

三角錐の体積についての考察

中川 仁

上越教育大学

1 はじめに

三角錐や円錐の体積 V は底面の面積を S , 高さを h とすると

$$(1.1) \quad V = \frac{1}{3}Sh$$

という公式で与えられる. 筆者は (1.1) を積分を使わずに証明できないかと考え, 平行六面体と相似を使って証明できることに気づいた. この証明を 2021 年 8 月 30 日に上越教育大学附属中学校 3 年生を対象に実施した「ワクワク大学デー」における授業において解説した. 本稿はその内容を再構成し発展させたものである. 第 3 節の議論は積分の考え方を使っているので厳密には積分を使わない証明とはいえないかもしれない.

2 平行六面体の体積

6 面の平行四辺形で構成されている空間図形を**平行六面体**という. すべての隣り合う面が直交して, したがって各面が長方形である場合には**直方体**になる. 平行六面体の体積を求める.

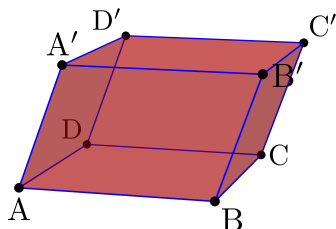


図 1 平行六面体

図 1 のような平行六面体の体積を V とす

る. 底面の平行四辺形 $ABCD$ の面積を S とし, 高さを h とすれば, 体積 V は

$$(2.1) \quad V = Sh$$

で与えられる. ただし高さとは底面 $ABCD$ と垂直な直線 l と面 $ABCD$ との交点を P , l と面 $A'B'C'D'$ との交点を P' とするときの PP' の長さである.

(2.1) は以下のように証明される. 必要ならば合同な平行六面体を同じ方向に何個かつなぎ合わせたもの (例えば面 $BCC'B'$ でつなぐ) を考えることによって, 線分 AB の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよい. このとき線分 AB の中点を M として, M を通り直線 AB と垂直な平面を H とする. 平面 H によって平行六面体を 2 つの部分に分割する. 面 $ADD'A'$ を含む部分を W_1 , 面 $BCC'B'$ を含む部分を W_2 とし, W_2 の面 $BCC'B'$ と W_1 の面 $ADD'A'$ が重なるように W_1 を直線 AB の方向に平行移動することにより新たな平行六面体が得られる. この新たに得られた平行六面体の底面の面積は S のままであり, 高さも h のままである. さらに底面の 1 つの辺 (直線 AB の一部) と側面 (もとの平行六面体を平面 H で切った切り口) は垂直である.

そこではじめから平行六面体の底面の辺 AB と側面 $ADD'A'$ は垂直, 辺 AB と側面 $BCC'B'$ は垂直であるとして (2.1) を証明すればよい. このとき面 $ABCD$ と $ABB'A'$ は長方形であり, 側面 $BCC'B'$ は平行四辺形である (図 2). はじめと同様に必要ならば合同

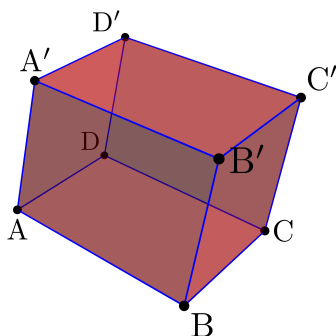


図2 2組の面が長方形である平行六面体

な平行六面体を直線 BC の方向に何個かつなぎ合わせたもの (面 $CDD'C'$ でつなぐ) を考えることによって, 線分 BC の長さは十分大きいとして体積の公式を証明すればよい. このとき線分 BC の中点を N として, N を通り直線 BC と垂直な平面を K とする. 平面 K によって平行六面体を2つの部分に分割する. 面 $ABB'A'$ を含む部分を U_1 , 面 $DCC'D'$ を含む部分を U_2 とし, U_2 の面 $DCC'D'$ と U_1 の面 $ABB'A'$ が重なるように U_1 を直線 BC の方向に平行移動することにより新たな平行六面体を得られる. この新たに得られた平行六面体は, 底面の面積が S , 高さが h の直方体である. よって体積は Sh である. 以上により (2.1) が証明された.

