上越数学教育研究，第 36 号，上越教育大学数学教室，2021 年，pp. 1-16

分数学習のための基本枠組みの試論

ー変換としての分数とそのカプセル化ー

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

数学で数を構成する場合、集合から始めるなどして、量と特に関連づけることなく行われる方法が多く見られる (*cf.* 布川, 2019, 2021)。他方で算数で数、特に分数を学習する際には、テープの長さやジュースの液量など日常生活に見られる量から出発して学習を進め、分数の演算や大小を考える際にも量に対する操作や比較として扱われている。これは数そのものを直接、早い段階から扱うよりも身近に接する機会も多く、感覚的に把握したり操作したりすることのできる量を媒介として数を学ぶ方が、小学生にとって学習しやすいと想定されているものと考えられる。

この時、数と量の関係が問題となるが、もしも数は量を通して学ぶものであり、量とは別のものとして捉えるとするならば、両者は区別される必要がある。しかし実際には、両者を区別しないような記述も散見される。例えば次のような記述がある：「本章は、分数が自然数を越えて数体系を拡張するような数(numbers)であると児童・生徒が理解することの重要性に焦点を当てる。つまり、自然数が量(quantities)であるのと同じように分数が数である、ということである」(Petit et al., 2016, p. 28)。また分数 2/3 の意味を説明する際に「2/3 L、2/3 m のように、測定したときの量の大きさを表す」などと言った場合、確かに 2/3 L や 2/3 m はある液量や長さといった量を表しているが、分数自体ではない(小島, 1997)。しかし単位の前に置かれた数 2/3 が何を意味するのかは、今のような説明では明確ではない 。

こうした状況を考慮すると、分数についてのカリキュラムや指導のあり方を明確にするためには、大前提として数と量との関係を明確にしておく必要があると考えられる。

そこで本稿では、数と量との関係に関わる 1 つの立場を設定した上で、その立場から想定される分数を学習する際の困難を考察し、さらに、そうした困難を想定した場合に採るべき学習や指導の基本方針について検討することを目的とする。つまり、数と量との関係についての前提から学習や指導の枠組みを構築する一つの試みである。

２．いわゆる分数の多様な意味

分数の学習を困難にしている理由の 1 つとしてしばしば言及されることに、分数が持つ多様な意味がある。例えば指導要領解説でも「分数の意味について、その観点の置き方によって，様々な捉え方ができる」(p. 153)として、「便宜上分けたところもある」と断りながらも、2/3 を例に５つの捉え方を示している：①具体物を 3 等分したものの二つ分の大きさを表す；② 2/3 L、2/3 m のように、測定したときの量の大きさを表す；③ 1 を 3 等分したもの(単位分数である 1/3)の二つ分の大きさを表す；④ A は B の 2/3 というように， B を 1 としたときの A の大きさの割合を表す；

⑤ 整数の除法「2÷3」の結果(商)を表す[1]。また分数の学習に関わる当時の研究を概観した論文 (Pitkethly & Hunting, 1996) は、この研究領域で共有された基本的考えとして、分数について次の 5 つの下位構成要素(subconstructs)を示している：部分全体関係 (part-whole relations)；比(ratios)；商(quotients)；測定値 (measures)；作用素(operations)。

他方で、こうした違いを強調するよりも、1 つの捉え方を「基本的」な捉え方とし、他の捉え方を「基本的」捉え方から派生させることで、分数の多様な捉え方を統合しようという試みも見られる (松下, 1997)。

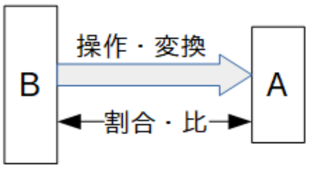

図１：変換と割合

松下(1997)は分割される元の量の設定の仕方によりいくつかの分数の捉え方を説明しているが、それに習うと、図 1 で操作を施す B の具体性のレベルの違いにより、上の①～③を説明することができる。すなわち①は B として折り紙やチョコレートなどの具体物を採り、②は m や L といった普遍単位を、③では数 1 を B として考えていると見ることができる。逆に言えば、①～③が同じ 2/3 の説明だとしたとき、共通するのは B に対して施される操作の部分となる。ちなみに、松下(1997)は①の場合の B を未測量と呼んでいる。同時に①～③では「大きさを表す」と表現され、B に対して一連の操作を施した結果得られる A に焦点を当てた記述となっている。ただこの「大きさ」は元の量 B との関係でしか表されないものとすると、A と B の間の関係自身に焦点を当てた④と基本的には同じことだとも言える。

⑤は③で前提とされている 1÷3 =1/3 について、この場合も除数が n 倍になると商も n 倍になること、つまり $n÷3=(1×n)÷3=(1/3)×n=n/3$ であることを示している。実際、5 年で 2÷3= 2/3 を学習する際、2 L を 3 人で分けるといった場面が提示され、1 L を 3 人で分けると 1 人分が 1/3 L となること、2 L の場合はそれが 2 つ分あるので 2/3 L となることが示される。つまり n L ならば 3 等分した結果が 1/3 L の n 倍になることに基づき説明がされている。また⑤に対する今の説明は、等分する変換と何倍かする変換とが交換可能であることも示している。すなわち$(1×n)÷3$ を$(1/3)×n$ に置き換える部分で$×n$ と÷3 が入れ替わっている。2 L を示すマスを 3 等分する絵を変形し、3 等分された 1 L マス 2 つに描き替える部分は、この 2 つの変換の交換に対応する。

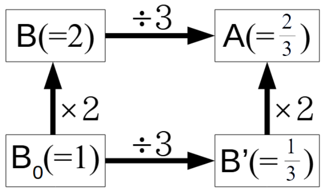

図２：２つの変換の可換性

Charalambous & Pitta-Pantazi (2007)は今の可換性のような「多様な仕方で解釈すること」を、入力と出力との関係に注意を向け、分数を作用素として習得する上で必要なことの 1 つとしてあげている(p. 298)。⑤は分数の第二義とも呼ばれる規定ではあるが、1 を 3 等分したものとして 1/3 を定義したり、1/3 の 2 つ分として 2/3 を定義したりする立場からは、むしろ分数の定義に含まれる 3 等分や 2 倍の操作に関わる計算法則を主張するものと捉えることができる。

5 つの下位構成要素についても、比と商はそれぞれ上の④、⑤と同様に考えられる。作用素は図 1 の操作・変換を表す場合、部分全体関係は、図 1 で A が B の部分になっている場合に当たる。測定値は、分数を数と考えることと、単位分数のいくつ分として区間 (interval) を測定することと結びついている。そこから数直線とも結びついている(Charalambous &

Pitta-Pantazi, 2007, pp. 299-300)とされるので、図1でBが数直線の単位、Aが分数で測定された区間の長さとなっている場合と言える。

以上より、多様な意味に共通するものこそが数2/3だと想定した場合、それは基本的に図1のBをAにする操作や変換、ないしはA、Bの関係として捉えることができる。上述の①～⑤や5つの下位構成要素はその捉え方における重点の置き方の違いとして位置づけられる。BをAに変える操作や変換という言わば動的な側面に注目するか、それにより得られる結果やその結果と元との関係という静的な側面に注目するかの違い、あるいはBとして具体物を採るか、普遍単位を採るか、あるいは数を採るかの違いがあるに過ぎない。場面により「分数が名前を変える、というのは変」であり「分数2/3は一つ」(小島, 1997, p. 55)であるのが自然と考えられる。

