上越数学教育研究，第 36 号，上越教育大学数学教室，2021 年，pp. 27-36

# 非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業における子どもの理解の様相
## ―前提の理解に着目して―

高橋　勇介
上越教育大学大学院修士課程３年

## 1. はじめに

非ユークリッド幾何学は，2000年以上もの間絶対的な幾何学と信じられ続けていたユークリッド幾何学の第五公準である平行線公準の否定により成立した幾何学体系である．この非ユークリッド幾何学の成立により，平行線公準は真実としてではなく前提としてみなされるようになり，前提を変えることで様々な幾何学体系が存在するという相対的な数学観が誕生した．この非ユークリッド幾何学の成立過程に見られるように，前提は数学の発展において重要な役割を果たしてきた．また，学校数学において，前提について学習することの教育的な価値に関する指摘がなされてきた ( 例えば， Fawcett ， 1966) ．

一方，筆者の経験上，学校数学において前提を意識する場面は少なかった．そこで，非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通じて，前提の役割や数学に対する相対的な見方について，子どもが学習できると考えた．また，前提は，中学校数学で初めて学習し，かつ苦手としている生徒が多い図形の論証にも深く関わっているため，非ユークリッド幾何学は，数学的な価値のもつ中学校数学の教材になりうると考える．しかし，中等教育，特に中学校における非ユークリッド幾何学を教材とした授業実践の先行例は，文献を調べた限りわずかよりない．

本研究の目的は，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計・実践を通して，非ユークリッド幾何学や前提に関しての子どもの理解の様相を明らかにすることである．

## 2. 教材としての非ユークリッド幾何学

### 2.1. 中村 (2006) の研究

中村 (2006) は，高校数学において，具体的な事象に対する数学の活用が十分ではないことを問題意識とし，球面三角法を題材とした授業を設計・実践し，生徒の数学観の変容について考察した．球面における余弦定理と正弦定理を用いて，三角形の合同条件を検討する活動では，三角相等も球面における三角形の合同条件となりうることや，球面三角形の内角の和が一定ではないことを確かめた．中村 (2006) は，生徒に対する授業後アンケートの「対象にする空間の違いによってさまざまな新しい発見がある」， 「 ( 球面三角形の ) 内角の和の最大を探してみたいと思った」という記述から，生徒は平面以外にも空間が存在することを認識したり，数学的な見方や考え方のよさを認識したりすることで，数学観の変容を促すことができたと考察している．

### 2.2. 中西 (2006) の研究

中西(2006)は，既習の平面図形の性質が，球面上においても成り立つかどうかを調べることを通して，図形の理解の様相を明らかにすることを目的とし，中学一年生から三年生二名ずつの，計六名を対象とし，球面幾何学を教材とした授業をおこなった．おこなわれた全六時間の授業のうち，第五時では，生徒はプラスチック製の球面模型とホワイトボード用のペンを用いて，三直線で囲まれる三角形を作成した．その際，生徒の一人である3bは，球面上にできた三角形は，平面に描くと三角形ではないため，三角形として認められないと主張した．そこで，教師は，三角形とは何か，すなわち三角形の定義について全体で確認し，「三直線で囲まれた図形」が三角形であるとした．しかし，3bは，球面にできる直線は曲がっているから直線でないと発言した．その後，直線の定義について，直線は二点を最短距離で結ぶ線であることを確認した．そして，三角形の定義と，直線の定義から得られる球面における直線は大円であるということから，3bが指摘した図形は三角形であると認めなければならないと，教師が説明をおこなった．

### 2.3. 非ユークリッド幾何学の教材的価値

以上の先行研究より，非ユークリッド幾何学の教材的価値を次の三点とした．

(1) 平面幾何学に対する理解の深化

中村(2006)は，平面と球面における三角形の合同条件をそれぞれ比較・検討することで，生徒は既習の三角形の合同条件を，平面における三角形の合同条件として捉え直した．また，中西(2006)は，球面三角形の存在について考える過程の中で，既習の直線や三角形の定義を見直す活動が生じたことを示した．これらより，非ユークリッド幾何学と既習の平面幾何学を比較することで，生徒の平面幾何学に対する理解が深化されていく．

