上越数学教育研究，第 37 号，上越教育大学数学教室，2022 年，pp. 1-12

小学校第５学年の分数の授業と数への移行

ー経験豊かな教師による授業中の手立てを参考にー

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

分数を導入するには、整数の順序対の集合にある種の同値関係を入れるという仕方(例えば瀬山 (1996))や、整数のとられた数直線で区間を等分してできる点の集まりとして導入する仕方(例えば Wu (2016))などが考えられる。しかしわが国の教科書では、長さや液量といった連続量を参照し、単位となる量よりも小さい量の表現として分数を導入する。また量に対する操作やその操作の結果に基づいて分数の基本的な性質や分数の演算の仕方などを構成していく。

量を参照しながら分数を学習することは、一方において数自体を扱う代わりに、その数が表現する長さや液量といった量を扱うことになるので、扱う対象を図示して視覚化したり、テープや色水などにより具体物として提示することで、実際に操作を施し、その結果を観察したりすることも可能となる。

ただし、そこで扱われているものは基本的には量であって数ではない。しかし他方で、数の計算に代表されるように、数が量から独立して操作の対象となり、それ自身の性質などを探究し議論する対象となることも求められる。そこで、学習が進むにつれ、分数が、量に関するパターンを記述するものから、それ自身が考察や探究の対象へと移行する必要が出てくる(布川, 2016, 2019)。

年長の学習者の場合には、こうした移行を教師が明確に宣言し、新たな考察の対象の創出を明示化することも考えられる (Dörfler,, 2002)。しかし分数が基本的には量の間の割合や関係を示すものであり(布川, 2022)、分数自身を考察の対象とすることは、割合や関係を対象化することを意味するとすれば、その対象化を小学生に対して宣言することで移行を図ることは容易ではないと推察される。したがって、分数自身を対象として語り、分数自身の性質や関係、あるいは分数に対する操作などを探究したり、その性質や関係、操作を分数自身に基づいて正当化したりするようなディスコースを教師が構成し、そこに学習者を招き入れ、学習者が徐々にそのディスコースに参加できるようにすることが、１つの方策として考えられる(*cf*. Sfard, 2007, 2008)。ただ、分数の学習が困難であるとの考えからか教科書の分数に対する扱いでは、量から離れ数自身を対象として扱うようなディスコースへの移行が、整数の場合に比べて遅れがちになる傾向も見受けられる (布川, 2021b)。

ところで、布川 (2021a)は経験豊かな教師による小学校 3 年の分数の授業を分析し、教科書に基本的に依拠した授業であっても、教師の語り方などにより、分数を数として構成するというディスコースを授業の中で構成していることを示している。このように、教科書を基本としながらも、教師の語り方や説明の仕方などにより、分数を対象化するディスコースを生み出すようすを検討することは、上述のような移行を緩やかに可能にするため

の、現実的な手立てを示唆してくれると期待される。

　そこで本稿では、経験豊かな教師による小学校 5 年での分数の授業を取り上げ、こうした手立てに対する示唆をさらに得ることを目的とする。

２．対象とする授業

　授業は小学校 5 年の 1 クラスで行われた。授業者は国語教育を専門とする教師で、教職 14 年目であった。その授業を著者が参観し、ビデオカメラを用いて記録した。授業後に気づいたことをメールで知らせるなどしたが、授業は全て授業者により構想された。

　授業では教科書の「分数のたし算とひき算」と「分数と小数・整数」の単元が扱われた。著者が参観を始めたのは前者の単元の第 5 時からであり、後者の単元の終了まで全 8 時間が記録された。ただし以下では参観を開始した授業を第 1 時として記述していく。

３．授業の概要

(1) 第 1 時：異分母分数の加法 (約 60 分)

「1/3 L と 1/2 L のジュース 合わせて何 L?」[1)] という問題が扱われた。最初に児童から通分するとたし算ができそうだとの考えを出させた後、各自で計算をした。答えが 5/6 L になることを確認した後、求め方を確認すると、分母の最小公倍数 6 で通分する考え方が発表された。教師は 2/6 を指して分子がなぜ 2 になるかも問い、指名された子は「分母を変えて大きさ同じ分数にするには分子を変えなければいけないので、6÷3 したら 2 なので、3 に 2 をかけて 6 にしているわけで、1 にも 2 をかけたら同じ大きさになる、なので 2/6」と説明した。これらは図 1 のように板書としてまとめられた。

　続いて 3/10+1/6 を考えたが、通分を確認した後で教師は 9/30+5/30 を「14/60」とした人がいないかと問いかけ、分母はたさないこと

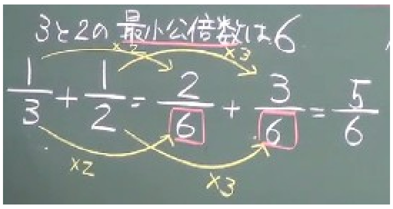

図１：加法の計算の仕方

を確認した。次の 1/3+5/6 では子どもは自然に答えの仮分数を帯分数に直していた。答えの確認の際に教師は「仮分数で答えてもらっても帯分数で答えてもらっても、特に問題に条件がなければどっちでもいい」としながらも、「仮分数と帯分数比べたときに帯分数のよさも知っておいて欲しい」として、帯分数のよさを近くの人と話し合わせた。児童からは「分数の大きさが分かりやすい、１って書いてあると１越えてるんだなってことがわかりやすい」との考えが出された。教師も帯分数だと「１とちょっとってことはわかる」と補足した。