3 相似な空間図形の体積

一般に2つの空間図形 U, U' が相似であり, その相似比が $1:k$ ならば, 体積の比は $1:k^3$ である. これは次のように証明される.

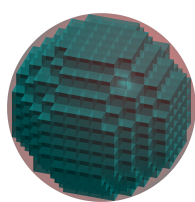


図3 球に含まれる立方体の和

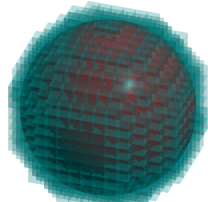


図4 球を含む立方体の和

空間図形 F の体積を $v(F)$ で表すことにする. P を U に含まれるような N 個の1辺 a の立方体からなる空間図形とし, Q を U を含むような M 個の1辺 a の立方体からなる空間図形とする (U が球のとき, P は図3, Q は図4のようなものになる). $P \subset U \subset Q$ より

$$(3.1) \quad v(P) \leq v(U) \leq v(Q)$$

が成り立つ. P, U, Q を k 倍することにより, 空間図形 P', U', Q' を得る. ここで $P' \subset U' \subset Q'$ であり, P' は N 個の1辺 ka の立方体からなる空間図形であり, Q' は M 個の1辺 a の立方体からなる空間図形である. $P' \subset U' \subset Q'$ より

$$v(P') \leq v(U') \leq v(Q')$$

が成り立つ.

$$v(P') = N(ka)^3 = k^3 Na^3 = k^3 v(P),$$

$$v(Q') = M(ka)^3 = k^3 Ma^3 = k^3 v(Q)$$

より

$$(3.2) \quad k^3 v(P) \leq v(U') \leq k^3 v(Q)$$

を得る. a を小さくすることにより (3.1) において $v(P), v(Q)$ はいくらでも $v(U)$ に近くできるから, (3.2) により $v(U') = k^3 v(U)$ が成り立つことがわかる.

4 三角錐の体積

前節において, 2つの空間図形 U, U' が相似であり, その相似比が $1:k$ ならば体積の比は $1:k^3$ であることを示した. 特に U を三角錐とし, U' を U を2倍にした三角錐とすれば, U' の体積 $v(U')$ は U の体積 $v(U)$ の $2^3 = 8$ 倍になる:

$$(4.1) \quad v(U') = 8v(U).$$

このことと平行六面体の体積の公式 (2.1) を用いて, 三角錐の体積の公式 (1.1) を証明する.

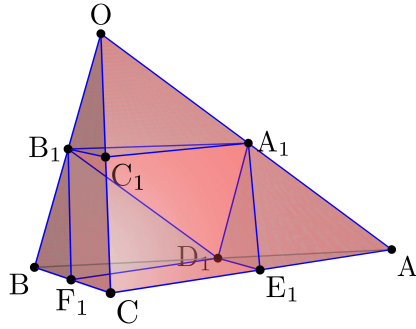


図5 三角錐の分割

三角錐 U' の頂点を O, A, B, C とし, U' の 6 つの辺 OA, OB, OC, AB, AC, BC の中点をそれぞれ $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ とする (図 5). このとき 3 つの三角錐 $OA_1B_1C_1, A_1AD_1E_1, B_1D_1BF_1$ はすべて U と合同である. 三角錐 U' からこの 3 つの三角錐を取り除いて得られる空間図形を W とする. W の体積は $5v(U)$ に等しい. 実際,

$$\begin{aligned} v(W) &= v(U') - 3v(U) = 8v(U) - 3v(U) \\ &= 5v(U). \end{aligned}$$

W は 3 つの平行四辺形の面と 4 つの三角形の面をもつ図 6 のような空間図形である.

