上越数学教育研究，第 35 号，上越教育大学数学教室，2020 年，pp.79-86

非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計

髙橋　勇介
上越教育大学大学院修士課程 2 年

1．はじめに

中学校数学では，論理的思考力の育成や数学的な推論に関する理解の観点から，証明は重要な学習内容として位置づけられている．一方，長年証明は生徒の苦手な単元の 1 つであり（例えば，小関ら，1978；国宗， 2000），直近 5 年間の全国学力・学習状況調査（国立教育政策研究所，2015～ 2019）の結果を見ても，証明の学習状況は現在も好転していない．

筆者は，このような証明学習の現状を改善するためには，生徒が意欲的に証明学習に取り組めるようになる必要があり，そのためには生徒が「証明とは何か」について理解することが重要であると考えている．

ここで数学における証明について概観すると，証明は古代ギリシアで誕生した知的営みであり，証明によって多様な数学体系が創り上げられてきた．そして，この数学の発展において重要な役割を果たしたのが「前提」の存在である．この前提に関して， Fawcett (1938) は，生徒が演繹的証明の本性を理解しているかどうかの判断項目の 1 つとして，「前提や証明されない命題の必要性」の理解を挙げている (p. 10)．このような指摘から，学校数学において前提に関して学習することには教育的な価値があることが示唆される．

小学校以降，生徒たちは様々な図形の種類やその性質を学習する．しかし，現在の学習内容において，学習した図形が平面上に存在するという前提に疑問を差し挟む余地はない．そこで本研究では，非ユークリッド幾何学に着目したい．非ユークリッド幾何学は，2000 年以上もの間絶対的な幾何学と信じられ続けてきたユークリッド幾何学の第 5 公準である平行線公準の否定により成立した幾何学体系である．この非ユークリッド幾何学の成立により，平行線公準は真実としてではなく前提としてみなされるようになった．すなわち，非ユークリッド幾何学と前提は密接な関係にある．したがって，非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通じて，前提の存在や生徒にとってなじみのない幾何学における図形の種類やその性質，性質が成り立つことの証明について学習することは，図形や「証明とは何か」についての理解につながる意味のある活動であると筆者は考える．しかしながら，中等教育，特に中学校における非ユークリッド幾何学を教材とした授業実践の先行例はほとんど見られない．

本稿の目的は，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計することである．

2．非ユークリッド幾何学を教材として扱うことの意義

本章では，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計する前に，非ユークリッド幾何学を授業の教材として扱うことの意義について，種々の先行研究をもとに論じていく．

(1) 平面幾何学の理解の深化

非ユークリッド幾何学の代表例として，ユークリッド幾何学の平行線公準の代わりに「点Pとそれを通らない直線 l について，点Pを通って l と交わらない直線は1本も引けない」という公準を採用した，球面幾何学が挙げられる．この球面幾何学を教材として取り入れるためのモデルである「Lénárt Sphere」を開発したLénárt (1996) は，「Lénárt Sphere」のカリキュラムの主な目標の1つに，「平面幾何学の概念と定義を，球面幾何学で対応する概念と定義と比較して明らかにすること」を挙げている．これはすなわち，非ユークリッド幾何学と生徒が既に学習している平面幾何学とを比較することで，平面幾何学に対する理解が深化されることを意味する．例えば，線分を「2点を結んだ真っすぐな線」と定義すると，球面が曲がっているため，球面における線分を定義することはできない．しかし，「2点を最短距離で結ぶ線」と線分を定義すると，球面における線分はその2点を通る大円の劣弧として定義することができる．現行の教科書では，「2点を通る真っすぐな線」である直線の一部として線分が定義されているが，この「真っすぐ」を最短距離と結びつけることで，球面における線分が定義されるのである．よって，球面における線分を定義する活動を通じて，平面における線分の認識を上記の2通りに拡張することができると予想される．

また，砂田 (2016) は，球面幾何学が教材として扱われていた昭和18，19年に出された教科書「数学　第二類」における球面三角形の教材に関する考察において，「平面三角形とは異なる球面三角形を知ることによって，平面三角形の前提や平面幾何の性質について見直すことに繋がる」(p.444) と述べている．