(2) 図形を考える次元の認識やその役割の理解の深化

中村(2006)では，図形を考える次元によって，図形の性質が異なることを生徒が理解したことが報告された．このように，非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通じて，生徒がこれまで認識していなかった図形を考える次元を認識したり，空間によって考えられる図形やその性質が決まるという次元の役割について理解したりすることが可能になる．そして，この図形を考える次元の認識やその役割の理解は，幾何学は平面幾何学のみであるという絶対的な数学観から，前提とする次元によって幾何学体系は複数存在するという相対的な数学観への変容へと繋がる．

(3) 数学をつくり出す経験が可能となる

中西(2006)では，生徒の球面三角形の存在に対する疑問から端を発し，生徒らがこれまで学習してきた三角形や直線の定義まで遡って考え，それらを基に球面三角形が存在することを全体で共有する様相が報告された．この一連の過程は，既習の平面図形の知識を活用しながら，球面上の図形の存在を認める活動であり，数学をつくり出す過程と言える．このように，非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通じて，子どもが数学をつくり出す経験が可能となる．

## 3. 本研究における理解の捉え方

本研究では，スケンプ(1973)に基づき，「シェマの同化と調節」を理解として捉えることとした．また，理解には，個人でおこなわれる理解と集団における相互作用を通じておこなわれる理解の二つの側面があると捉え，各理解を「個人内理解」と「集団的理解」と名付けた．以下では，これら二つの理解について論じる．

### 3.1. 個人内理解

本研究における個人内理解は，「個人でおこなわれるシェマの同化と調節」のことを指す．個人内理解は，図１のように示される．

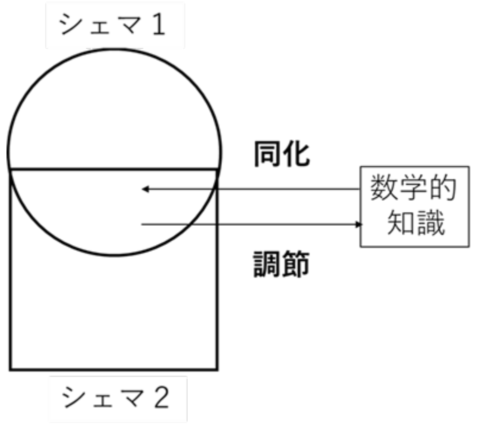


図１　本研究における個人内理解

図１におけるシェマ１とシェマ２は，ある個人が持つ二つの異なるシェマであり，個人内理解とは，それぞれの一部分を関連付けることでおこなわれる理解のことを指す．例えば，おうぎ形の面積の公式の理解には，円のシェマと比例のシェマの計二つが用いられる．また，理解の対象となる内容が同じであっても，理解するのに用いられるシェマの種類や個数は，個人によって異なる．

**3.2. 集団的理解**

本研究における集団的理解は，「集団における相互作用を通じておこなわれるシェマの同化と調節」のことを指す．まず，スケンプ(1992)から，数学に関するシェマの構成を数学的知識の構成として捉えることができるという知見を得た．また，アーネスト(2015)の論じた数学的知識の社会的構成過程により，数学の主観的知識は社会に公表され，他者による検討や批判にさらされることで客観的知識へと更新され，それを基に個々人が再定式化することで新たな主観的知識が構成されるという知見が得られた．そして，アーネスト(2015)の数学的知識の社会的構成過程は，スケンプ(1992)の述べたシェマの構成過程を詳細に述べたものであり，子どもが集団的理解に至るまでの過程として考えることとした．

さらに，熊谷(1998)から，集団の中で公表された主観的知識が共有されている一方で，その正当性についての同意が集団内で得られていないときに，正当化がおこなわれていくという知見を得た．