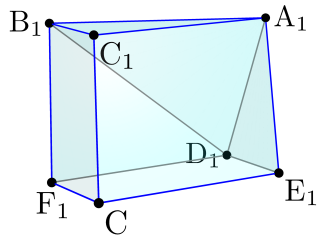


図6 空間図形 W

W の 3 つの平行四辺形の面 $A_1C_1CE_1, B_1F_1CC_1, F_1CE_1D_1$ のそれぞれを平行移動して得られる平行六面体を $\widetilde{W}$ とする. $\widetilde{W}$ は W に平面 $A_1B_1C_1$ 上の点 C'_1 を四角形 $A_1C'_1B_1C_1$ が平行四辺形になるようにとるこ

とによって得られる平行六面体である (図 7).

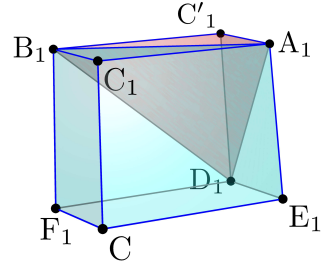


図7 平行六面体 $\widetilde{W}$ の W と $\widetilde{U}$ への分割

三角錐 $B_1D_1BF_1$ を U とし, 三角錐 $D_1B_1A_1C'_1$ を $\widetilde{U}$ とする. U と $\widetilde{U}$ が合同であることを示そう. そのためには第 7 節で述べる三角錐の合同条件により, 対応する 6 つの辺の長さがそれぞれ等しいことを示せばよい. まず四角形 $B_1C_1A_1C'_1$ は平行四辺形だからこれを対角線 B_1A_1 で 2 つの三角形 $\triangle A_1B_1C_1$ と $\triangle B_1A_1C'_1$ にわけば, この 2 つの三角形は合同である. すなわち $\triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle B_1A_1C'_1$ である. また三角錐 $OA_1B_1C_1$ は三角錐 $U = B_1D_1BF_1$ と合同だから, $\triangle A_1B_1C_1$ は $\triangle D_1BF_1$ と合同である. よって $\triangle D_1BF_1 \cong \triangle A_1B_1C_1 \cong \triangle B_1A_1C'_1$ である. したがって

$$D_1B = B_1A_1, D_1F_1 = B_1C'_1, BF_1 = A_1C'_1$$

が成り立つ. 四角形 $B_1F_1D_1C'_1$ は平行四辺形だから

$$B_1F_1 = D_1C'_1$$

である. また三角錐 $U = B_1D_1BF_1$ は三角錐 $A_1AD_1E_1$ と合同だから

$$B_1B = A_1D_1$$

である. $B_1D_1 = D_1B_1$ は自明である. 以上により三角錐 $U = B_1D_1BF_1$ と三角錐 $\widetilde{U} = D_1B_1A_1C'_1$ の対応する 6 つの辺の長さがそれ

ぞれ等しいことがいえた．ゆえに $U \equiv \tilde{U}$ である ($\tilde{U}$ は U の鏡映を平行移動と回転移動して得られるものである)．

$v(W) = 5v(U)$ であり，平行六面体 $\tilde{W}$ は W と $\tilde{U}$ からなるから

$$(4.2) \quad v(\tilde{W}) = v(W) + v(U) = 6v(U).$$

はじめに与えられた三角錐 $U' = OABC$ の底面 $\triangle ABC$ の面積を S とし，高さを h とすると，三角錐 $U = B_1D_1BF_1$ の底面 $\triangle D_1BF_1$ の面積は $\frac{1}{4}S$ であり，高さは $\frac{1}{2}h$ である．平行六面体 $\tilde{W}$ の底面 $F_1CE_1D_1$ の面積は $\triangle D_1BF_1$ の面積の 2 倍だから $\frac{1}{2}S$ であり，高さは $\frac{1}{2}h$ である．平行六面体の体積の公式 (2.1) より

$$v(\tilde{W}) = \frac{1}{2}S \times \frac{1}{2}h = \frac{1}{4}Sh$$

である．(4.2) より

$$v(U) = \frac{1}{6}v(\tilde{W}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4}Sh = \frac{1}{24}Sh$$