以上のことから，非ユークリッド幾何学の学習を通じて，既習の平面幾何学の理解が深まることが期待される．

(2) 相対的な真理観の獲得

非ユークリッド幾何学が成立したことで，それまでのユークリッド幾何学に対する絶対的な見方は失われ，前提を変えることで様々な幾何学体系が誕生するという相対的な数学観が生まれた．この相対的な数学観は，非ユークリッド幾何学の発見によって生じた数学に対する新たな見方である（瀬山， 2019）．

この相対的な数学観に関して，國本(2009) は，非ユークリッド幾何学が発見されたことで「ユークリッド神話（自明の心理から出発し，厳密な証明によって進むならば，確実で客観的で永遠である知識に到達するという信念）からの脱却が行われた」(p. 55) と述べ，推論指導において，数学を従来の数学観である「結果としての数学」ではなく「活動（創造過程）としての数学」として認識することの重要性を指摘している．

砂田 (2016) は，「数学　第二類」において球面三角形は真理の相対性を教えるために扱われていたことを明らかにした．また，生徒自らが球面三角形の面積を求める式を作り，その式から球面三角形の内角の和が 180° よりも大きくなることを導き出すことで，数学は創り上げることができるという数学観の獲得に繋がることを主張した．

このように，相対的な真理観の誕生に深くかかわっている非ユークリッド幾何学を授業の教材として扱うことで，生徒が相対的な真理観を獲得することが期待される．

3．非ユークリッド幾何学を教材とした授業に関する先行研究

ここでは，非ユークリッド幾何学を教材とした授業実践に関する先行研究を概観し，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計にかかわる示唆を得る．

3.1. Ada(2013) の研究

Ada(2013) は，被験者である算数・数学の

教員を目指す大学１年生40名が，ユークリッド幾何学と非ユークリッド幾何学における円などの基本概念間の関係や類似点，相違点をどのように認識するかを明らかにすることを目的として，ユークリッド幾何学における距離の定義のみを変えた非ユークリッド幾何学の１つである Taxicab Geometry(タクシー幾何学) を教材とした授業実践を計 6 週間に渡って実施した．具体的には，タクシー幾何学における距離 (タクシー距離) や円 (タクシー円) の探究をはじめとして，現実場面での応用なども取り扱われた．

そのうちのタクシー円の探究では，多くの生徒がある点から一定距離だけ離れた点の集まりがユークリッド幾何学では円，タクシー幾何学では正方形であることに気付くことができた．一方で数名の生徒は，タクシー幾何学におけるそのような点の集まりをひし形であると述べた．この原因として， Ada(2013) は，距離の概念と円の定義との関係の理解が不十分であったことやユークリッド幾何学における正方形がタクシー幾何学では円になることへの抵抗感があったことを挙げている．

一連の活動を通じて， Ada(2013) は，生徒にとって実生活における距離がタクシー距離であることは非常に革新的であったことや，幾何学は１つであるという前提を持っていた生徒が結果的に他の幾何学も存在する可能性があることに気付いたことを示した．

3.2. 辻ら (2016) の研究

辻ら (2016) は，「高校数学の活用が実感できる活動を通して，生徒が数学を学ぶ必要性を感じ，学習への関心や意欲の向上を図る」 (p.56) ことを目的とし，球面幾何学に関する教材開発と国立大学教育学部数学教育専攻の大学 4 年生に対する授業を実践した．

メルカトル図法で描かれた地図上の 2 点間の距離を求める活動では，計算した値と実際の値との誤差が生じたことで球面について考える動機付けをおこなった．球面上の 2 点間の最短距離を表す線について考える活動では，生徒は地図ではなくゴムボールを用いてその線が 2 点を通る大円の劣弧であることを予想することができた．また，ゴムボールと輪ゴムを用いて球面上に図形を描く活動では，平面に描けるはずの長方形を描くことができないことや球面上でのみ描くことができる二角形 (異なる 2 つの頂点とそれらを結ぶ 2 つの線分から成る多角形) や 3 直角三角形(3つの直角を持つ三角形) があることに対して，一部の生徒が強い興味を示した．

