上越数学教育研究，第 36 号，上越教育大学数学教室，2021 年，pp. 17–26.

反比例のグラフについての考察

中川　仁
上越教育大学

1　はじめに

小学校で学ぶ反比例のグラフは，円とともになじみのある曲線であるが，その性質を数学的に詳しく学ぶ機会は高等学校の数学 III で分数関数の微分や自然対数を学ぶときまではほとんどない．以下，反比例のグラフのもつ性質を調べてみる．本稿は 2019 年 8 月 30 日に上越教育大学附属中学校 3 年生を対象に実施した「ワクワク大学デー」における授業で扱った内容を発展させたものである．

2　反比例 $y=1/x$ と $y=4/x$ のグラフ

図 1 において, 関数 $y=1/x$ と関数 $y=4/x$ のグラフが与えられている．$y=4/x$ 上の点 P$(4,1)$ と原点 O を通る直線を l とする．直線 l と $y=1/x$ の第 1 象限における交点を Q とする．点 P から x 軸におろした垂線と x 軸の交点を A，点 P から y 軸におろした垂線と y 軸の交点を B，A と B を通る直線を m とする．直線 l の傾きは $1/4$ であり，l は

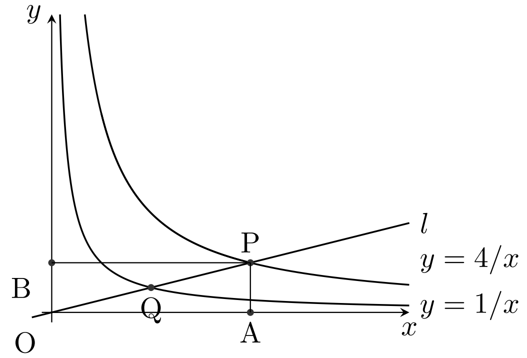

図 1　$y=4/x$ と $y=1/x$ のグラフ

原点を通るから l の方程式は $y=(1/4)x$ である．l と $y=1/x$ の交点は，$(1/4)x=1/x$ より $x^2=4$, $x=\pm 2$，よって Q$(2,1/2)$ である．A$(4,0)$, B$(0,1)$ より直線 m の傾きは $-1/4$ であり，m は B を通るから m の方程式は $y=(-1/4)x+1$ である．m と $y=1/x$ の交点を求める．

$$\frac{1}{x}=-\frac{1}{4}x+1,\quad 4=-x^2+4x,$$

$(x-2)^2=0$, $x=2$, $y=1/2$ となるから，交点は 1 点 Q のみとなる．これは直線 m が $y=1/x$ の点 Q$(2,1/2)$ における接線であることを意味する (図 2).

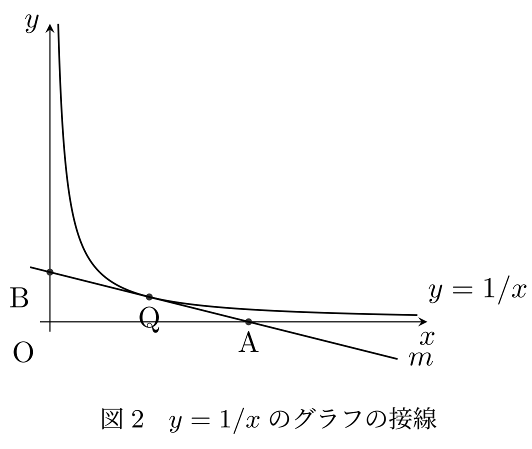

図 2　$y=1/x$ のグラフの接線

点 P を $y=4/x$ 上の第 1 象限の一般の点 $(2c,2/c)$ $(c>0)$ としても Q$(c,1/c)$, A$(2c,0)$, B$(0,2/c)$ であり，A, B を通る直線 m の方程式は

(2.1)
$$y=-\frac{1}{c^2}x+\frac{2}{c}$$

であり，これは曲線 $y=1/x$ の点 $\mathrm{Q}(c,1/c)$ における接線である．

3　算術平均，幾何平均，調和平均の関係

反比例のグラフを用いることにより，2 つの正数 a,b の相加平均が相乗平均以上であるという不等式

$$(3.1)\qquad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$$

を視覚化できることを説明する．

$0<a<b$ とする．$y=1/x$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a,1/a)$, $\mathrm{B}(b,1/b)$ を通る直線の傾きは

$$\frac{(1/b)-(1/a)}{b-a}=\frac{a-b}{ab(b-a)}=-\frac{1}{ab}$$

である．平均値の定理により $a<c<b$ で点 $\mathrm{C}(c,1/c)$ における $y=1/x$ の接線の傾きが $-1/ab$ に等しいものが存在する．実際，(2.1) により $c=\sqrt{ab}$ とおけば，接線の傾きは $-1/c^2=-1/ab$ となる．一方，A における接線と B における接線はそれぞれ

$$y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a},\quad y=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b}$$