以上の先行研究を踏まえ，例として，ある数学の学習内容について三人の生徒（ここでは，それぞれ生徒Ａ，生徒Ｂ，生徒Ｃとする）で，考えを共有する場面を想定し．各生徒がした個人内理解を公表し合うことで，ある数学の学習内容について，各生徒がおこなった個人内理解に用いたシェマは，図２のように共有されるものと考えた．

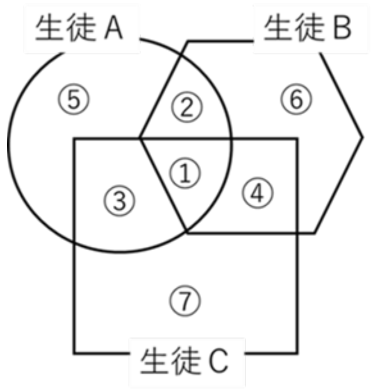


図２　三人の生徒によって共有されたシェマ

この例では，各生徒が個人内理解するのに用いたシェマは一つである．そして，図２に基づき，三人の生徒が集団的理解に至るまでの過程を，各生徒が個人内理解に用いたシェマの違いによって，三種類に分類した．

過程１は領域①で見られる過程である．領域①は，共有された三つの数学に関するシェマがすべて重なっている領域であり，各生徒のシェマの中で，その構造が共通している部分と見なせる．したがって，領域①に属する知識を用いてなされた各生徒の個人内理解は，それぞれ同じような個人内理解をしており，生徒間での同意や正当化が容易になされ，三

人の中での正しい理解として認められる．

過程２は，領域②，領域③，領域④で見られる過程である．これらの領域は，共有された三つのシェマのうち，二つが重なっている領域である．例えば，領域②について，生徒Ａと生徒Ｂの個人内理解に対しては，二人の間で同意され，正当化される．一方，生徒Ｃにとって，領域②は自身のシェマにはない構造であるため，生徒Ｃは，生徒Ａと生徒Ｂの領域②による個人内理解に同意できない．この場合，生徒Ａと生徒Ｂの個人内理解について，論駁や批判がおこなわれることで，三人の間での正当化がなされる．こうして，生徒Ｃのシェマは，領域②に合うように調節され，生徒Ｃが領域②を用いた理解が可能となる．上記の例は，生徒Ｃが，生徒Ａと生徒Ｂの個人内理解によってなされる集団的理解の過程であるが，一方で，生徒Ａと生徒Ｂが，生徒Ｃの個人内理解によってなされる集団的理解の過程も同様に考えられる．

過程３は，領域⑤，領域⑥，領域⑦で見られる過程である．これらの領域は，それぞれ独立しているため，それぞれの個人内理解を共有した段階では，自分以外の個人内理解について同意がなされない．よって，この場合は，「生徒Ａ対生徒Ｂ対生徒Ｃ」という対立構造での相互作用を通じて，それぞれの個人内理解についての正当化がおこなわれ，集団的理解へと繋がる．

## 4. 本研究における前提の捉え方

本研究では，非ユークリッド幾何学に深く関連している数学における”前提”を子どもがどのように理解していくかを中心に明らかにしていく．通常，数学における前提は Fawcett(1966) が挙げているような，証明なしに真と認められる命題を意味し，その代表例として公理が挙げられる．しかし，本研究で対象としている中学校数学の学習内容には，公理という語は使われていない．したがって，中学生が，本来の意味での前提について学習することは容易ではないため，前提の意味を拡張する必要がある（例えば，小松ら，2019）．

一方，平岡(1973)は，図形の性質は，その図形の存在する空間が前提となり導かれるものであると述べ，子どもが幾何学における前提としての空間を認識することは重要であるにもかかわらず，認識するための機会や子どもの認識できる図形の存在する空間が少ないことを指摘している．生徒にとって既習の平面幾何学と異なり，本研究で扱う非ユークリッド幾何学は，鞍型または球面を前提とした幾何学である．そのため，非ユークリッド幾何学を教材とした授業を通して，幾何学の前提となる図形の存在する空間，すなわち図形を考える次元についての理解が可能になると考える．以上より，本研究では，「図形を考える次元」を前提として捉えていく．