辻ら (2016) は，成果として「実生活とつながりのある内容であることから，非常に興味を持って積極的に考え取り組もうとする姿がみられた」 (p.70) ことを，課題として「より容易に理解できるような図や具体物を用いた説明・補助の仕方を考えること」 (p.70) をそれぞれ挙げている．

3.3. 中西 (2006) の研究

中西 (2006) は，Lénárt (1996) を参考にし，「これまで平面幾何で学習してきた基本的な図形の性質が，球面上においても成り立つかどうかを調べることを通して，図形の理解の様相を明らかにすること」 (p.53) を目的に球面幾何学を教材とした授業をおこなった．対象となる生徒は，中学 1 年生から 3 年生 2 名ずつの計 6 名である．なお，中西 (2006) の論文では，全 6 時間の授業のうち，第 5 ， 6 時目にあたる「 3 直線で作られる領域」と「直角三角形」の授業の概略と考察が述べられている．また第 4 時までに，生徒らは球面における線分や直線，平行線，垂線などの線に関して学習している．

第 5 時の最初に，生徒らはプラスチック製の球面模型とホワイトボード用のペンを用いて， 3 直線で囲まれる三角形を作成した．すると，生徒の 1 人である3bは，球面上にできた三角形は平面に描くと三角形ではないため

三角形として認められないと主張した．そこで教師は，「三角形とは何か」，すなわち三角形の定義についての確認を行い，「3 直線で囲まれた図形」が三角形であるとした．しかし，3bが「(球面にできる直線は) 曲がっているから直線でない」と発言したため，教師は直線の定義まで遡って確認したが，3bは「許されへん」と不満げな様子であったという．

中西 (2006) は，考察として以下のことを挙げている．

「球面上における最短の道を延長して大円がかけたとしても，球面上における大円が直線であることの認識には至りにくい」

「球面にできた三角形を三角形と認めるものの，平面上での認識が極めて深く印象に残り，球面上での概念形成に大きな影響を及ぼす」

「念頭操作や実験・実測などの具体的操作活動をおこなうことによって，疑問や葛藤，教師や他の生徒からの説明を受けての考え直しなどの様々な思考ができるようになる」

(p.58–59)

4．非ユークリッド幾何学を教材とした授業の設計

本研究では，球面幾何学を教材とした授業を設計することとした．ここでは，球面幾何学を教材として選択した理由と学習目標，そして設計した授業の構想と期待される生徒の姿について述べる．

4.1. 球面幾何学を教材として選択した理由

数ある非ユークリッド幾何学の中から，球面幾何学を教材として選択した理由は以下の２つである．

(1) 人間にとって球面は身近な存在であること

辻ら (2016) が指摘したように，生徒は自身と関わりがあることについて意欲的に取り組むことが見込まれる．我々人間は地球上，すなわち球面上で生活しており，人間にとって球面は身近な存在である一方で，球面上にいることを意識しながら生活している人間はほとんどいないだろう．したがって，実際は人間にとって身近である球面上で図形等を考えるということを，生徒は自身と関連した問題だと捉えることができる．

(2) 具体物の操作が可能であること

平面幾何学のみを学習してきた生徒にとって，念頭操作のみで球面上の図形等を考えることは困難である．したがって，念頭操作に加えて具体物操作活動を取り入れることが重要である (中西， 2006)．球の模型は，辻ら (2016) の用いたゴムボールや中西 (2006) の用いたプラスチック製の透明球など，その種類は豊富である．具体物操作を通じて思考・考察が可能であるという特徴は，他の非ユークリッド幾何学には見られない，球面幾何学特有の特徴である．また，具体物の操作や観察によって，球面における図形の種類や性質が平面におけるそれらと大きく異なることを実感することができる．このように，球面幾何学は中学生段階であっても比較的学習しやすい非ユークリッド幾何学であると考えられる．