であるから，それらの交点を D とすると

$$\begin{aligned}-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}&=-\frac{1}{b^2}x+\frac{2}{b},\\ \frac{a^2-b^2}{a^2b^2}x&=\frac{2(a-b)}{ab},\\ x&=\frac{2ab}{a+b},\\ y=-\frac{1}{a^2}\frac{2ab}{a+b}+\frac{2}{a}&=\frac{2}{a+b}\end{aligned}$$

となるから，$\mathrm{D}(2ab/(a+b),2/(a+b))$ である．

$$m=\frac{a+b}{2},\quad g=\sqrt{ab},\quad h=\frac{2ab}{a+b}$$

とおき，m, g, h をそれぞれ a と b の**算術平均**，**幾何平均**，**調和平均**とよぶ．点 A と点 B の中点を $\mathrm{M}((a+b)/2,(1/a+1/b)/2)$ とする．m, g, h はそれぞれ点 M, C, D の x 座標である．これらを図示すると図 3 のようになり，$m\geq g\geq h$ がわかる．すなわち，算術平均，幾何平均，調和平均の間には不等式

$$(3.2)\qquad \frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\geq\frac{2ab}{a+b}$$

が成り立つ．

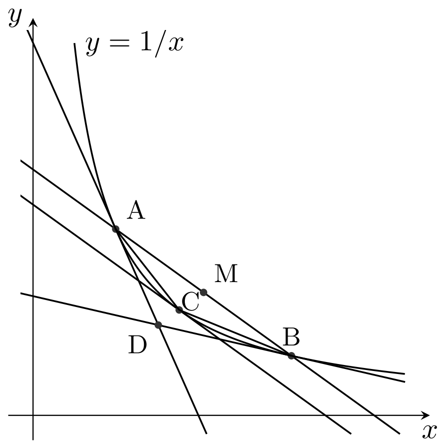

図 3

4　反比例のグラフで囲まれた図形の面積

ベルギーの数学者サン・バンサン (1584–1667) は双曲線 $y=1/x$ の下の面積が対数の性質をもつことを発見した (カジョリ [1, p. 235])．以下，このことをなるべく少ない知識で直観的に理解できるように説明してみたい．まず図 4 における図形の面積を考える．図 4 において, 淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積はともに 2 である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y=x$ に関して線対称であるから等しい．したがって，$y=4/x$ のグラフの $1\leq x\leq 2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，$y=4/x$ のグラフの $2\leq x\leq 4$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S' と等しいことがわかる (図 5)：$S=S'$.

$y=1/x$ のグラフを y 軸方向に 4 倍したものが $y=4/x$ のグラフであることから，$y=1/x$ のグラフの $1\leq x\leq 2$ の部分と x