## 5. 教授実験の実際と分析

### 5.1. 教授実験の概要

教授実験は，2020年二月に，新潟県の国立大学附属中学校三年生の一学級で，筆者が全四回実施した．実施した授業は，髙橋(2020)で報告した球面幾何学を教材とした授業である．非ユークリッド幾何学の中から球面幾何学を選択した理由は，地球上で生活している生徒が球面を前提とした幾何学を自分事として捉えられる点と，球のモデルとしての具体物の種類が豊富である点の二点である．なお，本研究では，球のモデルとして直径15cmの透明球を，球面上の直線として四色（水色，ピンク，黄色，緑色）の紙テープを採用した．また，調査対象者は，グループでの活動を記録した一グループ（以下，Ａ班とする）の計四名であり，ビデオカメラとICレコーダーを用いて，授業の様子を記録した．

### 5.2. 教授実験の実際と分析

教授実験では，生徒は，線や角をはじめと

した幾何学の基本的概念に関する内容と，三角形をはじめとした図形に関連する内容に関して学習した．これらの学習した内容は，平面または球面に存在するか否かによって，三種類に分類される．以下では，平面と球面に存在する直角と，平面のみに存在する平行線，球面のみに存在する二直角三角形の理解の様相をそれぞれ記述し，分析をおこなう．さらに，生徒にとって球面幾何学を理解するための直観的な方法である平面への帰着という視点からも分析していく．

**5.2.1. 直角の理解**

第一時では，生徒にとって既知の図形である直角三角形が球面にも存在するかどうかを確かめる活動をおこなった．Ａ班は，図３のようなピンクと黄色と緑色の紙テープによって囲まれた三角形をつくった．

図３　Ａ班のつくった三角形

なお，この三角形は直角を二つ持つ球面特有の二直角三角形であるが，Ａ班の生徒はこの三角形を二直角三角形と認識していない．以下は，図３の三角形の直角の有無について，Ａ班の生徒が議論する場面のプロトコルである．

Ai：これ直角三角形じゃない？
Hiro：ほんま？ほんまかいな．
Ishi：え？直角？
Ai：え，直角じゃないの？
Hiro：いや，それは絶対にない．
Ai：（２本の紙テープのメモリと角を）合わせれば…
Ishi：合わせれば？
Hiro：いや，絶対にない．
Kyo：いや，絶対にない．違う．

このように，Ａ班では，図３の三角形に直角は含まれていると個人内理解したAiと，直角は含まれていないと個人内理解した他の三人での対立が見られた．Aiは，二本の紙テープの目盛りを用いて直角をつくり，角度を測定しようとしたがうまくいかなかったため，他の三人は依然として図３の三角形には直角が含まれていないと理解したままであった．次に，その後おこなわれた図３の三角形の直角の有無を確かめる活動のプロトコルを示す．

Ishi：まあさ，あれだったらさ，ここ直角じゃん？（定規のかどを当てて実測する）
Ai：ほら直角だ．
Kyo：絶対直角だって言える？
Ai：言える．
Kyo：ほんとに？
Ai：だってこの目盛りがあってれば直角になるもん．
Ai：あってなかったらわかんない．
Ishi：いいんじゃね？
Kyo：いいんじゃね？直角で．

Ａ班の一人であるIshiが，自身の所持していた定規のかどを対象の角に合わせたところ，ほぼぴったり重なることが確かめられた．この測定により，確信までには至らなかったものの，Ai以外の三人は，対象の角が直角であることを集団的理解した．この直角に関する集団的理解は，「直角と重なった角は直角で