　1(1/2)+1(1/6)の計算を行った際も、帯分数のままの計算の仕方と仮分数に直した計算の仕方を発表させた。さらに 1(1/2)+1(2/3)を扱った際には、帯分数のまま計算して 2(7/6) という答えを示し、7/6 を 1(1/6)と直す部分に注意を向けた。教科書の練習問題を行い授業を終えた。

(2) 第 2 時：真分数どうしの減法 (約 20 分)

　最初に 1/2+1/3 を考え、通分したことを確認した。次に「5/8 L と 3/4 L のちがいは何 L？」を最初は個人で考えた。少しして教師は 5/8–3/4 と「書いている人いました」と伝えた。その計算の続きを書いて 5/8 から 6/8 は引けないことに注意を促して児童から「違いを求めるから大っきい方から引く」との意見を引きだし、「まず比べなきゃいけない」と説明した。さらに式の途中で順序を入れ換えた人にも触れ、途中で入れ換えないよう注意をした。

　教科書の練習問題に取り組み、最後に児童に答えを板書させ、確認して授業を終えた。

(3) 第 3 時：帯分数を含む減法 (約 60 分)
「ジュース 2(1/2) L のうち 1(1/6) L 飲んだ時の残りの量は？」を各自で少し考えた後、全体で確認した。その際、児童から「通分します」との考えを出させたり、約分の際には「何で割ってる」かを全体に問うたりした。これらを図 2 の板書にまとめた。

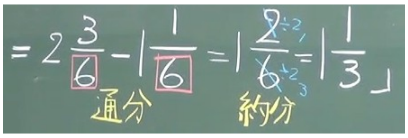

図２：帯分数どうしのひき算

教師は「前回と違うのは何かな」と問い、児童から「整数があること」、整数部分は「そのままでいい」こと、分数は分数どうしで計算することを出させた。そして次のように板書した：「◎整数は整数と計算　◎分数は分数と計算」。

1(5/6) L 飲んだ場合を考え、まず「さっきより飲んでいる」ことを確認した。全体の確認では、通分をしても 3/6 から 5/6 が引けないとの意見が出された。教師は「引けない場合どうするか」と問い、「引けない場合は、2 と 3/6 を 1 と 9/6 に変えて」という考えを出させた。この考えが「わからない」という子もいたので、教師は整数部分を囲み「これさ数字変わってるよね、2 からこれ 1 になってるよね」と確認した。さらに「2 からこれ繰り下げたから、これ 6/6 だ」と説明し、「整数からくり下げる」と板書した。答えを確認した後、仮分数に直す計算の仕方も発表させ、続けて教科書の練習問題を行った。

答えの確認の中で、通分をする際に分子にも分母にかけたのと同じ数をかける必要があることを、児童とのやりとりを通して説明し、図 3 のように板書でまとめた。

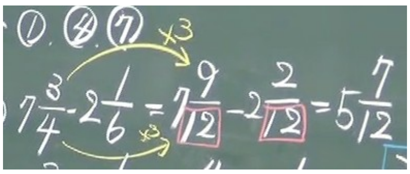

図３：減法での通分の確認

授業後半では 1/2+2/3–1/4 といった 3 つの分数の計算を扱い、3 数の分母を 12 にそろえる考え、2/3–1/4 を先にする考え、最初 2 項を分母 6 で通分する考えが出された。その後、教科書の問いを考え、授業を終えた。

(4) 第 4 時：分数による商の表現 (約 20 分)
「2 L のジュースを□人で分ける。1 人分は何 L？」と板書し、まず 1 人と 2 人の時に何 L かを確認し、それから 2÷2=1、2÷1=2 の順に式も確認した。次に 3 人で分けるとして「2÷3=」と板書し、子どもたちに計算させた。0.666...と求めた子が多く見られた。教師も「無限のループです」としたまま 4 人と 5 人の場合に進み、2÷4=0.5、2÷5=0.4 を全体で確認した後、「分ける人数が多くなると答えはどんどん小さくなる」と補足した。児童からも 100 人で分けたらといった応答があった。ここで改めて「2÷3=0.66...」を取り上げ、これを「分数で表せないかなって考えるわけ」として、図 4 をかいた。

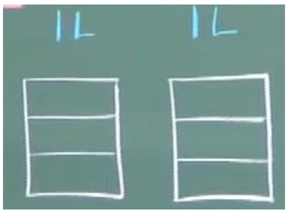

図４：商の説明

「1 L 3 人で分けたのね、1 人あたりここね」と言って左の下のマスを塗り「こっちも 3 人で分けるから」と言って右の下のマスを塗り、「3 つで分けたうちの 1 つ分もらう、3 つで分けたうちの 1 つ分もらう」と説明した。左の四角を押さえながら「これ分数で表すと何」と問うと、児童が「1/3 」と答え、教師は左側の四角の下に「1/3」と板書した。「こっちも 1/3 だね」と言い、教師は右側の四角の下にも「1/3」と板書した。「1 人分っていくつになる」と問うと、ある子から「2/3」という声があり、教師は「これとこれ、単純に足せばいいよね」と言い、先ほどの 1/3 の間に記号を入れて「1/3+1/3=2/3」とした。