である．したがって三角錐 U' の体積は

$$v(U') = 8v(U) = 8 \times \frac{1}{24}Sh = \frac{1}{3}Sh$$

である．以上により三角錐の体積の公式 (1.1) が証明された．

5 一般の錐体の体積

一般に空間において，平面 H 上に面積 S をもつ図形 A があるとし，平面 H 上にない点 O をとって，点 O と A の点 P とを結んだ線分 OP 上のすべての点 Q からなる空間図形を錐 OA という (図 8)．またこのような空間図形を一般に**錐体**という．

$$OA = \{Q \mid Q \text{ は線分 } OP \text{ 上の点, } P \in A\}.$$

特に平面図形 A が多角形るとき，錐 OA を**多角錐**という．多角錐 OA の体積については，多角形 A をいくつかの三角形に分割する

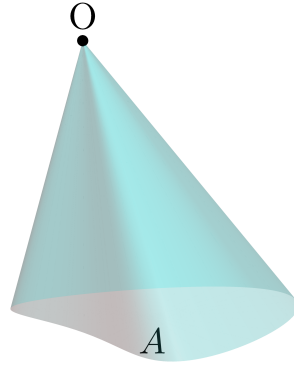


図 8 一般の錐体

ことにより三角錐の体積の公式から容易に公式 (1.1) が成り立つことがわかる．

一般の錐 OA の高さを h とする． h は O から平面 H へおろした垂線と H の交点を R としたときの距離 OR である． B, C を平面 H に含まれる多角形で $B \subset A \subset C$ となるものとする．このとき 3 つの錐 OB, OA, OC の間には包含関係 $OB \subset OA \subset OC$ が成り立つからそれらの体積について

$$v(OB) \leq v(OA) \leq v(OC)$$

が成り立つ． B, C の面積を $s(B), s(C)$ で表せば，多角錐 OB の高さも多角錐 OC の高さも h だから $v(OB) = \frac{1}{3}s(B)h$ ， $v(OC) = \frac{1}{3}s(C)h$ である．したがって

$$(5.1) \quad \frac{1}{3}s(B)h \leq v(OA) \leq \frac{1}{3}s(C)h$$

が成り立つ．多角形 B の面積 $s(B)$ ，多角形 C の面積 $s(C)$ は A の面積 S にいくらでも近くとれるから，不等式 (5.1) から錐 OA の体積 $v(OA)$ は $\frac{1}{3}Sh$ に等しくなければならない．以上により一般の錐体に対しても公式 (1.1) が成り立つことが証明された．

6 空間における合同変換

空間における 2 点 P, Q の距離を $d(P, Q)$ で表す．空間上の変換 f が**合同変換**であると

は, 任意の 2 点 P, Q に対して

$$d(f(P), f(Q)) = d(P, Q)$$

が成り立つことをいう.

すべての点 P に対して P 自身を対応させる恒等変換を id で表せば, id は合同変換である. f, g が合同変換ならば合成変換 $f \circ g$ も合同変換である. 平行移動, 回転移動 (直線を回転軸とする), 鏡映 (平面に関する対称移動) は合同変換である. これらはどれも明らかに逆変換をもち, 平行移動, 回転移動, 鏡映の逆変換はそれぞれ平行移動, 回転移動, 鏡映である. 空間上の任意の合同変換 f は高々 4 個の鏡映の合成として表されることが知られている ([1, 定理 1.7]).