３．数と量の関係

(1) 分数の捉え方

上述の①～⑤を図1により捉えた際、BからAを産出する操作に重点を置いた場合はもちろん、その結果として得られる「大きさ」に着目した場合でも、AとBの関係に着目した場合でも、3等分したものをまず考え、次にその2つ分を考えるというように、等分変換と倍変換とを続けて行うことが基本的に見られる。実際、AとBの関係を分数を用いて具体的に記述するとすれば、元になるBを何等分かして下位単位となる量を作り、その何倍がAと等しくなるかにより分母と分子を決めることになる[2)]。

また「倍」という用語が2量や2数の関係やある量や数の別の量や数に対する割合を記述する際に用いられるとともに、「～倍にする」といった形で量や数に対する操作や変換を表すことを考えると、上述の動的側面と静的側面とは基本的には同じものの異なる現れ方と考えられる。

ここで正の量のシステムについての有理自己同型写像(rational automorphism)を有理数とするNagumo (1977)や、ユークリッド式量空間での「*m*等分変換と*n*倍変換の合成」を分数*n*/*m*とする田村 (1978)の定義に着目すると、図1の動的側面、すなわち操作や変換の方を分数の基本的な捉え方としていると見ることができる[3)]。これは分割すること(partitioning)に重点を置いた分数の捉え方 (Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007; 松下, 1997)とも、分数の下位構成要素のうち作用素に焦点を当てた立場 (Davisほか, 1993)とも親和性がある。さらに、1も数であり、しかもそれが連続的なものとして分割可能であると捉えられるようになった背景として、「数とはそれにより何かの量について話すことができるもの」とする数の考え方があった (Malet, 2006)とする歴史的な側面とも整合する。

そこで本稿では田村(1978)に従い分数*n*/*m*を「*m*等分変換と*n*倍変換の合成」である合成変換として捉えることにする。

(2) 数と量

分数をある種の変換とみた場合、2/3 mは1 mという量に2/3という変換を施して得られる量を表すことになる。また静的に捉えれば元となる1 mに対する当該の量の割合が2/3となる。すなわち、元となる量を基準として測定した際の測定値が、その量と元の量の間の関係を示す数となっている(小島, 1997)。

上述の①と②については図1の元になるBとして現実世界における量が採られるが、③の場合にはBとして数1が採られることになる。つまり③の「1を3等分したもの(単位分数である1/3)の二つ分の大きさを表す」については、数1を3等分することや分数1/3の二つ分の大きさを考えることが、そこでの分数を含む数の捉え方と整合するように理解される必要がある。

また⑤で商として考える場合、例えば2÷3が数についての演算であり、その商となる分

数も数であるとすれば、ここに現れる 2、3、2/3 は数として全て同じように理解される必要がある。

田村(1978)は上述の分数の定義を定式化する前提として「自然数を‘量空間の倍変換’とみなす」(p. 20)としており、これに従えば数 1 はある量 B に対して同じ量 B を対応させる恒等変換ということになる。自然数 n の後続 (successor) $n+1$ は量 B に対して $B\times n+B$ を対応させる変換として規定できる (Nagumo, 1977, p. 2)。これに基づき例えば 3 倍変換としての自然数 3 を規定した場合、3 倍変換と合成されたときに恒等変換になる変換を「1 を 3 等分したもの」として考えることができる。これは 3 倍変換の逆変換とも言える (Nagumo, 1977, p. 4)。あるいは、量 B に対して $A\times 3=B\times 1$ となる量 A が存在することを前提とした上で、量 B に対してこうした量 A を対応させる変換を「1 を 3 等分したもの」として捉えることができる(田村, 1978, p. 28)[4)]。

(3) 分数の四則演算と大小比較

分数を等分変換と倍変換の合成変換とした場合、分数の四則演算や大小比較は変換どうしの演算や大小比較となるが、それらは量にその分数を施した結果得られる量をもとに規定されうる。2 つの分数 r_1 と r_2 の和 r_1+r_2 は、量 B に対して $B\times r_1+B\times r_2$ を対応させる変換として、つまり $B\times(r_1+r_2)=B\times r_1+B\times r_2$ によって定義される (Nagumo, 1977, p. 6; 田村, 1978, p. 22)[5)]。実は算数の学習でも同様のことが行われている。小学校 3 年で分数の和を初めて学習する際、例えば 1/5+2/5 がいくつになるかを、分数を液量 L に施した量を媒介して、1/5 L+2/5 L=3/5 L となることを観察して考えることがこれに当たる。なお、加法の可換性と加法の結合法則も、量の加法の可換性と結合法則から帰結する (田村, 1978, p. 23)。

2 つの分数 r_1 と r_2 の積 $r_1\times r_2$ は、量 B に対して r_1 と r_2 を続けて施した結果 $(B\times r_1)\times r_2$ を対応させる変換として定義される(小島, 1997, p. 44; Nagumo, 1977, p. 6 ; 田村, 1978, p. 22)。小学校 6 年で分数どうしの乗法を学習する際には、1 dL 当たり 4/5 m^2 塗れるペンキ 1/3 dL では何 m^2 塗れるかといった場面が用いられる。ただこの場合も塗れる面積はペンキの量に比例することに基づき、ペンキが 1/3 倍だから塗れる面積も 1/3 倍となるといった比例的推論により考えを進めているように見える。つまり、1 m^2 の 4/5 倍をした結果得られる面積に対してさらに 1/3 倍の変換を施すことにより 2 つの分数の積を考えていることになり、変換を続けて施すこととする乗法の導入と、基本的に同様のことだと言える。

なお乗法の結合法則については変換の結合法則 (田村, 1978, p. 7)から帰結する(p. 23)。また分配法則は変換が線型である(p. 33)ことから導かれる(p. 25)。さらに⑤で主張される等分変換と倍変換の可換性についても、倍変換の可換性(p. 20)を用いて示される(p. 30)。乗法が可換であることは、この⑤や等分変換どうし、倍変換どうしが可換であること(p. 29)から示される。

乗法を変換を続けて行うことと考えると、3 項以上の乗法もそのまま考えることができる。量 B に 2 つの分数 r_1 と r_2 を続けて施した結果 $(B\times r_1)\times r_2$ も何らかの量なので、これにさらに別の分数 r_3 を施すこともできる、つまり $((B\times r_1)\times r_2)\times r_3=(B\times(r_1\times r_2))\times r_3$ を考えることができるからである。

2 つの分数 r_1 と r_2 の大小についても、量 B を施した結果として得られる量の大小により考えられる。すなわち、量 B に対して $B\times r_1>B\times r_2$ の時、$r_1>r_2$ と規定することになる(田村, 1978, p. 22)。実際にはこの大小関係は B のとり方に依らないので(Nagumo (1977)の命題 2.5 参照)、 大小関係が矛盾なく決まる。これは、小学校 3 年で、例えば 3/5 と 4/5 の大小について、それぞれを長さ m に施した結果得られる長さの大小をもとに考えることに相当する。