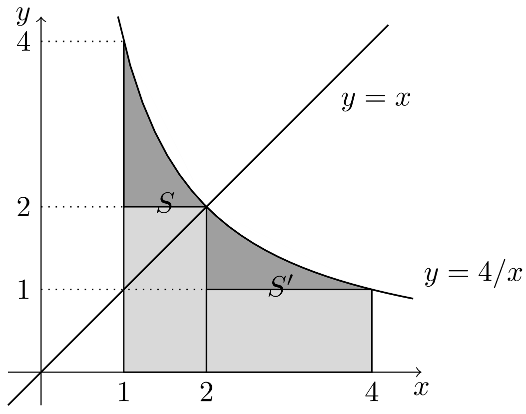

図 4　$y = 4/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

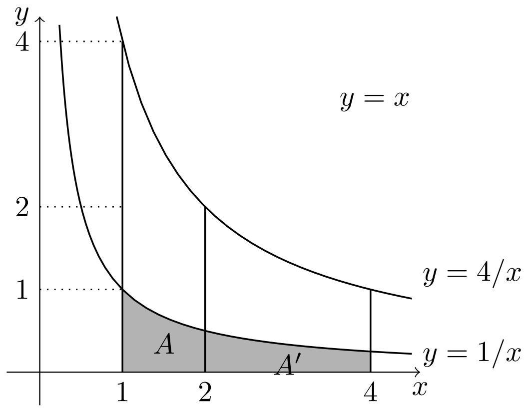

図 6　$A = A'$

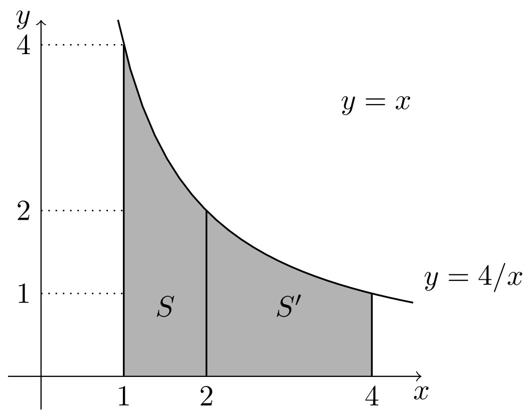

図 5　$S = S'$

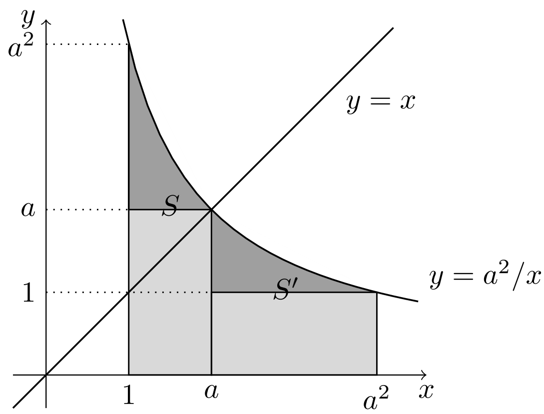

図 7　$y = a^2/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

軸で囲まれる図形の面積 A を 4 倍したものが S に等しい (図 6)．すなわち $4A = S$ である．同様に $y = 1/x$ のグラフの $2 \leq x \leq 4$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A' を 4 倍したものが S' に等しい．すなわち $4A' = S'$ である．$S = S'$ より $4A = 4A'$，したがって $A = A'$ である (図 6).

ここまで述べてきたことを一般化する．2 を $a > 1$ で置き換えて，反比例のグラフ $y = a^2/x$ を考える．図 7 において淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積はともに $a(a-1) = 1 \times (a^2 - a)$ である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y = x$ に関して線対称であることから等しい．したがって $y = a^2/x$ のグラフの $1 \leq x \leq a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，$y = a^2/x$ のグラフの $a \leq x \leq a^2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 S' と等しいことがわかる．$y = 1/x$ のグラフを y 軸方向に a^2 倍したものが $y = a^2/x$ のグラフであることから $y = 1/x$ のグラフの $1 \leq x \leq a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A を a^2 倍したものが S に等しい：$a^2 A = S$．同様に $y = 1/x$ のグラフの $a \leq x \leq a^2$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積 A' を a^2 倍したものが S' に等しい：$a^2 A' = S'$．$S = S'$ より $a^2 A = a^2 A'$，したがって $A = A'$ である (図 8).

$b > 1$ に対して $y = 1/x$ のグラフの $1 \leq x \leq b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積を $L(b)$ で表す．上で示したことは $L(a^2) =$

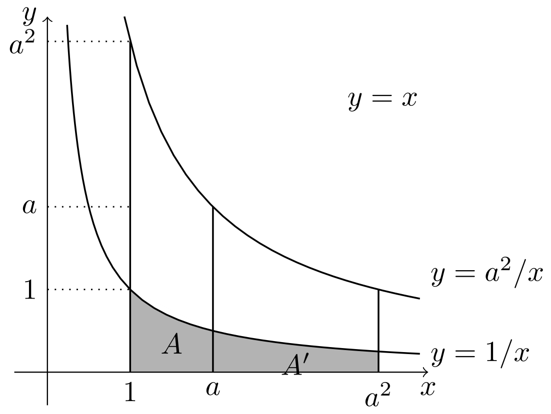

図 8　$A=A'$

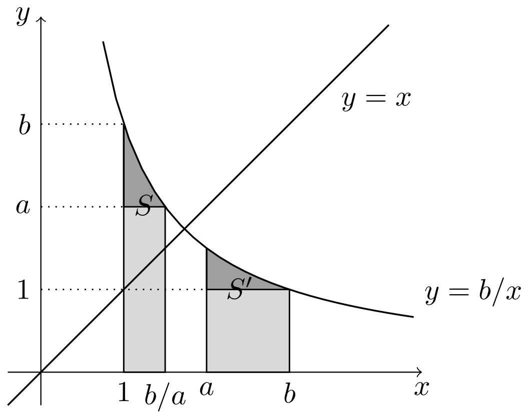

図 9　$y=b/x$ のグラフで囲まれる図形の面積

$A+A'=2A=2L(a)$ と表せるから，一般に $a>1$ に対して

$$L(a^2)=2L(a) \tag{4.1}$$

が成り立つ．

(4.1) をさらに一般化する．まず $1<a<b\leq a^2$ とする．定義により $L(b)-L(a)$ は $y=1/x$ のグラフの $a\leq x\leq b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積である．したがって $y=b/x$ のグラフの $a\leq x\leq b$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$S'=b\{L(b)-L(a)\} \tag{4.2}$$

