析結果の詳細を示すことはできないが、各班がどのような探究を進めたのか、どの程度多くの問いと回答の往還が生じたのか、といったことを各班の Q-A マップにより示す。Q-A マップは図 2、図 3、図 4 の通りである。

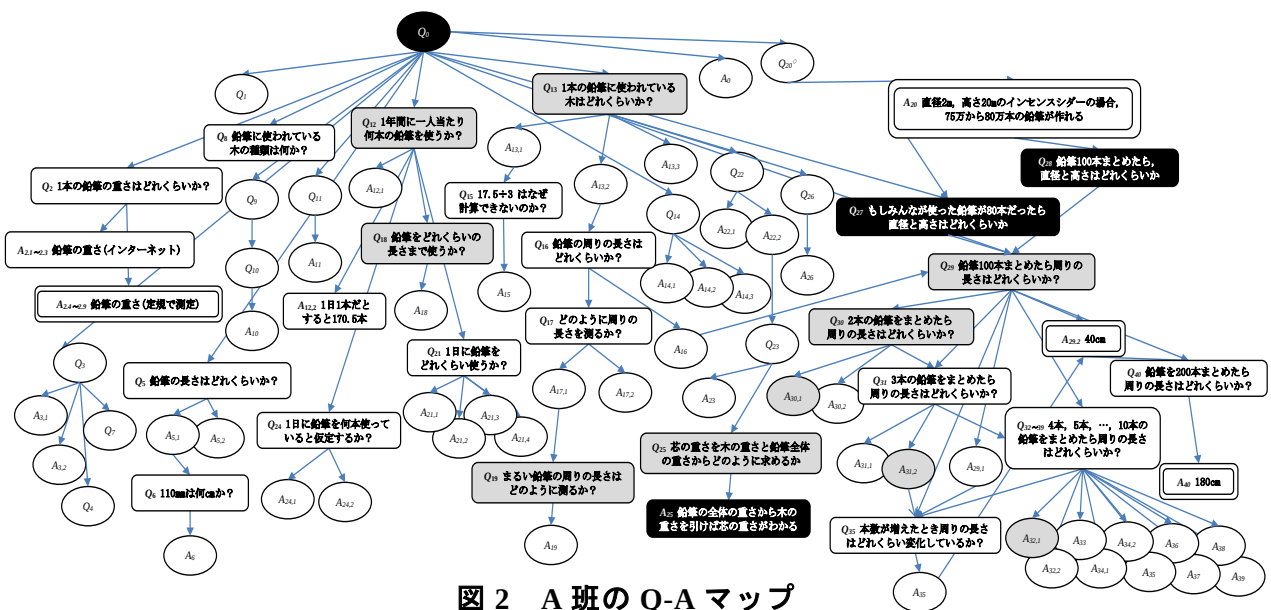


図 2 A 班の Q-A マップ

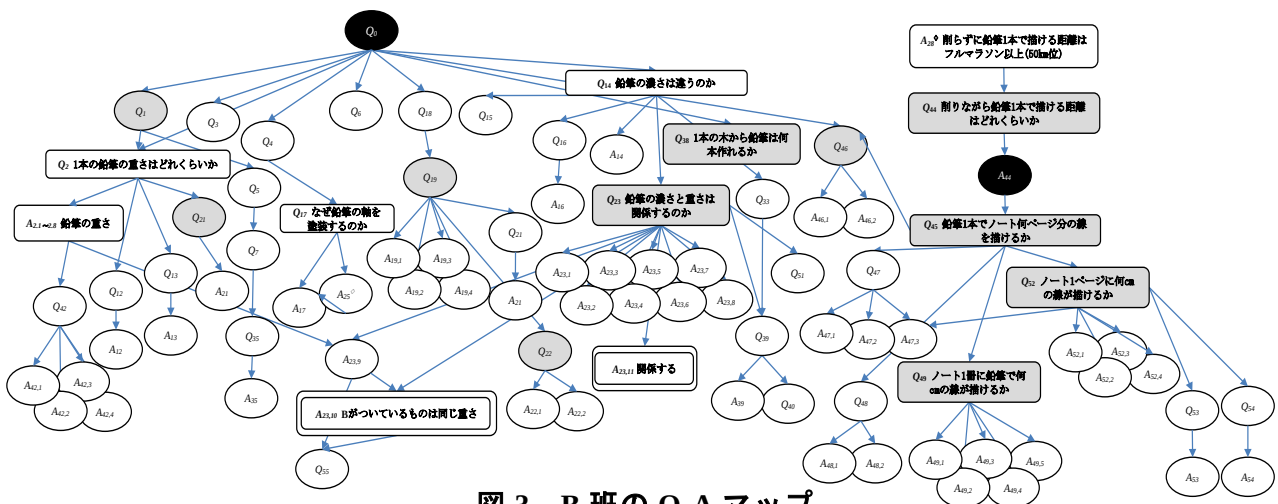


図3 B 班の Q-A マップ

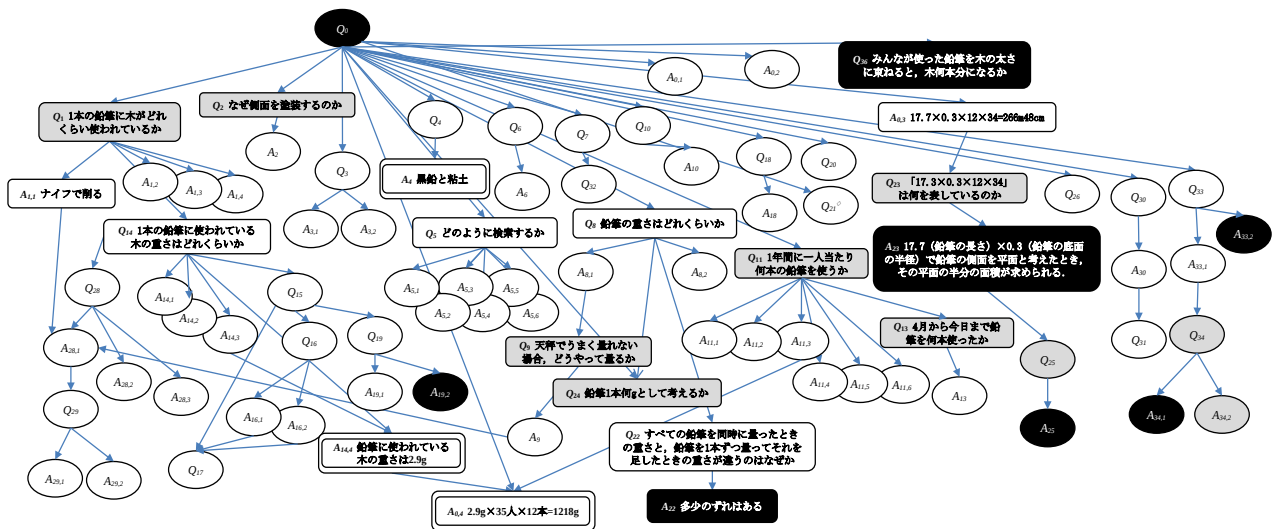


図4 C 班の Q-A マップ

(2) 考察

次に、既存の知識や技能の少ない小学校の児童が SRP をどの程度進めることが可能なのか、SRP がどのような学習を生じさせるのかを考察する。

Q-A マップより、それぞれの班で、様々な問いと回答が生じていたことがわかる。その内容は、Q₀に直接関係しそうなものからそうでないものまで、また、数学的なものから鉛筆の歴史に関連するものまで、幅広い分野の問いと回答であった。これは、探究の過程で様々な知識に出合っていたということである。このような問いと回答の往還は通常の授業ではあまり見られないものだろう。

また、児童自身が多くの問いを発し、その

中から取り組む問いを選んで、自ら探究を推進しようとしていたことがわかる。このように児童が自ら問いと回答を往還することは通常の授業ではあまり見られない。問題解決型授業における「練り上げ」の段階では、問いと回答を往還しながら数学的知識が浮かび上がってくる様相が見えないわけではないが、そこで取り上げられる問いは、その授業の文脈に沿っていなくてはならない上に、特定の数学的知識が明瞭になるようなものでなくてはならないため、多かれ少なかれ教師によって制御される。今回の SRP でも児童の取り組む問いに教師が介入してはいるものの、全体で共通の問いに取り組んでいるわけではなく、その制御はやや弱いものになっていた。その

証拠に、例えば、C 班の探究において、教師は児童に面積の求め方を教え、それを用いて Q_0 の回答を求めるよう促したが、それを用いることはなかった。これは、学習者が、取り組む問いや用いる知識を、主体的に選んでいたことが窺える事例である。既存の知識が少ないと教師に依存しきってしまうのではないかという懸念があったが、予想に反した結果であった。

さらに、「小数のわり算」、「循環小数」、「比例的推論」、「面積」など、小学校 3 年生には未習の知識に関わる活動が生じた点も大変興味深い。これは、この授業が未知のことでも躊躇せず自ら学習していくような状況を作り出せていたということ、指導すべき内容が事前に規定されている通常の問題解決型授業にはみられない、より主体性をとらせた学習活動となっていたことを示している。

このように、既有知識が少ないながら自ら探究を進めていく様相が見られた一方で、既有知識の少なさが探究を妨げることもあった。例えば、インターネットで調べる経験が少ないため、周辺知識について調べる活動に時間がかかり、なかなか数学的活動に進まないということがあった。こうした活動も一つの学習ではあるのだが、数学教育の観点からすると、時間がかかりすぎてしまうことは問題であり、スムーズに数学的活動に移行させるための条件を整える必要があるだろう。

また、問いに対して適切な方法を適用できなかったり、適切な方法を選んではいくものの計算を誤ったりすることが多く見られた。実際の研究者の場合、このような場面では、自分の回答を吟味したり、様々な方法を試してその結果を検討したりしながら適切な回答を導いていくだろう。SRP でも、このような場面では、学習者が適切なテクニックを主体的に獲得していくことが望ましい。しかしながら今回の教授実験において、そのような活動は見られなかった。また、教師もそれを促

すような働きかけを行うことが出来なかった。このような活動を促進するために必要な条件を探ることは今後の課題である。

6. まとめと今後の課題

本研究では、SRP を基に授業を設計・実践し、その授業を分析した。そして、その結果を基に、SRP の授業では問題解決型授業と比べて、どのような学習が生じていたのかを考察した。これにより、SRP の授業の特徴がより明確化されたと考える。

一方で、より豊かで深い探究型学習の実現のためには更なる検討が必要である。今後の検討課題は以下の 4 つである。

- ① 学習者に探究の過程でより深い数学的考察を行わせるためには、いかなる条件が必要なのかを明らかにすること。
- ② 教師の働きかけについてより詳細に分析し、その働きかけが学習者の探究にいかに関与するのかを検討すること。
- ③ 実際に実践された問題解決授業を分析することにより、その結果と SRP を基にした授業の比較分析をすること。
- ④ 個人や班ごとの学習活動の差にいかに関与するかを検討すること。

謝辞

教授実験を行うにあたり、新潟県小学校教諭である笠井将人先生にご協力頂きました。ここに感謝の意を表します。

引用・参考文献

- 阿部好貴 (2009). 「数学的リテラシー育成のための教授・学習に関する基礎的考察：問題解決学習の背景にある認識論に焦点を当てて」. 『数学教育論文発表会論文集』, 42, pp.55-60.
- 葛岡賢二・宮川健 (2018). 「教科横断型 SRP における数学的活動－「世界人口総和問題」を題材にした中学校での実践の分析－」.

- 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 24 巻，第 1 号，pp.121-133.
- 手島勝朗 (1985). 『算数科問題解決の授業 (授業への挑戦 1)』，明治図書.
- 中村光一 (2015). 「第 2 章学習指導法と評価 第 1 節 学習指導法」. 藤井斉亮 編. 『教科教育学シリーズ③ 算数・数学科教育』，pp. 33-40.
- 夏坂哲志 (2005). 「第 2 章 第 2 節 ①問題解決型の指導方法とその事例」(p.58-67)，清水静海・磯田正美・大久保和義・馬場卓也監修. 『図でみる日本の算数・数学授業研究』，明治図書.
- 西村圭一，長崎栄三 (2008). 「数学教育における算数・数学と社会をつなげる力の意義と学習指導に関する研究」，日本数学教育学会誌，第 90 巻，第 9 号.
- 日本数学教育学会研究部小学校部会 (2001). 「算数授業の方法に関する調査の結果」，日本数学教育学会誌，第 83 巻，第 2 号.
- 濱中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動(2) —電卓を用いた実践を通して—」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，第 2 号，pp. 59-72.
- 藤井斉亮(2015). 「序章 注入型授業から問題解決型授業へ」. 藤井斉亮編，『教科教育学シリーズ③ 算数・数学科教育』pp.10-14.
- 溝口達也(2010). 「第 10 章 指導方法」，pp.172-197，数学教育研究会編. 『算数教育の理論と実際』，聖文新社.
- 宮川健 (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格—わが国における「学」としての数学教育研究をめざして—」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第 94 巻，pp.37-68.
- 宮川健・濱中裕明・大滝孝治 (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (1) —理論的考察を通して—」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』，第 22 巻，第 2 号，pp.25-36.
- 宮川健 (2017). 「世界探究パラダイムに基づいた SRP と「問い」を軸とした数学学習」. 『日本数学教育学会 第 5 回春期研究大会論文集』，pp. 173-180.
- Artigue, M., Blomhøj, M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45, pp.797-810.
- Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 - 1990. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (2006) . Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (ed.) Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 21-30). Barcelona, Spain: FUNDEMI-IQS.
- Chevallard, Y. (2015). Teaching mathematics intomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. In S. J. Cho (Ed.) The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematics Education (pp. 173-187). Switzerland: Springer. (大滝孝治・宮川健訳. 「《翻訳》明日の社会における数学指導—来たるべきカウンターパラダイムの弁護—」. 『上越教育大学数学教育研究』，第 31 号，pp. 73-87.)
- Sensevy, G., Schubauer Leoni, M., Mercier, A., Ligozat, F., Perrot, G. (2005). An Attempt to Model the Teacher'S Action in the Mathematics Class. *Educational Studies in Mathematics*, 59, pp.153-181
- Winsløw, C., Matheron, Y., Mercier, A. (2013) . Study and research courses as an epistemological model for didactic. *Educational Studies in Mathematics*, 83 (2) , pp. 267-284.

Y. Engeström の活動理論から見た主体的・対話的な学びのある 高校数学授業の様相

澤邊 基

上越教育大学大学院修士課程 3 年

1. はじめに

高等学校学習指導要領解説数学編(文部科学省, 2018)には, 数学科改訂の要点として「数学的活動の一層の充実」と記されている。また, そこには「数学的な問題発見・解決の過程では, 主として日常生活や社会の事象などに関わる過程と, 数学の事象に関わる過程の二つの問題発見・解決の過程を考え, これらの各場面において言語活動を充実し, それぞれの過程を振り返り, 評価・改善して学習の質を高めることを重視している。」と書かれている。このことから数学的活動を通して言語活動の充実に取り組む必要性が明白である。

数学授業において言語活動を充実させた授業を展開する必要があるが, 「高等学校におけるアクティブラーニングの視点に立った参加型授業に関する全国調査」(木村ら, 2015)によると高等学校におけるアクティブラーニングの視点に立った参加型授業への現在の取り組み状況について, 「教科全体として参加型学習に関する目標を掲げている」, 「教科全体として参加型学習の推進に関する具体的な計画を策定している」, 「参加型学習の実施について, 教科の会議などで積極的な呼びかけなどを行っている」という項目について, 5 教科のうち, 数学が最も低かったとある。これでは, 「何のために数学を勉強するのだろうか.」, 「数学は何の役に立つのだろうか.」という声をよく耳にするのも当然ではないだろうか。

本研究では, 授業中の生徒の活動を分析対象として捉えるために Y. Engeström の「活動理論」を利用する。また, 湊&浜田(1994)の主体性に関する研究や大谷(1994, 1996)の相互作用に関する研究をもとに, 実際の高校数学のデザイン授業のプロトコル分析を通じて「主体的・対話的」というものを活動理論において定義し, 主体的・対話的な学びのある高校数学授業の様相を明らかにしていく。

2. 活動理論

山住(2004)によると, 活動理論とは, 人間の学び, 遊び, 科学・芸術, 技術, 労働, 生活などの「活動」を, 社会的・協働的な「活動システム」として分析し, その文化・歴史的に新しい形態やパターンを, 実践者自らによる発達や転換として現実につくりだそうとする理論であるという。

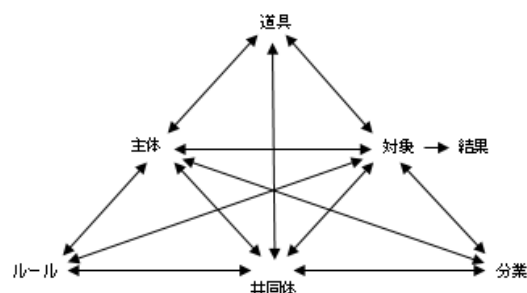


図 1 Engeström(1987)による
活動システムモデル

山住(2004)によるとこのシステムにおける「道具」とは, 「主体」が「対象」に働きかける時に用いる道具や手段となるものである。

活動は何らかの物質的な道具や資源、テクノロジー、象徴的記号、言葉、コンセプト、アイデア、モデル、ヴィジョン、理論などを手段とし、そのような「道具」に媒介されて実現する。「ルール」は社会的な規範、統制や慣習のことであり、諸個人の行為や相互作用を制約する。「分業」は、知識や課題によって分けられる水平的な分配と、権力や地位によって分けられる垂直的な分配を指す。以上の全てが関連しあっているものが活動理論であり、基本的関係である「主体」、「対象」、「共同体」は私たちが直接、行為として目にするものであり、その他の部分は行為としては目に見えない基底部分である、というように分けられる。

3. 本研究で立脚する数学観

3.1. 大谷(1994)の研究

大谷(1994)は、授業における教師と生徒の相互行為からなる「参加構造」という一定の組織的パターンがあること、そして、教師と生徒はそういったパターンを巧みに利用し、また臨機応変に解釈しながら授業を構成し、維持していることを明らかにしている。

3.2. 大谷(1996)の研究

大谷(1996)は数学教育における活動の中でも、数学的課題を定式化したり、課題の解決の糸口や有効な考えを見いだしたりする活動について、数学的活動が、個々の児童にではなく複数の子どもの相互作用に位置づけられることを明らかにした。また、この概念を「間精神的」という言葉で説明した。

本研究では、大谷(1994, 1996)に基づき、数学が個人に内在しており、しかもそれを共有できるという立場に立脚する。

4. 先行研究

4.1. 活動理論に関する先行研究

4.1.1. 数学における活動理論の先行研究

松下(2003)は、日常場面の数学と学校場面

の数学が異なるのはなぜかについてそれらがどのような活動システムの中に埋め込まれているのか、事例を挙げ、日常場面の数学と学校場面の数学は、まったく質の異なる活動システムのなかに埋め込まれていることを明らかにした。

神林(2009)は、数学的価値の実現と数学的リテラシーの育成の関係について、「道具をモデル化している場面」、「ダブルバインドが起きている場面」など段階的に記述し、その段階の変化に影響を与えた要因を分析するのに活動理論を援用した。そして数学的リテラシーの育成するための授業構想では、「ダブルバインド」の組織の仕方が特に重要となることを明らかにした。

これらの先行研究から活動理論が段階間においての関係を捉えることに援用されていることがわかった。筆者はこれらの先行研究から段階内における活動システムの要素間の関係を捉えることができれば新たな知見が得られると考えた。

