上越数学教育研究，第 36 号，上越教育大学数学教室，2021 年，pp. 37-46

文字式に関する学習内容に見られる連続性

−プラクセオロジーを用いた教科書分析を通して−

高田　智裕
上越教育大学大学院修士課程 3 年

1．本研究の背景と目的

数学において文字式の利用は必要不可欠であり，その学習は非常に重要なものである．学校数学において文字や文字式が重要であるにもかかわらず，文字や文字式の理解に困難を示す児童・生徒が多く，苦手な教材とされている．

文字や文字式学習の困難性については，これまでさまざまな研究が進められてきた．例えば，文字式に関する生徒の実態に焦点を当てた研究 (杜,1991)，文字を用いた思考過程 (表す，変形する，読む) に焦点を当て，どのように文字式を理解しているのかを明らかにした研究 (三輪,1996) がある．算数と数学のギャップを指摘する研究もみられる (国宗,1997) ．

これらの研究から，文字式学習の困難性の要因の 1 つは，小学校算数と中学校数学の連続性であり，それが大きな課題になっていることと考えられる．実際，文字は小学校算数でも扱われるものの，その扱いは中学校とはやや異なるようである．例えば，文字を操作しないこと，文字式で重要な役割を果たす等号の意味が同じでないこと(計算せよという意味から右辺と左辺が等しいと言う意味)など，小学校算数と中学校数学では文字式学習におけるギャップが考えられる．また，Bosch (2015) は，小学校の算術的な方法が，代数的な方法の入り口になっているものの，今日では算術と代数を橋渡しする十分な課題が消えてしまっていると指摘している．こうしたことから，小学校算数(もしくは算術)と中学校数学(もしくは代数)の両者を統合した視点から文字式の学習を検討する必要があると考える．そして筆者は，まず，算数と数学の連続性や乖離による文字式学習の困難性を明確化する必要があると考えた．

そこで本研究では，「教授人間学理論(ATD)」おける「プラクセオロジー」という分析ツールを用いて教科書を分析することにより，今日のわが国の小学校算数から中学校数学までの代数もしくは文字式の学習においてどのような連続性と乖離があるのかを明確化する．

なお，本稿は，筆者が修士論文作成のために行った．上述の研究課題についての成果の一部をまとめたものである．

2．文字式学習の困難性について

以下では，先行研究を通して，文字にどのような意味や役割があるのかを明確化するとともに，小・中学校における文字式学習にどのような困難性があるのかを明確にする．

(1)　文字の意味と性質から見た困難性

学校数学で扱われる文字の意味は，場面によって，多面的な意味をもっている．このような文字の多面性が児童・生徒が文字を用いて立式したり，文字を含んだ式を読んだり，表現したりすることを妨げている一因であるといえる．しかし，文字を使うことで複雑な問題において

も数量の関係性・規則性・一般性などを簡潔に表現することができる．そこで，学校数学で扱われている文字の意味にどのようなものがあるのかを，先行研究(日野・叶,1998；杜,1991)から整理する．

杜(1991)は，文字の意味を以下の3つに整理している．

1．未知数

ある数量関係によって決められているが，まだ知られていない数量を表す文字

2．定数

数計算の原理や法則，公式，方程式や関数の係数を一般的に表している文字．また定数には，ある決まった議論の場面では，決まった数値を表している定数と議論の場面で定められていない場合では，さまざまな数値を表している定数，つまり一般的な場面の意味がある．

3．変数

ある関数関係の中での変化している数量を表している文字

ここで，定数には任意定数と一般数が含まれている．また，文字の性質について，プレイスホルダーの意味を場所であると捉え，その取り扱い方は数字や文字の扱い方と同じであり，文字をプレイスホルダーとみることは，文字を物とみることとは異なっていると指摘する．このことから，プレイスホルダーの働きは，ある場所を表していて，それに数や物を入れる単に空いている箱みたいなものであるに対して，もう1つの働きは，文字を物としてみることと捉えている．

日野・叶(1998)は，文字の意味を次の4つに整理している．

1．任意の数として

特定の場面においては決まった値を表すが，そうでないときは数一般を表しいろいろな値を表す文字

2．定数として

ある決まった数の代わりをする記号を表す文字

3．未知数として

いまわかっていない数の代わりを表す記号としての文字

4．変数として

2つの変量がともなっていろいろな値をとるとき，その数の代わりをする記号を表す文字

ここで，算数の学習の中で用いられる□，△の記号については，数を書き込む場所としての意味と数の代わりをする記号としての意味と2つ意味で捉えている．

以上のように，先行研究では，文字の捉え方は必ずしも同一ではない．そこで本研究では，小学校算数・中学校数学で扱われる文字を，意味と役割の2つの観点から以下のように整理した．