以上より、分数を変換として考えた場合の

四則演算や大小関係の決め方は、算数での分数の学習と基本的には同じ考え方になっていることがわかる。数と量との関係を明確化することは、数の四則演算や大小関係が、量に施した結果を参照し、それに基づいて決められているという点、つまり数の演算や大小の定義における量の役割も明確にする。

(4) 学習を支援する手立てとしての量

前項までで見てきたように、分数を量から量への変換と捉えた場合、その性質は変換としての性質ということになり、したがって性質を調べる際には実際に量に対して分数を施してみて、その結果得られる量の性質に基づいて分数の性質を決めていた。

そしてこのことは、分数の学習で行われていることと基本的には同様なものであった。実際、分数の学習では量を表現する具体物やテープ図、面積図などに対して分数に当たる変換を施すことが多く行われている。その変換の結果得られた量が分数の効果を表現することとなり、変換である分数を間接的に表している。例えば、元になる長さ 1 m に分数 r_1 を施した時に、1 m をどのように変えるのか、その効果が分数 r_1 を体現 (embody)することになる。そうした量の上の効果を観察することを通して、変換としての分数 r_1 を捉えることが期待されていると考えられる。

また結果として得られる量に対して操作を施すことにより、分数に対する操作の可能性を示すことにもなる。例えば、分数 r_1 と r_2 をそれぞれ 1 L に施して得られる液量 r_1 L と r_2 L に対して合わせるという操作を行うことを通して、分数に対する操作 r_1+r_2 ができるらしいという可能性を示すことになる。

あるいは上述のように、⑤の等分変換と倍変換について田村(1978)は定理として提示し、変換の性質を用いて証明を与えているが、算数の教科書では 2 つの L マスを結合(2 倍変換)してから 3 等分する場合と、L マスを結合せずに 3 等分した結果の方を結合する場合とを観察するという、具体的な量の操作とその効果をもとに可換性を説明している。

このように量を媒介させることで、抽象的な分数を具体的な量を通して捉えさせようとすることが、算数での分数の学習の基礎を成していると言える。それは Nagumo (1977)や田村(1978)のアプローチとも整合したものと考えられる。

４．分数の捉え方から派生する困難点

前節のように分数を捉えることで、意味の多様性とは異なる、分数の持つ困難性が明確になる。

(1) 単位の調整

分数の学習では元の量に等分変換を施して新たな単位を作り、それに倍変換を施して例えば元の量の 2/3 倍に当たる量を得ることになる。この時、倍変換を施す新たな単位がどのような大きさかは元の量との関係により決まるので、元の量も単位として意識され続ける必要がある。つまり、分数が合成変換なので、最初の変換を施す量と 2 番目の変換を施す量とが存在することになる。

さらに 2 m の 3 等分のように普遍単位が関わる場合には、これら 2 つの単位に加えて、普遍単位 m とこの下位単位 1/3 m が加わることになる。つまり、3 等分変換が施される元の量である 2 m (図 2 の B)、3 等分でできた新たな単位となる量、普遍単位 m (B_0)、m を 3 等分して得られる新たな単位 1/3 m (B')が併存することになる。

また令和 2 年度から使用されている教科書の 2 年生用では、12 個の 1/3 なども扱われているが、こうした離散量の場合には、3 等分変換が施される元の個数 12 個、1 倍変換が施される 4 個、さらに個数を考える際の単位である 1 個という 3 つの単位が関わっている。

このように、分数を合成変換として捉えることで、個々の変換が施される元の量としての単位が明確化され、結果として複数の単位

の関与が明らかになる。そして関与する複数の単位の間を調整する(coordinate)ことの重要性(Olive, 2001; Steffe, 2002; Tzur, 2000)が問題となってくる。

(2) 分数の大きさ

数と量の関係が曖昧な時には、量との類推で分数の「大きさ」を考えることも自然なことである。しかし数と量とを区別し、数を量に量を対応させる変換と見なしたり、その結果得られる量と元の量との関係のことだと捉えたりすると、変換や関係の「大きさ」を考えなければならなくなり、長さや広さを考えるのと同じようには「大きさ」を考えにくくなる。

上で述べたように、確かに量に施した結果を媒介して、2つの分数の大小を規定することはできる。また1/3は3倍変換と合成すると1になるといったように、それぞれの分数どうしの関係を考えることはできる。しかし分数を量の間の変換として捉える立場では、分数に何か固有の「大きさ」があるというよりも、量に作用させた時にその量をどの程度変化させるのかという、一種の程度あるいは「行為の効果(effect)」(Pegg & Tall, 2005)や「影響 (impact)」(Petit, 2016, p. 63)のようなものとして「大きさ」を扱うことになろう[6]。これは長さや広さといったいわゆる外延量より理解しにくいと考えられる。

(3) 合成変換

分数を等分変換と倍変換の合成として考えた (図3a) としても、分数を1つの数として捉えることを考えると、元の量から分数を施した結果が直接得られると見ることも必要となる (図3b)。つまり、2つの変換を続けて行うということから、合成された1つの変換として見ることが必要になる。Davis ら(1993)が分数による変換を、関数のブラックボックスのような2/3マシンなどにより提示した際、元の量を入力すると2/3という分数を施した結果が出力されるように提示したことは、出力と入力の関係だけに注意を向け、2/3が1つの変換であることを強調する提示の仕方になっていると言える。

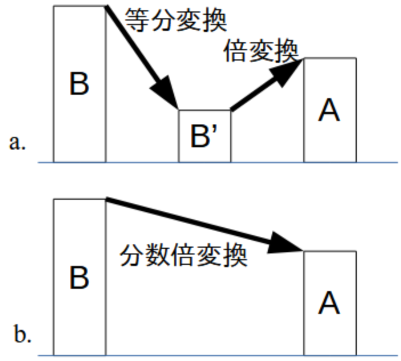

図３：2つの変換の合成

(4) プロセスの抽出

数を量に対する変換とする立場で数自体を考えるとすれば、変換のプロセスを、特定の量に施すという行為を伴わずに捉えることが必要となる。Olive (2001) は初期の数系列の理解に関わり、数える具体物が目の前にない状態で「自分の数える動作 (acts) を内面化すること(その心的表象を作ること)」(pp. 5-6)の重要性を指摘している。これと同様に、分数を施す量が特定されていない状態でも、分数に当たる操作を内面化することになろう。

ただし自然数の場合、具体的な数えるものを伴わない数える動作の内面化で済むのに対し、分数の場合、まずは具体的な量を伴わない等分の動作を内面化し、さらにその等分の動作の結果得られる新たな単位について、そのいくつ分かを数える操作を内面化することとなる。これは、数える動作だけをイメージすることに比べて難しいと考えられる。

(5) プロセスの対象化

Olive (2001)はさらに数える動作の結果も内面化されて「内面化された数詞によって心的にシンボル化される」(p. 6)と述べている。そのシンボル化する数詞が結果も含めて「数えるという経験の記録を一緒に運ぶようになる」(p. 6)とすれば、操作やプロセスから派生する構造を伴いながら、操作やプロセスの結