4.1.2. 活動理論の利用に関する問題点

松下(2003)は、Y. Engeström の理論について、従来の学習論が関心を注いでいた個々の学習という視点が相対的に弱くなっていることを指摘し、松下(2010)は、拡張的学習論について、説明の道具としては有効でも、介入の道具にはなりにくかった」と述べている。

4.2. 「主体的・対話的」に関する先行研究

4.2.1. 「主体的」に関する研究

湊&浜田(1994)は、主体的学習では、同一の学習内容を学習していても、学習者によりそれぞれ意味付けは異なり、別のものを作り変えることが予想されているところに、自主的・自発的と主体的の2つの学習の間には本質的な違いがあるとした。

4.2.2. 「相互作用」に関する先行研究

大谷(1994)は、一斉授業における数学的活動が教師と生徒の相互作用的作業によって構成され、維持される様態について質的研究法

を通して明らかにした。また、大谷(1994)は、一斉授業における数学的活動は、教師と生徒の権利と義務の配分と所有のパターンとみられるとし、教師と生徒によって相互作用的に構成され維持されるこうしたパターンの構造を「数学的参加構造」とした。

大谷(1996)は、教師と生徒の数学的参加構造についてではなく、複数の参加者が全体として数学的課題を設定したり、解決や考えを相互作用的に構成したりする活動について「社会数学的」と名づけ、そのような数学的活動が、個々の生徒にではなく複数の子どもの相互作用に位置づけられることを明らかにした。

5. 本研究における活動理論の利用について

澤邊(2019)は、数学授業を、活動システムを構成する6つの要素に着目し、その連関を動的に捉えることで、活動システムにおける各要素に数学的知識があり、生徒はそれらを獲得、共有しながら活動を行っていることを明らかにした。また【分業】には形態によるものと権力によるものの二重性があり、いずれの形も活動を力動的にさせ得ることにつながることを捉えた。

「主体的・対話的」に関する先行研究と澤邊(2019)から本研究においては「主体的・対話的」というものを、【主体】の数学的知識の個性が、【主体】と【共同体】とのかかわりの中で【対象】を変化させていくものとして捉え、これに関する新たな知見が得られるであろう視点として活動システムを構成する要素の中でも特に【分業】に着目し、授業中の生徒の活動を捉えることで、授業の外からは捉えることの出来ない様相を明らかにしていく。

6. デザイン授業の実態と分析・考察

6.1. デザイン授業の概要

デザイン授業は加法定理を導出するような

ものであり、平成31年2月22日に、新潟県上越地域にある公立高等学校の1学級で担当数学教諭により計2時間行われた。授業全体の流れを把握するためのビデオカメラ2台、グループでの生徒の活動を記録するためのビデオカメラ4台によって記録した。

6.2. デザイン授業の実態

本授業では、まず、教師が課題を説明し、与えた図形の全ての辺の長さについて個人で考えさせた。与えた物理的な【道具】はワークシートのみであり、生徒はこれと知識としての【道具】のみを使って課題に取り組んだであろう。

課題1について個人の考えの時点では実際以下の図のように多様な考えがうまれた。

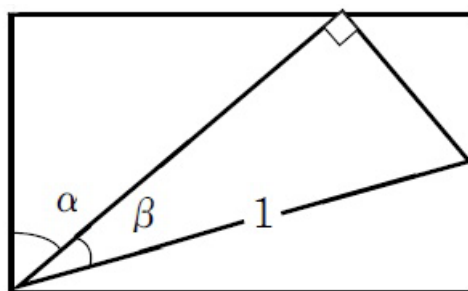


図2 初めに提示した課題1

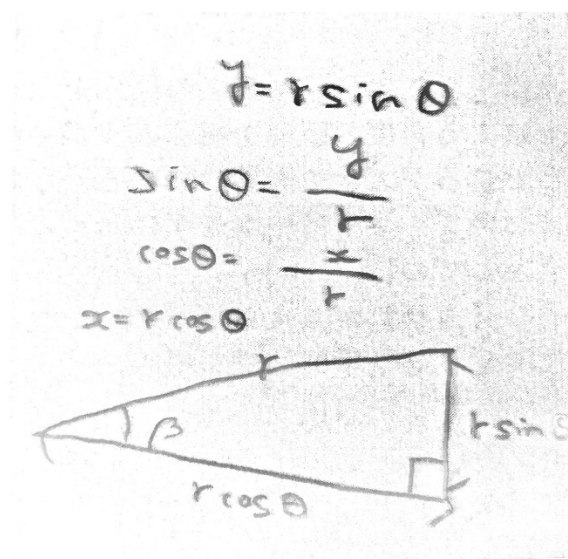


図3 Rei (2班) の考え

Reiは知識としての【道具】として三角比を用い、【対象】に取り組んでいる様子が窺え

る。

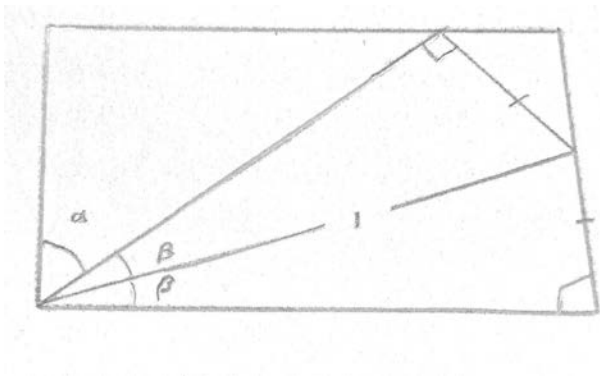


図4 Jin(7班)の考え

Jin は知識としての【道具】として図形の合同を用いて捉えようとしている。

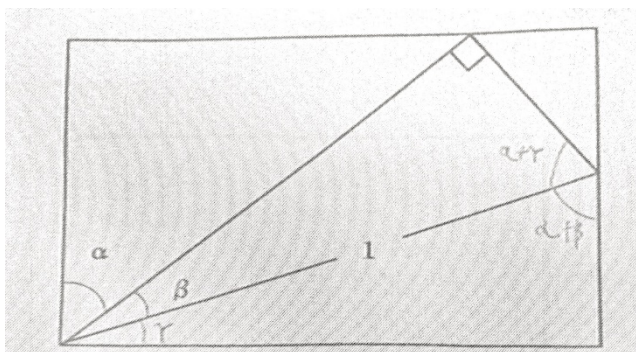


図5 Kan(7班)の考え

Kan は Jin 同様、与えられた条件からわかる値を記述している。しかし、合同としていないところが Jin と異なる点である。

これは視覚的に合同に見える図形を用意したことによる角度の誤解を招くよう課題を設定したところが大きく影響している。なお、ここにおいて、まずは相談せずに考えるという形態としての【ルール】が存在したことや、物理的な【道具】が与えられなかったことが個人に内在する数学的知識を引き出すことに影響し、誤答を引き出させた。つまり個人からグループという形態による【分業】の変化が知的な【分業】として現れるためには個人の考えが活かされるよう、相談せずに考えるという形態としての【ルール】を設けることが有効であるとわかる。一方で、ここで物理的な【道具】や問題のアプローチを方向

付ける数学的な【ルール】を与えてしまうと意図している誤答へ導けなくなってしまう。つまり個人からグループという形態による

【分業】の変化を知的な【分業】に変化させるには数学的な【ルール】ではなく、形態としての【ルール】が必要であるとわかる。なお、誤答を導くだけが知的な【分業】を生み出すことにつながるわけではない。本研究では辺の長さの表現の違いから加法定理について考えることを目的としており、どちらの場合においても、課題と形態としての【ルール】の設定により、形態による【分業】の変化を知的な【分業】へ変化させることができる。実際にこれらの考えをグループで共有した場面が以下である。以下では知的な【分業】がどのように活動を力動的にさせるのかについて考察する。

7 班の活動

Eru こことこの角度一緒でしょ？

Kan でも辺の長さわからなくね？

この対話では形態による【分業】の変化が知的な【分業】として現れていても活動が力動的になっていない。ここでは全員がそれぞれの解釈で角度を求めたあとで三角比を用いて辺の長さを表すに至っていない。本授業の目指す形以前に三角比の扱い方がわからず活動がとまってしまっている場面である。このような場合、【対象】が変化することはなく、活動は力動的になっていないことがわかる。課題を解くのに必要な知識としての【道具】をグループに所有している人がいなければ活動は力動的にならないということがわかる。つまりこのような場合、教師がそのような知識としての【道具】を共有する必要がある。実際に三角比での辺の表し方という知識としての【道具】を獲得したあとでグループでは以下のような話し合いが行われていた。

10 班の活動

Yu こことこの長さって一緒？
Taka 微妙に違う（模型を用いて比較）
Yu これも違うしさ、これもたぶん違うじゃん
Yu これ違うって見るべきだ。うん、だから
（中略）
Yu まず、辺の長さ書いていかね？

これは形態による【分業】の変化が「2 辺の長さが同じなのか異なるのか」という知的な分業として表れ、その結果、辺の長さは異なると見て【対象】に取り組んでいった。模型を重ねてもよいという物理的な【道具】とその使用に関する数学的な【ルール】がこのような対話を引き起こし、「まず、辺の長さ書いていかね？」というように次の活動を方向付けている。これは物理的な【道具】とその使用に関する数学的な【ルール】が与えられたことが大きく影響しており、これらは「妥当性の判断」という新たな【対象】を生み出し、活動を力動的にさせることに有効であることがわかる。なお、【対象】の変化が起きた要因として形態に着目すると、形態による【分業】の在り方として個人からグループで話し合う形態へと変化したからこそであり、個人による判断であれば、表面的に知的な【分業】として現れず、新たに【対象】が生成されることはなかったであろう。ここにおいても個人からグループへと形態を変化させることが活動を力動的にさせ、【対象】を変化させることにつながることを窺える。

一方で同じ条件下でも活動が力動的にならないケースもあった。

9 班の活動

Waka でも、待ってここがほんとにこれ(β)かわかんないじゃん。
Noi でもさ、これ配られたってことはさ、

折り曲げて発見することもあるじゃん。

Kei いいんじゃないね、別に。
Yun そう、切ったからわかること。
（中略）
Waka そんなわけ…。

上記の対話で少数派側は「視覚に頼って判断するのは数学的な根拠として不十分だ」としながらもそれを説明できる数学的知識を所有していなかった。よって、ここでは一見、多数派と少数派とで知的な分業の形が形成されているため【対象】の変化につながり得ると考えられるが、実際に【対象】が変化するに至らなかった。これはこのグループの間に数学的知識が内在していないような多数派と少数派という権力の差による【分業】が存在していたからであり、生徒間におけるこのような権力の差による【分業】の存在は活動を力動的にすることを妨げる性質があることがわかる。なお、この場面から、形態としての【分業】が個人からグループへと変化することは生徒間に権力の差としての【分業】を作り出すことにつながることをわかる。一方で形態としての【分業】が作り出す権力の差による【分業】には活動を力動的にさせ、新たな【対象】を作り出す一面もある。それが以下である。

10 班の活動

Dai これとこれって相似？
Yu どれ？
Dai これとこれ
Dai ここが 90° で、ここが $180^\circ - (90^\circ + \alpha)$ じゃん？
Yu あー、相似だ。相似だけどさ、相似だからってどうするの？

ここでは Dai と Yu との間で教える、教えられるという関係が生まれている。この場面も形態としての【分業】が個人からグループ

へと変化したことによって起きたものである。この場面では説明する、説明を聞くというように自然に Yu と Taka との間に権力の差による【分業】が作り出され、それにより活動が力動的になっている。このようになった要因として 9 班の対話との比較から、生徒間の権力の差による【分業】に数学的知識が内在していることが窺える。また、教師と生徒間における権力の差による【分業】も活動を力動的にさせ、【対象】を変化させることにつながる。それが以下である。

7 班の活動

- T ほんとに(合同としたことに対して)?
 確かめてみたら?
- Kan 例えば Eru のその仮説 (合同であること) が合ったらここも β なんだけど
- Eru ほんとにそうなるのかっていう…
- Jin とりあえずやってみる?
- Kan 合わないんだよね
- Sei (重ねて見て) これはもう β じゃん、これはもう β だ
- Kan β でしたか
- Sei いや、そんな求め方じゃ
- Eru それじゃだめだよたぶん
- Sei なんかもっとある
- Eru なんかもっとあるんだよねたぶん。ちゃんとあるはずなんだよ

この班ではグループの全員が二つの三角形は合同と見ており、10 班や 9 班のように物理的な【道具】から自分たちの考えを批判的に見るような対話は行われなかった。模型はこのような誤答を見つめなおすことも目的としていたが、このグループのような場合には教師の介入により活動を力動的にすることができると読み取れる。これは参加構造としての適当な介入であり、教師と生徒の間における権力の差による【分業】である。当然ここにも規範としての【ルール】が存在して

おり、このことが「なんかもっとあるんだよねたぶん。ちゃんとあるはずなんだよ」というように別の方法で求めるように活動を方向付けた。

これらのことから生徒間における権力の差としての【分業】は個人からグループへと形態としての【分業】が変化することによって生まれるものであり、その権力の差による【分業】に数学的知識が内在していれば、教え合いなど活動を力動的にし、【対象】を変化させるが、数学的知識が内在していないような場合には教師の介入や数学的知識の内在した【道具】を与えることが有効であると言える。一方で教師と生徒間における権力の差としての【分業】の在り方の特徴として、形態による【分業】の変化によって生まれる生徒間にある権力の差による【分業】と異なり、教師がそれを作り出すことが挙げられ、主体的・対話的な学びを作り出す重要な役割を担っていることが言える。

課題 1 にグループで取り組んだ後、各班の考えを黒板に貼り、全体で共有した。

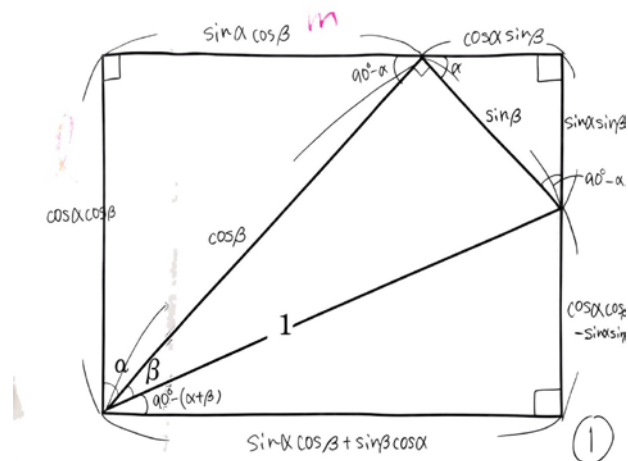


図 6 1 班の図形

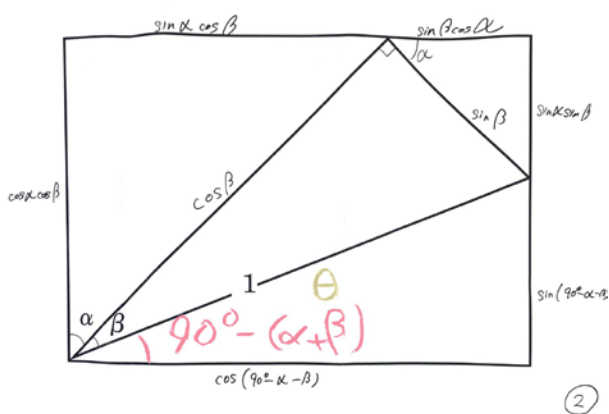


図 7 2 班の図形

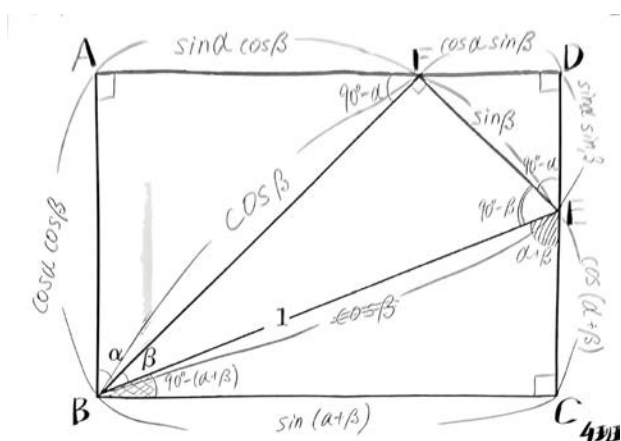


図 8 4 班の図形

図 6～8 が実際の各班の考えである。同じように書いた班もあったためここでは考え方の異なる 3 班を抽出した。個人からグループへと形態による【分業】の変化が知的な【分業】へと変化し、同じ長さを示していても注目した角度が違ふことで表現方法が異なるという理想的な形が作り出せた場面である。このように知的な【分業】が存在している場合においては、それを共有することで活動が力動的になり、【対象】の変化につながることは先ほど述べた。先述と異なる点はこの時点での知的な【分業】はグループごとに現れているという点である。よってさらに活動を力動的にし、【対象】を変化させるためにはそれを全体で共有するという形が適していると言える。

また本授業においてはグループごとの考え

を全体で共有するという形態による【分業】の在り方として、教師が表現方法の異なる辺の長さについて、グループの中から代表者を指名し、どのように求めたのかを発表させるような形態をとった。これも教師と生徒間に存在する権力の差としての【分業】、規範としての【ルール】によって作られたものであり、ここにおいても形態としての【分業】、それを作り出す【ルール】との密接な関係が伺える。

以下は 10 班が 4 班の発表についてなぜそのように考えたのか考察している場面である。

10 班の活動

Yu $\sin(\alpha + \beta)$ はたぶんこの角度で見たのさ。ここ $\alpha + \beta$ になるじゃん。これを中心とみたときに

Taka ほんとだ。

Yu で、こっちを中心に見れば $\cos$ じゃん。

このように全体で考え方を共有する中でも発表者と聞く側とで形態による【分業】をつくるとそれが知的な【分業】へと変化し、新たな【対象】が生成されている。

これらから、グループで話し合う場合には特に数学的な【ルール】を設けず、生徒の自由な考えを導き出し、知的な【分業】が現れていないようであれば教師と生徒との間で権力の差による【分業】をつくり、活動を力動的にさせることが望ましいことがわかる。全体で共有するような場面では異なる解答を取り上げ、指名された生徒は発表、他の生徒はそれを吟味しなければならないという形態としての【ルール】、【分業】のもと、共有を行うことで知的な【分業】が活動を力動的に方向付け、【対象】を変化させるようなものとして現れることがわかる。

1 時間目は、これらの過程を経て、 $\sin$ と $\cos$ の加法定理という新たな知識としての【道具】を取得した。この後、2 時間目では、課題 1 と同じように与えられた図形の長さに

ついて、三角比を使って表す課題2を提示し、取り組ませる。なお、1時間目の課題1に取り組ませた場面の分析では、「個人からグループという形態による【分業】の変化が知的な【分業】として現れるためには個人の考えが活かされるよう、相談せずに考えるという形態としての【ルール】を設けることが有効である」と述べたが、課題2には初めからグループで取り組ませた。これは、課題1のプロセスで、【主体】である生徒全体が、「三角比での辺の表し方」という知識としての【道具】を獲得しており、個人の考えが生かされるような場面ではないと判断できるためである。以下が、課題2である。