＜文字の意味＞

・未知数としての文字

x や□には，いまわかっていない数の代わりをする記号を表す文字

・一般数としての文字

法則・性質・公式などの恒等式を表すのに用いられる文字は，数一般を表し，いろいろな値を表す文字

・任意定数としての文字

例えば，関数 y=ax+b の a，b や n の倍数を表す nx の n などを表す場合に用いられる．こうした式においては，例えば y=ax+b であれば a，b を1つ固定した上で，x，y が変数としていろいろな値をとるというように a，b は任意に指定できるが定数の役割を果たしている．

・変数としての文字

x や y，△や□は，いろいろに変わっていく値をとるとき，その数の代わりをする記号を表す文字．また，変数として扱われる文字にはそれぞれの場面に応じて変域が決まる．

＜文字の役割＞

・プレイスホルダー

いろいろな数値を代入できる場所．また，数値を代入しうるということだけでなく，式も代入できる．

・操作する対象

数と同様に，計算できる対象としての性質．また，数と同様に扱うことで文字の意味にとらわれずに演算や式変形もできる．

以上のように，小学校算数・中学校数学で扱われている文字にはさまざまな意味や役割があり，文字の解釈や文字が使われる文脈などによって文字は異なる意味で用いられるのである．そのため，児童・生徒はさまざまな文字の意味や役割を理解し，それぞれの文脈に応じて適切に文字の表す意味や役割を理解する必要がある．ここに文字式学習の困難性が生じるのであろう．

(2) 文字式に関わる活動から見た困難性

次に，小学校算数と中学校数学における文字式学習に対する理解の現状や困難性を先行研究から見ていく．

Booth (1988) は，学校で教えられる文字式の使い方と児童・生徒の使い方のずれを指摘し，その要因を以下の 4 つにまとめている．

(1) 代数の活動の焦点と答えの性質

(2) 代数の表記法(notation)と規約(convention)の使用

(3) 文字と変数の意味

(4) 子どもが算数で使う多様な関係(relationship)と方法(method)

1 つ目の「代数の活動の焦点と答えの性質」とは，代数に関わる小学校算数の活動と中学校数学の活動では焦点が異なることを意味する．実際，小学校では数の答えを導くことを中心とし，答えは一つの記号で表される．一方，中学校では，関係や方法を導き出し答えは一つの記号で表されるとは限らない．例えば，代数で表される x＋3 は，1 つの数を表す記号列であるが，これを答えとして捉えるのは，児童・生徒にとって難しい．2 つ目の「代数の表記法と規約の使用」とは，例えば，算数の場合，＋(プラス)の記号を足し算を実行する記号，等号の記号を右側に答えをかく記号として児童は認識する．数学の場合，＋(プラス)を足し算の結果を表す記号列の一部，等号の記号を同値関係を表す記号として生徒は認識する．つまり，代数の表記法と規約の使用に関する学習には困難性が伴う．また，「3 つ目の文字と変数の意味」とは，算数の場合，文字はラベルであるのに対し，代数の場合，文字は数量を代表する記号，また変数である．このように，算数と数学では，文字の捉え方に違いがあり，それが困難性を生じさせていると考える．最後に，4 つ目の「算数で使う多様な関係と方法」とは，算数で使ってきたインフォーマルな方法を代数でもまた使うことである．

また岡崎(2003)では，代数を導入する際に，以下の問題点があると指摘している．

(1) 一般性として文字を導入する意義を生徒が実感しにくいという問題

(2) 場面と式との対応から来る問題

(3) 帰納的に一般化したもので論理的に証明がされていない問題

1 つ目の問題点は，例えばマッチ棒の問題において，正方形が 1 個できるときは 3×1＋1，2 個できるときは 3×2＋1…，n 個できるときは 3×n＋1 になるが，文字で表した場合，教師の側から何の断りもなく与えられ，生徒にとって 1，2，3 という数字の代わりに n という文字を用い，「なぜ文字を使うのか」ということには触れない．そのため生徒には文字を使う必要性は感じられない．n という数字に任意の数字を代入するとマッチ棒の数が分かるという文字の威力は教師側であり，すでに知っている側の理屈で生徒には，その必要感が喚起されにくい．2 つ目の問題点は，マッチ棒の数は 3×n＋1 だけでなく，捉え方によって 4×n×(n−1) や 2×n＋(n＋1) などそれらが同値であることは，まだ文字計算を知らない生徒には理解しがたいという問題がある．3 つ目の問題点は，文字式学習の導入時，帰納的に一般化したものである．通常なら証明という手続きを経るのであるが，その時点で生徒には無理があるという問題である．このように，文字の導入時の指導では，計算過程を明確化することで数から文字へ変化し