次に四角を4等分した図を2つかいて先の2÷4=0.5と矢印で結び、「1/4 +1/4=2/4」と板書した。「ということは」として「2÷4=2/4」と板書し、「小数で今計算しましたけど、これ分数で表すこともできるよってのをやってますね」と補足した。2÷3=2/3と2÷4=2/4を見て「気づくことない」かと問い、さらに2÷5が2/5となることを確認した上で、「どんなことが言えますか」と問うた。児童の説明をもとに「○÷△＝○／△」となることを確認し、これを板書した。最後に「整数と整数わり算して、場合によって小数になるんだけど、その小数で表すやつを分数でね、表すことできるんだよね」と補足した。

(5) 第5時：分数倍 (約30分)

4÷□＝4/9、□÷□＝3/7の□を求める課題をした後、赤(4m)と青(2m)のテープが白(3m)の何倍かを考える問題を扱った。「赤は白の何倍？」かを各自で考えている途中で、教師は「白2倍したら6 mになる、だから2倍より小っちゃい」「1倍だったら、そのまま、だから1倍よりも大きい、2倍よりも小っちゃい」ことを確認した。すると児童から「赤と青なら簡単」との意見が出されたので、「赤は青の何倍？」をまず考えた。ある子に2倍であると答えさせた後、教師が「どうやって考えたか」を問うと、別の子が「4は2が2個だから」と説明した。式を確認すると、4÷2とともに2×2も出された。

ここで4 mは3 mの何倍かに戻り、隣同士で考え方を説明させた後、全体で式が4÷3=4/3=1(1/3)となり、1(1/3) 倍であることが確認された。別の子から1.333...も出された。

青は白の何倍かを考えた際も、教師は「青は白より小っちゃい、短い」「普通倍とかっていうと大きくなるイメージあるよね、倍って、小っちゃくなる」と補足した。2÷3=2/3が確認されたが、教師は0.666...の考えも出させ、2/3倍の下に板書した。「何倍かを表す数も分数を使うことができる」と板書し、さらに「倍っていうとさ、増えていくやっぱイメージあるけどね、小さくなるっていう場合もあるんだね」と改めて補足した。教科書の練習問題に取り組み、授業を終えた。

(6) 第6時：分数から小数への変換(約30分)

「2 mのテープを5等分すると1本分の長さは？」を考え、2÷5=0.4および2÷5=2/5となることが確認された。教師は「これこうして書いていいい」と尋ねながら「2÷5=2/5=0.4」と板書した。児童らは「あ、いい」「同じだからいいんだよ」「2/5と0.4は等しいですから」と応じたが、教師は2÷5=0.4と2÷5=2/5に書き直した。さらに「2/5=0.4」と黄色で板書し、「この感覚ある、大丈夫」と尋ねると、児童らは「はい」「大丈夫です」と応じた。教師が「0.4っていくつ」と問うと、ある子が「0.4って1の10個あるうちの4だから4/10で、約分すると2/5になる」と説明し、教師は「4/10=2/5」と板書した。教師は0.1が1/10であることを児童と確認した後、0.7、0.01、0.11が7/10、1/100、11/100になることも確認した。ここで教師は「分数はこれね小数で表すことができますよ」と述べた。2/5を0.4にするには「何すればいいんだっけ」と問うと、ある子が「小数を分数に直してからの約分」と答えた。教師はそれが0.4を2/5に直す時だとして、2/5を0.4に直す時を改めて尋ねると、「分母を10にして小数に直す」「通分の一つ前」との考えが出された。「その数で10が作れなかった場合」はどうするかと疑問が出され、1/4を小数にすることが話題とされた。近くの人と相談をした後、全体で確認をすると、最初の子は2.5と答え、次の子は0.25と答えた。教師は「1/4のイメージしてみて」と言い、ある子が1/4を「1個のものを4個に分けたうちの1」と説明すると、1を示す線分を板書し、4等分する縦線を入れて1より大きくなるか小さくなるかを問うた。1より小さくなること、したがって2.5より小さいことを確認し、答えは0.25とされた。や

り方として「1/4 を式に直すと 1÷4」とする考えが発表され、教師は「これ[1/4]を式に戻してあげればいい」「習ったやり方でやれば 1/4 は 1÷4 のこと、同じだよってこと」とまとめた。

別の子から「1/4 の 4 を 10 にするのは不可能なんで、4 を 100 にします、4×25 で 100 だから、1 も 25 をかけると 25/100 になって、0.25 になる」という考えも発表された。

その後、教科書の練習問題に移り、全体で答えを確認して授業を終えた。

(7) 第 7 時：小数から分数への変換 (約 20 分)

次の 5 つの数を分数に直すことに取り組んだ：0.7、0.67、4、12、3.14。全体の確認で、教師は 0.7=7/10 などと等号でつなぐ形で板書した。4=4/1 が確認された後、教師は分母に 2 だけ書いて「こうなったら表せる」かを問うた。児童らが 8 と答えると、教師は「こんなことしないけどね、今逆流みたいな感じ」と補足して、さらに分母が 3、4、5、6、7 等でも表せるかと尋ねた。児童からは 1200/300 や 1 億分の 4 億も出された。3.14 については 3(7/50)と 314/100 が出されたが、教師は後者を帯分数に直すと前者になることを確認し、「すごいね、今までのいろんなものが合わさっている」と補足した。