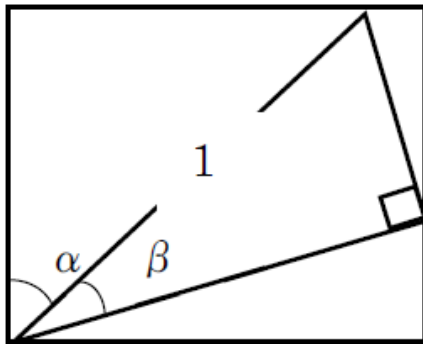


図9 2つ目に提示した課題

この課題に対し、2班では以下のように取り組んでいる。

2班の活動

- Nika ここも $(\alpha + \beta)$ だよ
(中略)
Rei あ、いいんだ。 $90^\circ - (\alpha + \beta)$ だから
Neo 合ってる、合ってる、合ってる
Neo で、あと計算したら
Rei はい、出して終わり
Neo はい
Joe はい
Neo パッと計算しましょう

これは、上の対話は角度を求める場面のものである。この班は、課題1において、長方

形の一辺の長さを $\cos(90^\circ - \alpha - \beta)$ と表したグループであるが、この場面では角 $(\alpha + \beta)$ という、より簡潔な形で三角比を表そうとしている。また、物理的な【道具】に依拠していないことや、「パッと計算しましょう」という発言からも、このプロセスに困難を覚えていない様子が見て取れる。これらのことから、この班では知識としての【道具】が課題1を経て十分に獲得できており、そのような場合においては知識としての【道具】のみをつかって【対象】に取り組む。すなわち、物理的な【道具】を使った際の【対象】の捉え方というものが、知識としての【道具】として現れていたといえるだろう。また、このような場合においては、知的な【分業】は生まれにくいことが改めて確認できる。

課題2に関しては、どの班も、辺の長さについて三角比を用いて表すことは出来ていたが、長方形の向かい合う辺同士の長さの関係が、加法定理か否かを判断することには困難性を感じていた。

その要因として三角比の値の捉え方に関する誤認識が挙げられる。9班では、図形の一辺の長さ $\cos(\alpha + \beta)\cos\beta$ について以下のような会話が行われた。

9班の活動

- Noi $\cos(\alpha + \beta) \times \cos\beta$ …これ、くくれない？ $\cos$ でくくっちゃダメなの？
Kei これ、かかっているから
Yun いつも $\cos$ かかっているからだめなの

7班の活動

- Eru $\cos\beta$ でくくって…意味わかんなくね？
Kan そしたら、 β でくくるんじゃない？
Eru $\alpha + \beta / \cos\beta$ だよ
Eru 合っているのかこれ
(中略)
Eru やばい、意味わかんない

このように $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta$ という長さに対して「くくる」ことを試みている。9 班は「くくろうとする者」と「くくってはいけないとする者」とで対話することで形態としての【分業】が知的な【分業】として現れ、「くくらないで考える」という次の活動を方向付けている。一方で、7 班には、「くくる」という活動に対して疑問を持ちながらも、十分な数学的知識のある【共同体】とのかかわりがなかったため、形態としての【分業】は、知的な【分業】として現れず、【対象】は変化しなかった。他の班においても「くくる」ことを試みており、また、【共同体】に、それが誤った変形である、という数学的知識が内在している人が少なかったことから、教師がこれを取り上げることで、さらなる【対象】の変化につながり得たであろう。課題 2 に関しても、各班の考えを黒板に貼り、全体で共有した。

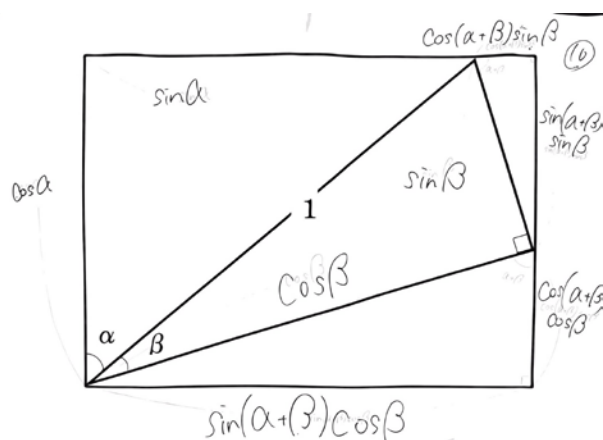


図 10 10 班の図形

課題 2 に関しては、課題 1 と異なり、すべての班が図 9 と同じ値を用いて長さを記入していた。このような場合、一見、班から全体という形態の【分業】の変化は知的な【分業】として現れないと考えられるが、先述したように、このような場合においても、それまでの過程において、取り上げることで、別の【対象】を作ることができたであろう。一見、知的な【分業】として現れないように見える場合においても、教師がそういった誤答

を取り上げ、【共同体】内の関係を逸脱し、知的な【分業】を作り上げる重要性が伺える。

班での活動において、長方形の向かい合うそれぞれの辺の関係式は加法定理を表しているのかについて考えさせたが、それに困難性を感じていた。実際の関係式は下記の通りである。

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \cos(\alpha+\beta)\sin\beta &= \sin(\alpha+\beta)\cos\beta \\ \cos\alpha &= \sin(\alpha+\beta)\sin\beta + \cos(\alpha+\beta)\cos\beta\end{aligned}$$

教師が

$$\sin\alpha = \sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)\sin\beta$$

というように、上の式を移行することで視覚的に加法定理を捉えやすくするようなヒントという知識としての【道具】を提供するが【主体】はこの【道具】をうまく使うことが出来なかった。このような場合、【対象】の変化には至らない。今回の場合や、課題 1 の際に、三角比を用いた辺の長さの表し方を教師が説明してから活動が力動的になり、【対象】が変化していったことから、教師は【主体】に対し、知識としての【道具】の使い方を共有せざるを得ない場面があることがわかる。

6.3. デザイン授業の考察と結論

活動理論における要素間の関係を動的に捉える分析を【分業】に焦点化することで、形態としての【ルール】が形態としての【分業】を、社会規範としての【ルール】が権力による【分業】を作り出すことにつながり、これらには密接な関係があることがわかった。本研究では、主体的・対話的な学びのある数学授業について、【主体】の数学的知識の個性が、【主体】と【共同体】とのかかわりの中で【対象】を変化させていくものとして捉えるとしたが、そのような授業はどのように起こり得るのか特に【分業】に着目して分析すると、形態としての【分業】が知的な【分業】として現れると活動が力動的になり、このよ

うな場合、【対象】を変化させ得ることがわかった。また、そのような学びを生み出すには教師の言うとおりに行動しなければならないという社会規範としての【ルール】と、教師と生徒間に権力の差である【分業】が存在していることが必要であるといえる。なお、生徒は教師の言うとおりに行動しなければならないという社会規範としての【ルール】、またそれによってうまれる生徒と教師との間にある権力の差による【分業】は、数学における活動を力動的にさせ、主体的・対話的な学びをうみだすために必要であることがわかる。また、個人からグループや、グループから全体など形態としての【分業】が変化するとそれに伴い、そこには権力の差による【分業】がうまれることもわかった。ここにおける権力の差による【分業】の在り方は多様であり、生徒間における権力の差による【分業】であってもそこに数学的知識が内在していれば、教え合いのように活動は力動的になり、主体的・対話的となり得るが、単なる上下関係のように数学的知識が内在していないような場合、活動は力動的にならず、【対象】の変化につながらないことがわかった。また、ここにおいては数学的知識が内在するよう物理的な【道具】や教師の介入が効果的であると言える。教師の介入は形態としての【分業】の変化に伴って現れる権力の差による【分業】とは異なり、教師はいつでも生徒と教師間で権力の差による【分業】を作り出すことが出来るというものであり、主体的・対話的な学びのある数学授業を作り出す役割を担っていることがわかった。

引用・参考文献

- Engeström(1994). 松下佳代他訳(2010). 変革を生む研修のデザイン. 鳳書房. pp. 187-202
- Engeström(1987). 山住勝広他訳(1999). 拡張による学習:活動理論からのアプローチ. 新曜社.
- 大谷実(1994). 一斉授業における数学的活動のエスノメソドロジー-社会的カテゴリーとしての条件・定義の運用-. 数学教育論文発表会論文集, 27, 227-232.
- 大谷実(1996). 算数の授業における社会数学的活動の構成:間精神的機能系による分析. 数学教育論文発表会論文集, 29, 385-390.
- 神林信之(2009). 授業事例「平面図形」の活動理論を用いた検討-数学的リテラシーの諸様相(3)-. 新潟大学教育学部附属教育実践総合センター研究紀要. 教育実践総合研究, 第8号, 95-100.
- 木村充他(2015). 高等学校におけるアクティブラーニングの視点に立った参加型授業に関する実態調査:第一次報告書. 東京大学-日本教育研究イノベーションセンター.
- 澤邊基(2019). 主体的・対話的な学びのある数学授業設計のための Y. Engeström の活動理論の捉え直し. 上越数学教育研究, 第34号, 71-82.
- 湊三郎&浜田真(1994). プラトンの数学観は子供の主体的学習を保証するか-数学観と数学カリキュラム論との接点の存在-. 日本数学教育学会, 日本数学教育学会誌, 76(3), 58-64.
- 松下佳代(2003). 学習のコンテキストの構成-活動システムを分析単位として-. 京都大学博士論文.
- 文部科学省(2018). 高等学校学習指導要領解説数学編. 文部科学省. https://www.mext.go.jp/content/1407073_05_1_2.pdf (令和2年2月20日最終確認).
- 山住勝広(2004). 活動理論と教育実践の創造:拡張的学習へ. 関西大学出版.

高等学校における数学と情報の 教科横断的な探究型学習に関する研究

根津 雄一

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

次期学習指導要領では、「探究」という言葉がしばしば用いられ、中学校数学科においては、数学的な見方・考え方を習得・活用・探究という学びの過程で働かせるような指導を行うことが強調される。また、高等学校においても新科目として創設された「理数探究」や「総合的な探究の時間」に代表されるように、教科の枠組みを越えた資質や能力の育成が重視されることとなった（文部科学省, 2018）。

こうした背景のもと、わが国の学校教育では、STEM 教育の視点から教科横断的な学習を導入する動き（松原・高阪, 2017）など、新たな学習活動が検討されている。そこで、本研究ではプログラミングや数値計算、機械学習等に代表されるような数学と情報学の学問的な親密さに着目し、それらを横断する学習の可能性を検討することとした。

そうした学習活動を探るにあたって、筆者は、世界探究パラダイムに基づいた SRP (Study and Research Paths) という探究活動に着目した。SRP とは、最初の問い Q_0 から始まり、インターネット等（メディアと呼ばれる）の使えるものは何でも使い、必要な知識は必要に応じて学習しながら自らの回答 A^* を作り上げるという研究者の主体的な探究活動をモデル化したものであり、問い

への探究を通じて、研究者の態度の育成を目的とする（シュバルール, 2016）。先行研究では、教科横断型 SRP によって、教科横断的な学習や主体的な学習が生じることなど様々な可能性が示されている（葛岡・宮川, 2018）。

そこで、本研究では、高等学校の数学科と情報科の教科横断型 SRP においていかなる「探究」が起こり、いかなる「教科横断」が可能となるのか、その詳細を明らかにすることを目的とし、次のような方法で研究を進めた。

まず、わが国の探究や教科横断に関する先行研究と SRP に関わる先行研究について取り上げ、本研究の位置づけを明確化した。次に、新たな SRP を設計する上でいかなる最初の問い Q_0 を設定すべきかを探った。これまでの研究で示された問いの事例等を整理し、わが国の数学教育で扱われてきた問いとの比較を行うことで Q_0 の問いとしての性格を考察した。そして、数学と情報の教科横断型 SRP を実践するための Q_0 を設計し、教授実験を行った。さらに、そこで収集した実験データを理論的な枠組みに基づいて「探究の様相」や「探究の中で生じる知識とその学習」に焦点を当て分析・考察した。

本稿では、教授実験の内容やデータの分析・考察に焦点を当て、その成果の概要を示したい。詳細は、筆者の修士論文を参照

されたい。

2. わが国での先行研究

本研究の位置づけを明確化するため、「探究型学習」と「教科横断的な学習」に関わる先行研究を振り返る。

(1) 数学科における探究型学習

「探究」に関わるわが国の数学教育の先行研究では、「探究」は様々な解釈がなされている。その一つは、「数学的探究」である。関口 (2002)では、「探索・評価活動」と「数学的議論の展開」とが相互作用することを数学的探究と捉え、さらにそれらが「数学的共同体の営み」であるとしている。また、渡辺 (2011)では、観察や問題の発見、仮説の検証といった「科学的探究」のプロセスを拠り所とし、問題解決型の統計教育との関係や統計的思考力の育成の重要性を指摘している。さらに、SRPと同様に、研究者の探究活動に着目した研究者の探究についての研究もわが国では見られる。その代表的な例として、RLA (Researcher-Like Activity) と呼ばれる学習活動が挙げられる (市川, 1998)。RLAでは、実際の研究者が行っている活動の縮図的活動を行うことで学習者の意欲を引き出そうとするものである。

こうした先行研究を踏まえると、わが国の数学教育には様々な「探究」が存在しており、どのような活動が「探究」なのかということには必ずしも明確な定義があるわけではないことがわかる。

(2) 数学と他教科の横断的な学習

今日の学校教育では、理数探究の導入も相まって、教科の枠組みを超えた学習活動の検討も活発となっている。先述のようなSTEM教育に基づいた教科横断的な学習の検討 (松原・高阪, 2017) だけでなく、「科学技術的意思決定」の観点からEU圏で取り組まれる数学と科学での横断的な指導・

学習を目指したCOMPASSプロジェクトで扱われる教材から授業開発の指針を得ようとする動きも見られる (西村ほか, 2015)。

さらに、野添・天野 (2016)では、「密度」を題材とした中学校理科における授業実践を通じて、理科と数学との相関カリキュラムの開発が試みられる等、理科教育の視点からも数学学習を取り入れようという動きも見られる。このように、「理数探究」の導入に先駆けて、数学と理科との間では、様々なアプローチから教科横断的な学習が検討され、その中でいかなる資質・能力を育成していくべきか議論が重ねられている。長崎ほか (2008) によって示された現在の学問や職業で使われている算数・数学を鑑みると、あらゆる分野の学習と数学の学習は横断可能であろう。

本研究でSRPに着目する理由は、探究活動の仕組みが諸概念によって、どのような活動が「探究」なのかが明確化されていることにある。さらに、世界探究パラダイムが研究者の態度の育成を目的としたものであることを踏まえると、SRPは、今日の学校教育への要請にも適合しうるものと考えられる。

3. 理論的枠組み

先述のように、教科横断型の探究活動を設計・分析するにあたって、世界探究パラダイムに基づいたSRPを理論的枠組みとする。以下では、この枠組みの概要を述べる。

(1) 世界探究パラダイム

ATDでは、何を学習すべきか、それらをどのように学習するのかを暗黙理に規定する規則の集まりを「教授パラダイム」と称する (シュバラール, 2016)。世界探究パラダイムは、問いについての回答を作り上げるために必要となった知識や技能を必要に応じて学習する教授パラダイムである。「問い」への探究を通じ、「ヘルバルト的」(未知の問いや未解決の問題に対しても怯まずに

立ち向かう態度),「前進認知的」(前向きに新たな知識を獲得しようとする態度),「開かれた人」(いつまでも学習し続けようとする態度)の3つの研究者の態度の育成を目的としている。これらが,今日の社会においても持ち合わせるべき態度と考える。

(2) SRP について

SRP は,世界探究パラダイムに基づいた研究者の探究活動を定式化したものである。SRP における研究者の探究の解釈は,最初の問い Q_0 に対して回答を作り上げるために,使えるものは何でも使い,必要なものは必要に応じて学習するものである。そうした特徴は以下に示す往還により説明される。

①問いと回答の往還

SRP では,「問いと回答の往還」という形で問いと回答が連鎖しながら進んでいく研究者の探究過程を定式化する。最初の問い Q_0 から最終的な回答 A^* の過程が図1のような図式で表すことで,探究の広がりや深まりといった様相を映し出すことも可能となる。

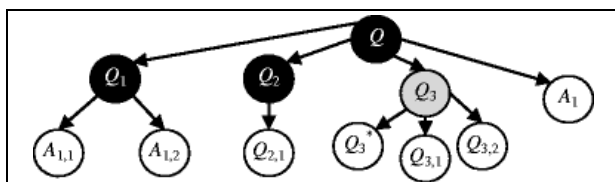


図1 SRP の樹形構造

(Winsløw et al., 2013, P. 271)

②メディア・ミリューの往還

SRP の特徴に,インターネット等のメディアの活用が前提となっていることがある。メディアの情報(データ D や回答 A^0)とミリューと呼ばれる学習者が収集した情報や既習の学習内容・知識等で組織されたものとを往還することによって回答が作り上げられる過程は,「メディア・ミリューの往還」と呼ばれ,探究を特徴付ける営みとされる。

4. 教授実験

次に,本研究で実施した教授実験の概要

と生徒の探究活動の様子について述べる。

(1) 実験の概要

以下では,本研究における教授実験にてどのような問いを設定し,それらをいかに実践したのかを述べる。

①問いの設定

SRP における最初の問い Q_0 は,探究者が疑問に思うような自然 (lively) な問いであり,そこから新たな多くの問いが生まれるような生成的 (generative) な問いであるとされる(宮川, 2017)。本研究では,以下のような日常の「待ち」を題材とした複数の Q_0 を設定した。

- ・ 渋滞の待ちに関する問い

Q_0 : 渋滞に巻き込まれるとどれくらいの時間を損する?

- ・ インターネットの待ちに関する問い

Q_0 : インターネットの高速化によって待ち時間はどれくらい減少したのか?

- ・ 行列の待ちに関する問い

Q_0 : (ラーメン店の) 客の待ち時間を減らすにはどのようにすれば良いか?