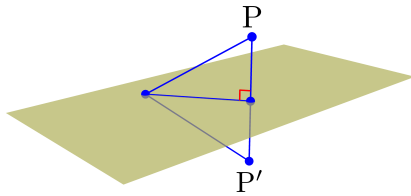


図 9 平面に関する鏡映

球面の交わりに関して次の 2 つの事実 (S1), (S2) を示しておく. (S1) は (S2) を示すときに使い, (S2) は次節において用いる:

(S1) O_1, O_2 を空間における異なる 2 点とする. O_i を中心とする球面 S_i ($i = 1, 2$) について, $S_1 \cap S_2$ が 2 個以上の点を含むならば $S_1 \cap S_2$ は円である. 円 $S_1 \cap S_2$ を含む平面は中心を通る直線 O_1O_2 と垂直である. $S_1 \cap S_2$ が 1 点 P ならば, P は直線 O_1O_2 上の点であり, 2 つの球面は点 P で接している.

(S2) A_1, A_2, A_3 を空間における同一直線上にない 3 点とし, A_1, A_2, A_3 を含む平面を H とする. A_i を中心とする球面 S_i ($i = 1, 2, 3$) について, $S_1 \cap S_2 \cap S_3 \neq \emptyset$ ならば $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 1 点または 2 点である. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 2 点 P_1, P'_1 の場合は P_1 と P'_1 は平面 H に関し

て対称である. $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P の場合は, P は平面 H 上にある.

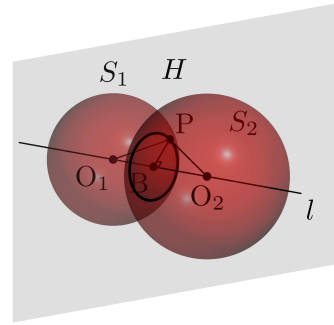


図 10 球面と球面の交わりは円

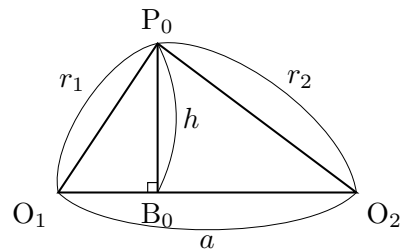


図 11 $\triangle P_0O_1O_2$

(S1) の証明. 直線 O_1O_2 を l で表し, $O_1O_2 = a$ とおく. $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$ とし, 点 $P_0 \in S_1 \cap S_2$ をとる. 点 P_0 から直線 l におろした垂線と l の交点を B_0 とする. $h_0 = B_0P_0$ とおく. $\triangle P_0O_1O_2$ について考える. 図 11 のようにこの三角形の三辺は $O_1O_2 = a$, $O_1P_0 = r_1$, $O_2P_0 = r_2$ であり, P_0 のとり方によらずに一定である. したがって O_1O_2 を底辺としたときの高さ h も一定である. さらに点 B_0 も P_0 のとり方によらずに一定である. したがって点 B_0 を通り直線 $l = O_1O_2$ と垂直な平面を H_0 とすれば, $P_0 \in H_0$ であり, H_0 も P_0 のとり方によらずに一定である. いま $S_1 \cap S_2 \supsetneq \{P_0\}$ とし点 $P_1 \in S_1 \cap S_2$, $P_1 \neq P_0$ をとる. 上に述べたことにより $P_1 \in H_0$ である. P_0, P_1 は $S_1 \cap H_0$ の異なる 2 点だから $S_1 \cap H_0$ は B_0 を中心とする平面 H_0 上の半径 h の円 C であ

る. 同様に $S_2 \cap H_0 = C$ である. 以上により $S_1 \cap S_2 \subset C = (S_1 \cap H_0) \cap (S_2 \cap H_0) \subset S_1 \cap S_2$ となって, $S_1 \cap S_2 = C$ を得る.

次に $S_1 \cap S_2$ が 1 点 P_0 であるとする. このとき $P_0 = B_0$ は直線 $l = O_1 O_2$ 上の点である. P_0 において直線 l と垂直に交わる平面を H とすれば, S_1, S_2 とともに P_0 において平面 H と接している.