4.2. 学習目標

以上の議論を踏まえて，以下の２つを学習目標として設定する．

①前提による幾何学体系の多様性を理解すること．

②既習の平面図形の知識を活用しながら，球面幾何学に関して理解を深めること．

4.3. 授業の設計

授業は，中学３年生を対象とした全４時間の図形領域における発展的内容として位置づける．授業の流れは次の通りである．

第１時：球面上の線分や直線の定義，球面上での図形づくり
第２時：二角形の存在の確認，球面上の図形の性質探し
第３時：二角形と三角形で半球面全体を表した式の意味の読み取り，球面三角形の内角の和についての証明
第４時：平面幾何学と球面幾何学の特徴の比較，非ユークリッド幾何学についての説明

全体を通して，生徒はこれまで触れたことのない球面における幾何学を考えることになる．そのため，4.2 の学習目標の②を達成するには，生徒自身が見たり感じたりしたことや考えたことを他の生徒に自由に言えるような授業形態を採る必要があると考える．よって，授業では，３～４名のグループでのグループワークを多く取り入れることとする．また球の具体物として，透明であることで球全体の様子を一目で確認することができるという理由から，各グループには地球のモデルとして直径15cmのプラスチック製の透明球（以下，透明球と呼ぶ）を１つ配布することとする．

以下では，各授業の概要と期待される生徒の姿について記述する．

(1) 第１時

第１時の導入では，オーストラリアのケイグナーパラドニア間を走る世界一長い直線道路である「エア・ハイウェイ」の航空写真を提示し，エア・ハイウェイを道路上から見たときにどのように見えるかをイメージする活動を取り入れる．生徒らは，テレビ番組で写される地平線の様子や美術の授業で学習した消失点の知識をもとに，自分から遠いところでは道路が交わって見えると予想できるだろう．見る位置によって道路の見え方が変わることを実感させ，球面上で線や図形を考える動機付けをしたい．

次に，透明球と紙ひもを用いて，球面における直線が「任意の２点を通る大円（球の中心を通る平面と球面とが交わってできる円）」，線分が「大円の劣弧」となることを確認する．その際，共通認識として，平面における線分を「２点間の最短距離を表す線」，直線を「線分を両側に延長した線」と定義する必要がある．生徒は大円という言葉は知らないが，透明球の観察を通じて，線分を延長したときにできる円はその半径と球の半径が等しくなることや，円の中心と球の中心が一致することに気付く姿が期待される．

球面における線分と直線について確認した後，球面上に既習の三角形や四角形が作れるかどうかを確かめる活動をおこなう．中西 (2006) の実践では，透明球上に直線を描くためにホワイトボード用のペンを用いているが，フリーハンドで大円を描くことが困難であることが想定されるため，本研究では図形を作る際の直線として，透明球の大円の円周と同じ長さの紙テープ製の輪を４色分配布することとする．この活動では，球面上には一般的な三角形や四角形，正三角形，直角三角形を作ることができるが，平行線が必要となる平行四辺形や正方形などの特殊な四角形を作ることができないということを，具体物の操作を通して実感する姿が期待される．さらに，球面上には平行線を描くことができないことにも気づくことができるだろう．また，一般の三角形や四角形のように，平面と球面どちらにも作ることができる図形はその見た目が大きく異なるため，「複数の直線によって囲まれた形」という図形そのものの定義について確認する場合もあると想定される．

(2) 第２時

第２時の前半では，球面にのみ存在する「二角形」の存在について確認する．この活動では，平面には存在しないが球面には存在する図形があることに気付く姿が期待される．一方，二角形は生徒にとって見慣れない形で

あるため，二角形を図形と認めることは容易くないだろう．このように二角形を図形として認めることができない生徒が多い場合には，第 1 時の球面上に図形を作る活動の際の留意点として挙げた，図形そのものの定義について確認する必要があると思われる．