これらは,誰しも一度は遭遇したことがある「待ち」の場面であり,生徒自身も疑問に思うような問いであると考えた。また,深めようとするれば意外に深い探究が可能なものでもある。渋滞に関する問いは,渋滞のメカニズムを研究対象とする渋滞学という分野でも扱われうる問いであり,行列に関する問いは,待ち行列理論としてオペレーションズ・リサーチの研究分野に通ずるものである。さらに,インターネットの高速化による効果の検証も一つの研究対象となりうる。よって, Q_0 の一般的な条件である素朴さと生成力を併せ持った問いであると思われる。

②授業の概要

授業は,公立高校第3学年を対象とし,情報科「社会と情報」の中で全8時間の授業を

実施した。1クラス27名を対象として、3名1組のグループごとに探究活動を行った。授業展開は、以下のとおりであった。

第1時：授業説明、プレ探究

第1時は、まず、研究者の探究とはどのようなものか、そして本授業における教師の役割を生徒に説明した。また、本時はプレ探究という位置づけで行い、取り組むテーマは定めず、それぞれの待ちの場面に関して「なぜ待つのか？」といった素朴な疑問に自由に取り組ませる形をとった。

第2-5時：グループ活動

2時間目には、先述の Q_0 とそれらに関連する素朴な問いを幾つか提示し、各グループでそれぞれの関心に応じたテーマを1つ定めて探究することとした（4時間）。各グループが取り組んだテーマの内訳は、行列：3グループ、渋滞：2グループ、インターネット：4グループであった。

大半のグループは、 Q_0 に関連する問いについて、まずインターネットを用いて調べるといった活動が展開された。探究が進むに連れて、自ら計算して待ち時間を求めようとするグループやインターネット上に正解が必ずあると考え、終始調べ学習的活動を行うグループ等、様々な活動が見られた。教師は、探究活動のサポーターという役割に徹し、学習者の疑問を引き出したり、活動が停滞しているグループに、補助発問を与えたりした。

第4時の冒頭では、生徒に待ち時間の算出に目を向けさせるため、「どれくらい？」ということ意識して取り組むよう促した。それにより、メディアの探索が中心だったグループも数値を自分たちで計算するというような活動が起こった。第5時は探究活動のまとめの時間とした。

第6-7時：発表資料の作成

本実践では、プレゼンテーションソフト（以下、パワーポイント）を用いて生徒に

第5時までの探究活動の成果をまとめさせる時間を設けた。この学習は、そもそも情報科「社会と情報」の指導内容であった。

さらに、第6時のはじめに、発表のイメージを掴ませるため、SSHの研究発表や実際に研究者が行っている研究発表の映像を流し、より良い発表を目指すよう促した。資料の作成にあたっては、文字や図表の挿入・アニメーションの付け方等について、インターネットや情報の教科書を活用し、必要に応じて学びながら発表資料を作成する生徒の姿が見られた。

第8時：発表

最終時には、どのような問いに取り組み、最終的な回答はいかなるものになったのかといった各グループの探究成果を発表する活動を行った。発表の終わりには、質問タイムを設け、他の生徒から質問を募った。

5. 生徒の探究の分析

ここでは、本研究における実験データの分析方法と生徒の探究活動の様相について、その概要を述べる。

(1) 探究の分析手法

生徒の探究活動を分析する上では、まず、ATDの先行研究で用いられてきたQ-Aマップによる分析（Winslow et al., 2013；葛岡・宮川, 2018）を行い、生徒の探究の様相を包括的に捉えた。それらと併せて、探究活動において発生する知識とその学習を特徴づける新たな方法を検討した。具体的には、まず、プラクセオロジーの概念を拠り所に、数学科などの各教科で取り組むべきとされるプラクセオロジーと個々の生徒に取り組まれた私的なプラクセオロジーとで整理することで双方の関係を特徴づけ、いかなる教科学習が起こっていたのか分析した。そして、*didactic moment*の概念を拠り所とし、それらの学習の深まりを示した（詳細は修士論文を参照のこと）。

(2) 生徒の探究の様相

こうした分析手法に基づき、本研究では、渋滞・インターネット・行列の各テーマに取り組んだA班、B班、C班を抽出し、分析を行った。

以下では、各班の探究の概要をQ-Aマップで表し、その過程について述べていく。

① A班の探究活動（渋滞）

まず、渋滞における待ちをテーマとしたA班の探究の様相について述べる。A班は、メディア・ミリューの往還が活発に起こり、新たな数学的知識を学習したり、表計算ソフト(Excel)といった情報科でも扱われるツールを活用したりしながら探究を進めていった。探究の過程で生じた問いと回答を分析した結果、彼らの探究は図2のようなQ-Aマップで表された。

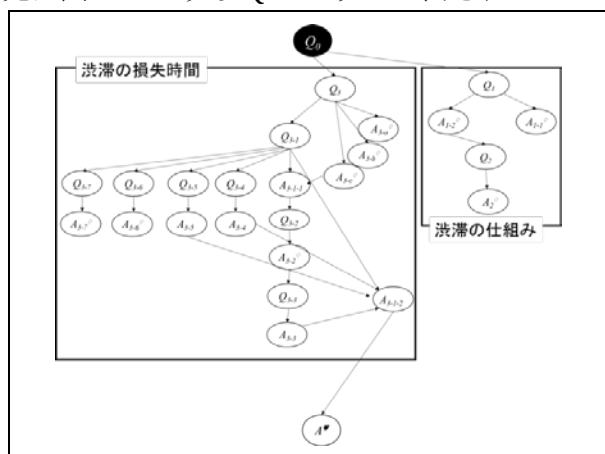


図2 A班のQ-Aマップ

この探究過程を簡単に説明しよう。A班はまず、渋滞の仕組みに関心を持った。具体的には、Q1（渋滞とは何か？）やQ2（なぜ渋滞が発生するのか？）といった問いに対してメディアを探索しながら取り組んだ。またQ0に対する回答をインターネットから探る中で、学術論文や国土交通省のデータなどを参照し、「渋滞損失時間」といった渋滞学で扱われる専門的な用語と出会った。その後、教師から示されたQ3-1（渋滞が50km発生すると、渋滞に巻き込まれた人が損失する時間の総計はどれくらいか？）に取り組み、渋滞の損失時間を求める活動へと移った。それらを求めるにあたって、メディアの情報や比例式等を立てて計算した結果を基に、「渋滞時の速度は5km/hとする」、「50km

の区間には5714台の車がある」、「渋滞を抜け出すのには、1台後ろに行くごとに1.75秒かかる」といった条件を定めた。そこで、生徒たちは、 $1.75+3.5+5.25+\dots$ というように、5714台分の待ち時間を総計すれば良いのではないかという考えに至った。教師からサポートを受けながら、グループ内で等差数列の性質を用いて計算する者と表計算ソフトを用いて算出する者とに分かれ、それぞれで回答を作り上げた。

ここでは、生徒は数列に関する知識を未習であったため、教師から等差数列の一般項や和の算出に関する講義が行い、生徒は初項0、公差1.75、項数5714の等差数列の和を求めた。また、Excelではデータの入力やSUM関数による演算が行われ、待ち時間の総和が算出された。これらの結果が一致したため、A班は「50kmの渋滞における待ち時間の総和は28563571.75秒である」を最終的な回答A*とした。

② B班の探究活動（インターネット）

次に、インターネットの待ちについて取り組んだB班の探究を取り上げる。彼らは、探究の中で数学的な活動はほとんど生じず、情報通信技術に関する調べ学習的な活動が中心であった。その様相は、図3のようなQ-Aマップで表すことができる。

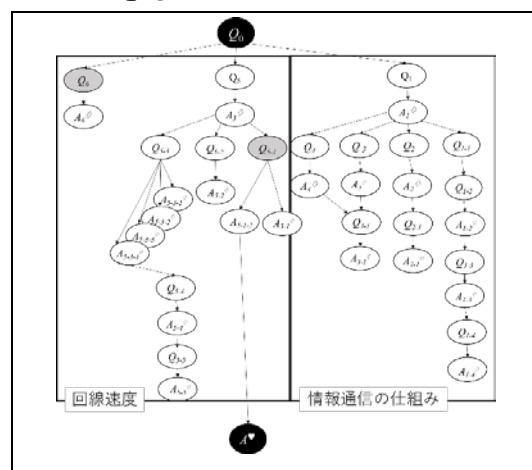


図3 B班のQ-Aマップ

B班は、メディアを探索する中で「ギガ」や「パケット」、「クラウド」といった情報通信技術に関する様々な用語に次々と出会い、それ

らの意味を理解する活動が展開された。

こうした問いに答えつつ最初の問い Q_0 に答えるために、回線速度に着目し、生徒は活動を進めていった。メディアを探索する中で、通信速度を示すデータ（回線速度は 3G（下り 14.4Mbps, 上り 5.76Mbps）, 4G（下り 150Mbps, 上り 50Mbps）である）を得て、「4G は 3G の速さの 10 倍である」という回答に至った。その後も回線速度に関して様々な情報を探索したが、この回答は変更されず、「待ち時間がどれくらい減少したのか？」という最初の問いに答える事なく、発表資料の作成へと活動が移った。探究の中で生じた疑問は、主にメディアを用いて解決された。

③ C 班の探究活動（行列）

三つ目の事例として、行列における待ちに取り組んだ C 班の探究の様子を述べる。彼らは、まず行列の待ち時間についてメディアを用いて調べるという活動に取り組んだ。その後、モデル図を作成する等して待ち時間の算出を試みるといったミリューと相互作用する場面も見られたが、最終的には、メディアを探索し、そこで得た情報を整理し、発表の資料を作成した。これらの過程は図 4 のように示される。

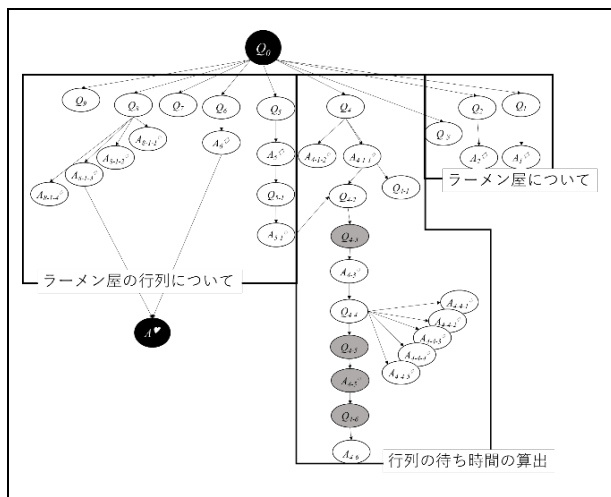


図 4 C 班の Q-A マップ

C 班は待ち時間を考えるにあたって、30 分～40 分の間であれば待てる人が多いというデータをメディアから入手し、その範囲で待ち時間が収まるような店の条件について考えた。リト

ルの公式という待ち時間を求める数式を活用しようと試みたり、営業時間や客数、食事の提供時間等の待ち時間の増減に関連するようないくつかの条件を定め、その中での待ち時間を求めようと、モデル図を作るなどする試行錯誤が起こったものの、算出することができず、結局 B 班と同様にメディアの情報を整理して発表資料を作成した。

このように、生徒が取り組む問いによって生じる探究の様相（メディアの探索が中心、ミリューとの相互作用が活発となる等）が異なるということが明確となった。

5. 考察

実験データの分析結果をもとに、本研究では、教科横断型 SRP における「生徒の活動の様相」、「生じる知識とその学習」、「問いの条件」という大きく分けて 3 つの視点から考察を行った。本稿では、紙面の都合上、その一部であるどのような学習が展開されたのかを取り上げ教科横断型 SRP の秘める可能性について述べるとともに、探究の様相や学習の深まりといった視点から SRP の課題について検討する。

(1) 教科学習の視点から

本研究では、数学科・情報科の教科書を分析し、そこで取り組むことが期待される学習が本実験からどの程度生じていたのかを分析した。まず、各班の情報科の学習をまとめると表 1 のように表される。

表 1 各班の情報科の学習

A	・変化の速さが一定の現象についてモデル化する ・(Excel で) 連続したデータを入力する／関数を用いてデータの合計を求める
B	・情報通信技術に関わる基礎的な内容（パケット等）を理解する
C	・待ち行列をモデル化する
共通	・情報を検索する ・パワーポイントの作成

このように、情報科で期待されるような学習活動はある程度生じていた。一方、数学科で期

待されている活動がある程度活発であったのは A 班の探究のみであった。彼らは、渋滞の損失時間を求めるにあたって現実事象をモデル化し、等差数列とみなして回答を作り上げた。ここでは、等差数列の一般項や和の性質を教師から学んでいる。つまり、A 班は数学科と情報科の学習を伴いながら探究を進めており、教科横断的な活動になっていたと言えよう。複数の教科の学習内容が必要性をともなうて生じた点は、SRP をよりどころとした教科横断型の探究学習の特筆すべき点である。

教科横断型 SRP の実践によって、数学科と情報科の両者を横断するような探究活動が実現可能であることが示された一方で、単一教科の学習に留まってしまうという課題も浮き彫りとなった。本実践の場合、B 班や C 班の探究では数学的活動が弱かったため、教科横断が実現されなかった。

(2) 探究の様相について

それでは、B 班や C 班ではなぜ数学的活動が発生しなかったのだろうか。これには、授業時数による活動時間の制約や生徒の数学への情意面等、様々な要因が関わっているものと考えられる。そうした数学的活動を妨げるいくつかの要因について以下では考察する。

まず、教科の枠組みによって発生する教授学的契約 (Brousseau, 1997) の影響について述べる。これまでの SRP の実験では数学の授業の枠組みの中で行われてきたのに対し、本研究では情報科の授業として実践した。そのため、「数学の授業だから数学をやらなければいけない」といった数学の授業特有の契約は働かず、「数学は必ずしもやらなくても良い」というようなルールが働いていたと考えられる。より活発な探究活動を生じさせるにあたっては、どのような教科の枠組みで授業を実践していくのかも考慮に入れる必要がある。

その一方で、そうした状況下でも A 班の

ように新たに数学的知識を学ぶというような活動が生じていることから、取り組む問いによっては、教授学的契約の有無に関わらず数学的活動が発生しうることを示されている。つまり、最初の問い Q_0 の質が生徒の探究に大きな影響を与ええるだろう。実際、B 班のようにメディアから入手した既存の回答のみで十分であると判断されてしまうと、数学的活動に取り組む必要性は生じない。より活発な教科横断を実現するためにはどのような問いを設定すべきかについては今後の研究で明らかにしていくことが不可欠である。

また、A 班のように新たな数学的知識を獲得しながら探究を進めていった場合であっても、「なぜその方法で解決できたのか?」といった問いに取り組み、生じた知識を掘り下げていくというさらなる数学学習につながる活動は展開されなかった。より深い学習を生じさせる上では、そうした「なぜ?」を追究していく活動が不可欠である。そうした活動をいかに主体的に取り組ませるかという点も今後の大きな課題である。

6. おわりに

本研究では、「待ち」を題材とした数学と情報の教科横断的な探究学習を設計・実践し、生徒の探究を分析することで、どのような活動が生じ、その中でどのような学習が実現されるのか、その可能性を探った。ねらいとする教科横断的な学習が生じる場合もあれば、調べ学習的に留まってしまう場合もあった。より豊かな学習を生じさせるような手立てを構築していくことが今後の大きな課題である。

引用・参考文献

- 市川伸一 (1998).『聞かれた学びへの出発—21 世紀の学校の役割』(子どもの発達と教育 6). 金子書房.
- 葛岡賢二・宮川健 (2018).「教科横断型 SRP

- における数学的な活動－「世界人口総和問題」を題材にした中学校での実践－. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 24 巻, 第 1 号, pp. 159-162.
- シュバラル (2016). 大滝孝治・宮川健訳 「《翻訳》明日の社会における数学指導－来たるべきカウンターパラダイムの弁護－」. 上越教育大学数学教育研究, 第 31 号, pp. 73-87.
- 関口靖広 (2002). 探究的活動のための証明.『数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録』. 日本数学教育学会. pp.181-184.
- 長崎栄三・国宗進ほか 17 名 (2006). 現在の学問や職業で使われている算数・数学「数学教育に関する研究者調査」の結果の分析-, 日本数学教育学会誌, 第 88 巻, 第 3 号, pp. 29-43.
- 西村圭一・松原憲治・上野耕史 (2015). 科学技術的意思決定能力の育成をめざす教科横断的アプローチに関する研究－COMPASS 教材の分析を通して－. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 39 (2), pp. 77-85.
- 野添生・天野秀 (2016). 教科間連携を図った中学校理科における授業実践研究－「密度」を題材にした理科と数学の相関カリキュラムの開発を中心として－. 日本科学教育学会研究会研究報告, 31 (2), pp. 27-30.
- 濱中裕明・大滝孝治・宮川健 (2016). 「世界探究パラダイムに基づく SRP における論証活動 (2)－電卓を用いた実践を通して－」. 全国数学教育学会誌『数学教育学研究』, 第 22 巻, 第 2 号, pp. 59-72.
- 松原憲治・高阪将人 (2017). 資質・能力の育成を重視する教科横断的な学習としての STEM 教育と問い. 日本科学教育学会誌『科学教育研究』, 41 (2), pp. 150-160.
- 宮川健 (2011). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格－わが国における「学」としての数学教育研究をめざして－」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, 第 94 巻, pp. 37-68.
- 宮川健 (2017). 「世界探究パラダイムに基づいた SRP と「問い」を軸とした数学学習」. 日本数学教育学会第 5 回春期研究大会論文集, pp. 173-180.
- 文部科学省 (2018). 『高等学校学習指導要領解説 総則編』. 東洋館出版社.
- 渡辺美智子 (2011). 科学的探究・問題解決・意思決定のプロセスを通して育成する統計的思考力. 日本科学教育学会誌科学教育研究, 35 (2), pp.71-83.
- Bosch, M., & Winsløw, C. (2016). Linking problem solving and learning contents: the challenge of self-sustained study and research processes. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 35 No.3, pp. 357-401.
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 - 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Chevallard, Y. (2002). Les TPE comme problème didactique. In T. Assude & B. Grugeon (Eds.) *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques 2001* (pp. 177-188). Paris: IREM de Paris 7 et ARDM.
- Chevallard, Y. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée*, (Lyon, mai, 2004). (<http://yves.chevallard.free.fr>)
- Chevallard, Y. (2009). La notion de PER: problèmes et avancées. Texte d'un exposé présenté à l'IUFM de Toulouse le 28 avril 2009. (<http://yves.chevallard.free.fr>)
- Winsløw, C., Matheron, Y., & Mercier, A. (2013). Study and research courses as an epistemological model for didactic. *Educational Studies in Mathematics*, 83(2), pp.267-284.

算数・数学科の自力解決・討論型授業における 教師の役割に関する一考察

武田 太久実

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

今日の社会の変化は急速なものとなっており, 我々を取り巻く社会構造は, 一層複雑なものとなっている. 例えば, 生産年齢の人口減少, 人工知能の飛躍的進化などが, 今日の社会の様相を代表するものとなっている. こうした変化に伴って, 学校教育も変化が求められることは必然的である. この点について学習指導要領(文部科学省, 2018 et al.)は, 子供たちが多様な変化に積極的に向き合い, 他者との協働的な課題解決を行うこと, 知識の概念的理解を通して情報を再構成し新たな価値を創造すること, 状況変化の中で目的を再構成することなどが可能となることが学校教育に求められていると述べる. また同時に, この点は「本来, 我が国の学校教育が大切にしてきたこと」(文部科学省, 2018, p.1)であると述べる. しかし, 文部科学省(2018)によれば, 現在の学校が抱える諸課題によって, その実現は困難なものとなっている現状にある.

では, 我が国がこれまでにどのような授業実践を通して, 上記の子供の姿を目指したものでしょうか. 算数・数学授業について, 授業方法に着目すれば, 我が国の特徴的な授業方法として「自力解決・討論型授業」(湊, 2018)が挙げられる(Stigler & Hiebert, 2002). この自力解決・討論型授業における学習は, 主

体的であり, 創造的であり, 発明が為されるものである(湊, 2018). つまり, 算数・数学科の授業における主体的学習(湊&濱田, 1994)を保証する授業方法である.

一方で, 高橋等(印刷中)によれば, 算数・数学科における自力解決・討論型授業の実際は, 幾つかの様相が見られる. 具体的には, 子供たちの主体的な学習と称していながら, 教師によって意図された内容に子供たちが誘導される学習活動や, 子供たちが自由に学習を行い, 教師は傍観者となる学習活動などがある. ここに挙げた例は極端な授業方法の例ではあるものの, このような極論は授業を計画・実行する教師に対して一種の明瞭感を与え得ることから, 極論的な実践は実際に試みられていることが推測される.

先に挙げたように複雑に, かつ急速に変化し続ける社会において, 算数・数学科の自力解決・討論型授業で教師は, どのような役割を果たし得るだろうか. そこで本稿は, 算数・数学科における自力解決・討論型授業での望ましい教師の役割を捉えることに関わる視点を明らかにすることを目的とする.