ても変わらないことで文字使用の意義を生徒に感じさせることが重要である．

以上のように，小学校算数と中学校数学における文字に対する児童・生徒の困難性にはさまざまなものがあることがわかる．そのため，小学校算数の影響によって起こる文字式学習の困難性は，早期に文字に関する学習を取り入れるというような小さな調整で解消されるとは思えない．したがって，文字式学習の困難性を検討する際には，中学校数学の検討のみでは十分ではないのである．

３．理論的枠組み

ここでは，教科書分析するうえで拠り所となった「教授人間学理論 (Anthropological Theory of the Didactic)」(Chevallard,2006；宮川, 2011) の諸概念について述べる．具体的には，本稿の研究がどのような意味をなすのかを示すとともに，教科書分析で用いる分析ツールを示す．

(1) 教授学転置

教授人間学理論(ATD)では，何らかの操作によって数学がある社会から別の社会に置き換えられるといった「転置(transporsition)」という現象に着目し，教育において扱われる知そのものの性質を知ろうとする．これはATDに包含される「教授学的転置理論」と呼ばれるものであり，知的集合体(institution)と呼ばれる社会的な集まりに応じて，構成が異なった数学が存在することを前提とする(宮川，2011)．例えば，「数学者の数学」「技術者の数学」「学校教育の数学」などがそれぞれ異なったものとして異なった場所に存在すると考える．そして，ある数学的対象がある数学に存在するためには，知的集合体がもつ存在するための条件とそれを妨げる制約に従わなければならないと考える(Chevallard,1992; 宮川,2011)．教授学的転置(didactic transposition)の視点からすれば，数学が１つの社会に何らかの操作で別の社会になれば変形されると考える．社会で構築される数学の知から個人の数学的知識まであらゆる知識を明らかにすることを目指した理論である(宮川，2011)．

教授学的転置の視点からすれば，本研究は，教科書に見られる「教えるべき数学」としての小学校算数と中学校数学を問題とするものである．それぞれは異なった知的集合体に存在する．本研究では，それぞれの数学の文字式に関わる部分の特徴を明らかにするとともに，前者から後者への転置の仕組みを明確化しようとするものである．

(2) 分析ツール：プラクセオロジー

ATDでは，数学的な知識や活動を記述するための概念が整備されている．それは，「プラクセオロジー (praxeology)」と呼ばれるものであり，知的集合体に存在する知，すなわち数学的な知識や活動をモデル化するものである．プラクセオロジーは，人間の行為の背景となる知が実践的側面 (praxis) と理論的側面 (logos) からなると考え，表1の4つの構成要素によりなるものである(宮川，2011)．

表1 プラクセオロジーの要素とその意味

実践部 (praxis)	T：タスクタイプ	ある対象の解決にかかわる問いの種類
	τ：テクニック	タスクを成し遂げる解決方法
理論部 (logos)	θ：テクノロジー	テクニックを正当化する，説明し理解する，生成する理論的なもの
	Θ：セオリー	テクノロジーをさらに正当化，説明，生成するもの

したがって本研究では，教科書に見られる文字式に関わる「教えられるべき数学」をプラクセオロジーの概念により記述し，小学校から中学校への連続性と乖離を明らかにする．

４．教科書分析

小学校算数から中学校数学までの代数もしくは文字式の学習の連続性や乖離を明らかにするため，二つの視点から教科書を分析した．

(1) 文字の意味や役割に関する分析

□，△などの記号から文字への移行の中で，それらの記号や文字がどのような意味や役割を持っているのか，いかにそれらが変化していくのかを小学校学習指導要領，小学校学習指導要領解説算数編，教科書から学年ごとに分析した．以下にその分析結果をあげる．連続性と乖離については，次章で検討する．