である．同様に $y=b/x$ のグラフの $1\leq x\leq b/a$ の部分と x 軸で囲まれる図形の面積は

$$S=bL(b/a) \tag{4.3}$$

である．図 9 において淡く塗りつぶした 2 つの長方形の面積は，ともに $a(b/a-1)=1\times(b-a)$ である．また濃く塗りつぶした 2 つの図形の面積は，直線 $y=x$ に関して線対称であることから等しい．よって $S=S'$ である．(4.2), (4.3) より $1<a<b\leq a^2$ のもとで

$$L(b/a)=L(b)-L(a) \tag{4.4}$$

を得る．任意の $a>1$ と任意の自然数 k に対して，$a^k<a^{k+1}\leq a^{2k}=(a^k)^2$ が成り立つ．したがって (4.4) より

$$L(a)=L(a^{k+1})-L(a^k) \tag{4.5}$$

を得る．定義より $L(1)=0$ であることから (4.5) は $k=0$ のときも成り立つ．任意の自然数 n に対して (4.5) を $k=0,1,\dots,n-1$ について加えれば $nL(a)=L(a^n)-L(1)=L(a^n)$ となる．すなわち

$$L(a^n)=nL(a)\quad(n=1,2,\dots). \tag{4.6}$$

一般に $1<a<b$ ならば，ある自然数 k について $a^k<b\leq a^{k+1}\leq(a^k)^2$ となるから，a を a^k で置き換えて (4.4) を適用すれば

$$L(b/a^k)=L(b)-L(a^k) \tag{4.7}$$

が成り立つ．$k=1$ ならば (4.4) は成り立つ．$k\geq 2$ とすると $a^{k-1}<b/a\leq a^k\leq(a^{k-1})^2$ となるから b を b/a で，a を a^{k-1} で置き換えて (4.4) を適用すれば

$$\begin{aligned} L(b/a^k) &= L((b/a)/a^{k-1}) \\ &= L(b/a)-L(a^{k-1}) \end{aligned} \tag{4.8}$$

を得る．(4.8), (4.7) より

$$L(b/a)-L(a^{k-1})=L(b)-L(a^k),$$
$$L(b/a)=L(b)-L(a^k)+L(a^{k-1})$$

となる．ここで (4.6) より $L(a^k) = kL(a)$, $L(a^{k-1}) = (k-1)L(a)$ であるから

$$L(b/a) = L(b) - L(a)$$

を得る．すなわち (4.4) はすべての $1 < a < b$ について成り立つ．

$a > 1, b > 1$ のとき，$1 < a < ab$ となるから (4.4) より

$$L(b) = L((ab)/a) = L(ab) - L(a).$$

したがって $a > 1, b > 1$ に対して

$$L(ab) = L(a) + L(b) \tag{4.9}$$

が成り立つ．一松 [2] では $1/x$ の原始関数 $l(x)$ で $l(1) = 0$ を満たすものとして $x > 0$ における関数 $l(x)$ を定義して，これが (4.9) と同じ性質をもつことを示し，$x = l(y)$ の逆関数として指数関数 $y = \exp x$ を定義している．

5 平方根による $L(a)$ の近似計算

$a > 1$ が与えられたとき，$y = 1/x$ のグラフの $1 \le x \le a$ の部分と x 軸で囲まれた図形の面積 $L(a)$ の近似値を平方根を用いて計算できることを示す．$a_0 = a$ として次々に平方根をとるという漸化式

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5.1}$$

によって数列 $\{a_n\}_{n\ge 0}$ を定義する．一般項は $a_n = a^{1/2^n}$ であることがわかる．(5.1) より $a_n = a_{n+1}^2$ となるので (4.1) を用いれば $L(a_n) = 2L(a_{n+1})$，したがって

$$L(a_{n+1}) = \frac{1}{2}L(a_n) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

である．よって

$$L(a_n) = \frac{1}{2^n}L(a) \tag{5.2}$$

が成り立つ．x 軸上の $1 \le x \le b$ の部分を一辺とし高さが $1/b$ および 1 の長方形の面積と $L(b)$ を比べれば図 10 より明らかに

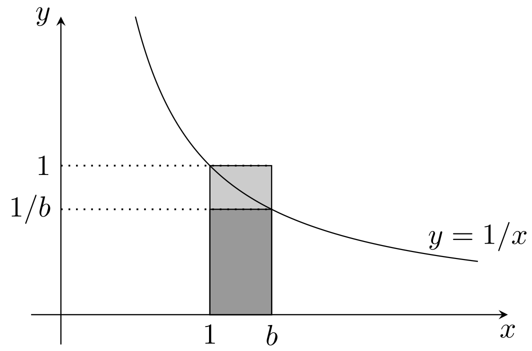

図 10　$L(b)$ の評価

$$\frac{1}{b}(b-1) < L(b) < b - 1 \tag{5.3}$$

が成り立つ．$b = a_n$ として (5.3) を用いれば

$$\frac{1}{a_n}(a_n - 1) < L(a_n) < a_n - 1$$

を得る．この不等式に 2^n をかければ (5.2) より

$$\frac{2^n}{a_n}(a_n - 1) < L(a) < 2^n(a_n - 1) \tag{5.4}$$

となる．$U_n = 2^n(a_n - 1)$, $V_n = U_n/a_n$ とおけば，(5.4) は $V_n \le L(a) \le U_n$ と表せるから

$$0 \le U_n - L(a) \le U_n - V_n \tag{5.5}$$

を得る．$\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$ を示す．

$$U_n - V_n = 2^n \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} \tag{5.6}$$