次に図 5 のような数直線で、□に入る数を考えた。

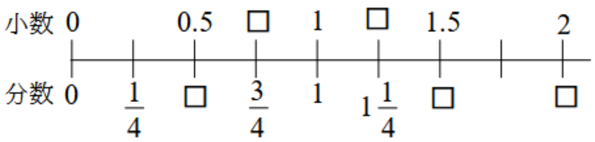

図５：小数と分数の対応

全体の確認の際、教師は一目盛りが 1/4 だと確認して 1/4 の「隣に何が来るか」と問い、2/4 になることを確認した。さらに 1 の「続きいくよ」として 1(1/4)を読み、「じゃここ何」と 1.5 の下の□の数を問うた。児童が 1(2/4)と答えると、1(3/4)についても確認をして数直線に記入した。2 の下について 1(4/4)と 8/4 が出されると、それらが「一緒だってことだよね」と補足した。0.75 が確認された後、1/4=0.25 に基づき 0.25 ずつたすことで他の数も確認し、1.75 にも触れた。対応する数を指しながら「上の数と下の数と同じだからね、大きさ」「0.75 って 3/4 と一緒なんだなあとか、感覚的にちょっと覚えておいて下さい」と補足した。

(8) 第 8 時：小数・分数と数直線 (約 25 分)

4/5、0.6、1(7/20)、2、1.25 の 5 つの数と、0 から 2 まで 0.1 ごとに区切った数直線を板書し、上の数が数直線の「どこにあるかなっての矢印で表して」と問うた。直後に教師が、2 は「もう分かりました」として数直線に記入した。その上で、この中で「一番簡単なのどれ」と問うと、児童から 0.6 が出されたので、0.6 を数直線上にとらせて確認した。次に簡単なのはどれかと問うと、4/5 と 1.25 の声があがった。教師は 1.25 を示せる人を尋ね、ある子に黒板の数直線に記入させた。そして、教師は 1 から「2 つ目盛りいって 3 つはいかない」「1.2 と 1.3 の間ね」と言って確認をした。さらに「これ目盛りなかったね、なかったけどこの間ってことはわかるから」と補足した。

続いて教師は 4/5 を話題にするが、最初に黒板に出てきた子はそれを 0.3 の位置にとり、次の子は 0.2 の位置にとった。三番目の子が 0.8 の位置に 4/5 をとると、教師は「全然場所が違うくなってるんだけど、何が起きてるんだ」と言うと、ある子が 5×2=10 と説明を始めた。教師がこれを受け、「4/5 をこういう形にしたってこと」として 4/5=8/10 と板書すると、児童らは「わかる」「予想当たった」と応じた。教師が「これをするとなぜわかるの」と問うと、ある子が「小数にした方が一番わかりやすい」「0.1 って 1/10 じゃないですか、だから、分数を小数に直すには 10 が一番手っ取り早いと思う、5 は倍にすると 10 なので、じゃあ通分しちゃおうってことで、

8/10 にする」と説明した。教師は先の板書に 0.8 を書き加えて「4/5=8/10=0.8」とし、さらに数直線の 0 から 1 を手で押さえて「10 で考えないとダメだと」と補足した。

4/5 から一気に 0.8 に「跳んだ」人も尋ねて、4÷5 をして 0.8 とする考え方も確認した。

最後に 1(7/20)を考えたが、黒板に出た子は 1.35 の位置に記入した。教師は一つの目印として、帯分数の 1 があるので、1 より大きく、数直線の 1 より右側になることを説明した。別の子は「1 と 2 の間に、点点点点って」と言い、黒板で 1 から 2 の各目盛りの間に線を加えた。そして、その目盛りを 7 まで数えて「で 7/20」と説明した。教師は「計算で行けますよって人」を尋ね、27÷20 を計算して 1.35 とする考えも発表させた。教師は 1.3 と 1.4 の間としてその位置を確認した。

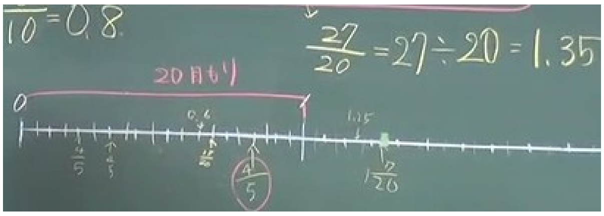

図６：数を数直線上にとる課題

追加で 13/20 を考えた。児童らは最初困惑していたが、やがて「わかっちゃった」という声が出てきた。教師は 1 より大きいか小さいかを問い、最初の数直線にある 20 目盛りの 13 番目をとると 1 を越えるので間違いであることを説明し、「1 より小さいっていう見当をつけるんだよ」と補足した。黒板に出た子は 0 から 1 の目盛りの間に線を引き、13 番目の目盛りに位置づけた。他の児童らはこれを「0.05 目盛り」と意味づけた。教師は 13÷20 で見出す方法も確認して 0.65 とした。