果が 1 つの数詞により表されるような 1 つの対象になるものと捉えることができる。これは変換の効果自体がシンボル化され、「合成作用素を記述するのに単一の分数の名前をあげる」(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, p. 298)ようになることと考えられる。また数学的概念の二重性 (Sfard, 1991) の視点からは、操作的捉え方 (operational conception) だけでなく構造的捉え方 (structural conception) もできる状態になったとも言える。

操作に対する構造的な捉え方が行われるのだとすると、量とは区別されて操作のプロセスとして内面化 (interiorization) されるとともに、変換の出力と入力がより直接的に関係づけられて圧縮化 (condensation) され、さらにカプセル化 (encapsulation) あるいはモノ化 (reification)されて 1 つの対象として捉えられるようになると想定される (Cetin & Dubinsky, 2017)。変換という動的な捉え方だけでなく、関係や割合という静的な捉え方も行われるようになり、分数をそれが示す関係や割合に当たる構造を持った 1 つの対象 (object) として構造的に捉えることもできる状態へと移行すると考えられる。上で触れた Davis ら(1993) の分数マシンによる提示は、変換を 1 つのモノとして捉えることを促すための手立てにもなっている。

つまり分数を変換と捉えた上で二重性の知見を援用した場合、ここまで何度か触れた動的側面と静的側面では、後者の方の発生の方が遅いと予想される。

なお構造的捉え方がされるようになっても操作的捉え方に置きかわるわけではなく、必要に応じて脱カプセル化(de-encapsulate; Cetin & Dubinsky, 2017)されて 2 つの変換へと展開される。むしろ 2 つの捉え方を自由に行き来できることが重要と考えられる。

(6) 数の抽出

数を量とは区別するという立場の場合、量を表現するために数を用いることはあっても、量と同一視することにはならない。2/3 m に現れる分数 2/3 は単位の長さ m に対する当該の長さの割合を示すものであり、2/3 自体は長さではない(小島, 1997)。3(4)で述べたように、変換自体を取り上げることが難しいことから分数の学習において量を媒介させ、分数を長さや液量などの量に施した結果として得られる量を観察することで、その効果を感得することが期待されるが、その場合、何らかの形で、学習者の注意を自身が操作を施す対象である量から、操作や変換自体あるいはその変換の効果自体へと向ける必要が出てくる。具体的な場面は学習者の活動を助けると同時に、場面の文脈についての何かを学習してしまう危険性 (Cetin & Dubinsky, 2017) をも有している。分数の学習でも、長さや液量といった場面に制約されず「あらゆる文脈から独立しているような概念の記述であり、それが現れる全ての状況においてその概念に当てはまるようなもの」(p. 76) が理解される必要があろう。図などの視覚的モデルを等分したり等分されたいくつ分かを塗るなどの活動をしていたとしても、その「経験を内面化したものに基づいて」「分数概念を一般化する」(Petit et al., 2016, p. 74)ことが求められる。

小学校 3 年や 4 年の学習では、元にする量として長さの単位 m と液量の単位 L が用いられることが多い。これは上述のような意味で量を媒介させたものであろうが、同時に元にする量として普遍単位を用いることで、量の単位 m や L に作用させる分数と、その結果得られる量を m や L により表現したときの値とを常に一致させ(松下, 1997)、分かりやすくしているとも言える。さらに m と L という少なくとも 2 通りの量を想定することで、分数に関わる性質や諸結果が m の場合でも L の場合でも同じになることから、それらを作用させた量に依らないものとして一般化し、変換に固有の、つまり数としての分数に関わる性質や諸結果であることを感得させるという意図

があるとも考えられる。

しかし5年で商を分数で表す場面以外では、分数を施す元の量として2Lや3mなどが扱われることがあまりない (松下, 1997) とすると、普遍単位を用いる上述の利点があるが故に、逆に数と量との区別を意識せざるを得ない機会が少ないとも言える。

確かに分数の学習の途中でmなどの単位を伴わない数直線が現れ、その上で分数が自然数や小数と一緒に扱われることで、分数が数として理解されると考えることもできる。ただ他方でこうした数直線は分数を用いて表現された長さに基づいて元々構成されているので、この場合でも学習者の注意を数直線の区間の長さから、1を表す単位区間に対する相対的関係へと向けていく必要があるし[7]、またそうでないとmの伴わない数直線が何を表現しているのかが曖昧になってしまう。逆に言えば、数と量との区別は、数直線の利用に関わるこうした難しさも明らかにする。

(7) 対象化された新たな対象に対する操作

分数の四則演算をするということは、数としての分数に対して操作を行うことである。分数の表記の仕方が導入された後では、「分数のシンボルは行為を伝える手段であるが、それとともに思考の対象を表す」(Pitkethly & Hunting, 1996, p. 15)ことになる。数と量を区別する立場からすると、分数を元にする量に施して得られる2量2/5 mと1/5 mの和や差を考えることと、分数2/5と1/5の和や差を考えることは別のことと考えられる(図4)。確か

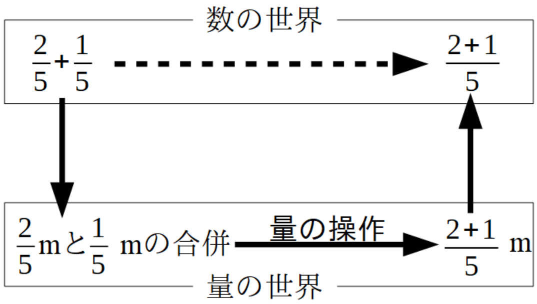

図４：量の操作による数の操作の構成

に3 (3)で述べたように、変換としての分数の和は分数を量に施した結果得られる量の和を用いて決められるのであった。図4の点線で示された数の操作を、実線で示された量の操作とその結果を参照して決めるということである。しかし、数としての分数の和をまず考えるには、分数自体が演算などの操作の対象であると認識される必要がある。

プロセスであったものにこうした操作が行えるようになるには、プロセスがカプセル化あるいはモノ化される必要がある (Centi & Dubinsky, 2017; Sfard, 1991; Ubah & Bansilal, 2018)が、しかしそのために、そこにはある種の「循環論法」が生じてしまう(Sfard, 1991)。

「一方で、アルゴリズムに含まれる『対象』についてのよいアイデアを獲得するためには、人はアルゴリズムを実行することに極めて熟練していなければならない。他方で、十分な技術的習熟を得るためには、人はそれらの『対象』を既に持っていなければならない。なぜなら、それら[対象]なしではプロセスは無意味になってしまい、したがって実行したり記憶したりするのが困難になるからである」(p. 32)。

つまり数の操作を有意味に行うことと操作の対象である数を理解することは、ニワトリとタマゴのような関係にあると指摘してる。

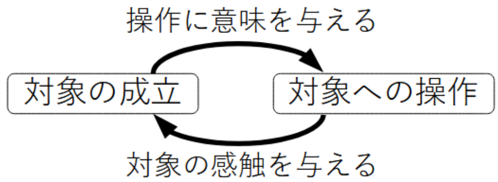

図５：対象と操作の再帰的関係

数を最初から何らかののモノとして想定するのではなく量に対する変換とし、量を扱う活動から数の学習を始めるとすると、数自身が操作の対象としても成立することが自明ではなくなり、しかしその際にはこうした循環論法に陥る可能性が出てくる。したがってこの循環論法を視野に入れた上で学習のあり方を考える必要が出てくる。