である．$a > 1$ より $a_n > 1$，よって $h_n = a_n - 1$ とおけば $h_n > 0$ となる．このとき 2 項定理により

$$a = a_n^{2^n} = (1 + h_n)^{2^n} \ge 1 + 2^n h_n,$$
$$h_1 = a - 1 \ge 2^n h_n,$$
$$h_n \le h_1/2^n.$$

したがって

$$2^n \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} = 2^n \frac{h_n^2}{1 + h_n} \le 2^n h_n^2 \le \frac{h_1^2}{2^n}.$$

n	2^n	a_n	U_n	V_n
1	2	1.4142	0.8284	0.5858
2	4	1.1892	0.7568	0.6364
3	8	1.0905	0.7241	0.6640
4	16	1.0443	0.7084	0.6783
5	32	1.0219	0.7007	0.6857
6	64	1.0109	0.6969	0.6894
7	128	1.0054	0.6950	0.6913
8	256	1.0027	0.6940	0.6922
9	512	1.0014	0.6936	0.6927

表 1　$L(2)$ の近似値

この不等式と (5.5), (5.6) より

$$0 \leq U_n - L(a) \leq h_1/2^n \to 0 \quad (n \to \infty)$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} V_n = L(a) \tag{5.7}$$

が成り立つ．

$a = 2$ として $n = 1, 2, \ldots, 9$ についてこれらを電卓で計算すると表 1 になる．表 1 から $0.6927 < L(2) < 0.6936$ を得る．$L(2) = 0.69314718\ldots$ である．

6　アルキメデスの方法による $L(a)$ の計算

アルキメデスの取り尽くし法を $y = 1/x$ のグラフに適用することによっても (5.7) と同様な結果が得られることを示す．$0 < a < b$ とし，$y = 1/x$ のグラフ上の 2 点 $\mathrm{A}(a, 1/a)$, $\mathrm{B}(b, 1/b)$ をとる．$y = 1/x$ のグラフと線分 AB で囲まれた図形 (図 11 の塗りつぶした部分) の面積を S とする．$m = (a+b)/2$, $g = \sqrt{ab}$, $h = 2ab/(a+b)$ とおけば，第 3 節で見たように点 $\mathrm{C}(g, 1/g)$ における $y = 1/x$ の接線は直線 AB と平行であり，A における接線と B における接線の交点は $\mathrm{D}(h, 1/m)$ であった．三角形 ABC の面積を T，三角形 ABD の面積を T' とすれば，明らかに

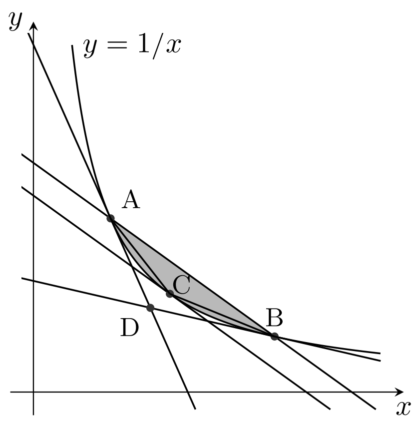

図 11

$$T < S < T' \tag{6.1}$$

が成り立つ．直線 AB の方程式は

$$x + aby - a - b = 0 \tag{6.2}$$

とかけるから，点 C, D と直線 AB の距離をそれぞれ d, d' とすると

$$d = \frac{|g + ab/g - a - b|}{\sqrt{1+a^2b^2}} = \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{\sqrt{1+a^2b^2}},$$
$$d' = \frac{|h + ab/m - a - b|}{\sqrt{1+a^2b^2}} = \frac{(b-a)^2}{(a+b)\sqrt{1+a^2b^2}}.$$

また線分 AB の長さは

$$\sqrt{(b-a)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)^2} = \frac{(b-a)\sqrt{1+a^2b^2}}{ab}.$$

したがって

$$T = \frac{(b-a)(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2}{2ab},$$
$$T' = \frac{(b-a)^3}{2ab(a+b)}$$

となる．ここで $r=b/a$ とおけば $r>1$, $b=ra$ となるから

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r},\\
T' &= \frac{(r-1)^3}{2r(r+1)},\\
T'-T &= \frac{2\sqrt{r}(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r(r+1)}\\
&= \frac{2\sqrt{r}}{r+1}\,T \le T
\end{aligned}
\tag{6.3}
$$

を得る．AB のかわりに AC, CB をとって同様に三角形 $\mathrm{AC_1C}$, $\mathrm{AD_1C}$, $\mathrm{CC_1'B}$, $\mathrm{CD_1'B}$ を考える (図 12)．このとき三角形 $\mathrm{ACC_1}$ の面