ある」という測定に関するシェマを用いてなされた理解である．

第一時の最後に生徒がまとめた平面と球面の共通点として，直角が存在することや角度が測定可能であることが複数挙げられていた．このように，生徒は，直角の存在や角度の測定という平面で成り立つことが球面でも成り立つことがあることを理解した．

**5.2.2. 平行線の理解**

第一時では，班ごとに選んだ既習の図形を球面上につくることができるかを確かめる活動をおこなった．A 班では，正四角形，すなわち正方形を選択し，次のような発話が起こった．

Kyo ：正四角形？
Ishi：正四角形なぁ．できるかな，無理くね？
Ai：必ずどっかで交わるのか．
Kyo ：いや，いけるはず…
Hiro：正四角形ひねくれないとできないんじゃね？

このように，A 班の生徒は，正方形が球面上につくることができないことを実感することで，正方形をつくるために必要な平行線が球面上には存在しないことを理解した．実際，平面における正方形の定義である，「四つの辺が等しく，四つの角が等しい四角形」に基づくと，球面上には四つの角がすべて鈍角で等しいような正方形を作ることができる．しかし，A 班では，球面における正方形に関する議論はなされなかった．その理由として，正方形の一つの内角の大きさは90度であると考えていることが挙げられる．

一方，ある班では，次の図４を基に，球面上に平行線が存在しないことを理解した．図４は，二本の紙テープを用いて球面上に平行線をつくろうとすると，そのうちの一方がたるんでしまうことを示している．このよう

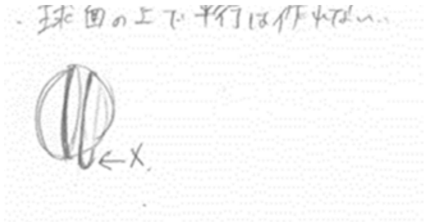


図４　平行線に関する直観的な理解

に，たるむという直観的な情報を通じて，球面上に平行線が存在しないことを集団的理解した生徒の姿が見られた．以上のように，生徒は，既知の図形がつくれないことや紙テープのたるみという直観的な情報を基にして，これまで当たり前のように存在すると理解していた平行線が，平面特有の基本的概念であることを理解した．

**5.2.3. 二直角三角形の理解**

第二時では，球面上の直角三角形の性質を調べる活動をおこなった．A 班では，図３の直角三角形を観察対象とした．以下は，A 班の生徒が図３の直角三角形の角度を測定する場面のプロトコルである．

Kyo ：じゃあ，ここここが90度のときは一緒ってこと？
Ai：ここ90度じゃない．
Kyo ：え？
Ai：そこは90度．あ，そこは90度じゃない．
Ishi：え，90度？
Ai：90度って２つできることある？三角形じゃなくない？
Ishi：うん，三角形じゃない．え，どういうこと？
Ishi：待って，90度２つ…
Ai：90度２つじゃ三角形じゃないよ．
Ishi：うん，おかしいよね．だって，え？

このように，A 班では，図３の直角三角形には直角が二つ存在すると個人内理解していた Kyo と，一つ存在すると個人内理解していた AiとIshiでの対立が見られた．そこで，第一

時同様の定規のかどを用いた実測をおこなったところ，図３の三角形の中に直角が二つ存在するという測定結果が得られた．しかしながら，AiとIshiはこの測定結果を集団的理解することができなかった．次に，この測定結果について，授業後インタビューで質問した際のプロトコルを示す．

TT：これは，ありえないなって思ったのは，平面だとってことなの？
Ai：なんか，今までの三角形だと全部 180 度が内角の和だったんで．
TT：うん．
Ishi：それがずっと言われてきてたから…
Ai： 180 度超えて，え？って．
TT：え，じゃあ， 180 度超えたときってどういう思いだった？
Ai：そんなことある？って．
Ishi：疑い．