本稿の研究方法は文献的手法である. 算数・数学科の自力解決・討論型授業における教師の数学観として整合的な立場である社会的構成主義(Ernest, 2015)に立脚する. この Ernest(2015)の社会的構成主義の数学観

に基づき、子供たちの算数・数学の学習活動を、子供たちによって主体的に行われる数学的知識の社会的構成過程と捉える。この数学的知識の社会的構成過程が行われる共同体としての「社会」は、算数・数学授業においては、学級もしくは学習集団である。しかし、算数・数学授業における「社会」の様相を記述した研究は、私の知る限りでは見られない。本稿では、この「社会」の観念について Goffman(1985)から知見を得て記述し、自力解決・討論型授業における教師の役割を考察する。

2. 自力解決・討論型授業

本稿で用いる算数・数学科における「自力解決・討論型授業」の語は、湊(2018)の算数・数学の授業三型論に基づく。授業三型論は、授業の型と教師の数学観との対応を明らかにした論である。

湊(2018)は、算数・数学授業を三つの型に分類した。ここで論じられた型は、講義型授業、問答型授業、及び自力解決・討論型授業である。講義型授業は、数学の論理が支配的な授業であり、教師中心、教師主導の授業展開が為されて、子供はそれに従う構造となる。子供の主体性は無視され、彼らは知識を受動的に注入される立場にある。また、問答型授業では、数学の論理と学習者の心理の両者が考慮される。教師は子供へ発問を行い、また子供からの声に応答することによって授業を展開する。この過程を経て子供は数学的知識を発見する。この学習は自発的・自主的な形態を成す。これらの授業の型は、教師のプラトンの数学観と整合的な関係にある。この数学観は、数学的知識の絶対主義的な見方であり、授業の場面においては子供たちの心理を考慮することがない見方であるため、子供

たちの主体的学習を保証しない(湊&濱田, 1994)。

一方で、自力解決・討論型授業では学習者の心理の教育が目的となる。そして、学習者の学習は、主体的であり、創造的であって、発明が為されるものである。この自力解決・討論型授業に対応する数学観は社会的構成主義であり、数学の内容や学習の方法は自由度があるものである。また、数学教師は指導者、援助者としての役割をもっており、学習者に対して成功的教育を期待する者である。

また、自力解決・討論型授業は実際的には多様な取り組み方があり得る。高橋等(印刷中)は、教師の関与とそれに伴う子供の学習活動に関して自力解決・討論型授業を更に三つの型に分類する。教師の関与が大いにあり、子供の学習活動が方向付けられる授業を型Ⅰとし、対極的に教師は傍観者的であり子供が自由に学習活動をする授業を型Ⅲとする。但し、型Ⅲには亜型がある。型Ⅲの亜型は、教師が単なる傍観者となるのではなく、机間巡視及び個別指導を行うというものである。そして、これら二者の間を型Ⅱと表す。この型Ⅱは、「学習指導案を用意したとしても、教師の想定を超える子ども達の反応にも適切に対応し、教師も子ども達と同じ重みで授業に参加する」(高橋等, 印刷中)授業である。更に方法に関して具体的には「教師が仕組んだ問題解決の展開を遥かに超えた活動を子ども達は行い、教師の司会のもとで、時には子ども達同士で率直に討論し数学的知識を発展、洗練させ、一応の結論に収束させていく」(高橋等, 印刷中)ものである。この型Ⅱと表現される算数・数学授業が、子供の数学的知識の構成が主体的に行われることを促し、時として教師の想定を超えた子供の反応にも応え得るものである点で、望まし

い自力解決・討論型授業であると高橋等(印刷中)は述べる. このような型Ⅱの自力解決・討論型授業が本質的に社会的構成主義に基づく算数・数学授業であるという.

3. 社会的構成主義の数学観

算数・数学授業の自力解決・討論型授業における教師の数学観は, 社会的構成主義と整合的な関係にあるものであった. 仮にプラトンの数学観を教師がもって自力解決・討論型授業を行った場合, それは単なる真似事に留まる. プラトンの数学観においては自力解決・討論型授業における対話的な活動の必要性は全く以ってないからである(湊, 2017).

社会的構成主義の数学観は, 規約主義と準経験主義の見方を推敲し, 発展的に含む構成主義の数学観である. この数学観では数学を社会的構成物として見なす(Ernest, 2015). Ernest(2015)は, 社会的構成物として数学を記述することの根拠として, 次の三つの要素を挙げる.

- 1) 数学の知識の論拠は, 言語の知識, 規約, 規則であり, 言語は社会的構成物である.
- 2) 個人間の社会的な過程は, 個人の数学の主観的知識を, 公表後に, 認められた数学の客観的知識に変えるために必要である.
- 3) 客観性そのものが社会的なものと理解される.

(Ernest, 2015, p.76)

この三つの要素に基づく社会的構成主義の数学観の主たる焦点は, 数学的知識の発生にある. 社会的構成主義の数学観では, 数学の主観的知識と数学の客観的知識が互いに

更新に貢献する循環の中で, 両者の知識を結び付けた相互連関的で社会的な過程(図 1)を考える.

この社会的構成主義の数学観では, 個人は数学の主観的知識を有するという前提に立脚する. また, 数学の客観的知識については, 個人が属する「社会」において受容された数学的知識を指す. これらの数学的知識の構成は図 1 のような社会的で対話的な過程によって為され得る.

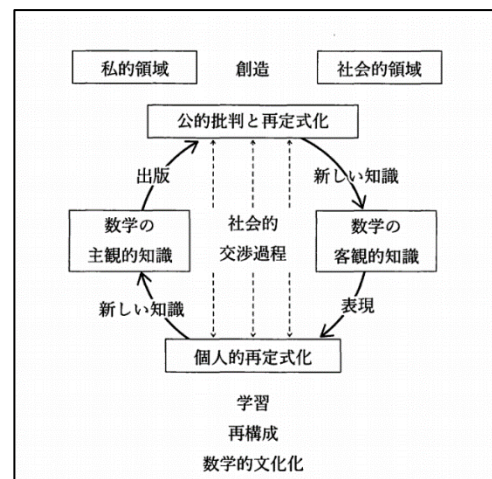


図 1. 数学の客観的知識と主観的知識の関係 (Ernest, 2015, p.138)

また, 数学的知識の社会的構成過程は, それぞれの規模の「社会」によって生じ得る. この点については, 数学的文化化論(Bishop, 2011)が示唆的である. 数学的文化化論は, 文化人類学的アプローチで人間の数学文化の発展を論じたものである. この論は社会的構成主義と同様に数学的知識の基盤に言語を置く. また, 数学的文化化論の「文化の学習」(Bishop, 2011, p.154-155)の過程は, 「人と人との間柄的」(Bishop, 2011, p.205)な関係を通して為されるものであり, 社会的構成主義の数学観における数学的知識の社会的構成過程と対応する. そして, 数学的文

文化論においては、文化を三つの水準(専門技術的水準, 定型的水準, 非定型的水準)で捉えている。これら三水準における数学的活動は相互に関連した関係にあり、どこかひとつの水準の数学が失われたならば、他の水準での数学も失われる(湊, 2017)。本稿では、この三水準で各々の数学的知識の社会的構成が生じ得ると考える。本稿の主題である算数・数学授業の自力解決・討論型授業は、定型的水準における数学的知識の社会的構成過程である。定型的水準では広く一般の人々が数学を扱う水準である。この水準においては「言語・記号化と概念化の使用は慎重で、意識的、かつ明示的であり、諸価値は前提とされ支持される」(Bishop, 2011, p.150)ものであり、算数・数学授業はこの文化の水準で子供たちが文化化されることを目標とするものとなる。つまり、算数・数学授業における数学的知識の社会的構成過程は、数学者らの専門技術的水準ではなく、定型的水準における営みとして捉えることが妥当である。

算数・数学授業の自力解決・討論型における数学的知識の社会的構成過程を定型的水準における営みとして捉える際には、数学的文化化論における文化群、社会的構成主義における「社会」の観念を明らかにしなければならない。定型的水準は広く一般の人々が参加するもの、つまりは相違に異なる個々人によって形成される多様性に満ち溢れた集団である。Ernest(2015)は大局的な視座から社会的構成主義の数学観を記述したため、この個々人の相違性を含意した「社会」の観念を記述していない。ゆえに、望ましい算数・数学の自力解決・討論型授業を捉えるためには、個々人の相違性を含意した「社会」の観念から学級、学習集団などを捉える視点が必要である。

4. 役割理論

個々人の相違性を含意した「社会」の観念を記述するための視座として、本稿では社会学の理論である Goffman(1985)を採用する。社会的構成主義の数学観に立脚したとき、子供が数学を扱う「社会」へと参入することが求められる。ある主体が社会へ参入するとは、主体はその社会において自身の役割を獲得し、行為することであるという見方を本稿は行う。そこで、社会に参加する個人が演じる役割について論じた Goffman(1985)に依拠する。

まず、役割という観念は、人間同士の相互的な関係のなかに生じ得る。独りの人間がそこに存在するだけでは役割の観念は生じ得ない。また同様に複数人の人間が単に集まっただけに過ぎない集まりのなかで役割の観念は生じ得ない。Goffman(1985)は、人間が役割を演じ得る関係が生じる集まりを「出会い」と表現し、その様相を記述した。そして、役割を始めとした人間の相互干渉から生じる行為が行われる集まりを人間が居合わせただけの集まりと区別した。複数人の人間によって形成される集まりのうち、知覚的焦点を共有した集まりを「出会い」と呼称する。この「出会い」のなかで人間は、単一の知覚的焦点を共有している他、相互に観察し合い、それに応じた行動を行うような生態学的な群れ方をする。加えて、「出会い」は言語的コミュニケーションを他者との間で執り行うことが可能な関係にあるものを指す。

Goffman(1985)が述べる「出会い」は、社会的構成主義の数学観における数学的知識の社会的構成過程が生じ得る社会、共同体を説明する。社会的構成主義の数学観において、数学的知識の論拠は言語の知識、規約に基づくものであった。そして、数学的知識が客観

的であるとは、「社会的に受容され検討のために公的に入手できる」(Ernest, 2015, p.62) ことにある。この点に基づけば、数学的知識の社会的構成過程を行う社会、共同体は、言語的コミュニケーションが成立する集まりでなければならない。Ernest(2015)は、この点を後期 Wittgenstein 哲学の言語ゲームを用いて説明する。この言語ゲームの見方に基づけば、主体間で行われる言語的コミュニケーションは、その主体らの生活形式が一致していることが求められる。生活形式が一致していない主体間では、同一の言語を用いても言語的コミュニケーションは成立しない。この「生活形式の一致」が表現する状況のうち基礎的な部分を「知覚的焦点の共有」と私は解釈する。例え主体間に媒介物を介していたとしても、知覚的焦点を共有することなしには言語的コミュニケーションは成立し得ない。知覚的焦点を共有しているからこそ、主体間で言語的コミュニケーションという意味伝達が可能であると考ええる。また「生活形式」は、この知覚的焦点についての議論だけではなく、本稿で後述する役割といった社会的な関係性などの要素も含むものであると解釈し、私は知覚的焦点を「生活形式」が表現する「基礎的な部分」と表記する。

ここまでのことから、社会的構成主義の数学観における数学的知識の社会的構成過程を行う社会、共同体は、Goffman(1985)の「出会い」の見方から捉えることができる。

本稿では Goffman(1985)の「出会い」について、その形成化の過程に着目する。これは、算数・数学の自力解決・討論型授業を考えるにあたって、学級もしくは学習集団が「出会い」を形成していなければならないためである。「出会い」を形成していない集まりは、即ち知覚的焦点を共有していない集まりで

あり、そこで自力解決・討論型授業を行おうと試みても、実際的には学級崩壊の状況となり得る。Goffman(1985)は「出会い」の形成化に関して、三つの視点を記述した。この三つの視点を集まりのなかに認められるとき、その集まりは「知覚的焦点を共有している」状況にあり、即ち「出会い」と見なすことが可能な集まりとなるのである。

第一の視点が「無関連のルール」である。集まりを形成する主体間で知覚的焦点を共有していることは、同時に主体間で共有している知覚的焦点とは異なる対象には無関心であるという状況である。つまり、「出会い」を形成する主体間では、知覚の対象として除外するものは何かという無関連のルールを適用させることによって、互いの知覚的焦点の共有を図っているという見方である。

第二の視点が「具現化されるリソース」である。知覚的焦点を共有した主体による相互的な諸活動は世界を構築する。その世界は主体が参加する「出会い」のなかに限られた意味を有するものである。ここで生み出された世界で主体は各々の機能を果たし、更に次の世界を構築する。この過程で生じる出来事や役割といった世界を具現化した事柄を「具現化されるリソース」と呼ぶ。これが見られるとき、主体は「出会い」を形成していると思えることができる。

第三の視点は「変形ルール」である。これは、「出会い」のなかの主体間で具現化されるリソースの配分関係を捉える視点である。「出会い」に参加する主体は、その「出会い」に属するだけではなく、家族や友人関係などといった集まりにも同時に参加している。そして、「出会い」において「ほとんどすべての外部に基礎を置く事柄が、公式には無関連なものとして扱われる」(Goffman, 1985,

p.19)というルールを主体は適用する．これを適用することによって，主体は知覚的な情報を限定し，知覚的焦点の共有を図る．

これら三点が見られる集まりであるとき，それは「出会い」と呼ばれる集まりであり，数学的知識の社会的構成が可能な集まりを形成しているといえる．つまり，算数・数学の自力解決・討論型授業が機能している場合は，これら三点の様相を見ることができる．

続いて，「出会い」を形成する主体に焦点をあてた「役割」(Goffman, 1985)の視点を整理する．Goffman(1985)は，役割について次のように述べる．役割とは「在職者が，彼の位置にある者に課せられる規範的な要請との関係だけで行為しなければならないとした場合に，携わるであろう活動からなるもの」(Goffman, 1985, p.85)である．算数・数学授業であれば，教師や学習者(児童・生徒)は，役割の典型的な例である．教師や学習者という役割は，算数・数学授業という「出会い」を組織づくる制度から規範的に生じる者であると同時に，算数・数学授業のなかでの諸活動から具現化されたリソースのひとつでもある．

しかし，主体は規範的な役割を単に演じることがない．先述の変形ルールの適用と主体が有するアイデンティティとの兼ね合いから，規範的な役割とは差異がある役割行為を主体は実行する．Goffman(1985)は，特に主体のアイデンティティに起因して実際に行われる役割が規範的な役割と差異があることに着目し，その差異を「役割距離」と表現した．役割距離とは，「個人とその個人が担っていると想定される役割の間にこの『効果的に』表現される鋭い乖離」(p.115)のことをいうものである．この役割距離の観念は，個人の「自分らしさ」を表現する目的で示され

るものと解釈することもできる．規範的な振る舞いが求められる場面において，そこから生じる規範的な役割を「演じるふり」を行うことで，周囲から付与される期待，イメージを回避する．これは，その個人が自己の成功的イメージと異なる役割が求められたときに，ある程度それに従いながらも役割距離を示すことによって，その社会への抵抗や自己イメージの表現を試みていると考えられる(沼田, 2012)．

ゆえに，社会，共同体における主体の役割距離を捉えることは，その集まりの様相を個人の相違性を踏まえて捉えることになる．つまり，Ernest(2015)が社会的構成主義の数学観において記述しなかった個人の相違性を踏まえた社会，共同体の記述は，規範的な役割とそれに応じて生じる役割距離の視点から行うことが可能である．

5. 算数・数学科の自力解決・討論型授業における「社会」の様相と教師の役割

前節の出会い・役割・役割距離の視点から，算数・数学の自力解決・討論型授業における「社会」の様相を記述する．

社会的構成主義の数学観に基づく算数・数学の自力解決・討論型授業の先行研究として高橋悦美(1994)がある．この研究では，算数・数学授業における数学的知識の変容過程を次のように表現した．「① 一人ひとりの引き出す主観的知識 → ② 公表，批判と再定式化 → 小グループでの合意領域内の準客観的知識 → 個人的な再定式化 → 準主観的知識 → ③ 公表，公的な批判と再定式化 → クラス全体での合意領域内の客観的知識 → 個人的な再定式化 → 一人ひとりの主観的知識 → …」(p. 449, ①から③は加筆)と表現し，三つの局面で「教師の教授」としてその

役割を示した。①では「課題提示」、②では「机間巡視」、③では「クラス討議への参加」と示す。

高橋悦美(1994)が示した算数・数学授業における教師の役割は、社会的構成主義の数学観に基づいた自力解決・討論型授業の規範的な役割である。しかし、Goffman(1985)の知見に基づけば、すべての教師が全くの同質的に規範的な役割を実行することではなく、また同様に子供たちも授業のなかで求められる役割を教師が期待するままに実行することはあり得ない。算数・数学授業に参加する教師と子供は、自己のアイデンティティに基づいて規範的な役割とは多かれ少なかれ役割距離を示す行動を実行し得る。この役割距離が示される行動によって形成される算数・数学授業の様相は、参加者の個性とも呼ぶべき要素を含んだものとなる。このとき、教師は規範的な役割とされる振る舞いをそのまま実行することは妥当ではない。子供の役割距離を示した振る舞いに対して、規範的であるとされる役割を行うことは、役割距離を示す子供の心理を考慮した役割行為とは言えず、主体的学習(湊&濱田, 1994)を保証する自力解決・討論型授業とは言えない。この規範的な役割の行為を遵守しようと過度に子供たちの活動に介入していく場合は、自力解決・討論型授業の方法を採っていないながら学習指導案通りに進める形態であり、高橋等(印刷中)が述べる自力解決・討論型授業の型Ⅰに相当するものである。一方で、算数・数学授業において子供の役割距離を示す行為に対して、子供の自由度を保ったまま、個別に対応するような場合は型Ⅲの亜型に相当する役割行為である。これらの点から、教師の役割は、算数・数学授業に参加する子供に対して、規範的な役割を淡々と実行することだ

けではなく、規範的な役割を無視した行為を実行することも、子供の主体的学習を保証する望ましい自力解決・討論型授業における教師の役割とはいえない。

算数・数学の自力解決・討論型授業における教師の望ましい役割では、規範的な役割を主軸としながら、授業への参加者の役割距離を示す行為によって生じる状況に応じた役割行為を行うことが求められる。但し、状況に応じた役割行為は、単なる場当たりの行為ではない。この役割行為で求められる点として、高橋悦美(1994)が示す自力解決・討論型授業の活動が実行可能な「出会い」を形成することを目的とすることである。例えば、規範的な役割である「課題提示」は、Goffman(1985)に基づけば、算数・数学授業のなかで扱う課題に対して全員が知覚的焦点を共有することを目的とするものである。このとき、子供の中には課題を解決できないことで自分が有能ではない学習者という役割を周囲から付与されることを回避するために、教師の課題提示を見ないことで課題に興味がない学習者を演じ役割距離を示す者がいる。このとき、教師はこの子供との間に自力解決・討論型授業の活動が実行可能な「出会い」を形成する役割行為が求められる。例えば、教師は提示した課題が示す状況を演示するという場面を設定し、その子供を演示の助手として指名することで、子供に「課題把握をする学習者」とは異なる「課題の状況の演示者」という役割を付与することによって、その子供は他の子供たちに課題の状況を伝えることを通して、算数・数学授業の課題に対する知覚的焦点を共有し、教師や他の子供との間に算数・数学授業を行う「出会い」を形成することを教師は意図する。

このように自力解決・討論型授業における

教師の役割は、高橋悦美(1994)が示す規範的な役割に加え、それを支える状況に即した役割行為が必要である。

6. 結語

本稿では、自力解決・討論型授業における教師の役割について二種の役割を行為することが望ましいことを述べた。但し、その役割の配分を如何にするべきかを言及していない。そこで今後の課題として、社会的構成主義に立脚する熟達した教師を観察し、そこで生じている状況と教師の役割の配分との関係について考察を行うことが挙げられる。

参考・引用文献

- Bishop, A.J. (1988). *Mathematical Enculturation: A Cultural Perspective on Mathematics Education*. Kluwer Academic Publishers. (アラン, J. ビショップ. 湊三郎(訳). (2011). 数学的文化化—算数・数学教育を文化の立場から眺望する—。教育出版。)
- Ernest, P. (1991). *The Philosophy of Mathematics Education (Studies in Mathematics Education)*, The Falmer Press. (アーネスト, P. 長崎栄三, 重松敬一 & 瀬沼花子(監訳). (2015). 数学教育の哲学. 東洋館出版社。)
- Goffman, E. (1962). *Encounters: Two Studies in the Sociology of Interaction*. The Bobbs-Merrill Company, Inc. (ゴッフマン, E. 佐藤毅, 折橋徹彦(訳). (1985). 出会い. 誠信書房。)
- Goffman, E. (1963). *Behavior in Public Places*, The Free Press of Glencoe. (丸木恵祐, 本名信行(訳). (1980). 集まりの構造. 誠信書房。)

湊三郎. (2017). 数学の哲学と数学的文化化論に基づき算数観念を同定する試み. 数学教育学論究 109, 3-24.