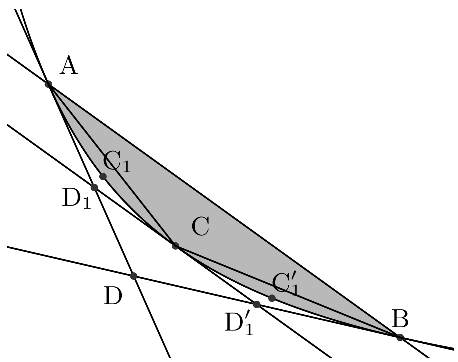

図 12　アルキメデスの取り尽くし法

積を T_1, 三角形 $\mathrm{ACD_1}$ の面積を T_1' とすれば, $g/a=\sqrt{b/a}=\sqrt{r}$ となる．よって $r_1=\sqrt{r}$ とおけば (6.3) より

$$
\begin{aligned}
T_1 &= \frac{(r_1-1)(\sqrt{r_1}-1)^2}{2r_1},\\
T_1' &= \frac{(r_1-1)^3}{2r_1(r_1+1)},\\
T_1'-T_1 &\le T_1
\end{aligned}
\tag{6.4}
$$

を得る．$b/g=\sqrt{b/a}=\sqrt{r}=r_1$ より三角形 $\mathrm{CBC_1'}$ の面積は T_1 に等しく，三角形 $\mathrm{CBD_1'}$ の面積は T_1' に等しい．したがって

$$T+2T_1<S<T+2T_1'$$

が成り立つ．この議論を繰り返せば，$r_n=r^{1/2^n}$ $(n=0,1,2,\dots)$ とおいて，(6.4) において r_1 を r_n で置き換えたものによって T_n, T_n' を定めれば，$T_n'-T_n\le T_n$ であり

$$\sum_{k=0}^{n}2^kT_k<S<\sum_{k=0}^{n-1}2^kT_k+2^nT_n' \tag{6.5}$$

が成り立つ．

2^nT_n を上から評価する．$u_n=r_n-1$ とおけば $u_n>0$ であり $r_n=1+u_n$ である．$r_n^{2^n}=r$ であり 2 項定理により

$$r=r_n^{2^n}=(1+u_n)^{2^n}\ge 1+2^nu_n.$$

したがって $u_n\le(r-1)/2^n$ である．よって

$$
\begin{aligned}
T_n &= \frac{(r_n-1)(\sqrt{r_n}-1)^2}{2r_n}=\frac{u_nu_{n+1}^2}{2(1+u_n)}\\
&< \frac{u_nu_{n+1}^2}{2}\le\frac{(r-1)^3}{2^{3n+3}},\\
2^nT_n &< \frac{(r-1)^3}{2^{2n+3}}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^nT_n<\frac{(r-1)^3}{8}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{(r-1)^3}{6}.$$

すなわち無限和 $\sum_{n=0}^{\infty}2^nT_n$ は収束する．

$$
\begin{aligned}
0<S-\sum_{k=0}^{n}2^kT_k &< 2^n(T_n'-T_n)\\
&\le 2^nT_n<\frac{(r-1)^3}{2^{2n+3}}\to 0\quad(n\to\infty)
\end{aligned}
$$

より

$$S=\sum_{n=0}^{\infty}2^nT_n$$

が成り立つ．この値は $r=b/a$ のみで定まることに注意する．$\mathrm{A}'(a,0)$, $\mathrm{B}'(b,0)$ とすれば，図 13 から明らかに台形 $\mathrm{AA'B'B}$ の面積から S を引いたものが $L(b)-L(a)$ である．この台形の面積は

$$\frac{1}{2}(b-a)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{(b-a)(b+a)}{2ab}=\frac{r^2-1}{2r}$$

となるので

$$L(b)-L(a)=\frac{r^2-1}{2r}-\sum_{n=0}^{\infty}2^nT_n$$

が成り立つ．この右辺も $r=b/a$ のみで定まるから，$L(b)-L(a)$ も $r=b/a$ のみで定まることがわかる．したがって

$$L(b)-L(a)=L(r)-L(1)=L(b/a)$$

が成り立ち，等式 (4.4) が再び証明された．

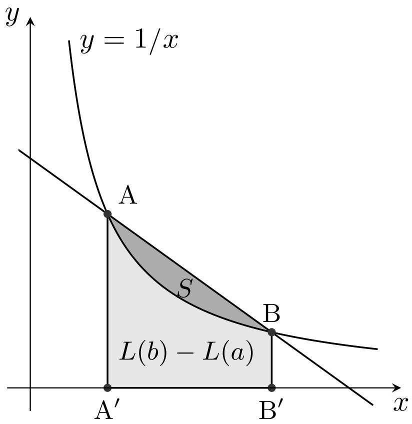

図 13　S と $L(b)-L(a)$ の関係

次に

$$L(r)=\frac{r^2-1}{2r}-\sum_{k=0}^{\infty}2^kT_k$$

を簡単な極限の形に書き直す．

$$\begin{aligned}&\frac{r^2-1}{2r}-T_0\\&=\frac{r^2-1}{2r}-\frac{(r-1)(\sqrt{r}-1)^2}{2r}\\&=\frac{r_1^2-1}{r_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\frac{r^2-1}{2r}-T_0-2T_1\\&=\frac{r_1^2-1}{r_1}-\frac{(r_1-1)(\sqrt{r_1}-1)^2}{r_1}\quad=\frac{2(r_2^2-1)}{r_2}.\end{aligned}$$