５．反復可能単位分数

分数を数として考えるには、単位分数を反復可能な単位 (iterable unit)と捉え、分数を反復可能な単位のいくつ分として捉えることが重要との指摘がある (Bruce et al., 2013; Steffe, 2002; Tzur, 2000; Ubah & Bansilal, 2018)。この指摘に従えば、分数を数と捉えることへの移行においては、反復可能な単位を重視した指導が目指されることになる。

実際、わが国の現行の教科書においては、小学校 3 年以降の学習で単位分数が重視されている。3 年で、分子が 1 でない分数が導入される際、1/3 m や 1/4 L のいくつ分かとして 2/3 m や 3/4 L が定義される。また、3 年で同分母分数の加減法を学習する際にも、単位分数の個数により考えており、その点では反復可能な単位分数を初期の段階から重視した指導が想定されている。

単位分数の個数に着目した考えは 4 年の仮分数と帯分数の学習や 5 年の異分母分数の加法、減法の学習、6 年の分数×整数、分数÷整数の学習でも用いられている。ただし、異分母分数の加法、減法の学習では、通分した後は既習の同分母の場合に帰着されることから、単位分数のいくつ分かに改めては触れない教科書も見られる。

他方で 4 年および 5 年の同値な分数の学習の際には、異なる分母を持つ数直線を比較することで、同じ“大きさ”になる分数を考えさせている。これは数直線の基準の長さを元の量とし、それぞれの分数をこれに施した結果得られる量に基づいて同値な分数を考えるものであり、田村(1978)による変換が等しいことの定義 (pp. 21-22) に相当している。この時、同値とされた分数の分子と分母を比較することで、きまりを帰納的に導いている [8)]。

ここで Steffe (2002) や Olive (2001) らのような単位間の調整という見方に立つと、例えば 1/4 を単位としてある量を表現する場合、1/4 は単位 1/2 の半分なので、それを反復する回数は 2 倍になるという「部分の大きさと部分の個数の間の逆の関係」(Tzur, 2000, p. 143) に着目して、同値な分数を理解することも考えられる。しかし教科書では、2 つの単位分数の間の関係から必要な単位分数の個数を考え、そして分子、分母に成り立つ性質を理解するという単位分数に着目した考え方ではなく、量に依拠した考え方になっている。

また 5 年で整数÷整数の商を分数で表すことを学習する際にも、例えば 2÷3 の被除数の 2 は 1 を反復可能な単位としているので、これを 1/3 という別の反復可能な単位で表現し、2 を 1/3 の 6 個分と捉え直して考えることもできる。しかし、やはり現行の教科書ではこうしたアプローチはとっていない。

さらに分数÷分数についても、包含除的な場面を取り上げると、被除数と除数を通分した後に単位分数を元に考え、分子どうしの除法として考えることができる (吉田, 2010) が、現行の教科書では等分除的な場面を取り上げることから、こうした考え方はしていない。ただ単位分数のいくつ分かを考えた場合、分数についての考察を自然数に基づく考えに帰着でき、それにより量を媒介した扱い方を少なくできる点には注意が必要であろう。

以上のように、反復可能な単位分数は多くの学習場面で用いられているが、利用が可能でありながら利用されていない学習場面も存在しており、その利用をできるだけ可能とするような指導の枠組みを構築することで、指導の一貫性が高まる可能性がある。

単位分数の反復可能性に着目する立場では、元の量に等分変換を施した後、元の「単位を破壊しないようにしながら」(Olive, 2001) 元の単位から 等分されたうちの 1 つを取り出す (disembed) ことが重視される (Olive, 2001; Steffe, 2002; Tzur, 2000)。単位分数は「それを含んでいた全体から自由になる」(Steffe, 2002, p. 299)。このことは同時に、元の単位と取り出された新たな単位の両者を保持して、

4(1)で触れた単位間の調整をすることも意味する。5 等分したテープの 3 つ分を塗るのではなく、5 等分したうちの 1 つを取り出して新たな単位とし、この単位の 3 つ分を考えること、しかしこの単位が元の単位とある関係にあることを意識することが求められる。

単位分数を数えるとすると、単位分数を数 1 と同様に扱うことになる。しかも単位分数の場合は等分の仕方により 1/3 や 1/7 など多様な単位分数がありうるので、単に個物を数えることよりも、3 ずつ数えるとか 7 ずつ数えることに近い。3 や 7 を 1 と見なすように、1/3 や 1/7 など多様な対象を 1 と見なすことが含まれると考えられる。

さらに単位分数を反復可能なものとして扱うことは、単位分数が数えたり、合併したり、何倍かしたりといった操作の対象となりうると認識していることを意味する。しかし 3(2)で検討したように、数 1 の捉え方にもよるものの、単位分数も基本的には等分変換と 1 倍変換との合成変換なので、結局は、そうしたある種の変換なりその効果なりが、まずは操作の対象となるかどうかの問題は残ることになる。つまり「自然数に操作を施すのと同様に単位分数を操作を施すことができる素材(material)として用いる」(Tzur, 2000, p. 137)ことができるかどうかである。

確かに単位分数自体が対象化された場合には、単位分数を反復することが中心となるため変換の合成が意識されずに済み、4(4)で述べたプロセスを抽出する困難が軽減される可能性も考えられる。しかしまずは単位分数を対象化することが必要であり、また単位分数のいくつか分を中心とした考え方を基本とする展開が必要となる。そこで、こうした条件を備えたディスコースを保証することが、指導の方針として考えられることになる。

６．ディスコースへの参加としての学習

分数を合成変換ととらえる場合、単位分数が操作の対象となることはある種の変換が操作の対象となることを意味する。しかしある種の変換を対象として捉えることは、関数を対象と捉えるのと同様の抽象度を持つと考えられ、小学生の学習を解釈する枠組みとしては適当でないようにも見える。そこで本節では、上述の前提の下で、分数の学習が小学生において成立しうる可能性を考える。

(1) 学習の 3 つのフェーズ

分数を量に施される変換と考えることは、数と量とを区別する視点を与えるが、最終的に分数を数として考えるようになることを目指した場合には、数と量との関係に応じて、大きくは 3 つのフェーズが想定される。

第 1 のフェーズは量に対する操作を中心とし、その操作や操作の結果を観察し、記述する中で分数が用いられる学習であり、数が量を参照する。2/3 などの分数表現の用い方の学習とも言える。また量の操作を参照して分数の操作が構成される(図 4)。そこで見出されたパターンが自律し自立することで第 2 のフェーズに移ると考えられる。

第 2 のフェーズは何らかの量の存在を前提とせずに分数が扱われる学習であり、分数自体が操作の対象となる。量を参照せずに分数について演算を行ったり、2 つの分数の大小を比較することになる。