湊三郎. (2018). 算数・数学の授業三型論—その正統版として—。日本数学教育学会誌 100(8), 3-13.

湊三郎. & 濱田眞. (1994). プラトンの数学観は子供の主体的学習を保証するの—数学観とカリキュラム論との接点の存在—。日本数学教育学会誌 76(3), 2-8.

文部科学省. (2017). 小学校学習指導要領解説 算数編. 日本文教出版。

文部科学省. (2017b). 中学校学習指導要領解説 数学編. 日本文教出版。

文部科学省. (2018). 高等学校学習指導要領解説 数学編 理数編. 学校図書。

沼田葵. (2012). 算数授業への参加に困難性をもつ子どもへの教師の手立て. 上越数学教育研究 27, 87-94.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching Gap*. NY: The Free Press. (ステイグラー, J. W., & ヒーバート, J. 湊三郎(訳). 日本の算数・数学教育に学べ—米国が注目する jugyou kennkyuu—。教育出版。)

高橋悦美. (1994). 主体的学習と社会的構成主義に立つ学習との関連. 数学教育論文発表論文集 27, 445-450.

高橋等. (2019). 小学生期から中学生期の数学的アイデンティティの形成—役割の獲得に着目した解釈から—。第 52 回秋期研究大会発表集録, 113-120.

高橋等. (印刷中). 数学的知識の社会的構成主義に基づく授業における教師の役割. 上越教育大学からの提言 5 (仮題). 上越教育大学出版会。

非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計

高橋 勇介

上越教育大学大学院修士課程 2 年

1. はじめに

中学校数学では, 論理的思考力の育成や数学的な推論に関する理解の観点から, 証明は重要な学習内容として位置づけられている. 一方, 長年証明は生徒の苦手な単元の 1 つであり (例えば, 小関ら, 1978 ; 国宗, 2000), 直近 5 年間の全国学力・学習状況調査 (国立教育政策研究所, 2015 ~ 2019) の結果を見ても, 証明の学習状況は現在も好転していない.

筆者は, このような証明学習の現状を改善するためには, 生徒が意欲的に証明学習に取り組めるようになる必要があり, そのためには生徒が「証明とは何か」について理解することが重要であると考えている.

ここで数学における証明について概観すると, 証明は古代ギリシアで誕生した知的営みであり, 証明によって多様な数学体系が創り上げられてきた. そして, この数学の発展において重要な役割を果たしたのが「前提」の存在である. この前提に関して, Fawcett (1938) は, 生徒が演繹的証明の本性を理解しているかどうかの判断項目の 1 つとして,

「前提や証明されない命題の必要性」の理解を挙げている (p. 10). このような指摘から, 学校数学において前提に関して学習することには教育的な価値があることが示唆される.

小学校以降, 生徒たちは様々な図形の種類やその性質を学習する. しかし, 現在の学習内容において, 学習した図形が平面上に存在するという前提に疑問を差し挟む余地はない.

そこで本研究では, 非ユークリッド幾何学に着目したい. 非ユークリッド幾何学は, 2000 年以上もの間絶対的な幾何学と信じられ続けてきたユークリッド幾何学の第 5 公準である平行線公準の否定により成立した幾何学体系である. この非ユークリッド幾何学の成立により, 平行線公準は真実としてではなく前提としてみなされるようになった. すなわち, 非ユークリッド幾何学と前提は密接な関係にある. したがって, 非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通じて, 前提の存在や生徒にとってなじみのない幾何学における図形の種類やその性質, 性質が成り立つことの証明について学習することは, 図形や「証明とは何か」についての理解につながる意味のある活動であると筆者は考える. しかしながら, 中等教育, 特に中学校における非ユークリッド幾何学を教材とした授業実践の先行例はほとんど見られない.

本稿の目的は, 非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計することである.

2. 非ユークリッド幾何学を教材として扱うことの意義

本章では, 非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計する前に, 非ユークリッド幾何学を授業の教材として扱うことの意義について, 種々の先行研究をもとに論じていく.

(1) 平面幾何学の理解の深化

非ユークリッド幾何学の代表例として、ユークリッド幾何学の平行線公準の代わりに

「点 P とそれを通らない直線 l について、点 P を通って l と交わらない直線は 1 本も引けない」という公準を採用した、球面幾何学が挙げられる。この球面幾何学を教材として取り入れるためのモデルである「Lénárt Sphere」を開発したLénárt (1996) は、「Lénárt Sphere」のカリキュラムの主な目標の 1 つに、「平面幾何学の概念と定義を、球面幾何学で対応する概念と定義と比較して明らかにすること」を挙げている。これはすなわち、非ユークリッド幾何学と生徒が既に学習している平面幾何学とを比較することで、平面幾何学に対する理解が深化されることを意味する。例えば、線分を「2 点を結んだ真っすぐな線」と定義すると、球面が曲がっているため、球面における線分を定義することはできない。しかし、「2 点を最短距離で結ぶ線」と線分を定義すると、球面における線分はその 2 点を通る大円の劣弧として定義することができる。現行の教科書では、「2 点を通る真っすぐな線」である直線の一部として線分が定義されているが、この「真っすぐ」を最短距離と結びつけることで、球面における線分が定義されるのである。よって、球面における線分を定義する活動を通じて、平面における線分の認識を上記の 2 通りに拡張することができると予想される。

また、砂田 (2016) は、球面幾何学が教材として扱われていた昭和 18、19 年に出版された教科書「数学 第二類」における球面三角形の教材に関する考察において、「平面三角形とは異なる球面三角形を知ることによって、平面三角形の前提や平面幾何の性質について見直すことに繋がる」(p.444) と述べている。

以上のことから、非ユークリッド幾何学の学習を通じて、既習の平面幾何学の理解が深まることが期待される。

(2) 相対的な真理観の獲得

非ユークリッド幾何学が成立したことで、それまでのユークリッド幾何学に対する絶対的な見方は失われ、前提を変えることで様々な幾何学体系が誕生するという相対的な数学観が生まれた。この相対的な数学観は、非ユークリッド幾何学の発見によって生じた数学に対する新たな見方である(瀬山, 2019)。

この相対的な数学観に関して、國本 (2009) は、非ユークリッド幾何学が発見されたことで「ユークリッド神話(自明の心理から出発し、厳密な証明によって進むならば、確実に客観的で永遠である知識に到達するという信念)からの脱却が行われた」(p.55) と述べ、推論指導において、数学を従来の数学観である「結果としての数学」ではなく「活動(創造過程)としての数学」として認識することの重要性を指摘している。

砂田 (2016) は、「数学 第二類」において球面三角形は真理の相対性を教えるために扱われていたことを明らかにした。また、生徒自らが球面三角形の面積を求める式を作り、その式から球面三角形の内角の和が 180° よりも大きくなることを導き出すことで、数学は創り上げることができるという数学観の獲得に繋がることを主張した。

このように、相対的な真理観の誕生に深くかかわっている非ユークリッド幾何学を授業の教材として扱うことで、生徒が相対的な真理観を獲得することが期待される。

3. 非ユークリッド幾何学を教材とした授業に関する先行研究

ここでは、非ユークリッド幾何学を教材とした授業実践に関する先行研究を概観し、非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計にかかわる示唆を得る。

3.1. Ada (2013) の研究

Ada (2013) は、被験者である算数・数学の

教員を目指す大学1年生40名が、ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学における円などの基本概念間の関係や類似点、相違点をどのように認識するかを明らかにすることを目的として、ユークリッド幾何学における距離の定義のみを変えた非ユークリッド幾何学の1つである Taxicab Geometry(タクシー幾何学)を教材とした授業実践を計6週間に渡って実施した。具体的には、タクシー幾何学における距離(タクシー距離)や円(タクシー円)の探究をはじめとして、現実場面での応用なども取り扱われた。

そのうちのタクシー円の探究では、多くの生徒がある点から一定距離だけ離れた点の集まりがユークリッド幾何学では円、タクシー幾何学では正方形であることに気付くことができた。一方で数名の生徒は、タクシー幾何学におけるそのような点の集まりをひし形であると述べた。この原因として、Ada(2013)は、距離の概念と円の定義との関係の理解が不十分であったことやユークリッド幾何学における正方形がタクシー幾何学では円になることへの抵抗感があったことを挙げている。

一連の活動を通じて、Ada(2013)は、生徒にとって実生活における距離がタクシー距離であることは非常に革新的であったことや、幾何学は1つであるという前提を持っていた生徒が結果的に他の幾何学も存在する可能性があることに気付いたことを示した。

3.2. 辻ら(2016)の研究

辻ら(2016)は、「高校数学の活用が実感できる活動を通して、生徒が数学を学ぶ必要性を感じ、学習への関心や意欲の向上を図る」(p.56)ことを目的とし、球面幾何学に関する教材開発と国立大学教育学部数学教育専攻の大学4年生に対する授業を実践した。

メルカトル図法で描かれた地図上の2点間の距離を求める活動では、計算した値と実際の値との誤差が生じたことで球面について考

える動機付けをおこなった。球面上の2点間の最短距離を表す線について考える活動では、生徒は地図ではなくゴムボールを用いてその線が2点を通る大円の劣弧であることを予想することができた。また、ゴムボールと輪ゴムを用いて球面上に図形を描く活動では、平面に描けるはずの長方形を描くことができないことや球面上でのみ描くことができる二角形(異なる2つの頂点とそれらを結ぶ2つの線分から成る多角形)や3直角三角形(3つの直角を持つ三角形)があることに対して、一部の生徒が強い興味を示した。

辻ら(2016)は、成果として「実生活とつながりのある内容であることから、非常に興味を持って積極的に考え取り組もうとする姿がみられた」(p.70)ことを、課題として「より容易に理解できるような図や具体物を用いた説明・補助の仕方を考えること」(p.70)をそれぞれ挙げている。

3.3. 中西(2006)の研究

中西(2006)は、Lénárt(1996)を参考にし、「これまで平面幾何で学習してきた基本的な図形の性質が、球面上においても成り立つかどうかを調べることを通して、図形の理解の様相を明らかにすること」(p.53)を目的に球面幾何学を教材とした授業をおこなった。対象となる生徒は、中学1年生から3年生2名ずつの計6名である。なお、中西(2006)の論文では、全6時間の授業のうち、第5、6時目にあたる「3直線で作られる領域」と「直角三角形」の授業の概略と考察が述べられている。また第4時までには、生徒らは球面における線分や直線、平行線、垂線などの線に関して学習している。

第5時の最初に、生徒らはプラスチック製の球面模型とホワイトボード用のペンを用いて、3直線で囲まれる三角形を作成した。すると、生徒の1人である3bは、球面上にできた三角形は平面に描くと三角形ではないため

三角形として認められないと主張した。そこで教師は、「三角形とは何か」、すなわち三角形の定義についての確認を行い、「3 直線で囲まれた図形」が三角形であるとした。しかし、3bが「(球面にできる直線は) 曲がっているから直線でない」と発言したため、教師は直線の定義まで遡って確認したが、3bは「許されへん」と不満げな様子であったという。

中西 (2006) は、考察として以下のことを挙げている。

「球面上における最短の道を延長して大円がかけたとしても、球面上における大円が直線であることの認識には至りにくい」

「球面にできた三角形を三角形と認めるものの、平面上での認識が極めて深く印象に残り、球面上での概念形成に大きな影響を及ぼす」

「念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動をおこなうことによって、疑問や葛藤、教師や他の生徒からの説明を受けての考え直しなどの様々な思考ができるようになる」

(p.58-59)

4. 非ユークリッド幾何学を教材とした授業の設計

本研究では、球面幾何学を教材とした授業を設計することとした。ここでは、球面幾何学を教材として選択した理由と学習目標、そして設計した授業の構想と期待される生徒の姿について述べる。

4.1. 球面幾何学を教材として選択した理由

数ある非ユークリッド幾何学の中から、球面幾何学を教材として選択した理由は以下の2つである。

(1) 人間にとって球面は身近な存在であること

辻ら (2016) が指摘したように、生徒は自身

と関わりがあることについて意欲的に取り組むことが見込まれる。我々人間は地球上、すなわち球面上で生活しており、人間にとって球面は身近な存在である一方で、球面上にすることを意識しながら生活している人間はほとんどいないだろう。したがって、実際は人間にとって身近である球面上で図形等を考えるということを、生徒は自身と関連した問題だと捉えることができる。

(2) 具体物の操作が可能であること

平面幾何学のみを学習してきた生徒にとって、念頭操作のみで球面上の図形等を考えることは困難である。したがって、念頭操作に加えて具体物操作活動を取り入れることが重要である (中西, 2006) 。球の模型は、辻ら (2016) の用いたゴムボールや中西 (2006) の用いたプラスチック製の透明球など、その種類は豊富である。具体物操作を通じて思考・考察が可能であるという特徴は、他の非ユークリッド幾何学には見られない、球面幾何学特有の特徴である。また、具体物の操作や観察によって、球面上における図形の種類や性質が平面におけるそれらと大きく異なることを実感することができる。このように、球面幾何学は中学生段階であっても比較的学習しやすい非ユークリッド幾何学であると考えられる。

4.2. 学習目標

以上の議論を踏まえて、以下の2つを学習目標として設定する。

①前提による幾何学体系の多様性を理解すること。

②既習の平面図形の知識を活用しながら、球面幾何学に関して理解を深めること。

4.3. 授業の設計

授業は、中学3年生を対象とした全4時間の図形領域における発展的内容として位置づける。授業の流れは次の通りである。

第1時：球面上の線分や直線の定義，球面上での図形づくり

第2時：二角形の存在の確認，球面上の図形の性質探し

第3時：二角形と三角形で半球面全体を表した式の意味の読み取り，球面三角形の内角の和についての証明

第4時：平面幾何学と球面幾何学の特徴の比較，非ユークリッド幾何学についての説明

全体を通して，生徒はこれまで触れたことのない球面上における幾何学を考えることになる．そのため，4.2の学習目標の②を達成するには，生徒自身が見たり感じたりしたことや考えたことを他の生徒に自由に言えるような授業形態を採る必要があると考える．よって，授業では，3～4名のグループでのグループワークを多く取り入れることとする．また球の具体物として，透明であることで球全体の様子を一目で確認することができるという理由から，各グループには地球のモデルとして直径15cmのプラスチック製の透明球（以下，透明球と呼ぶ）を1つ配布することとする．

以下では，各授業の概要と期待される生徒の姿について記述する．

(1) 第1時

第1時の導入では，オーストラリアのケイグナーパランドニア間を走る世界一長い直線道路である「エア・ハイウェイ」の航空写真を提示し，エア・ハイウェイを道路上から見たときにどのように見えるかをイメージする活動を取り入れる．生徒らは，テレビ番組で写される地平線の様子や美術の授業で学習した消失点の知識をもとに，自分から遠いところでは道路が交わって見えると予想できるだろう．見る位置によって道路の見え方が変わることを実感させ，球面上で線や図形を考える動機付けをしたい．

次に，透明球と紙ひもを用いて，球面にお

ける直線が「任意の2点を通る大円（球の中心を通る平面と球面とが交わってできる円）」，線分が「大円の劣弧」となることを確認する．その際，共通認識として，平面における線分を「2点間の最短距離を表す線」，直線を「線分を両側に延長した線」と定義する必要がある．生徒は大円という言葉は知らないが，透明球の観察を通じて，線分を延長したときにできる円はその半径と球の半径が等しくなることや，円の中心と球の中心が一致することに気付く姿が期待される．

球面上における線分と直線について確認した後，球面上に既習の三角形や四角形が作れるかどうかを確かめる活動をおこなう．中西(2006)の実践では，透明球上に直線を描くためにホワイトボード用のペンを用いているが，フリーハンドで大円を描くことが困難であることが想定されるため，本研究では図形を作る際の直線として，透明球の大円の円周と同じ長さの紙テープ製の輪を4色分配布することとする．この活動では，球面上には一般的な三角形や四角形，正三角形，直角三角形を作ることができるが，平行線が必要となる平行四辺形や正方形などの特殊な四角形を作ることができないということを，具体物の操作を通して実感する姿が期待される．さらに，球面上には平行線を描くことができないことにも気づくことができるだろう．また，一般の三角形や四角形のように，平面と球面どちらにも作ることができる図形はその見た目が大きく異なるため，「複数の直線によって囲まれた形」という図形そのものの定義について確認する場合もあると想定される．

(2) 第2時

第2時の前半では，球面にのみ存在する「二角形」の存在について確認する．この活動では，平面には存在しないが球面には存在する図形があることに気付く姿が期待される．一方，二角形は生徒にとって見慣れない形で

あるため、二角形を図形と認めることは容易くないだろう．このように二角形を図形として認めることができない生徒が多い場合には、第1時の球面上に図形を作る活動の際の留意点として挙げた、図形そのものの定義について確認する必要があると思われる．

第2時の後半では、前半で確認した二角形や一般的な三角形、直角三角形などの球面上に存在できる各図形の性質を、それらの図形を実際に透明球上に作りながら見つける活動を取り入れる．ここでは、作った図形の観察によって視覚的に確認できる辺や角の性質を見つける姿や平面と球面どちらにも作ることができる図形の性質の相違点に気付く姿が期待される．また二角形に関して、第3時に扱う予定である「三角形の内角の和は 180° より大きい」ことの証明に用いる「すべての二角形は正二角形である」ことと「二角形の内角の大きさは等しい」ことが言える理由を、実際に透明球上に二角形を作りながら確認する．

(3) 第3時

第3時では、まず二角形の求積公式を導出する活動をおこなう．半径1の球面上にある角度 x° の二角形の面積は、以下の式によって与えられる．

$$4\pi \times \frac{x}{360}$$

この式は、「1つの球面上にある二角形の面積の大きさはその内角の大きさに比例する」という性質から得られる．この二角形の性質は、生徒が学習済みである「1つの円では、おうぎ形の面積は中心角の大きさに比例する」というおうぎ形の性質と同等の性質である．したがって、内角の大きさが 45° や 90° といった具体的な二角形の面積について考えることで、二角形の内角の大きさと面積が比例関係にあることを見出すことができると考えられる．

その後、球面における三角形の求積公式を導出する活動をおこなう．半径1の球面上にある角度 x° , y° , z° である $\triangle ABC$ の面積を求める式 (式 (a) とする) は、以下の通りである．

$$\Delta ABC = \frac{\pi}{180}(x + y + z - 180)$$

なお、実際の球面幾何学では弧度法で角度を表すため、半径1の球面上の三角形の内角を $x[\text{rad}]$, $y[\text{rad}]$, $z[\text{rad}]$ とすると式 (a) は次のように書くことができる．

$$\Delta ABC = x + y + z - \pi$$

式としては弧度法で角度を表した場合の式の方が単純である．しかし、中学生段階では弧度法は未習であることから、本授業では度数法で角度を表した場合の式 (a) を扱うこととする．