したがって

$$\text{(6.6)}\qquad \frac{r^2-1}{2r}-\sum_{k=0}^{n-1}2^kT_k=\frac{2^{n-1}(r_n^2-1)}{r_n}$$

となることが予想される．これが正しいとすると

$$\begin{aligned}&\frac{r^2-1}{2r}-\sum_{k=0}^{n}2^kT_k\\&=\frac{2^{n-1}(r_n^2-1)}{r_n}-2^nT_n\\&=\frac{2^{n-1}(r_n^2-1)}{r_n}-\frac{2^n(r_n-1)(\sqrt{r_n}-1)^2}{2r_n}\\&=\frac{2^n(r_{n+1}^2-1)}{r_{n+1}}\end{aligned}$$

となる．よって帰納法によりすべての自然数 n に対して (6.6) が成り立つ．したがって

$$\begin{aligned}L(r)&=\frac{r^2-1}{2r}-\sum_{k=0}^{\infty}2^kT_k\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{r^2-1}{2r}-\sum_{k=0}^{n-1}2^kT_k\right)\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}(r_n^2-1)}{r_n}\end{aligned}$$

を得る．$r_n=r^{1/2^n}$ であり，$r_n=1+u_n$, $0<u_n\le(r-1)/2^n$ となるから, $n\to\infty$ のとき $u_n\to 0$, $r_n\to 1$, $(r_n+1)/(2r_n)\to 1$ である．したがって $r_n=r^{1/2^n}$ $(n=0,1,2,\dots)$ とするとき

$$\text{(6.7)}\qquad \begin{aligned}L(r)&=\lim_{n\to\infty}2^n(r_n-1)\frac{r_n+1}{2r_n}\\&=\lim_{n\to\infty}2^n(r_n-1).\end{aligned}$$

これは (5.7) と同じ結果である．

7　指数関数の導関数

(5.7) あるいは (6.7) より $a>1$ とするとき

$$L(a)=\lim_{n\to\infty}2^n\left(a^{1/2^n}-1\right)$$

である．$h_n=1/2^n$ とおけば $n\to\infty$ のとき $h_n\to 0$ となるから，上の式は

$$L(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{a^{h_n}-1}{h_n}$$

とかきなおせる．連続的に $h>0$ を 0 に近づけるときの極限も同様に $L(a)$ になることを示す．そのために $b_n=a^{1/n}$ とおく．$a=b_n^n$ より (4.6) より $L(a)=nL(b_n)$ である．$b=b_n$ として (5.3) を適用すれば

$$\frac{b_n-1}{b_n}<L(b_n)<b_n-1$$

が成り立つ．この不等式に n をかければ

$$\frac{n(b_n-1)}{b_n}<L(a)<n(b_n-1) \tag{7.1}$$

となる．これから

$$\begin{aligned}0&<n(b_n-1)-L(a)\\&<n(b_n-1)-\frac{n(b_n-1)}{b_n}=\frac{n(b_n-1)^2}{b_n}\end{aligned}$$

を得る．ここで $k_n=b_n-1$ とおけば $a>1$ より $b_n>1$，よって $k_n>0$ であり，$a=b_n^n=(1+k_n)^n$ である．上の不等式は

$$0<nk_n-L(a)<\frac{nk_n^2}{1+k_n}<nk_n^2 \tag{7.2}$$

となる．2 項定理により

$$\begin{aligned}a=(1+k_n)^n&\geq 1+nk_n,\\k_1=a-1&\geq nk_n,\\k_n&\leq k_1/n.\end{aligned}$$

したがって (7.2) より

$$\begin{aligned}0<nk_n-L(a)&<nk_n^2\\&\leq\frac{k_1^2}{n}\to 0\quad(n\to\infty)\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\lim_{n\to\infty}nk_n=\lim_{n\to\infty}\frac{nk_n}{b_n}=L(a) \tag{7.3}$$

が成り立つ．連続的に $h>0$ を 0 に近づけるとき，$n\in\mathbb{N}$ を $n\leq 1/h<n+1$ にとれば，$1/(n+1)<h\leq 1/n$ より

$$\begin{aligned}b_{n+1}=a^{1/(n+1)}<a^h&\leq a^{1/n}=b_n,\\k_{n+1}<a^h-1&\leq k_n,\end{aligned}$$

$$\frac{k_{n+1}}{h}<\frac{a^h-1}{h}\leq\frac{k_n}{h} \tag{7.4}$$

が成り立つが，不等式

$$\frac{k_n}{h}<(n+1)k_n,\quad \frac{k_{n+1}}{h}\geq nk_{n+1}$$

と (7.3) より

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(n+1)k_n\\&=\lim_{n\to\infty}nk_n\cdot\frac{n+1}{n}=L(a),\\&\lim_{n\to\infty}nk_{n+1}\\&=\lim_{n\to\infty}(n+1)k_{n+1}\cdot\frac{n}{n+1}=L(a)\end{aligned}$$