第 2 時の後半では，前半で確認した二角形や一般的な三角形，直角三角形などの球面上に存在できる各図形の性質を，それらの図形を実際に透明球上に作りながら見つける活動を取り入れる．ここでは，作った図形の観察によって視覚的に確認できる辺や角の性質を見つける姿や平面と球面どちらにも作ることができる図形の性質の相違点に気付く姿が期待される．また二角形に関して，第 3 時に扱う予定である「三角形の内角の和は 180°より大きい」ことの証明に用いる「すべての二角形は正二角形である」ことと「二角形の内角の大きさは等しい」ことが言える理由を，実際に透明球上に二角形を作りながら確認する．

(3) 第 3 時

第 3 時では，まず二角形の求積公式を導出する活動をおこなう．半径 1 の球面上にある角度x°の二角形の面積は，以下の式によって与えられる．

$$4\pi \times \frac{x}{360}$$

この式は，「1 つの球面上にある二角形の面積の大きさはその内角の大きさに比例する」という性質から得られる．この二角形の性質は，生徒が学習済みである「1 つの円では，おうぎ形の面積は中心角の大きさに比例する」というおうぎ形の性質と同等の性質である．したがって，内角の大きさが45°や90°といった具体的な二角形の面積について考えることで，二角形の内角の大きさと面積が比例関係にあることを見出すことができると考えられる．

その後，球面における三角形の求積公式を導出する活動をおこなう．半径 1 の球面上にある角度x°，y°，z°である△ABCの面積を求める式 (式 (a) とする) は，以下の通りである．

$$\triangle \mathrm{ABC} = \frac{\pi}{180}(x + y + z - 180)$$

なお，実際の球面幾何学では弧度法で角度を表すため，半径 1 の球面上の三角形の内角を x[rad]， y[rad]， z[rad] とすると式 (a) は次のように書くことができる．

$$\triangle \mathrm{ABC} = x + y + z - \pi$$

式としては弧度法で角度を表した場合の式の方が単純である．しかし，中学生段階では弧度法は未習であることから，本授業では度数法で角度を表した場合の式 (a) を扱うこととする．

式 (a) を導出するには，半球の表面積を二角形と三角形の面積を用いて表した式 (式 (b) とする) である

$$2\pi = \left(4\pi \times \frac{x}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{y}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{z}{360}\right) - 2 \times \triangle \mathrm{ABC}$$

を△ABCについて整理する必要がある．しかし，この式を立てるには，球の対称性や重複した三角形を重複した回数分引く必要があることに関する理解が十分でなければならない．よって本時では，半球の表面積を二角形と三角形の面積を用いて表した式を提示し，その式の各項の意味を読み取る活動をおこなう．留意点として，式のみからその意味を読み取ることは困難であると予想し，実際に透明球上に作ることができる三角形に関する式を提示することとする．具体的には，半径 1 の半球の表面積を内角の大きさがそれぞれ90°，45°の 2 種類の二角形と内角の大きさがそれぞれ90°，90°，45°の三角形の面積 S を用いて表した式である

$$2\pi = \left(4\pi \times \frac{90}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{90}{360}\right) + \left(4\pi \times \frac{45}{360}\right) - 2S$$

を提示する．式の読み取りにおいて，半球の表面積や二角形の面積を表す項を読み取ることは容易であると考えられる．一方で，半球上に存在しない二角形や三角形を 2 回分引く項の意味を読み取ることは困難であろう．これらの意味の読み取りが困難な項に関する検討の際に，透明球を観察することを通じて，意味の読み取りの際に必要となる球の対称性や重複した三角形を重複した回数分引くことに関する理解が深まることが期待される．

式 (b) から式 (a) を導出した後，具体的な内角を持つ三角形を用いて式 (a) が正しいことを確かめ，式 (a) から「三角形の内角の和は 180°より大きい」ことが証明できることを確認する．証明自体は，球面上の三角形の面積は常に 0 より大きい値をとることから簡単に証明することができるが，中学生段階では 1 次不等式の解き方を学習していないため，自力で証明することは難しい．よって，証明自体は教師主導で確認することとし，生徒には式 (a) の意味を読み取る活動を通じて，球面上の三角形の内角の和である x+y+z と平面上の三角形の内角の和である 180 が式に登場していることに気付くことを期待する．また，平面上の三角形の内角の和の証明において平行線を用いたことを確認することで，異なる空間での同等の内容の証明における違いを理解することができるだろう．