４．数の対象化につながる手立て

(1) 同値な分数に基づく承認

分数の加法、減法の中で通分が行われた際、教師は、例えば第 1 時で図 1 のように、分子と分母に同じ数をかけることを矢印で示す形で板書をしていた。

教科書ではこうした矢印を、単元の最初で同じ大きさの分数を学習する際にはつけているが、通分の学習以降ではつけていない。つまり、教師は加法の学習の際に、矢印を補って板書を行っていたことになる。

さらに発表した児童が「通分してたす」と説明すると、教師は「もうちょっと具体的に」と、より詳しい説明を求めていた。そのため次の子は 3 と 2 は最小公倍数を 6 と求めると説明し、その次の子は最小公倍数が 6 だから 1/3 は 2/6 になり、1/2 は 3/6 になると説明した。教師はさらに 2/6 ではなぜ分子が 2 になるのかを問い、児童から次のような説明を引き出した：「分母を変えて大きさ同じ分数にするには分子を変えなければいけないので、6÷3 したら 2 なので、3 に 2 をかけて 6 にしているわけで、1 にも 2 をかけたら同じ大きさになる、なので 2/6」。加法や減法の学習に入ってはいるが、分子と分母に同じ数をかけると「大きさ同じ分数」になるという「分数の基本性質」(Davydov & Tsvetkovich, 1991) が改めて確認され、それに基づき計算の仕方が承認されていた。

確かに通分の仕方はこれ以前に学習されている内容である。しかし、加法を学習する時間において、1/12+5/8=2/24+3/24=5/24 とした子、つまり 5/8 の分母を 24 にする際に、元の分子を 3 倍するのではなく、分母を 24 にする時に 3 倍したので、その 3 を分子にすると考えた子がいたことを考慮すると、大きさの等しい同値な分数について繰り返し扱っていくことは必要なことと考えられる。また同値な分数がいくつも存在するという性質は「まだ分数が数としての理解が確実でない子どもたちには違和感もあり、理解しにくい」(吉田, 2010, p. 35)との指摘があるとすれば、なおさらである。さらに、この児童に教えていた隣の子が「8 は 24 で何倍する、3 倍だからゴサン？」と計算の手続きに焦点を当てて説明し

ていたことを考慮すると、計算ができる子に対しても、通分を支える同値な分数というアイデアに基づいて計算の仕方を正当化していくことは、重要なことと考えられる。

第3時の後半でも教師は分子に対する操作に注意を向け、ある子が「分子にもかけなきゃいけない」と応じると「こっち[分母]に夢中になって」それを忘れて「そのまま[元の分子] 3とかそのまま1って書いちゃうとダメなの、分数の大きさ変わっちゃうから」と、ここでも同値な分数の考えに基づいた説明を行った。そして図1と同様に分子どうし、分母どうしを結ぶ矢印と「×3」を書いた。また第7時で1/4を小数に表す際に、子どもから分母を100にして25/100と直すことが発表され、それを板書をする時にも、教師は分子の1と25や分母4と100を矢印で結び、その脇に「×25」と明記した。

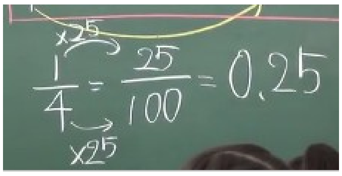

図7：分数から小数への変換

約分の際も、板書の式ではわる数を分母と分子の横に書くようすが見られた。例えば第3時で帯分数どうしのひき算を学習した際も、図2のような板書が行われた。また板書に先立ち、教師は約分の箇所について「これ何でわってる」と問い、児童に答えさせていた。つまり減法の学習が進んだこの段階でも、分子と分母を同じ数でわるという分数の大きさを変えない操作を、明示的に示していたと言える。第3時の終わりでも15/24を約分する部分では、板書の際に「÷3」を書き添えていた。

同値な分数をていねいに扱い続けることは、分数自身への操作をさらに促した。第7時で小数や整数を分数に直すことを扱った際、4=4/1とした後で、教師は分母が2や3だったらどうなるかを問いかけ、それらの結果を「4=4/1=8/2=12/3」と板書し、さらに分母が4や「5とか6とか7でも表せる」とした。すると児童から「じゃ16/4」「20/5」「92/23と思う」「1200/300」「1億分の4億」との考えが出された。ここでは「分数の基本性質」がより意識的に用いられている。吉田 (2010)が児童には理解が難しいとする同値な分数がいくつも存在するという性質に基づく推論や語り方を、児童が自発的に行うようになってきていたと考えることができる。

(2) 量を用いない場面への変更と数のトピック化

真分数どうしの加法の後で帯分数どうしの加法を学習する際、教科書では改めて重さの場面で問題を提示している。しかし今回の授業では現実的な場面を用いず、1(1/2)+1(1/6)という加法だけを提示した。また教科書では折り紙のような図を用いて、整数部分と分数部分を別に加える考え方を中心に2問を続けて説明し、その後でそれぞれを仮分数に直して計算する問いを設定している。今回の授業ではそうした図を提示しなかったこともあり、1(1/2)+1(1/6)を考える中で帯分数のまま計算する方法と仮分数に直して計算する方法の双方が現れた。教師は仮分数に直した計算で答えを板書した後、「たどりつきましたね」「どっちでやっても答えは同じですよね」と言い、帯分数のまま計算した場合と答えが一致することを明確にした。ここでは、1(1/2)が1+1/2や3/2であるという既習の分数の性質等により計算の仕方が考案され、またそうした2つの計算の仕方で答えが一致することが、答えの妥当性を高めていたと考えられる。