第 3 のフェーズは、分数の演算や大小比較を利用して、量などについての新たな情報を得るような学習である。第 1 フェーズとは数と量の立場が逆転し、量が数を参照する。第 2 フェーズでの推論の利点が学習者に感じられることで、第 2 フェーズの重要性を支えるとも言える。

例えば、ジーン・レイヴが取り上げたダイエットをしている人のチーズの量り方は、しばしば状況的に思考することの重要性を示す事例として用いられてきた。これは 2/3 カップの 3/4 のカッテージチーズが必要な場面で、大学で微積分の講義を履修したような人が、

2/3 カップのチーズを軽量カップで量り取った後、それを俎板の上に丸く広げ、十字を描いてから 4 分の 1 を取り除き、残りを使用したという例であり、置かれた状況にある道具との関連づけにより問題を認識し、状況で入手可能な資源を活用して解決されたとされる(中井, 1992)。しかし少なくともこの例については、2/3 と 3/4 の合成変換(2/3)×(3/4)が 1/2 に等しくなることを数のレベルで確認できれば、最初から 1/2 カップのチーズを量り取るだけで済んだとも言える(図 6)。

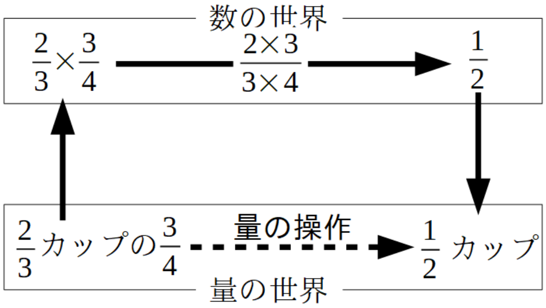

図６：数の演算から量の情報を得る

分数を量に施す変換と考えることで、第 1 フェーズの役割も明確化される。3(4)でも触れたように、変換自体あるいはその効果を直接、最初から扱うことは難しいので、量を媒介させることで変換やその効果を間接的に感得すること、また量の操作を媒介して数の操作が可能であることや、その結果がどうなりそうかを感得することが期待されるフェーズということになる。そして、ここで間接的に感得された変換やプロセスが 4(5)で述べたような形で対象化されると考えると、対象化されるべきプロセスを子どもたちに抽出してもらい、第 2 フェーズへの移行を準備することが、第 1 フェーズの役割と考えられる。

田村(1978)は量を用いて数の演算を定義した後、その場合に分母や分子に成り立つ関係を、量を参照して証明し、定理とする(pp. 34-37 の定理 5 から定理 9)。しかし逆数の定義と除法(p. 39 の定理 10)については量を介在させず、乗法についての定理を用いて数の操作だけにより証明をしている。このように既に証明された定理に基づいて、量を介在せずに分数の演算や大小比較、等しい分数を考え、分数に関わる新たな情報を作り出し、正当化する学習が第 2 フェーズだと言えよう。

量を媒介させずに分数を導入する、例えば高木(1949)などでは、田村(1978)の定理に当たるものをむしろ分数の演算や大小関係、等しい分数などの定義として用いている。つまり、こうした扱いでは第 2 フェーズから出発していると考えることができる。

しかし小学校での分数の学習では、量の操作を参照する第 1 フェーズから出発し、まずは第 2 フェーズに至り、第 2 フェーズでの理解を生かして第 3 フェーズを可能とすることが目指される。そして第 2 フェーズで数が自立した存在となることで、第 1 から第 3 へと数と量の立場を逆転させることになる。

4(5)で見たように、プロセスを対象化する移行にとって操作やプロセスでの経験が重要とすれば、第 2 フェーズの成立にとって第 1 フェーズは確かに重要である。しかし 4(6)で見た数の抽出がなければ第 2 フェーズは成立しない。そう考えると第 5 節で見たような、第 1 フェーズと第 2 フェーズとが入り組んだ形で進められている点(布川, 2019)には注意が必要であろう。そこで、第 2 フェーズへの移行や成立を意図的に組み込んだ指導の枠組みが必要と言える。

(2) 第 2 フェーズのディスコース

第 1 から第 2 へのフェーズの移行を改めて考えると、量を操作の対象とし、量に施す変換やその結果に見られるパターンを記述するのに分数を用いることから、パターンの記述であった分数自体を操作の対象とすることへの移行であり、4(5)で述べた転換を必要とする。このとき量を参照せずに分数の操作を行うとすれば、依拠できるのは以前に確立された計算の仕方などしかない。第 1 フェーズで和や積の求め方を考える中で見出されたきまりを記述した計算の仕方が、第 2 フェーズで

は操作の仕方を規定することになる。つまり記述(description)が指示(prescription)に転換する。単純に考えれば、分数の対象化と記述から指示への転換とが生じて、第 2 フェーズに移行できる。

また分数を数として操作するには、既習の自然数との違いも問題となる。2 つの数の間にいつでも別の分数が存在する稠密性や、あるいは同値な分数がいくつも存在するという性質は、「まだ分数が数としての理解が確実でない子どもたちには違和感もあり、理解しにくい」(吉田, 2010, p. 35)。したがって、今までの数とかなり異なるものを同じ「数」として見なすことが求められる。

これらを考えると、量に関わる記述としての分数から数としての分数への移行は、質的な転換であると言える。さらに、4(7)で述べた循環論法の問題を想起すると、上で述べた単純な考えのようにはいかず、分数を数として十分捉えられるようになってから数としての計算を行うというよりも、数としての計算を行ったり数としての分数の性質について語ることを通して、分数も数であるとの感覚を高めると考える方が現実的であろう。言わば、分数を数であるとして扱ったり、語ったりする中で、分数が数であるとの感覚を高める、ということである。分数を含む数についての

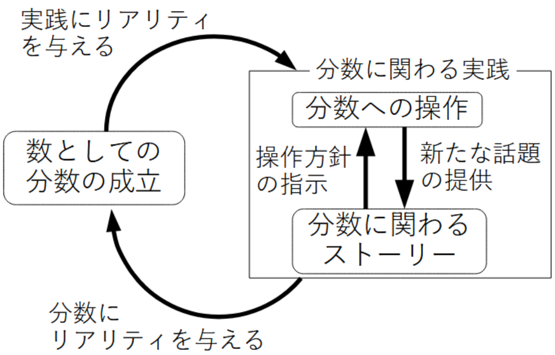

図 7 ：第 2 フェーズでの学習

「数学的ディスコースを個人が自分のものに」して、「他者とだけでなく自己とも数学的なコミュニケーションができるようになる」(Sfard, 2007, p. 575)ことを、そのディスコースに参加しながら目指す過程として、分数の学習を捉えることができよう。

その際、Sfard (1995）は「[新たな対象を]十分に理解する以前であっても、テクニックを実践する必要性に耐えなければならない」(p. 35)としている。操作の練習も、圧縮化を進めてモノ化につなげる実践としてとらえることが示唆される。他方で、第 2 フェーズで数の計算を行ったり大小比較を行ったりする際に、操作の対象を伴わない「低レベルのディスコース」に留まり続けることがないように、教師は学習対象に関わる「明確な会話に学習者を引き込む (engage)」(Nachlieli & Tabach, 2012, p. 24)ことが重要となる。つまり、計算結果の正誤やそこに至る手続きの正しさだけでなく、その結果に基づいて数としての分数の性質や関係について語ることが求められる。つまり、第 2 フェーズとして適切なディスコースが形成され維持される必要があると考えられ、また分数の性質や関係について理解することが、分数が対象として成立することを促すとも期待される(Slavit, 1997)。