式 (a) を導出するには、半球の表面積を二角形と三角形の面積を用いて表した式 (式 (b) とする) である

$$2\pi = \left(4\pi \times \frac{x}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{y}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{z}{360}\right) - 2 \times \Delta ABC$$

を $\triangle ABC$ について整理する必要がある．しかし、この式を立てるには、球の対称性や重複した三角形を重複した回数分引く必要があることに関する理解が十分でなければならない．よって本時では、半球の表面積を二角形と三角形の面積を用いて表した式を提示し、その式の各項の意味を読み取る活動をおこなう．留意点として、式のみからその意味を読み取することは困難であると予想し、実際に透明球上に作ることができる三角形に関する式を提示することとする．具体的には、半径1の半球の表面積を内角の大きさがそれぞれ 90° , 45° の2種類の二角形と内角の大きさがそれぞれ 90° , 90° , 45° の三角形の面積 S を用いて表した式である

$$2\pi = \left(4\pi \times \frac{90}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{90}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{45}{360}\right) - 2S$$

を提示する．式の読み取りにおいて，半球の表面積や二角形の面積を表す項を読み取るとは容易であると考えられる．一方で，半球上に存在しない二角形や三角形を2回分引く項の意味を読み取るとは困難であろう．これらの意味の読み取りが困難な項に関する検討の際に，透明球を観察することを通じて，意味の読み取りの際に必要な球の対称性や重複した三角形を重複した回数分引くことに関する理解が深まることが期待される．

式 (b) から式 (a) を導出した後，具体的な内角を持つ三角形を用いて式 (a) が正しいことを確かめ，式 (a) から「三角形の内角の和は 180° より大きい」ことが証明できることを確認する．証明自体は，球面上の三角形の面積は常に0より大きい値をとることから簡単に証明することができるが，中学生段階では1次不等式の解き方を学習していないため，自力で証明することは難しい．よって，証明自体は教師主導で確認することとし，生徒には式 (a) の意味を読み取る活動を通じて，球面上の三角形の内角の和である $x+y+z$ と平面上の三角形の内角の和である 180 が式に登場していることに気付くことを期待する．また，平面上の三角形の内角の和の証明において平行線を用いたことを確認することで，異なる空間での同等の内容の証明における違いを理解することができるだろう．

(4) 第4時

第4時では，第1時から第3時までのまとめとして，平面幾何学と球面幾何学の特徴を，線分や直線，二角形や三角形などの項目ごとにまとめる活動をおこない，線や図形が存在する空間が異なると，様々な共通点や相違点が生じることを確認する．また，本授業の教

材として取り上げた非ユークリッド幾何学の歴史的背景や球面幾何学以外の非ユークリッド幾何学の紹介等をおこなう．ここでは，本授業では図形の存在する空間を前提としてみなしたが，歴史的には平行線が前提としてみなされていたことを伝え，授業のまとめとする．

5. まとめと今後の課題

本稿の目的は，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計することであった．授業の設計の前段階として，先行研究をもとに非ユークリッド幾何学を教材として扱うことの意義を論じることで，非ユークリッド幾何学は教育的な価値のある教材となりうることを明らかにした．また，非ユークリッド幾何学を教材とした授業の先行例を概観することで，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計にかかわる示唆を得た．

本稿で報告した授業は，新潟県の国立大学附属中学校の第3学年を対象としてすでに実践済みである．今後の課題として，実践した授業や毎時後におこなった刺激再生法による生徒へのインタビューの分析を通じて，中学校数学における非ユークリッド幾何学の教材としての可能性を探っていくことが挙げられる．

引用・参考文献

- Ada Tuba. (2013). Teaching activity-based taxicab geometry. *Global Journal of Teacher Education*, 1(1), 151-166.
- Fawcett, H. P. (1966). *The nature of proof*. New York: AMS Reprint. (原著出版1933年)
- 一松信ほか.(2016). 中学校数学2. 学校図書．国立教育政策研究所教育課程研究センター.(2015～2019). 全国学力・学習状況調査報告書．
- 小松孝太郎, Stylianides, A. J., Stylianides, A. J.,

- & 和田聖国 . (2019). 前提の役割に関する生徒の認識を育成するための課題設計 . 日本数学教育学会第52回秋季研究大会発表集録, 411-414.
- 小関熙ほか . (1978). 図形における論証指導について (その 1). 日本数学教育学会誌, 60, 1, 12-19.
- 國本景亀 . (2009). 数学的推論の研究について : 数学観と操作的証明を中心に . 数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録及び要項 , 42, 54-59.
- 国宗進 . (2000). 図形の論証に関する理解度の変化 . 日本数学教育学会誌, 82, 3, 2-12.
- Lénárt, I. (2006) . Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Investigations in Planer and Spherical Geometry. Key Curriculum Press.
- 文部科学省 . (2017). 中学校学習指導要領解説 数学 . 日本文教出版株式会社 .
- 中西正治 . (2006). 三辺形の理解について : 平面上の図形と球面上の図形との対比を通して . 近畿数学教育学会会誌 , 19, 52-60.
- 西村泰一 . (2016). 猫にもわかる球面幾何学 . <http://hdl.handle.net/2241/00135245>(令和 2 年 3 月 6 日最終確認)
- 瀬山士郎 . (2019). 数学にとって証明とはなにか : ピタゴラスの定理からイプシロン・デルタ論法まで . 講談社 .
- 砂田大樹 . (2016). 『数学 第二類』における球面三角形教材の特徴と価値—球面三角形の面積と内角の和に焦点を当てて— . 日本数学教育学会第49回秋季研究大会発表集録, 441-444.
- 寺坂英孝 . (2014). 非ユークリッド幾何の世界 新装版 : 幾何学の原点を探る . 講談社 .
- 辻一輝 , 菱山洋介 & 山田雅博 . (2016). 球面幾何を用いた教材の開発と実践 . 岐阜数学教育研究 (15), 56-101.

日本の高校数学学習指導要領と中国の高校数学課程標準 の比較研究

余 申航

上越教育大学大学院修士課程 1 年

1. はじめに

中国の教育部は、2003年版『普通高等学校課程標準（実験）』（以下、『課程標準（実験）』とする）を改訂し、新たに2017年版『課程標準』を出版した。『課程標準』は中国の国定カリキュラムであり、教科書やセンター試験の標準である。2017年版『課程標準』とその前に出版した『課程標準（実験）』では様々な変更点があった。日本の『高等学校学習指導要領』（以下、『指導要領』とする）の改訂はほぼ同時期に行れた。伊東（1987）によると、数学は文化圏ごとにそれぞれ独特な性格を持っている。中世の日本と中国の数学はともに操作的・技能的数学に当たるので、現在までのカリキュラムの改訂の歴史を巡りながら両国の高校数学カリキュラムを比較する価値があると考えられる。

『課程標準』では数学の各科目の内容で数学文化を取り入れることが要求された。鄭（2015）によって、「数学文化」はある全体的な文化であり、数学はその文化の中でかなりの程度まで普通の民衆の世界観、方法論と価値観の形成に影響する。それによって、この文化を「数学文化」と呼び、数学の視点からこの文化の主な特徴を明らかにできる。

近代の中国文化は「数学文化」でなかった。数学の文化的機能への認識が足りなかったが数学は術とみなした。中国の伝統文化では数学が重視されず、さらに数学の文化的価値への認識が足りなかった。したがって、

1956年の改訂から数学の文化的価値を重視し始めた。各国には独自の文化があり、自国の文化の影響を受けて自国のカリキュラムに対して慣れる傾向があるために、他国のカリキュラムと比べる必要がある。

日本と中国とともに今回の改訂で同じ領域に関して変化がある。例えば、『指導要領』の改訂では、統計の内容が重視され、仮説検定の内容が必修科目に加えられた。中国の場合、データ分析が数学の核心的素養として重視された。これらの動向から日中両国共に統計的な内容が拡充されつつあると言える。また、『課程標準』の「数学的モデリングと数学探究活動」と『指導要領』の「課題学習」はともに既に学習した内容の活用を重視する。数学的モデリングは現実問題を数学化して、数学言語で問題を表し数学モデルを構築して問題を解決する過程である。主には、実際場面で数学の視点から問題の発見、提出、分析、モデルの構築、パラメータの決定、計算、結果の検証、モデルの改善を通じて実際問題の解決を目指す。数学探究活動はある具体的な数学問題について、自主的研究と協同的探究を行なって問題を解決する過程である。活動の課題は教師自ら、また学生と相談して決めることである。具体的には有意義な数学問題の発見、提出、合理的な数学結論の推測、問題解決の構想、計画の提出、自主的研究、協同的探究を通して数学的結論を論証する。数学的モデリングと数学探究活動の全

過程を経験し、資料を整理し、レポートを書いて報告や交流する。研究レポートの評価について、教師は校外の専門家、社会人、保護者などを誘って評価サークルを編成したり、学生間で相互的に評価したり、自らで決めたりことができる。また、学生に学術研究の規範を従うことを指導する。そのレポートなどの材料は大学入試の参照にもなる。「数学的モデリングと数学探究活動」と「課題学習」とも既に学習した内容又はそれらを相互に関連付けた内容を生活と関連付けたり発展させたりするなどした課題を設け、学生の主体的な学習を促し、数学の素養を高めるようにする課程である。

2. 先行研究

国際カリキュラム比較の研究について、戴(2005)の2003年版『課程標準』と1999年版『指導要領』数学の課程目標を比較研究した論文がある。この研究では、「数学的活動を増やる」、「学生の個性を育てることは重要」、「学生の数学的な考え方を育てる」などの結論が出された。

また李(2006)は日中の中学校幾何課程の難度について比較研究した。氏は課程難度を量化し、「課程難度係数」のモデルを作り上げた。このモデルは、課程難度に影響を与える三つの要素：課程内容の広さと深さ、課程時間数によって課程難度を量化する。現職教師のアンケートによって各知識に値を付与して、その値を課程内容の広さと示した。また、当時中国の中学校の『課程標準』で知識と技能は「了解」、「理解」、「身につける」、「活用」という四つの水準に分けられた。日本の中学校の『指導要領』中の「知る」、「理解」、「活用」などの動詞と関連して、氏は各水準に値を付与して課程内容の深さを量化できた。氏の研究によると、当時中学校の幾何課程について日本の課程難度係数が中国より高かった。

3. 研究方法

主には文献の比較研究である。国際カリキ

ュラム比較の研究を収集・整理し、それを踏まえて、中国の『課程標準』を日本語に翻訳する。中国語から日本語に翻訳の際に、言葉の適当な意味を判断しなければならない。その内容の取り扱いの体得を通して、『課程標準』についての認識を深めながら『指導要領』と比較して、相違点が生じた際には、両国の中学校のカリキュラムまたは新旧『指導要領』と『課程標準』について調べその原因を明らかにする。そして、『課程標準』と『指導要領』の改訂時の教育的背景と社会背景を分析し改訂の理由を比較検討する。『課程標準』と『指導要領』の特徴をまとめ、各変更点を参考しながら、中国と日本の高等学校数学の類似点と相違点を見出し、現在の高等学校数学教育で求められている生徒が身に付けるべき能力を明らかにする。

4. 『指導要領』と『課程標準』の改訂について

4.1 三つの柱と六つの数学核心的素養

今回の改訂で、両国とも育成を目指す資質・能力について明確化を行った。『指導要領』の解説には次のような記述がある。

「…三つの柱に整理するとともに、各教科等の目標や内容についても、この三つの柱に基づく再整理を図るよう提言がなされた…高等学校数学科の目標を、(1)知識及び技能、(2)思考力、判断力、表現力等、(3)学びに向かう力、人間性等の三つの柱に基づいて示す。」

それにしたがって、科目の目標は三つの柱を踏まえて解説した。また、示された科目の内容を身に付けるための指導事項は「次のような知識及び技能を身に付けること」と「次のような思考力、判断力、表現力等を身に付けること」に分けられた。

中国の場合、『課程標準(実験)』の科目の目標は三つの領域(知識と技能、過程と方法、情感・態度と価値観)に分けられた。さらに『課程標準(実験)』では、学習内容の行為動詞(例えば、「…を知る」と「…を解釈する」とは違い水準である)の取り扱いを

通して各領域を異なる水準に分別した。

これらの三つの領域と日本の三つの柱はかなり似ているが、『課程標準』では三つの領域を整理し、六つの数学の核心的素養を使って育成を目指す資質・能力を示すことになった。教科の核心的素養は教科学習を通して学生が身につける正確な価値観、品格と能力である。

鄭(2015)によると、「数学素養で注目されたのは学生の数学知識の構造化、数学研究能力の育成だけではなく、数学教育を通して如何に未来社会を担う人材（すなわち、数学家や数学に関する仕事に携わる人だけではなく）を育成するかということである。「数学素養」の取り扱いは数学教育の社会的準則を示す：数学教育は社会の要求を十分に体现すべきであり、社会に必要とされている人材を育てるべきである。」

数学教科の核心的素養は数学抽象、論理推論、数理モデル構築、直観想像、数学演算、データ分析である。これらの素養は各々独立であるが、有機的な全体と見なすことができる。数学の核心的素養は『課程標準（実験）』の課程目標で記述された五つの基本能力（空間想像、抽象概括、推理論証、運算ソルビング、データ処理）からの展開と見なし、三つの領域の総合的に表すことである。さらに、学習評価もこれらの素養を巡り、各素養を三つの水準に分けて、学生の水準が素養の具体的表現と以下の四つの観点から判定される。

場面と問題：現実場面・数学場面・科学場面で数学問題を提出すること。

知識と技能：各素養の獲得の助けになる知識と技能。

思考と表現：数学活動の過程で反映された思考を厳密・明瞭・的確に表現すること。

交流と反省：数学言語で直観的に数学概念・結論・応用・思想を解釈・交流することとそれら（数学概念など）を評価・まとめ・広げること。

『課程標準』では次の通り記述された。

（１）数学抽象

数学抽象は数量関係と空間形式の抽象化を通して、数学研究の対象を取り出すことの素養である。主には数量と数量関係、図形と図形関係の抽象化を通して、数学概念と概念の間の関係を取り出すことと具体的事物から一般的な法則・構造を抽象し、数学言語で表すことである。

数学抽象は数学の基本思想であり、理性的思惟を育成するための重要な基礎である。数学の本質的特徴を反映し、数学の生産・発展・応用の中を貫いている。数学抽象によって、数学は高度に総括でき、正確に示せ、結論を一般化でき、組織的多級的な体系になる。

数学抽象の主な表現：数学概念・規則の獲得、数学命題・モデルの提出、数学的手法・思想の形成、数学構造・体系の認識である。

高校数学課程の学習を通して、学生は場面から数学概念・命題・方法・体系を抽象し、具体から抽象への活動の経験を蓄積する。また、日常生活と実践で問題を一般的に考える習慣を身につけ、事物の本質を把握し、端的にずばりと複雑な問題を処理することと数学抽象の考え方で問題を解決することができる。

水準一：熟知している場面から数学概念と規則を直接抽象でき、特例を踏まえて簡単な数学命題を帰納して形成でき、既に学習した数学方法を模倣して簡単な問題を解決できる。

数学概念と規則の含意を解釈でき、数学命題の条件と結論を了解し、熟知している場面から数学問題を抽象できる。

数学言語で表した推理と論証が了解でき、類似している問題を解決する過程で数学の通性と通法を感得でき、その中の数学思想を体得する。

交流の中で、実際場面と関連している抽象の概念を解釈できる。

水準二：関連している場面から一般的数学概念と規則を抽象でき、既知の数学命題の適用範囲をさらに広められ、新たな場面で数学方法を選択し、それを使って問題を解決できる。

適当な例を挙げて抽象的数学概念と規則を解釈できる。数学命題の条件と結論を理解する。関連の数学知識の関連を理解・構築できる。

数学言語で表した概念、規則、推理と論証を理解できる。同じ種類の数学問題を解決するための数学方法を練り上げられ、その中の数学思想を理解できる。

交流の中で、一般的概念で具体的現象を解釈できる。

水準三：総合的場面から数学問題を抽象でき、適当な数学言語で表せる。手に入れた数学結論を踏まえて新たな命題が形成できる。具体的問題に対して、数学方法を使ってまたは創造して問題を解決できる。

数学対象、演算または関係を通して数学の抽象的構造を理解でき、数学結論の一般性を理解でき、高度に総括して組織的多級的な数学知識の体系を感得できる。

現実問題の中で、研究対象の数学特徴を把握でき、正確に数学言語で表せる。通性・通法の数学原理とその中で含めている数学思想を感得できる。

交流の中で、数学原理で自然現象と社会現象を解釈できる。

（２）論理推論

論理推論は事実と命題から、規則によって、他の命題を推測することの素養である。主に二種類が含まれている。一つは特殊から一般の推論、すなわち帰納・類比である。もう一つは一般から特殊の推論、すなわち演繹である。

論理推論は数学結論を出す、数学体系を組み立てるための重要な方式であり、数学の厳密性の基本保証であり、数学活動の中で他人とコミュニケーションするための基本的な思考特性である。

論理推論の主な表現：推理の基本形式・規則を身につけ、問題の発見と命題の提出、論証過程の探索・表現、命題体系の理解、論理的なパラフレーズ・コミュニケーション。

高校数学課程の学習を通して、学生は論理推論の基本形式を身につけ、論理的に問題を

考え、比較的に複雑な場面で事物の関連を把握でき、事物発展の筋道を把握できる。また、論拠を重視し、筋道を立て、論理に合う思考特性と理性的な精神を作り上げ、コミュニケーション能力を強化する。

水準一：熟知している場面で帰納と類比を使って、数量や図形の性質、数量関係や図形関係を発見できる。

熟知している数学内容で、帰納推理、類比推理、演繹推理を識別できる。帰納推理、類比推理を通して得た結論が蓋然的に成立し、演繹推理を通して得た結論は必然的に成立すること知る。熟知している例を通して帰納推理、類比推理、演繹推理の基本形式を理解する。熟知している数学命題の条件と結論の論理関係を了解する。幾つかの基本命題と定理の証明を身につけ、筋道を踏んで論証の過程を演述できる。

熟知している概念と定理の論理関係を了解できる。

交流の中で、討論されている問題の内包を明確し、筋道を踏んで観点を演述できる。

水準二：関連している場面で、数学問題を発見と提出でき、数学言語で表せる。帰納、類比は数学命題の発見と提出の重要な方法であることを理解できる。

既に学習した知識に関連している数学命題に対して、その条件と結論の分析を通して、論証の筋道を探索し、適当な論証方法を選んで証明し、正確に数学言語で論証の過程を演述できる。反例を挙げることを通して、ある数学結論が成立しないことが説明できる。

相關している概念、命題、定理の論理関係を理解でき、初歩的に知識の網状構造を構築する。

交流の中で、終始主題を巡って、明確な観点を持って、論理的論述できる。

水準三：総合的な場面の中で、数学の視点で適当な研究対象を発見し、有意義な数学問題を提出できる。

常用論理推論方法の規則を身につけ、規則の思想を理解する。新たな数学問題に対して、異なる仮説を立て、結論を推断し、数学

命題を立てる．比較的複雑な数学問題に対して，過渡的命題を立てることを通して，論証の筋道を探索し，問題を解決でき，かつその論証の過程を厳密な数学言語で演述できる．

数学体系の公理化を理解できる．

合理的に数学言語と思惟を使って学際の演述と交流ができる．

（３）数理モデル構築

数理モデル構築は現実問題を抽象し，数学言語で問題を表す，数学方法でモデルを構築して問題を解決することの素養である．数理モデル構築の過程は主に実際場面で数学の観点から問題の発見，提出，分析，モデリング，パラメータを定める，計算，結果の照合，モデルの改善，実際問題の解決である．