帯分数の分数部分の和が1を越える加法1(1/2)+1(2/3)も、重さなどの現実的な場面や折り紙のような図も伴わずに提示された。計算の仕方の確認では、一度2(7/6)で終わりにするように見せることで、7/6を1(1/6)に直す部分に注意を向け、子どもから次のような説明を引き出していた：「6/6は1なので、7か

ら 6 を引くと 1 余る」。さらに教師は「7/6 の中には 6/6 と 1/6 がある」と補足した。つまり“数の分解・合成”に相当するような分数に関わる事実に基づいて、計算の仕方を正当化していたと言えよう。

第 3 時の帯分数どうしの減法においても、教師は教科書にある図は提示せずに、計算の仕方を考えさせていた。その代わりに教師は第 2 時の真分数どうしの減法との違いを問い、児童から「整数があること」との意見が出ると「整数はどうする」と問うて、帯分数が整数部分と真分数の部分から構成されていることを意識させた。それにより、計算の仕方も、整数部分は「そのままでいい」し、分数は分数どうしで計算すればよいとして説明がなされた。「◎整数は整数と計算　◎分数は分数と計算」というまとめは、数の構成に基づくものと言えよう。

2(1/2)−1(5/6)を考えた際には、通分して 2(3/6)−1(5/6)とすると、分数部分どうしのひき算ができなくなることが話題となった。ある子が「引けない場合は、2 と 3/6 を 1 と 9/6 に変えて」と説明した場面で、その子がさらに「6/6 は 1 だから」と補足すると、教師は「2 からこれ繰り下げたから」と言い換えた。つまり、分数の計算の仕方を、整数のひき算で学習した、繰り下がりという数の構成に基づく考え方により意味づけたことになる。

第 4 時で商を分数で表すことを学習した際には教科書と同様、2 L を何人かで分けるという場面を提示した。ただし、教科書では 2 L を 3 人で分ける場合の結果を分数で表した後は、3 m のひもを等分するという場面に移行し、長さと数直線を結び付けているのに対し、授業では 2 L の場面で 4 等分や 5 等分した場合についても商を分数で表し、それらを観察することでわり算とその商である分数との関係を見出していった。そのため、2÷4 や 2÷5 の商は 0.5 や 0.4 と小数で表されるとともに、分数でも表されることとなり、小数と分数との等しい関係が自然に表れることとなった。実際、教師は途中で「小数で今計算しましたけど、これ分数で表すこともできるよってのをやってますね」と補足し、小数と分数とが同じ商を表すことを強調した。またこの時間の最後にも「整数と整数わり算して、場合によって小数になるんだけど、その小数で表すやつを分数でね、表すことできるんだよね」とまとめていた。

また図 4 の液量の図に関わり説明をする際、教科書のようにこれを 1 L の正方形の中に集めたり(図 8)、1/3 L の 2 つ分として説明したりするのではなく、一人分も L を付けずに 1/3 とだけ書き、それを併せることは「単純にたせばいいよね」として「1/3+1/3=2/3」と 3 年で学習した分数の加法に帰着して 2/3 を求めた。液量の操作よりも数の計算に帰着している点で、液量の場面を用いながら、数の操作に基づいた推論を行ったと言えよう。

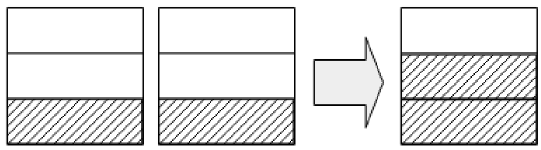

図８：量の操作による説明

第 8 時でいくつかの分数と小数を数直線上に書き入れる課題に取り組んだが、教師は最初に「大体これここだなって」見当がつくようになることの大切さを説明した。また 1(7/20)や 13/20 を考える際には、それらが「1 より大きくなる」ことや「1 より小さいっていう見当をつける」ことを補足しており、数直線上での正確な位置を計算等により見出す前に、数のおよその大きさを見積もることを強調していた。7/20 や 13/20 は児童がこれまで量との関わりでは目にしてきていない分数と思われるが、まず数直線上での位置をイメージさせることで、こうした数についてもその大きさを大切にした扱いがされていたと言えよう。