このインタビューでの発言から，AiとIshiは，「三角形の内角の和は 180 度」という真理と見なしていたことが，球面では成立しないことに対する疑念により，一つの直角三角形の中に直角が二つ存在することを理解することができなかった．第二時では，班ごとでの活動後，班ごとに見つけた図形の性質を発表する場面を設けた．その際，複数の班から二直角三角形の存在に関する指摘があった．以下は，この指摘を受けたときに関して，インタビューで質問したときのプロトコルである．

TT：その疑いはずっと続いてた？
Ishi：うーん，でもなんか…
Kyo ：他の班も言ってたから．
Ai：あ，やっぱそうなんだって．
Ishi：なんか，平面じゃないとそうなるのかな，みたいな．

このように，AiとIshiは，グループでは集団的理解できなかった二直角三角形の存在を，学級全体での共有を通じて，集団的理解することができた．特にIshiは，二直角三角形を理解する際の根拠として，図形を考える次元に着目していたことが明らかになった．

**5.2.4. 平面への帰着**

A 班では，第二時の球面上の直角三角形の性質を調べる活動において， 5.2.3 で取り上げた角度の測定の前に，以下のような辺の測定がおこなわれた．

Kyo ：そうですね，横ずらして…一緒じゃん．
Ai：あれ？
Ishi：え，待って，どういうこと？おんなじなんてありえないよね？
Ai：わかんない．
Kyo ： 平面上で考えるのが問題じゃなくて，球体だったら別にさ…
Ishi：そういうこと？球体だったら一緒ってこと？
Kyo ：一緒って考える．
Ai：じゃあ，書いとく？
Kyo ：うん， ２辺が一緒．

測定対象の図３の直角三角形の辺の長さを測定したところ，三辺のうちの二辺の長さが等しいという測定結果が得られた．しかし，AiとIshiは，この測定結果を個人内理解できなかった．一方，「平面上で考えるのが問題じゃなくて，球体だったら別にさ…」という発言から， Kyo は，図形を考える次元を根拠として，得られた辺の測定結果を個人内理解していた．この段階で， Kyo は本研究における前提を理解していると捉えられる．以下では，球面幾何学を理解するための方法としての平面への帰着という観点から， Kyo が図形を考える次元を理解するまでの過程を明らかにする．

まず，第二時の冒頭でおこなった，既知の図形である辺の長さや角の大きさがすべて異

なる球面上の一般の三角形が，三角形として認められる理由を，学級全体に対して尋ねた際のHiroと Kyo の発言を示す．

Ｔ：（…略）じゃあ，今ほとんどの班が，これ三角形でしょって言ったので，じゃあなんでこれ三角形って言えるの？理由説明できる？理由．
Hiro：平べったくしたら…
Kyo ：平べったくしたらなるから．

このように，HiroやKyoは，球面上の三角形を平べったくする，すなわち平面へと帰着させたときの形が既知の三角形になるかどうかをイメージすることで，球面上の三角形の存在を理解していたと捉えられる．

次に，球面特有の二本の直線で囲まれる二角形の存在について，Ａ班で議論する際のプロトコルを示す．

Ｔ：ちょっと班で話してみてください．二角形というらしいんだけど，みんなどう，納得できる？
Kyo ：二角形…平らにしたらそうなるのかな，曲線になるんじゃね，平らにしたら．
Ai：なんかならなさそうじゃない？
Hiro：そしたら，こういう…
Ai：なる？
Hiro：なるくね？
Ai：だって引っ張ったらさ…なんか違くない？

このように，Ａ班の生徒は，一般の三角形と同様に，二角形を平面へと帰着させることで理解しようとしたが，理解するには至らなかった．この理由として，二角形を平面に帰着させたときにできる形をイメージすることが困難であったことが挙げられる．以下は，班ごとの議論の後，球面上に二角形が存在することを全体で確認したときのHiroの発言である．

Ｔ：平面だと，２本で作られる図形っていうのが多分なかったかな（…中略）球だとこういう風に２つの直線でつくることができます．（…中略）これも１つ球の上にできる図形っていう風にこれから考えていきたいと思います．
Hiro：ぶっちゃけこれ２角だから二角形なんだ．これで特殊な名前だったら訳わかんない．