数理モデル構築は数学と外部世界の間で橋渡しの役をし，数学応用の重要な形である．実際問題を解決の基本手段であり，数学発展の原動力である．

数理モデル構築の主な表現：問題の発見・提出，モデルの構築・解く，モデルの照合・改善，問題の分析・解決．

高校数学課程の学習を通して，学生は意識的に現実世界を数学言語で表し，問題の発見と提出することができ，数学と現実の関連を感じ，数理モデルで実際問題を解決でき，数学の実践経験を蓄積する．また，科学，社会，エンジニアリング諸領域で数理モデルの役割を認識し，実践能力を高め，生産的思考と科学の精神を強化する．

水準一：熟知している数理モデルの実際背景とその数理モデルの数学的な表現を了解し，数理モデルのパラメータと結論の実際意義を了解する．

数理モデルの構築過程（問題の提出，モデルの構築，モデルの解決，モデルの照合，モデルの改善）を知る．熟知している実際場面で，既に学習した数理モデルの流れを模倣して問題を解決できる．

既に学習した数理モデルに対して，例を挙げてモデル構築の意義を説明でき，その数学思想を体得する．数理モデルに対する数学的表現の重要性を感じ得る．

交流の中で，既存のモデルの結果によって問題を説明できる．

水準二：熟知している場面で，発見した問題を数学問題に転換でき，数学問題の価値と役割を知る．

適当な数理モデルを選んで解決している数学問題を表せる．モデルのパラメータの意義を理解し，如何にパラメータを決定する・モデルを構築する・モデルを解決に使えることを知る．問題の実際意義によって，結果を照合し，モデルを改善して，問題を解決できる．

相関の場面で，数理モデル構築の過程を経験し，数理モデル構築の意義を理解できる．数学言語を使って数理モデル構築の中の問題及び問題解決の過程と結果を演述でき，研究報告を書き，研究成果を発表する．

交流の中で，モデルを通して数学的思惟で問題を説明できる．

水準三：総合的な場面で，数学的思惟を通して分析し，場面の中の数学関係を発見して，数学問題を提出できる．

数理モデル構築の一般方法と関連知識を使って，創造的に数理モデルを構築し，問題を解決できる．

数理モデル構築の意義と役割を理解する．正確かつ明瞭に数理モデル構築の過程と結果を演述できる．

交流の中で，数理モデルの結論と考え方で科学規律と社会現象を詳しく解説できる．

（４）直観想像

直観想像は直観幾何と空間想像を通して事物の形態と変化を感知し，空間形式特に図形を使って，数学問題の理解し解決の素養である．主には：

- ・空間形式で事物の位置関係・形態変化と運動法則を認識する．
- ・図形で数学問題を表し分析する．
- ・図形と数式を関連して数学問題の直観モデルを構築し，問題解決の考え方を探究する．

直観想像は問題の発見・提出と問題の分析・解決の重要な手段であり，論証構想の探究・形成と抽象的構造を構築するための基礎

的思惟である。

直観想像の主な表現：図形と数式の関連を作り上げ、幾何図形で問題を表す、幾何で直観的に問題を理解し、空間想像で事物を認識する。

高校数学課程の学習を通して、学生は数式と図形の組み合わせ能力を高め、直観幾何と空間想像能力を発展し、直観幾何と空間想像を使って問題を考える意識を強化する。また、具体的場面で事物の本質を直観的に感知する思惟を身につける。

水準一：熟知している場面で、実物から幾何図形を抽象して、簡単な図形と実物の関連を構築し、図形と図形・図形と数量の関係を体得する。

熟知している数学場面で、図形の性質と変換（平行移動、対称移動、回転移動）によって、数学法則を見つけ、簡単な図形の位置関係と度量関係及び特有の性質を述べられる。

図形を通して、直観的に数学問題を認識し、図形で熟知している数学問題を表すことと図形で問題解決の道筋に啓発を与えることができ、数式と図形の結合を体得する。

水準二：関連している場面で、対応する幾何図形を想像して構築でき、図形から数学問題を提出し、図形と図形・図形と数量の関係を見つけて、図形の運動の規則を探索する。

図形と図形・図形と数量の関係に関して基本的研究方法を身につけ、図形の性質によって数学法則を探索し、実際問題や数学問題を解決できる。

直観想像によって数学問題を提出し、図形によって問題解決の道筋を探索し、数式と図形を結合して問題解決の考え方が生まれることや、直観的図形を通して問題分析と解決の考えの役割と意義を体得する。

交流の中で、直観想像によって、数学問題を研究討論できる。

水準三：総合的な場面で、図形によって、直観想像を通して数学問題を提出できる。

図形と図形・図形と数量の関係を総合して、数学の各領域の関連を理解し、直観想像によって数学と他の学科との関係を結んで、

理論体系の直観的モデルを構築する。

想像によって複雑な数学問題を直観的に表せ、数学問題の本質を反映し、問題解決の道筋をつける。

交流の中で、直観想像によって、問題の本質及び数学との関連を研究討論できる。

（５）数学演算

数学演算は演算対象を明らかにした上で、演算法則によって数学問題を解決する素養である。主には：演算対象の理解、演算法則の把握、演算構想の探究、演算方法の選択、演算プログラムの設計、演算結果の追求など。

数学演算は数学問題を解決するための基本手段である。数学演算は演繹推理であり、コンピュータで問題を解決するための基礎である。

数学演算の主な表現は：演算対象の理解、演算法則の把握、演算構想の探究、演算方法の選択、演算プログラムの設計、演算結果の追求。

高校数学課程の学習を通して、学生は数学演算能力を進められる、演算方法を使って効果的に実際問題を解決できる。また、演算で数学思惟の発展を促す、問題の考えを標準化する能力と厳密な科学の精神を身につく。

水準一：熟知している数学場面で、演算の対象を了解し、演算問題を提出できる。

演算法則及び適用範囲を了解し、正確に演算でき、熟知している数学場面で、問題の特徴によって適当な演算の道筋をつけて、問題を解決する。

演算の中で、演算法則の意義と役割を体得し、演算を使って簡単な数学結論を検証できる。

交流の中で、演算の結果で問題を説明できる。

水準二：関連している場面で演算の対象を確定し、演算問題を提出できる。

演算問題に対して、合理的に演算方法を選択し演算プログラムを設計して、問題を解決できる。

演算は演繹推理であることを理解し、総合的な演算方法で問題解決の過程で、アルゴリ

ズムの意義と役割を体得する。

交流の中で、演算を通して、問題を研究討論できる。

水準三：総合的場面で、問題を演算問題に転換して、演算の対象と法則を確定し、演算目標を明らかにする。

演算問題に対して、演算プログラムを構築して、問題を解決できる。

アルゴリズムで問題を理解、表現し、アルゴリズムとパソコンで問題解決との関連を理解する。

交流の中で、アルゴリズムで問題を理解し、解釈できる。

（6）データ分析

データ分析は研究対象に焦点を合わせてデータを収集し、数学方法を使ってデータを整理・分析・推断し、研究対象に関する知識を身につける素養である。データ分析の過程は、主には：データ収集、データ整理、情報抽出、モデル構築、推断、結論の獲得である。

データ分析はランダム事象を研究するための重要な数学技術であり、ビッグデータと「インターネットプラス」に関する領域の中で数学応用の主要方法である。データ分析は科学、技術、エンジニアリングと現代社会生活の各面に深く入り込む。

データ分析の主な表現は：データの収集・整理、データの理解・処理、結論の獲得・解釈、知識の要約・形成。

高校数学課程の学習を通して、学生は有意義な情報を抽出して定量分析する意識と能力を高め、eラーニングに適応し、データに基づいて現実問題を表す意識を増強し、データを通して事物を認識する思惟を身につける。また、データに基づき事物の本質・関連と法則を探究する活動の経験を蓄積する。

水準一：熟知している場面で、事象及び簡単な確率や統計問題を了解できる。

熟知している確率問題に対して、適切な確率モデルを選んで問題解決でき、熟知している統計問題に対して、適切な抽出方法を選んでデータを収集し、データの説明・表現・分

析の基本的な方法を身につけ、問題を解決できる。

熟知している実例と結びつけて、確率が事象発生の可能性の大きさの度量であり、定義によって導き出せ、または統計の方法で推定できることを体得し、確率と統計の言葉で簡単な事象を述べられる。

交流の中で、統計グラフと簡単な確率モデルを通して熟知している事象を解釈できる。

水準二：関連している場面で、事象を識別でき、事象と確率変数の関連を知り、確率や統計の問題を発見・提出できる。

具体的な問題に対して、離散型確率変数や連続型確率変数を選んで事象を表現し、抽出方法の統計的意義を理解し、適当な確率モデルや統計モデルで問題を解決できる。

統計の方法で問題解決の中で、帰納推理の考えを感得し、統計の結論の意義を理解し、確率や統計の考え方で事象を分析し、確率モデルや統計モデルで事象の統計的規則を表せる。

交流の中で、データで示された規則によって事象を解釈できる。

水準三：総合的場面で、確率と統計の問題を発見・提出できる。

それぞれ異なる問題に対して、総合的にまたは創造的に確率と統計の知識で、対応の確率モデルや統計モデルを構築して、問題を解決し、事象の本質を分析し、統計的規則を見つけ、新たな知識を作り上げる。

ビッグデータ時代でデータ分析の重要性を理解し、データに情報が含まれ、情報の加工を通して、データから提供された知識と規則を獲得し、それらを確率や統計の言葉で述べられる。

交流の中で、ランダム事象を判別でき、適当な言葉で演述できる。

4.2 選択科目の取り扱い

『指導要領』と『課程標準』とともに選択科目を設置したが、選択科目についての取り扱いが異なっている。『課程標準（実験）』で選択科目が扱われたが、実際には学生は選択できなかった。なぜなら、センター試験の

出題範囲によって、学校自ら選択科目を選択していたからである。また教師も部分選択科目の内容について詳しく理解していなかったもので、選択科目の履修が芳しくなかったと言える。

2017年版『課程標準』では選択必修科目と選択科目が扱われた。選択必修科目は学生が選択できる課程であり、センター試験の出題範囲である。中国では大学の入学試験より、センター試験のほうが重視されている。大学入試はセンター試験の前に行われ、大学入試の結果のみで入学できる学生はわずかであり、大半の学生はセンター試験と大学入試の成績（センター試験の割合がかなり高いので、大学入試を受けなかった学生でも入学できる可能性がある）によって、入学の可否が判断される。センター試験では、学生は必修科目である国語、数学、英語と、その他の教科の中から3つの教科の試験を選んで受けることになるので、センター試験を受ける学生が選択できるのは国語、数学、英語以外の選択必修科目である。したがって、学生は大抵数学の選択必修科目を全て履修すると言える。

中国の選択科目はセンター試験の出題範囲でなく、大学によって、入学試験の範囲になることがある。選択科目としてA、B、C、D、Eの5つの科目が設置された。：

A類科目は微積分、空間ベクトルと代数、確率と統計を含んでおり、数理科（数学、物理、コンピュータ、精密機械など）を目指す学生が選択する。

B類科目は微積分、空間ベクトルと代数、応用統計、数理モデル構築を含んでおり、経済、社会科（数理経済、社会学など）や部分理工科（化学、生物、機械）を目指す学生が選択する。

C類科目は論理推論初歩、経済学モデルと社会学モデル構築、社会調査とデータ分析を含んでおり、人文科（言語、歴史など）を目指す学生が選択する。

D類科目は、音楽中の数学、美術中の数学、体育運動中の数学を含んでおり、体育、

芸術（音楽、美術を含め）科を目指す学生が選択する。

E類科目は視野を広げるための数学、日常生活の数学、ローカルな数学、AP（アドバンスト・プレイスメント）数学を含む。なおAP数学は、微積分、解析幾何と線型代数、確率論と数理統計を含む。

結果として、選択科目の内容とセンター試験の内容は大幅にかけ離れてしまっていることがわかる。

また授業の時間数について、『課程標準』では必修科目と選択必修科目の時間数が提案されたが、選択科目の時間数は不明である。A類科目とB類科目は大学数学の基礎であり、「数列の極限の ε - N 論法を理解する」や「ラグランジュの平均値の定理を理解する」などが取り扱われ、おおよそ日本の数学Ⅲと同等の難しさがあると思われるが、数学Ⅲが極限、微分法及び積分法だけであるため、取り扱われた範囲は数学Ⅲより広い。選択科目は単位数等に応じてその内容を選択して履修する科目なので、実際に一類科目をすべて学習するためには時間が足りないと思われる。またE類科目であるAP数学に関しては、ただ単元名が挙げられているだけであり、具体的な内容は学校に任されている。

センター試験が重視されている中国の現状によると、選択科目はうまく施行できるとは言い難い。平成28年度の各科目の教科書の需要数を数学Ⅰの需要数で除して数学Ⅲの履修率を計算したところ、その履修率は21%であったため、中国の選択科目の履修率は日本の数学Ⅲの履修率より低いと推定される。

5. 「数式と図形とを結合する考え方」と「数学的な見方・考え方」について

空間図形の取り扱いについて、日本の教科書で「空間図形の計量」という内容が取り扱われている点で、中国と日本の幾何内容は異なっている。この「空間図形の計量」では、空間の概念は既に学習した知識として空間上の三角形を解くことである。中国の場合、必修科目の後期「立体幾何初歩」から空間にお

ける点・直線・平面の位置関係を導入し始める。この差異が生じた原因は、中学校一年頃の図形内容の取り扱いが違ふからだと思われる。また、空間図形内容の取り扱いについて異なる傾向が見られる。日本の数学 A の「空間図形に関する基本的な性質について理解するとともに、図形の構成要素間の関係や既に学習した図形の性質に着目し、図形の性質の新たな性質を見だし、その性質について論理的に考察したり説明したりすること。…ここでは、2 直線や 2 平面の位置関係や直線と平面の位置関係に関する基本的な性質を理解できるようにするとともに、これらの性質を図形の考察に活用できるようにする。例えば…球に対して方べきの定理を適用し、統合的・発展的に考察したりすることが考えられる。」に対して、中国の場合は、空間図形の認識は長方体を通して、空間における点・直線・平面の位置関係を直観的に認識する上で、空間における点・直線・平面の位置関係の定義を抽象して取り出す。また、長方体の直観的感知を通して空間における直線と直線・直線と平面・平面と平面の平行と垂直関係を認識する。『課程標準』で、空間における点・直線・平面の位置関係を球に活用することが要求されなかったが、その代わりに、長方体の直観的感知から、空間想像力を培うことによって、空間座標と空間ベクトルの認識の活用が日本より明確に要求された。

日本では1970年の改訂から空間ベクトル（座標およびベクトルの概念を空間にまで拡張し、それらについての理解を深め、図形の性質を考察する能力を養う。座標とベクトルの概念を空間へ拡張し、それらを理解させ、基本的な図形を式に表わすことができるようにする。また、ベクトルが、平面においても、空間においても、ともに同じ考えに基づいていることを理解させる。）を取り扱い始めた。平成元年の改訂と平成10年の改訂で、空間ベクトルに関して、空間におけるベクトルが、平面上のベクトルと同様に扱えることの理解に重点を置き、空間におけるベクトルを用いた方程式は扱わないものとした。教科

書では平面の法線ベクトルの内容を取り扱ったが、「発展」と標記された。「発展」とは『指導要領』で示されていない内容であり、余力のある場合に選択学習するためのものである。

それに対して、中国の場合は1996年から空間ベクトルの導入を施行し始めたが、空間ベクトルと空間におけるなす角問題が密接している。「空間ベクトルの応用：①ベクトルで直線と平面を表し、直線の方角ベクトルと平面の法線ベクトルを理解する。②ベクトルで直線と直線、直線と平面、平面と平面のなす角及び垂直と平行関係を表せる。③ベクトルで必修科目の直線と平面の位置関係に関する条件を証明する。④ベクトルで点と直線、点と平面、平行な直線、平行な平面間の距離となす角の問題を解決でき、それら問題の解決の流れを演述でき、幾何問題の研究でベクトルの役割を体得する。」

『課程標準』で空間ベクトルの活用が重視される理由として、中国では「数式と図形とを結合する考え方」が重視されていることが挙げられる。「数式と図形とを結合する考え方」は中国の数学課程でよく言われた考え方であり、数式で図形の性質を説明することと図形を通して直観的に数式の関係の説明することを活用する考え方である。『指導要領』でよく言われた「数学的な見方・考え方」と同じ、動的な数学観念が示された。すなわち、知識の学習より、数学的な思考をすることが重視された。

6. 今後の課題

『指導要領』と『課程標準』の改訂の歴史を辿る必要がある。中国の『課程標準（実験）』施行前のカリキュラム『全日制普通高級中学数学教学大綱』についての認識がまだ十分ではない。『課程標準』は2019年の秋から施行始めるたばかりなので、現在学生は必修科目を学習している段階である。かつ『課程標準（実験）』の課程目標で学生に唯物弁証法的観点と唯物史観を育てることがある。これは中国の歴代カリキュラムで重視された

ものである。それについての評価が足りない
ので、今後は『課程標準』に関する研究をし
ていく。

7. 参考文献

阿部 光一 (2017). 学習指導要領の変遷 -現
場での体験を交えて-. 明治大学教育会紀
要 (9). P63-70

伊東 俊太郎 (1987). 『中世の数学』. 共立
出版.

藤田 宏 (2007). 統計教育への提言：そのス
ピリットとアプローチ - 数学教育の視点
から -. 日本統計学会誌. 36
(2). P219-230

人民教育出版社 課程教材研究所 (2019).
普通高級中学教科書 数学 必修一. 人
民教育出版社.

郭 玉峰, 杜 威 (2002). 高等学校数学科カ
リキュラムにおける日中比較研究. 筑波
数学教育研究 第 21 号

金子 真隆 (2015). 積分概念の導入に関する
教科書調査について - 高等学校学習指導
要領の変遷もふまえて - 東邦大学教養紀
要. 46. P75-89

李 淑文 (2006) 中日両国中学校幾何の課程難
度の比較研究. 東北師範大学博士論文

田中 伸明 (2014). 「GHQ/SCAP 文書」に見
る新制高等学校数学科の暫定的成立 -
「高等学校学習指導要領数学科編」作成
中断の記録を見る -

戴 永 (2005). 中日高中数学課程標準中課程
目標的比較分析. 中学数学研究.

中国教育部 (2003). 『普通高級中学数学課程
標準 (実験) 』. 人民教育出版社.

中国教育部 (2017). 『普通高級中学数学課程
標準』. 人民教育出版社.

俣野 博, 河野 俊丈 (2014). 『数学 I 』.
東京書籍株式会社.

俣野 博, 河野 俊丈 (2013). 『数学 A 』.
東京書籍株式会社.

俣野 博, 河野 俊丈 (2018). 『数学 B 』.
東京書籍株式会社.

文部省 (1956). 高等学校学習指導要領 数

学編 昭和31年度改訂版.

文部科学省 (2009). 『高等学校学習指導要領
説 数学編理数編』. 実教出版.

文部省 (2018). 『高等学校学習指導要領 (平
成30年告示) 解説』

長崎 栄三 (2013). 高等学校学習指導要領数
学科編昭和31年度改訂版の作成過程とそ
の後 : 戦後の高等学校数学科の教育課
程の確立.

鄭 毓信 (2015). 『新数学教育哲学』. 華東
師範大学出版社.