第 5 時で分数倍を学習した際には、テープ

の長さの関係を扱うことから、具体的な場面がそのまま取り上げられた。しかしその場合には、量の間の関係についてイメージを豊かに持てるような扱い方をしていた。教科書ではいわゆる四マス関係図を示したり、吹き出しで 2 倍の場合では式が 4÷2 であることを示したりしているが、授業では各自で少し考えた後に全体で長さの操作をイメージさせながら、倍を見積もることが行われた。すなわち教師は手で長さを示しながら「白 2 倍したらさ 6 m になる、だから 2 倍より小っちゃい」「1 倍だったら、まあそのまま、だから 1 倍よりも大きい」と基準のテープを何倍かするイメージに基づき、比較量が基準量の何倍くらいになりそうかを話題とした。それにより子どもから「赤と青なら簡単」と 2 倍になる場合が提案された。しかもそれを考える際も、まず式を考えるのではなく、子どもからは 2 倍であることがまず出され、求め方も「4 は 2 が 2 個だから」との説明がまずあり、その後で、4÷2 が確認された。さらに先ほどの「4 は 2 が 2 個」という考えに基づき 2×2 でもよいとの意見も出された。ここでは量のイメージをもとに、量についての多様な考えが出され、教師もそれを承認することで、必要な立式を補強することが行われていた。さらに 2/3 倍を扱う際にも、教師は式を発表させる前に手で長さを示しながら「青は白より小っちゃい、短い」ことを補足した上で、「普通倍とかっていうと大きくなるイメージあるよね、倍って、小っちゃくなる」と説明をした。式と 2/3 倍であることを確認し「何倍かを表す数も分数を使うことができる」と板書した後でも、「倍っていうとき、増えていくやっぱイメージあるけどね、小さくなるっていう場合もあるんだね」と改めて補足した。量を話題とし、数はそれを記述するために用いられる場面では、量について十分にイメージができるような扱いが、適宜なされていたとみることができる。

(3) 数としての大きさや関係への言及

(2)で見たように数自身が話題とされ、数の構成や性質に基づく推論が教科書よりも多様されたが、さらに、数自体の大きさや数と数の関係を話題にする場面も多く見られた。

例えば第 1 時で和を帯分数 1(1/6)で表すことのよさが話題となり、ある子が「分数の大きさが分かりやすい、1 って書いてあると 1 越えてるんだなってことがわかりやすい」と答えた際、教師はこれを受けて「1 とちょっとってことはわかる」と補足をした。ここでの和 1(1/6)について、教科書では折り紙のような図で和が 1 を越えることのイメージを示しているが、授業では「1 とちょっと」と言い換えることで数の大きさ自身を感覚的に表現していた。

第 2 時で減法を学習した際、授業では教科書と同様に液量の場面を用いたが、他方で数の提示の順序を「3/4 L と 5/8 L」から「5/8 L と 3/4 L」へ、つまり小さい数が先に現れるように変更した。さらに教科書では通分して大小を調べることを立式の前に行わせているが、授業では冒頭の加法の復習の際に通分には触れたものの、減法の仕方を考える際には大小の確認をさせずに立式と計算を考えさせた。その結果、5/8–3/4 と立式し、さらにそのまま計算しようとした児童が見られた。また教師も計算の仕方を確認する際に、5/8–3/4 のまま計算すると引けないことを確認し、さらになぜ引けないかを問うことで「大っきい方から引く」必要性を児童から引きだし、「でたらめにやると、小さい方から大きい方を引く可能性だってあるわけだから、まずは比べる」ことの説明につなげていた。このように授業では、大小比較の必要性を児童自らが見出すことが期待されており、その中で分数の大小関係という、分数の数としての性質に児童の注意を向けていたと考えることができる。

第 5 時で 4/3 倍や 2/3 倍を考えた際には分数倍が既に全体で確認された後でも、4÷3 が

1.666...とする子や2÷3が0.666...とする子にも発表させ、また板書もした。わりきれない場合に分数で倍を表すことを示すだけでなく、ここでも小数との関連性を重視した取り上げ方がされていたと言える。

このように分数と小数とを併用してきたことは、第6時で分数と小数を関係づける学習に自然につながった。教科書と同様に2÷5の商を小数と分数で表すことについて子どもの発表をまとめた際、教師は「2÷5=2/5=0.4」と板書し、「こうして書いていい？」と確認した。この時、子どもたちは「いい」「同じだからいいんだよ」「2/5と0.4は等しいですから」と応じた。わりきれない場合の商を分数で表すというに留まらず、商は基本的に小数と分数の双方で表せるとしてきたことにより、2÷5の商も2通りで表せること、そして同じ商なので同じ数であることが自然に承認されたものと考えられる。

このように2/5=0.4とまとめた際、教師は分数を小数に直すには分子÷分母をするといったまとめにすぐには移らず、まず「この感覚ある、大丈夫？」と確認し、さらに0.4がいくつであったかを尋ねた。これに対してある子が「0.4って1の10個あるうちの4だから、4/10で、約分すると2/5になる」と説明し、教師も「4/10=2/5」と板書した。ここでは3年での0.1=1/10の学習に基づき0.4を4/10と直し、さらに5年で学習した約分を施すことにより、同じわり算の商であるからというのとは別の、0.4=2/5である理由が提案されたことになる。

第6時で1÷4を各自で考えた後に全体で確認した際、最初に発表した子が2.5と答え、次の子が0.25と答えると、教師は「1/4のイメージしてみて」と求めた。ある子が「1/4というのは1個のものを4個に分けたうちの1という意味です」と説明すると、教師は太線の図をかいたが、線の先には「1」とだけ書き、1 mなどと量としては示さなかった。数1の表現として線分をかき[2)]、それを4等分し「1を4等分したやつだから」と考えることで数1/4が1より小さいこと、したがって2.5より小さいことを確認した。