(4) 第 4 時

第 4 時では，第 1 時から第 3 時までのまとめとして，平面幾何学と球面幾何学の特徴を，線分や直線，二角形や三角形などの項目ごとにまとめる活動をおこない，線や図形が存在する空間が異なると，様々な共通点や相違点が生じることを確認する．また，本授業の教材として取り上げた非ユークリッド幾何学の歴史的背景や球面幾何学以外の非ユークリッド幾何学の紹介等をおこなう．ここでは，本授業では図形の存在する空間を前提としてみなしたが，歴史的には平行線が前提としてみなされていたことを伝え，授業のまとめとする．

5．まとめと今後の課題

本稿の目的は，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業を設計することであった．授業の設計の前段階として，先行研究をもとに非ユークリッド幾何学を教材として扱うことの意義を論じることで，非ユークリッド幾何学は教育的な価値のある教材となりうることを明らかにした．また，非ユークリッド幾何学を教材とした授業の先行例を概観することで，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計にかかわる示唆を得た．

本稿で報告した授業は，新潟県の国立大学附属中学校の第 3 学年を対象としてすでに実践済みである．今後の課題として，実践した授業や毎時後におこなった刺激再生法による生徒へのインタビューの分析を通じて，中学校数学における非ユークリッド幾何学の教材としての可能性を探っていくことが挙げられる．

引用・参考文献

Ada Tuba. (2013). Teaching activity-based taxicab geometry. Global Journal of Teacher Education, 1(1), 151-166.

Fawcett, H. P. (1966). The nature of proof. New York: AMS Reprint. (原著出版1933年)

一松信ほか .(2016). 中学校数学2. 学校図書 .

国立教育政策研究所教育課程研究センター. (2015～2019). 全国学力・学習状況調査報告書 .

小松孝太郎 , Stylianides, A. J., Stylianides, A. J.,

& 和田聖国 . (2019). 前提の役割に関する生徒の認識を育成するための課題設計 . 日本数学教育学会第52回秋季研究大会発表集録, 411-414.
小関熙ほか . (1978). 図形における論証指導について (その 1). 日本数学教育学会誌, 60, 1, 12-19.
國本景亀 . (2009). 数学的推論の研究について：数学観と操作的証明を中心に . 数学教育論文発表会「課題別分科会」発表集録及び要項 , 42, 54-59.
国宗進 . (2000). 図形の論証に関する理解度の変化 . 日本数学教育学会誌, 82, 3, 2-12.
Lénárt, I. (2006) . Non-Euclidean Adventures on the Lénárt Sphere: Investigations in Planer and Spherical Geometry. Key Curriculum Press.
文部科学省 . (2017). 中学校学習指導要領解説 数学 . 日本文教出版株式会社 .
中西正治 . (2006). 三辺形の理解について：平面上の図形と球面上の図形との対比を通して . 近畿数学教育学会会誌 , 19, 52-60.
西村泰一 . (2016). 猫にもわかる球面幾何学 . http://hdl.handle.net/2241/00135245(令和 2 年 3 月 6 日最終確認)
瀬山士郎 . (2019). 数学にとって証明とはなにか：ピタゴラスの定理からイプシロン・デルタ論法まで . 講談社 .
砂田大樹 . (2016). 『数学　第二類』における球面三角形教材の特徴と価値―球面三角形の面積と内角の和に焦点を当てて― . 日本数学教育学会第49回秋季研究大会発表集録, 441-444.
寺坂英孝 . (2014). 非ユークリッド幾何の世界 新装版：幾何学の原点を探る . 講談社 .
辻一輝 , 菱山洋介 & 山田雅博 . (2016). 球面幾何を用いた教材の開発と実践 . 岐阜数学教育研究 (15), 56-101.