(S2) の証明. S_i ($i = 1, 2, 3$) は平面 H に関して対称だから, $P \in S_1 \cap S_2 \cap S_3, P \notin H$ ならば H に関して P と対称な点 P' も $P' \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ を満たす. したがって $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上の点からなる. ゆえに $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ が 1 点 P ならば $P \in H$ である.

$S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は 2 点以上からなるとする. $C_{12} = S_1 \cap S_2$ とおくと (S1) より C_{12} は円であり, C_{12} を含む平面 H_{12} は直線 $A_1 A_2$ と垂直である. 同様に $C_{13} = S_1 \cap S_3$ とおくと C_{13} は円であり, C_{13} を含む平面 H_{13} は直線 $A_1 A_3$ と垂直である. A_1, A_2, A_3 は同一直線上にないから H_{12} と H_{13} は異なる平面であり, H_{12} と H_{13} は平行ではない. よって $m = H_{12} \cap H_{13}$ は直線である. $C_{12} \subset H_{12}, C_{13} \subset H_{13}$ より $S_1 \cap S_2 \cap S_3 = C_{12} \cap C_{13} \subset H_{12} \cap H_{13} = m$, よって

$$(6.1) \quad S_1 \cap S_2 \cap S_3 \subset C_{12} \cap m.$$

C_{12} と m は平面 H_{12} 上の円と直線だからその交点は高々 2 点である. (6.1) より $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ はちょうど 2 点 P, Q からなる. もし P, Q がともに H 上にあるとすれば, $A_i P = A_i Q$ ($i = 1, 2, 3$) より平面 H 上の 3 つの円 $H \cap S_i$ の中心 A_i は PQ の垂直二等分線上にあることになり同一直線上にないという仮定に矛盾する. ゆえに P, Q の少なくとも一方は H 上にない. P が H 上にないとしてよい. このとき H に関する P の対称点 P' も $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ 上にあるから, $Q = P'$ でなければならない.

7 三角錐の合同条件

三角錐の合同条件 空間における 2 つの三角錐 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と $B_1 B_2 B_3 B_4$ について, 6 つの辺の長さが等しい, すなわち

$$A_i A_j = B_i B_j \quad (1 \leq i < j \leq 4)$$

ならば, この 2 つの三角錐は合同である.

これは次のように証明される. 適当な合同変換により, 面 $A_1 A_2 A_3$ と面 $B_1 B_2 B_3$ が同じ平面 H 上にあるとしてよい. $\triangle A_1 A_2 A_3$ と $\triangle B_1 B_2 B_3$ は合同だから適当な合同変換により $\triangle B_1 B_2 B_3$ を $\triangle A_1 A_2 A_3$ に重ね合わせることができる. すなわち $B_1 = A_1, B_2 = A_2, B_3 = A_3$ であるとしてよい. このとき $A_i A_4 = A_i B_4$ ($i = 1, 2, 3$) である. $r_i = A_i A_4$ ($i = 1, 2, 3$) とおいて, A_i を中心とする半径 r_i の球面を S_i とする:

$$S_i = \{P \mid A_i P = r_i\} \quad (i = 1, 2, 3).$$

$A_4, B_4 \in S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は平面 H 上にないから前節の (S2) により $S_1 \cap S_2 \cap S_3$ は H に関して対称な 2 点からなる. ゆえに $B_4 = A_4$ であるかまたは $B_4 = A'_4$ である. ここで A'_4 は A_4 と H に関して対称な点である. 前者の場合は 2 つの三角錐は一致し, 後者の場合は一方の三角錐を H に関する鏡映でうつせばもう一方に一致する. ゆえに三角錐 $A_1 A_2 A_3 A_4$ と三角錐 $B_1 B_2 B_3 B_4$ は合同である.

参考文献

- [1] P. M. H. ウィルソン, 曲空間の幾何学, 朝倉書店, 2009.