となることから，$n\to\infty$ のとき不等式 (7.4) の両側はともに $L(a)$ に収束する．以上により

$$\lim_{h\to+0}\frac{a^h-1}{h}=L(a)$$

が証明された．特に $\lim_{h\to+0}(a^h-1)=0$ である．したがって

$$\begin{aligned}\lim_{h\to-0}\frac{a^h-1}{h}&=\lim_{h\to+0}\frac{a^{-h}-1}{-h}\\&=\lim_{h\to+0}\frac{a^h-1}{h}\cdot\frac{1}{a^h}\\&=L(a)\cdot\frac{1}{1}=L(a).\end{aligned}$$

ゆえに

$$\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=L(a) \tag{7.5}$$

が成り立つ．これは**指数関数** a^x が $x=0$ において微分可能であり，微分係数が $L(a)$ に等しいことを示している．任意の実数 x に対して，指数法則 $a^{x+h}=a^xa^h$ を用いれば

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{a^{x+h}-a^x}{h}&=\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}\cdot a^x\\&=L(a)a^x\end{aligned}$$

となり，a^x はいたるところ微分可能であってその導関数は $L(a)a^x$ であることがわかる．

8　自然対数の底 e

実数 $a>0$ に対して $\ln a$ を次のように定義する．

$$\text{(8.1)}\quad \ln a = \begin{cases} L(a), & a>1, \\ 0, & a=1, \\ -L(1/a), & 0<a<1. \end{cases}$$

$\ln a$ を a の**自然対数**とよぶ．(4.9) と上の定義から任意の正の実数 a, b に対して

$$\text{(8.2)}\qquad \ln ab = \ln a + \ln b$$

が成り立つことが容易に確かめられる．関数 $\ln x$ は $x>0$ において明らかに単調増加である．$\ln 1 = 0$ であり，$\ln 2 = L(2) > 0.69$ より $\ln 4 = 2\ln 2 > 1.38 > 1$ である．したがって $1<a<4$ で $L(a)=1$ となる a がただ 1 つ存在する．この a を e とかき，**自然対数の底**とよぶ．前節の最後に述べたことにより e^x の導関数は e^x である．$L(e)=1$ となること，すなわち $\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h = 1$ となることから

$$\text{(8.3)}\qquad e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

を示す．$\lim_{h\to 0}(e^h-1)/h = 1$ より

$$\lim_{n\to\infty} n(e^{1/n}-1) = 1$$

である．よって $\delta_n = n(e^{1/n}-1)-1$ とおけば，$\lim_{n\to\infty}\delta_n = 0$ である．このとき

$$e^{1/n} = 1+\frac{1+\delta_n}{n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)$$

となるから，両辺を n 乗して $p_n = (1+1/n)^n$ とおけば

$$\text{(8.4)}\qquad e = p_n\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)^n$$

とかける．任意の $0<\varepsilon<1$ に対して n_0 を十分大にとれば $n \geq n_0$ のとき $|\delta_n| < \varepsilon$ となる．したがって $\binom{n}{k} = n!/((n-k)!k!)$ を 2 項係数とするとき，展開式

$$\text{(8.5)}\qquad (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

において $x = \delta_n/(n+1)$ とおけば

$$\begin{aligned}\left|\left(1+\frac{\delta_n}{n+1}\right)^n - 1\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{\delta_n^k}{(n+1)^k}\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{(n+1)^k}\varepsilon^k \\ &< \varepsilon\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!} < \varepsilon\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots\right) = 2\varepsilon.\end{aligned}$$

これは $\lim_{n\to\infty}(1+\delta_n/(n+1))^n = 1$ を示している．よって (8.4) から (8.3) を得る．さらに (8.5) において $x = 1/n$ とおけば

$$\begin{aligned}p_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \\ &< \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!} < 1+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k} = 3.\end{aligned}$$

よって $n\to\infty$ とすれば $e \leq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ を得る．一方，自然数 m を固定するとき，任意の $n \geq m$ に対して

$$p_n \geq \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)$$

である．$n\to\infty$ とすれば $e \geq \sum_{k=0}^{m} 1/k!$ を得る．m は任意なので $e \geq \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ となり，$e = \sum_{k=0}^{\infty} 1/k!$ を得る．

参考文献

[1] カジョリ，初等数学史 (復刻版)，共立出版，1997.

[2] 一松信，解析学序説 上巻，裳華房，1962.