・第1学年

小学校学習指導要領解説で，□などの記号には触れられていないが，教科書で□が用いられている．□の役割は，□に数を書き込む場所として用いられている．

・第2学年

小学校学習指導要領・小学校学習指導要領解説には□の記号と(　)の記号について触れられているが，その意味や役割の記述されていなかった．教科書では，□や(　)の記号の意味や役割はわからない数と，数を書き込む場所として用いられている．

・第3学年

□の意味は，未知数として扱うことが中心であるが，変数としてみることができるような学習も同時に行われている．また，□の役割は，さまざまな数をあてはめる場所といろいろな数や量をあらわすものが用いられている．

・第4学年

文字の意味は，一般数，変数と文字の意味が拡張されている．また文字の役割は，第3学年同様，さまざまな数をあてはめる場所といろいろな数や量をあらわすものが用いられている．

・第5学年

文字の意味は，一般数と変数の2種類で，文字の役割は，数や量の代表として扱われている．これまで学習してきた数量を表す□，△などの記号の意味や役割を深める扱いになっている．

・第6学年

数量を表す言葉や□，△などの記号から文字を用いた式で表され，中学校数学で扱われる文字に慣れさせることがねらいとなっている．そして，未知数，変数，一般数の文字の意味が学習されている．しかし，任意定数は，中学校数学の比例・反比例の学習で扱うことになっているため，小学校算数の段階では学習しない．また文字の役割は，さまざまな数をあてはめる活動といろいろな数や量の代表である．

(2) 方程式に関する分析

方程式に関する内容について，小学校算数から中学校数学までの教科書に見られる学習内容や想定される数学的な活動における連続性を分析するため，小学校算数第1~6学年，中学校数学第1~3学年の教科書を対象とする．そこで，プラクセオロジーの視点から，方程式に関する問題(タスク)における連続性と乖離，問題の解決方法(テクニック)とその根拠(テクノロジー)における連続性と乖離を分析した．

① 方程式の問題における分析

方程式に関するタスクは，方程式を解くタスクタイプと方程式を特定するタスクタイプに大きく分類することができる．方程式を解くタスクタイプとは，例えば「ある数 x の4倍は x に21を加えた数に等しい」のように，未知数の値を求めるような問いである．方程式を求めるタスクタイプとは，例えば「$2x-6=x+3a$ の解が $x=5$ であるときの a の値を求めなさい」のように，方程式の解(未知数)がわかっているとき，任意定数の値を求める問いである．

小学校算数から中学校数学までの方程式に関する学習における連続性を分析するにあたって，小学校で学習するタスクが中学校で方程式になる問題を抽出した結果，表2に示したタスクタイプが特定された．ここでは，方程式を特定するタスクタイプと方程式を解くタスクタイプの中で，「$2x-3=7$」のような方程式を計算する問題は分析の対象から外した．

小学校から中学校までの教科書に見られる方程式を解くタスクの連続性で見ると，小学校算数・中学校数学の両方の教科書に見られるタスクタイプがあるが，いくつかのタスクタイプは，小学校算数にはあるが，中学校数学にはな

表 2　小・中学校の教科書で扱われている方程式を解くタスクタイプ

タスクタイプ	小学校算数の問題数					中学校数学の問題数			
	1 年	2 年	3 年	4 年	5 年	6 年	1 年	2 年	3 年
T_1：逆思考の問題	0	10	7	0	0	0	0	0	0
T_2：植木算	0	0	2	0	0	0	1	0	0
T_3：和差算	0	0	0	2	0	0	2	1	0
T_4：旅人算	0	0	0	0	2	0	4	1	0
T_5：消去算	0	0	0	2	0	0	0	7	0
T_6：鶴亀算	0	0	0	0	0	1	4	7	0
T_7：仕事算	0	0	0	0	0	3	0	0	0
T_8：通過算	0	0	0	0	0	1	0	0	0
T_9：過不足算	0	0	0	0	0	0	4	1	0
T_{10}：比の問題	0	0	0	0	0	6	4	0	0

い，また中学校数学にはあるが小学校算数にはないという場合があった．

② 解決方法における分析

小・中学校で扱われる方程式を解くタスクタイプの問題例を取り上げ，そこでどのようなテクニックやテクノロジーが用いられるかを分析し，小学校算数から中学校数学までどのような変化があるのかを検討した．以下では，小学校と中学校の両方で見られる「植木算」と「旅人算」を取り上げ，分析事例を示す．