「ぶっちゃけこれ２角だから二角形なんだ」という発言から，Hiroは，「ｎ角形の角の個数はｎ個である」という多角形に関するシェマを用いることで，平面への帰着による理解が困難な二角形の存在を理解したと捉えられる．

## 6. 教授実験の考察

以上の教授実験の実際と分析を踏まえ，球面幾何学を教材とした中学校数学授業を通じて，生徒が本研究における前提である図形を考える次元についていかに理解したかを，球面幾何学の内容の理解という視点と，球面幾何学を理解するための平面への帰着という視点から考察する．

### 6.1. 球面幾何学の内容の理解の視点から

教授実験では，生徒は，線や角をはじめとした幾何学の基本的概念に関する内容と，三角形をはじめとした図形に関連する内容に関して学習した．これらの学習した内容は，平面または球面に存在するか否かによって，三種類に分類される．

平面と球面いずれにも存在する直角に関する活動では，直角の存在や角度の測定という平面では当たり前のことが球面でも成り立つことを理解することで，生徒は幾何学の前提となる次元について理解することができた．平面特有に存在する平行線に関しては，正方形をはじめとした既知の図形がつくれないこ

とや，紙テープのたるみという直観的な情報を基にして，これまで真理と見なしていた平行線が平面特有の基本的概念であることを理解することで，平行線の存在しうる次元としての平面に対する理解が深化した．また，二直角三角形をはじめとした球面特有の図形については，AiやIshiが二直角三角形に抱いていた疑念から，生徒にとって理解することが最も困難な内容であったと捉えられる．しかし，班や学級全体での活動を通じて，生徒は，平面ではあり得なくても球面ではあり得る，という図形を考える次元を根拠とした理解がなされた．このように，球面特有の図形の存在は，既習の平面幾何学の内容を真理として捉えていた生徒にとって，図形を考える次元を理解するのに，最も大きな影響を与えていたことが明らかとなった．そして，図形を存在する空間について理解した生徒は，球面特有の図形の存在やその性質を理解するための球面幾何学に関するシェマを構成することで，幾何学は複数存在しているという相対的な数学観の獲得へと繋がったと考えられる．また，そのような生徒は，既有の平面幾何に関するシェマに，「平面を前提として考える」という平面図形を考える次元に関する知識を同化することで，元のシェマよりもより強固なシェマを構成することができたと捉えられる．

### 6.2. 平面への帰着の視点から

「平べったくしたら」をはじめとしたプロトコルの発言から，HiroやKyoにとって，平面への帰着は，球面上の図形を理解するための直観的でわかりやすい方法であったと言える．この平面への帰着は，一般の三角形のような平面と球面いずれにも存在する図形を理解するためには，直観的かつ有効な方法であるが，二角形のような球面特有の図形を理解するためには有効ではなかった．Hiroは，二角形を理解する際に，平面への帰着の限界を実感したことで，「n角形の角の個数はn個である」という多角形に関するシェマを用いることで二角形を理解した．これらのことから，第一に，生徒は，種々の平面図形の存在を視覚的に理解しており，球面上の未知の図形を平面へ帰着させたときの形が既知の平面図形になるかどうかで，球面上の図形を理解していたことが明らかになった．また，二角形のような平面への帰着が困難な球面特有の図形に関しては，既有の多角形に関するシェマを用いることで理解したことが示された．そして，平面への帰着という生徒にとって直観的でわかりやすい理解の方法による理解が困難な図形であっても，多角形に関するシェマによって理解可能であることを経験したことは，生徒にとって平面と球面の違いを強く認識するきっかけとなった．こうして，Kyoは，球面特有の図形に対して，図形を考える次元に着目した理解をすることができたと捉えられる．