ディスコースは次の 4 つの要素により特徴づけられるような、許容される行為とそれへの反応を持つ特定のタイプのコミュニケーションとされる (Sfard, 2008)：(a) 語彙; (b) 視覚的媒介物 (visual mediators); (c) ルーチン; (d) 承認された語り方 (endorsed narrative)。

第 2 フェーズに当たるディスコースの語彙を考えると、第 1 フェーズとは異なり量を参照しないので、基本的には「元の量」や「1 m」などの語彙は使われなくなると想定される。確かに確認のために一時的に第 1 フェーズに戻るとか応用するとして第 3 フェーズに移る場合には、「元の量」が問題となるが、第 2 フェーズとしてのディスコースでは、操作のプロセス自体が対象化されていることから、元の量に等分などの操作を実行することが行われなくなるからである。また分数を数として扱うことから、第 5 節で検討した反復

可能な単位分数を中心に考えることになろうが、その場合も、1/3 m といった量ではなく1/3 という数を表す語彙が用いられるはずである。逆に分数を数として捉えることを阻害するとされる「～のうちのいくつ」といった語彙は含まれなくなる。分数を数として扱うような語彙が中心的に用いられることで、第2フェーズらしいディスコースが形成される。

視覚的媒介物としては、現行の教科書でも用いている折り紙状の正方形の図、テープ状の図、数直線などが考えられるが、数と量を別に考えたり「分数概念を一般化する」(Petit et al., 2016)ことを考慮すると、それらの視覚的媒介物をどのように用いるか、それについてどのように語るか、それらから何を受け取るかが重要となる。これらの図を、自然数の学習でのブロック図と同様の代表元的表象(布川, 2021)として意図的に扱うか、あるいは代表元的表象となりやすい表象を用いることが必要となろう。

また上述の循環論法の視点からは、分数に対し数としての操作を施すことが分数を数として捉えることを促すと期待される。そこで例えば数直線を用いる場合、数直線上において数の演算に当たる操作がブロックでの操作と同じように自然にできることが求められる。数直線では数を区間で表現することと数直線上での位置で表現することとを適宜使い分ける必要があるなど、その利用は必ずしも直観的に可能とは言いがたい(布川, 2019)。ただ、こうした2通りの表現は、ちょうど時間と時刻の違いに相当し、しかも、時間と時刻の学習においては、数直線のような表象に対して、中学校の負の数の学習で現れる加法や減法を示す矢印が用いられ、数直線上の操作を表現している。自然数の学習での数直線の利用だけでなく、こうした時間や時刻での数直線や長さの学習での定規の図(Petit et al., 2016)も視野に入れて、数直線上での操作が自然にできるようになることを目指すことも考えられる。

ルーチンはある場面で繰り返される行為や手続きのパターンであるが、第1フェーズで量の等分や等分されたうちのいくつ分かを塗ることなどが行われるのに対し、第2フェーズでは第1フェーズで確立された計算の仕方や同値な分数の作り方などに従い、分子や分母の自然数に対する演算により分数の計算や大小比較を行うことが、ルーチンとなろう。

なお第2フェーズのルーチンに関し、Lavieら(2019)が述べる儀式的 (ritual) なルーチンから探究 (exploration) のルーチンへの変容も考慮する必要がある。すなわち手続きを適切に遂行することを目的とするようなルーチンの実行から、手続きの成果に注意が向けられ、「数学的対象についての新たな『事実』」を目指す(p. 166)など、成果を得たり用いたりするためにルーチンを実行することへと進展する。Lavie ら(2019)がルーチンの構成要素として手続きに加えて「課題」をあげ、しかも当事者により解釈され理解された課題である点を重視していることから、分数に関わるルーチンを行うにあたり、その際の課題を「数学的対象についての新たな物語 (narrative) を構成したり承認したりすること」(p. 166) だと解釈してルーチンを実行できることが重要である。

承認された語り方として、第1フェーズの初期では特定の量に対する操作やその結果を分数を用いて記述するような語り方が、また途中からは量の操作から観察されることを根拠として、分数に関わり成り立つ性質や関係を正当化するような語り方が中心となるが、第2フェーズでは、以前に確立された分数の数としての性質や計算の仕方などに基づいて、分数に対する操作や分数の性質や関係を正当化するような語り方が承認されるようになると考えられる。そうした語り方がされることで、分数が数として扱われていることが学習者に伝わると期待される。

上述の循環論法の議論を想起すると、ここ

で量に依存せずに分数自体に操作を施したり、分数自体について語ることが、分数を数として捉えるようになることにとって特に重要だと考えられる。また、分数が基本的には単位分数のいくつ分かから成るという構造を持つとすれば、その構造に基づいて分数の新たな性質や関係を正当化するような語り方がされることになる。その中で、単位分数以外の分数が数として扱われることが促進されるとともに、単位分数に対して操作が加えられたり語られたりすることにより、単位分数自体に対する数としての対象化も進むという、再帰的 (reflexive)な関係(図 7)が生じると期待される。つまり、「所与のルーチンについてのその人の経験が成長するにつれ」「具体的対象というよりも数学的対象についての物語が語られ始める」(Lavie et al., 2019, p. 170)。

以上より、分数の学習が小学生において成立しうるためには、第 1 フェーズを入り口としながら第 2 フェーズへの質的転換を行うこと、また転換後の最初のうちはルーチンが儀式的なものであるとしても、それが探究的なものに移行するよう配慮し、分数の数としての性質や関係を話題としたり、それを既に共有された分数の性質や関係により正当化するような語り方が行われることが必要である。そうしたディスコースに参加する中で、このディスコースの語り方を身に付け、その結果として分数を数とすることが自然な見方になるものと期待される。

7．おわりに

折り紙を表す正方形や 1 m のテープの図、リットル升の図などを用いて 2/3 を表現した場合、それらに共通するものが数としての 2/3 なのだろうから、多様な表現を通して分数を学ぶには、それら表現に共通するものを抽象し、長さや液量という表現特有の文脈に制約されないよう「分数概念を一般化する」(Petit et al., 2016)ことになる。分数の学習を考えるためには、多様な表現から何を抽象すべきかを想定しておくことが必要と考えられる。

本稿では抽象すべきものとして、その表現を可能としている変換および変換の入力と出力の関係を想定し、その想定に基づいて分数の学習において予想される困難と、その困難を考慮した場合の学習の基本的な方針を検討してきた。もちろん当初の想定が異なれば、予想される困難や学習の方針も異なってくるであろう。大切なのは、多様な表現を通して学習者に見てもらいたいと期待するものを明確化することと、それに基づいて学習を構成していくことだと考えられる。図などの多様な表現のどこが数を表しているのかを明確にする問題とも言えよう。