・植木算(小学校算数)

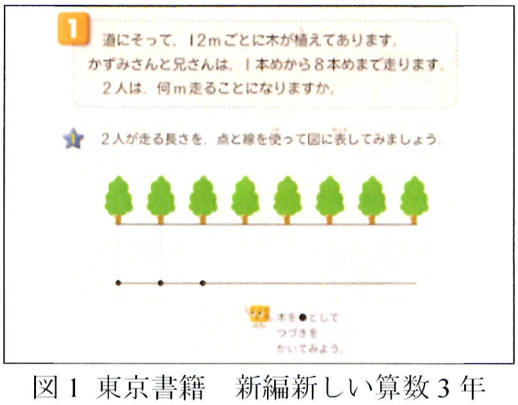

図 1 東京書籍　新編新しい算数 3 年下(藤井ほか，2014，pp.110)

この問題で期待されている解決方法は，問題文から「12m ごとに木を植える」という間隔の長さと「木は 1 本目から 8 本目」という木の数を図に書くことで，すきまの数を理解するものである．すきまの数は始めに植えてある木 1 本を除くので，「木の本数－1＝すき間の数」となり，8－1＝7 ですき間の数がわかる．全体の長さを求めるために，12×7 と式が立てられる．12×7 を計算すると 84 になり，全体の長さは 84m と求められる．

このタスクタイプを解決するためには，3 つのサブタスク(subTe-2)を解決することが求められる．

まず subTe-2.1 では，問題文から 2 つの長さと 2 つの数量がわかるように図で表し，すきまの数を求める．文章だけで問題の状況を把握するのは難しいためである．そこで用いられるテクニックは，問題を読み，間隔の長さと全体の長さ，木の数とすきまの数を整理し，図を完成させ，立式するといったものである．図からすきまの数は木の数を対にしていくことで，木の数が多いのか，木とすきまの数が同じなのか，すきまの数が多いのかを読み取る．この背景にあるテクノロジーは，1 対 1 の対応，順序の考えであると考えられる．

次に subTe-2.2 では，全体の長さや間隔の長さ，木の数を求めるため立式する．そこで用いられるテクニックは，図から全体の長さや間隔の長さ，木の数を把握し，式を立てる．この問題では，すきまの長さ×すきまの数＝全体の長さという式が立てられる．

最後に subTe-2.3 では，求めたい数を出すために立式から答えを求める．かけ算もしくはわり算をするというテクニックを用いて解決する．この背

景にあるテクノロジーは，計算するための規則であると考えられる．

・植木算(中学校数学)

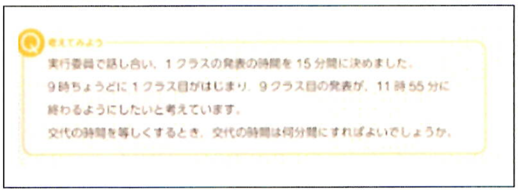
考えてみよう
実行委員で話し合い，1クラスの発表の時間を15分間に決めました。
9時ちょうどに1クラス目がはじまり，9クラス目の発表が，11時55分に
終わるようにしたいと考えています。
交代の時間を等しくするとき，交代の時間は何分間にすればよいでしょうか。

図2 東京書籍　新編新しい数学1年
(藤井ほか，2014，pp.93)

中学校では図2のように植木算が扱われていた．この問題で期待される解決方法は，求める数量を交代の時間であるため x 分間とすると，$15\times9+8x=175$ と方程式ができる．方程式を解くと $x=5$ となり，交代の時間は5分間と求めることができる．このような問題を，方程式を使って解くにあたって教科書では，以下のような手順が示されていた．

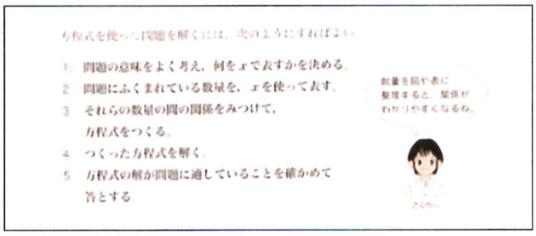
方程式を使って問題を解くには，次のようにすればよい。
1 問題の意味をよく考え，何を x で表すかを決める。
2 問題にふくまれている数量を，x を使って表す。
3 それらの数量の間の関係をみつけて，
方程式をつくる。
4 つくった方程式を解く。
5 方程式の解が問題に適していることを確かめて
答とする。