## 7. さいごに

本研究の目的は，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計・実践を通して，非ユークリッド幾何学や前提に関しての子どもの理解の様相を明らかにすることであった．生徒は，班での活動や学級全体での共有，既有の数学に関するシェマの活用を通じて，球面幾何学に関する理解を深化させた．そして，球面幾何学に関して理解を深化させていく中で，平面と球面の共通点や相違点を見出したり，生徒にとって球面幾何学を理解するための直観的な方法であった平面への帰着による理解が困難な内容に直面したりすることで，図形を考える次元が幾何学の前提となることの理解へと繋がった．また，教授実験全体を通じての生徒の感想の中には，「平面とのちがいが多く，新たな世界が切り開けた気がしました」，「球面上だと，平面上の常しきが常しきじゃないと思った」といった，平面幾何学以外の幾何学も存在しうるという相対的な数学観に深く関連する感想も見られ

た．このように，非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業は，図形を考える次元の理解へと繋がるような教材となりうることが示唆された．

最後に，今後の課題を三点述べる．

一点目は，理解の捉え方の再構築である．本研究における理解の捉え方は，生徒個人もしくは生徒間の相互作用によってなされる理解であった．そのため，本研究では，授業をおこなう教師と生徒間の相互作用によってなされる理解については捉えることができていない．実際の授業においては，教師が生徒の理解に対して影響を与えているため，その様相を分析できるような理解の捉え方が必要となるだろう．

二点目は，調査対象の人数を四人に絞ったことである．様々な生徒に対する実践を重ねていくことで，本研究とは別の示唆が得られることが期待される．

三点目は，カリキュラムにおける球面幾何学の位置づけの検討である．本研究で扱った球面幾何学は，現在の中学校数学の学習内容には含まれていない．一方，以前日本で使われていた教科書である「数学第二類」には，球面幾何学の内容が含まれていたという事実が残っている．球面幾何学を実際の学校現場でも教材として扱えるようにするために，「数学第二類」に関連する文献(例えば，砂田，2016)を調査しながら，現行のカリキュラムの中に，球面幾何学をどのように位置付けるかを検討していく必要があると考える．

## 引用・参考文献


アーネスト，P．（著），長崎栄三，重松敬一＆瀬沼花子(監訳)(2015)．数学教育の哲学．東洋館出版社．

Fawcett, H. P.(1966). The nature of proof. New York: AMS Reprint.（原著出版1933年）

平岡忠(1972)．図形教育における空間概念の指導．茨城大学教育学部教育研究所紀要，５，pp.25-39．

小松孝太郎，Stylianides, A. J., Stylianides, A. J., & 和田聖国(2019)．前提の役割に関する生徒の認識を育成するための課題設計．日本数学教育学会第52回秋季研究大会発表集録，pp.411-414.

熊谷光一(1998)．小学校５年生の算数の授業における正当化に関する研究―社会的相互作用論の立場から―．日本数学教育学会，数学教育学論究，70，pp.3-25

中村稔(2006)．正弦・余弦定理の活用に関する授業研究－平面・球面三角法の応用を通してー．中学校・高等学校数学科教育課程開発に関する研究(13)．筑波大学数学教育学研究室．pp.192-204．

中西正治(2006)．三辺形の理解について：平面上の図形と球面上の図形との対比を通して．近畿数学教育学会会誌，19, pp.52-60.

スケンプ，R. R.（著），藤永保，銀林浩(訳)(1973)．数学学習の心理学．新曜社．

スケンプ，R. R.（著），平林一榮(監訳)(1992)．新しい学習理論にもとづく算数教育．東洋館出版．

砂田大樹(2016)．『数学　第二類』における球面三角形教材の特徴と価値―球面三角形の面積と内角の和に焦点を当てて―．日本数学教育学会第49回秋季研究大会発表集録，pp.441-444.

髙橋勇介(2020)．非ユークリッド幾何学を教材とした中学校数学授業の設計．上越数学教育研究，35，pp.79-86．