中学校では分子や分母が負の数や無理数の分数が現れ、高校では複素数も分子や分母になりうる。さらに高校で学習する分数式では分子と分母は整式である。そもそも中学校 1 年の文字式の学習で分子や分母に文字が入った時点で、分子や分母が自然数でない場合も許容されるはずである。こうした場面では、等分の操作などを参照するよりも、分数の形をしたものが何か 1 つの対象であるという、第 2 フェーズのような捉え方の方が分数を受容しやすいのではないだろうか。小学校 2 年

$$\frac{1}{\pi} = 12 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (6n)! (13591409 + 545140134n)}{(n!)^3 (3n)! 640320^{(3n+\frac{3}{2})}}$$

図８：分数の和からなる複雑な式

で始まる分数の学習が、将来的には例えば図 8 のような式にまで発展しうることを含めて、分数の学習の枠組みを構築する必要があろう。

謝辞：本研究は科学研究費助成事業・基盤研究(C)(課題番号：20K03271）の助成を受けている。

註および引用・参考文献

1) 以下本稿では①～⑤は全てこの①～⑤を指

すものとする。

2) この関係を見いだす際に互除法により通約量を見いだす場合もあろうが、その場合も通約量を見いだした後は、その通約量によりBを「捉え直し (reconceptualize)」て「連続的だが区分けされた(segmented)単位」とし、通約量がその「反復的な(iterative)部分として単位分数を確立する」(Pitkethly & Hunting, 1996, p. 21)と考えていく。反復可能な単位による再構成が可逆性(reversibility)、すなわち「5回反復された1が1つの5であり、それは5つの1に分割される」(Olive, 2001, p.5)という見方に支えられているとすれば、互除法により通約量が見出された後にそれを用いてAを単位分数のいくつ分かにより記述する際には、等分の考え方も間接的には用いられていると考えられる。

3) 静的側面に焦点を当てた場合、「量に関する“倍”ないし“比”」を分数と考える(宮下, 1991)ことになろう。なお田村 (1978)による *m* 等分変換の定義(p. 30)では、あくまで *m* 倍したときに元の量になるような量(p. 28)を与える変換であり、元の量を *m* 個の等しい大きさの部分に分けるという操作は前提とされていない。

4) 数について他の捉え方も可能であろうが、その場合は、その捉え方と対応する形で数1を3等分することの意味が想定される必要がある。例えば自然数をモノの集合の1対1対応から説明するとすれば、それによる数1の捉え方に応じて「1を3等分したもの」 を想定しておく必要がある。

5) r_1+r_2 の＋記号が数の和を表すのに対して、$B\times r_1+B\times r_2$ の＋記号は量の和を表しているので本当は区別すべきである。本稿では田村(1978)の表記に習い、このままの表現にしておく。同様に次の段階で現れる $B\times r_1$ の×記号と $r_1\times r_2$ の×記号も本当は区別すべきである。

6) 「大きさ」を効果として捉えた場合でも、さらに２通りの解釈が考えられる。１つは元のモノが伸び縮みするという解釈であり、もう１つは元のモノを複製して増やしたり分割して減らしたりするという解釈である(Charalambous & Pitta-Pantazi, 2007, p. 298)。

7) 数直線の利用に関わっては二重性(duality)の問題もある。すなわち、数を区間の長さにより表現するか数直線上の位置で表現するかの問題があり、実際にはその両者を適宜使い分けることが求められる。

8) なお田村(1978)は$(n/m)=(q/p)$となる必要十分条件としては $n\times p=m\times q$ を証明し、定理としている(p. 34)。

Bruce, C., Chang, D. & Flynn, T. (2013). *Foundations to learning and teaching fractions: Addition and subtraction*. Ontario Ministry of Education, Ontario.

Cetin, I. & Dubinsky, E. (2017). Reflective abstraction in computational thinking. *Journal of Mathematical Behavior*, *47*, 70-80.

Charalambous, C. Y & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students’ understanding of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Davis, G., Hunting, R., & Pearn, C. (1993). What might a fraction mean to a child and how would a teacher know? *Journal of Mathematical Behavior, 12*, 63-76.

小島　順. (1997). 小学校算数における分数の導入. 松下佳代, 松井幹夫, 小島順, 上垣渉, 分数指導の新しい方向をもとめて(pp. 42-63). 数教協研究局.

Lavie, I., Steiner, A., & Sfard, A. (2019). Routines we live by: From ritual to exploration. *Educational Studies in Mathematics*, *101*, 153-176.

Malet, A. (2006). Renaissance notions of number and magnitude. *Historia Mathematica*, *33*, 63-81.

松下佳代. (1997). 分割量分数論は何を主張しているのか：日常の算数と学校の算数の接点

を求めて. 松下佳代, 松井幹夫, 小島順, 上垣渉, 分数指導の新しい方向をもとめて(pp. 14-27). 数教協研究局.
宮下英明. (1991). 分数の教材研究. 日本数学教育学会誌, *73* (4) , 84-90.
文部科学省. (2018). 小学校学習指導要領解説(平成29年告示)算数編. 日本文教出版.
Nachlieli, T. & Tabach, M. (2012). Growing mathematical objects in the classroom: The case of function. *International Journal of Educational Research*, *51/52*, 10-27.
Nagumo, M. (1977). Quantities and real numbers. *Osaka Journal of Mathematics*, *14*, 1-10.
中井孝章. (1992). <わざ>からみた教育方法学：認知的徒弟制の展開. 大阪市立大学生活科学部紀要, *40*, 165-186.
布川和彦. (2019). パターンの記述とパターンの対象化の観点に基づく教科書における分数学習の展開についての検討. 日本数学教育学会誌, *101* (12), 2-15.
布川和彦. (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 33-44.
Olive, J. (2001). Children's number sequences: An explanation of Steffe's constructs and an extrapolation to rational numbers of arithmetic. *The Mathematics Educator*, *11* (1), 4-9.
Pegg, J. & Tall, D. (2005). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. *ZDM*, *37* (6), 468-475.
Petit, M. M., Laird, R. E., Marsden, E. L., & Ebby, C. B. (2016). *A focus on fractions: Bringing research to the classroom* (2nd edition). New York, NY: Routledge.
Pitkethly, A. & Hunting, R. (1996). A review of recent research in the area of initial fraction concept. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 5-38.
Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1-36.
Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*, 15-39.
Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 567–615.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.
Steffe, L. P. (2002). A new hypothesis concerning children's fractional knowledge. *Journal of Mathematical Behavior*, *20*, 267-307.
高木貞治. (1949). 数の概念. 岩波書店.
田村二郎. (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
Tzur, R. (2000). An integrated research on children's construction of meaningful, symbolic, partitioning-related conceptions, and the teacher's role in fostering that learning. *Journal of Mathematical Behavior*, *18* (2), 123-147.
Ubah, I. J. A. & Bansilal, S. (2018). Pre-service primary mathematics teachers' understanding of fractions: An action–process–object–schema perspective. *South African Journal of Childhood Education*, *8*(2), a539. https://doi.org/10.4102/sajce.v8i2.539 (2021年2月27日アクセス)
吉田　誠. (2010, 12月). 同値分数指導について. 新しい算数研究, *479*, 34-35.