図3　方程式を用いて問題を解く手順
(藤井(2014)．新編新しい数学1年，
東京書籍，p98)

方程式を使って解くには，教科書では，2つのサブタスク(subTm-1)を用いて解決することが求められる．

subTm-1.1 は，方程式をつくることである．このタスクを解決するためのテクニックは，求めたい数量を文字で表し，1次方程式をつくる．この背景にあるテクノロジーには，相等関係があると考えられる．

subTm-1.2 は，方程式を解くことである．このタスクを解決するためのテクニックには，文字を含む項を左辺に，数の項を右辺に移項させたり，形にまとめたり，変形して，それを答えとする．この背景にあるテクノロジーには，等式の性質があると考えられる．

植木算は，小学校算数と中学校数学で似たようなタスクが存在しているが，問いが異なっている．小学校算数の問題は，全体の長さを求める問いである．この問いは，方程式を使うことなく解けるため方程式を解くタスクではない．中学校数学の問題は，すきまの長さを求める問いであるため，方程式で考えることができる．このように，植木算は小学校算数と中学校数学で似たようなタスクが存在しているが，解決方法を見ると方程式に関する学習の連続性は存在していないことがわかる．

・旅人算(小学校算数)


1 つよしさんは，去年1200円貯金して，今年の1月からは毎月200円ずつ貯金しています。
まいさんは，去年は貯金がなく，今年の1月から毎月350円ずつ貯金を始めました。
何月になると，2人の貯金の金額が等しくなりますか。

1 1月から4月までの，2人の貯金のようすを調べて，気づいたことをいいましょう。

	去年	1月	2月	3月	4月
つよし(円)	1200	1400			
まい (円)	0	350			

2 2人の金額が等しくなるのは何月かを，くふうして求めましょう。

	去年	1月	2月	3月	4月
つよし(円)	1200	1400			
まい (円)	0	350			

図4 東京書籍　新編新しい算数5年下
(藤井ほか，2014，pp.75)

この問題で期待されている解決方法は，二人の貯金のようすを表で表す．二つの最初の位置と二つの移動の速さの変化を整理する．表から二人の間の最初の距離が1200円離れていることがわかり，一か月で縮まる金額の差は150円ずつ減っていくことを表から読み取れる．$1200\div150$ と式が立てられる．$1200\div150$ を計算すると8になり，2人の貯金額が等しくなるのは8月と求められる．

このタスクタイプを解決するためには，3つのサブタスク(subTe-5)を解決することが求められる．

subTe-5.1 では，問題文を図で表し，単位時間あたりの変化を考えるために，表をつくる．教科書

では，文章のみで問題が与えられる場合，文章だけでは，状況を把握するのは難しいためである．そこで用いられるテクニックは，図で表すことによって，二つの移動する方向が読み取れ，また，二つの進む方向が逆方向に進む場合と二つの進む方向が同じ方向に進む場合に分けられる．表では，二つの最初の位置と二つの移動の速さの変化を整理する．この背景にあるテクノロジーは，ともなって変わる量であると考えられる．

次に subTe-5.2 では, 表から二つの進む速さが時間とともに変化するとき，二つの距離の差・和が 1 分あたり移動する速さの値を読み取り，二つの距離が 0 になるときの時間を求める．そこで用いられるテクニックは，図・表から二つの移動する方向, 位置, 速さの和・差を認識し, (2 人の距離)÷(2 人の速さの差・和)＝(2 人の出会う時間)という式を立てる．この背景にあるテクノロジーには，速さの公式(道のり÷速さ＝時間)が用いられている．

最後に subTe-5.3 では, 求めたい数を出すために立式から答えを求める．わり算するというテクニックを用いて解決する．この背景にあるテクノロジーは，計算するための規則であると考えられる．

・旅人算(中学校数学)

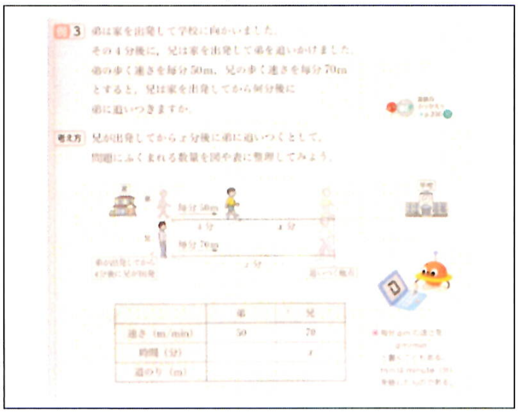

図 5 東京書籍　新編新しい数学 1 年
(藤井ほか，2014，pp.97)

中学校では図 5 のように旅人算が扱われていた．この問題で期待される解決方法は，求める数量を兄が家を出発してからの時間であるため x 分とすると，50(x+4)＝70x と方程式ができる．方程式を解くと，x＝10 となり，兄が家を出発して弟に追いつく時間は 10 分と求めることができる．

方程式使って解くには，教科書では，2 つのサブタスク(subTm-1)を解決することが求められる．

subTm-1.1 は，方程式をつくることである．このタスクを解決するためのテクニックは，求めたい数量を文字で表し，1 次方程式をつくる．この背景にあるテクノロジーには，相等関係があると考えられる．

subTm-1.2 では，方程式を解くことである．このタスクを解決するためのテクニックには，文字を含む項を左辺に，数の項を右辺に移項させたり，形にまとめたり，変形して，それを答えとする．この背景にあるテクノロジーには，等式の性質があると考えられる．

旅人算は，小学校算数と中学校数学で似たようなタスクが存在し，問いも同じような問題になっている．旅人算は，小学校算数と中学校数学で似たようなタスクが存在しているが，解決方法を見ると方程式に関する学習の連続性があるようなに見える．

5. 連続性と困難性の考察

以下では，第 4 章で示した 2 つの分析結果から文字式に関わる学習内容に見られる連続性と乖離を考察し，文字式を学習する上での生徒にとっての困難性を検討する．

(1)　文字の意味や役割の視点から

文字の役割は，最初の学習で「数を書き込む・入れる場所」が見られた．小学校 1，2 学年は，数直線・求答式・テープ図などで□や(　)などの記号用いられていた．□は，数を書き込んだり，入れたりする場所として使われていた．次に見られた役割は,「数や量の代わりをする記号」であった．□，△などの記号は，記号自体を数の代わりとして認識するものであった．第 3 学年から□を使って立式する活動で，数字の式とことばの式を考えさせてから□を導入している．□がいろいろな数やことばの代わりであることを理解する学習が行われている．そこで□を求める活動で，さまざまな数をあてはめて真偽を確かめる活動を通して，児童が□にはさまざまな数が入るということ，

いろいろな数の代わりであることを理解するような活動となっていた．

一方，文字の意味は，教科書で「□を使った式」の学習において「いまは分かっていないが決まった数を表す記号」として□，△などの記号であり，未知数の意味である．次に，教科書では「計算のきまり」の学習において「いろいろな値をとりうる数を表す記号」として，□，△などの記号であり，一般数の意味である．最後に，教科書では「変わり方のきまり」の学習において「いろいろな数があてはまり，一方の大きさが決まれば，それに伴って他方の大きさが決まる記号」として□，△などの記号であり，変数の意味である．任意定数は，中学校数学の比例・反比例の学習で文字として扱う．以上のことを踏まえ，小・中学校における文字の意味や役割の変化をまとめると，表 3 のようになった．

表 3　小・中学校における文字の意味や役割の変化

	文字の役割	文字の意味
小学校算数	数を書き込む・入れる場所	
	↓	
		未知数
	数や量を表す	↓
	↓	一般数
		↓
		変数
		↓
中学校数学	操作する対象	任意定数

文字の役割は「数を書き込む・入れる場所」から「数や量の代わりをする記号」による認識の深まりの困難性があると考えられる．それは，未知数を□として形式的に置き換えたり，逆算などで答えを求めたりする活動を中心に行うと，□は答えを書き込む空欄や数を当てはめる場所としての意識が強くなると先行研究で指摘されている(日野・叶，1998)．小学校算数における□，△などの記号を扱った問題では，当てはまる数を求めたりする活動に焦点が置かれている．そのため□，△などの記号を具体的な数の代わりとして指導が十分に行われていないことが困難性の 1 つの要因となると考える．

文字の意味については，未知数としての文字の理解から一般数と変数としての文字の理解への移行に大きな困難があることが考えられる．それは，児童が□が未知の数量であり，答えを求めるためのものであると考えているため，□を用いた式が一つの数量を表していることや数量の関係性や一般性を表していることを理解できていないことが困難性の要因となると考えられる．

(2)　方程式の内容に関する視点から

方程式に関する内容について，まずタスクタイプの分析では，小学校算数の問題の種類は，さまざまなタスクタイプがあったが，中学校数学では文字を使用することで，方程式を解くタスクに統合的に考えることができる．しかし，特殊算のような文章題は，小学校算数では発展問題として扱っているのに対し，中学校数学では方程式の利用として解くことになっている．このことから，特殊算は中学校数学で扱う方程式のタスクとして扱われていることがわかった．そのため，小・中学校の連続性が欠けていると考えられる．

テクニックの分析では，小学校算数は，文章問題→図→式という過程を取り入れ，図と式を関連付けながら答えを求めている．その解法方法は，□などの記号や文字を用いて，式を立て答えを求める解法と，線分図や表など利用して，式を立て答えを求める解法がある．中学校数学は，方程式を用いて解を求めている．算術的解法から代数的解法へ移行する際に，演算方法や数量関係を等式として立式する必要があるため困難性があると考えられる．

テクノロジーの分析では，小学校算数は，さまざまな領域のテクノロジーが存在し，中学校数学では方程式に関するテクノロジーのみが

存在している．小学校算数と中学校数学が扱われる数学領域が異なり，それに伴ったテクノロジーの違いから児童・生徒の学習の困難性が考えられる．

６．今後の課題

本研究では，小学校算数から中学校数学までの代数もしくは文字式の学習においてどのような連続性が存在するのかを，プラクセオロジーを用いた教科書分析から詳細に文字式学習について分析した．それぞれ分析により，どのように文字に関する学習が行われているのか明確になった．

今後の課題は，主に2つある．まず1つは，今回の分析では，方程式に関する内容について，小学校から中学校までの教科書に見られる学習内容や想定される数学的な活動における連続性を明らかにしたものの，学校数学における他の領域とのかかわりは検討できなかった．それらも踏まえた分析・考察を行うことで，より広い文字式学習の困難性の要因を示したい．もう1つ目は，今回の分析では，あくまでも教科書に見られる「教えるべき数学」における小・中学校の文字式学習の生態についてのものであったため，実際の授業で文字・文字式に関する内容がいかに連続性を持った学習ができ，そこで児童・生徒らの文字をいかなるものと捉えるのか，「教えられた数学」や「学ばれた数学」における実態をさらなる資料やデータを用いて検討する必要がある．

引用・参考文献

岡崎正和（2003）．「全体論的な立場からの文字と式の単元構成について」．上越数学教育大学研究紀要，第18号，pp49-58．

国宗 進（1997）．「確かな理解をめざした文字式の学習指導」．明治図書．

杜 威（1991）．「学校数学における文字式の学習に関する研究 数の世界から文字の世界へ」.東洋館出版社．

日野圭子・叶剛史(1998).「算数・数学教育における文字の学習に関する一考察－文字概念形成過程における諸問題を中心にして－」．奈良教育大学紀要第47巻,第1号．pp 33-47.

藤井斉亮(1998).「文字式の理解に関する一考察－擬変数について－」．数学教育論文発表集(31), 123-128.

藤井斉亮 他41名(2014).「新編新しい算数1-6」．東京書籍．

藤井斉亮 他38名(2014).「新編新しい数学1-3」．東京書籍．

宮川 健（2011）．「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格－わが国における「学」としての数学教育研究をめざして－」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』，第94巻，pp 37-68.

三輪辰郎(1996).「文字式の指導；序説」．筑波数学教育研究,第15号．pp 1-14.

文部科学省(2017)「小学校学習指導要領解説 算数編」,日本文教出版

文部科学省(2017)「中学校学習指導要領解説 数学編」,日本文教出版

文部科学省・国立教育政策研究所教育課程研究センター．（2013-2018）．「全国学力・学習状況調査報告書」

Bosch,M.(2015).Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. *Selected regular lectures from the 12th international Congress on Mathematical Education*, 51-69.

Booth,L.R.(1988). Children's Difficulties in Beginning Algebra. In A.F.Coxford,&A.P. Shulte, The ideas of algebra, K-12:1988 Yearbook.*National Council of Teachers of Mathematics,*20-32.

Chevallard, Y. (1992). A theoretical approach to curricula. *Journal fur Mathematikdidaktik*, 13,2/3, 215-230.

Chevallard Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proc. of the CERME 4* (pp.22-30). Barcelona: Universitat Ramon Llu