さらに第6時の最後では「1/4を式にもどして1÷4=0.25」とできることをまとめたが、その際に教師は「1/4は1÷4のこと、同じだよってこと」と説明した。教科書の「分子を分母でわると、小数や整数で表せることがあります」とする説明が小数に直す手続きに見えるのに対し、教師の説明は分数と除法を同一視するような語り方になっており、中学校の文字式で除法を分数で表すことにも通じるまとめ方になっていた。

このように数の大きさや関係を話題にしている中で、児童らにより分数を小数に直す独自の方法が提案された。

第6時後半で分数を小数に直すことを考えた際、教師は「これにするためには何すればいいんだっけ」と尋ねており、わり算をすることに気づかせようとしていたと思われる。しかし児童たちからは「分母を10にして」「通分の一つ前」に直すという考えが出された。さらに1/4のように分母を10にしにくい場合には分母を100にするという考えも出され、1/4=25/100に基づき0.25と求めた。ここでは分数をわり算に直して小数を求めることに加え、同値な分数に基づく分数に対する操作により、分数と小数とを関連づける仕方が提案されていた。

この方法は第8時で4/5を数直線にとる際にも用いられ、4/5=8/10に基づき4/5は0.8の位置にとれるとされた。その考え方をした子は8/10がわかると「0.8になるってことがわかる」と説明し、教師は板書に0.8を追記して「4/5=8/10=0.8」という、第6時で見られたのと同様の書き方をした。ここでも、同値な分数に基づき、分数と小数が関連づけられていた。

ただしこの考え方は、1(7/20)や13/20を数

直線上にとる際には生かされなかった。7/20 や 13/20 を、第 6 時で子どもたちが提案していたように、35/100 や 65/100 に直すことでそれらが 1.35 や 0.65 であることを見出すことはできる。しかし 1(7/20)を考える際に 27÷20 とわり算で求める方法の他に子どもたちから出されたのは、数直線の 0.1 を表す目盛りの間にさらに線を加えて、1 から 2 までの間の区間を 20 等分にして考えるものであった。13/20 でも 0 から 1 までの区間を 20 等分にした「0.05 目盛り」に基づく考え方が発表され、65/100 とする考え方は出されなかった。

第 7 時で小数や整数を分数に直すことを扱った際、教師は 4=4/1 とした後で、分母が 2 や 3 だったらどうなるかを問いかけ、それらの結果を「4=4/1=8/2=12/3」と板書していた。教科書では 2=2÷1、2=4÷2、2=8÷4 であることを示し、そこからそれぞれ 2/1、 4/2、8/4 になるとしている。しかしここでは同値な分数に基づいて考え、しかも板書でもそれらが全て等しいという、数の関係を明示する形で板書がなされていた。4=4/1 に対して教師が「普段こうなってるとだめだよとかって言われてきたよね」と補足すると「だめでしょそれは、分数じゃないもん」と発話した子がいたことや、12=12/1 に対して隣の子に「120/10 じゃないの」と言っていた子がいたことを考慮すると、整数と分母が 1 の分数を等号で結び、さらに分母が 2 や 3 の子どもたちにとって見慣れた分数と等号で結ぶことは、それらが同じ数を表すものであり、分母が 1 の分数も同列に扱うことができるという理解を支えるものとして、必要であったと考えられる。

第 7 時後半で図 5 のような数直線で小数と分数の対応を考えた際、単にこれまでの変換方法を適用して四角の数を見出すだけでなく、教師は直線下側の分数であれば一目盛りで 1/4 ずつ増えていることに着目させ、0.5 と 1.5 に対応する分数が 2/4 と 1(2/4)であることを 1/4 と 1(1/4)から 1/4 だけ増えたということからも確認したり、四角が書かれていない 1(3/4)についても確認をしたりした。既習の手続きにしたがって 0.5 を 1/2 に変換するに留まらず、1/4 や 3/4 等との関係から 1/2 や 0.5 を捉えさせていたことになる。そのため 2 に対応する分数としては 8/4 の他に 1(4/4)も出されたが、それに対し教師はそれが「一緒だってことだよね」といずれも同じ数の表現として承認していた。直線上側の小数についても一目盛りで 0.25 増えることに基づいた確認を行い、四角がない 1.75 についても確認をした。そして最後に「上の数と下の数と同じだからね、大きさ」と数の大きさの話であることを確認し、「0.75 って 3/4 と一緒なんだなあとか、これね、感覚的にちょっと覚えておいて下さい」と、対応する小数と分数とが等しい大きさであるという感覚が大切であることを補足した。

他方、第 7 時で 3.14 を分数で表すことを考えた際には、児童から出された 314/100 を変形して帯分数に直し、それが先に出されていた 3(7/50)になることを確認した。そして「すごいね、今までのいろんなものが合わさっている」と補足した。上では第 1 時で帯分数の加法を考えた際に、仮分数に直して計算した時の答えが、帯分数に直していくと別の考え方で計算した時の答えと一致することを明確にしたことを述べたが、第 7 時でも 2 つの考え方による結果が一致することに注意を向け、「合わさっている」こと、つまり数の世界での内的整合性により児童の承認を得ようとする様子が伺えた。

以上のように、今回の授業では機会をとらえ、できるだけ数の間の関係に言及していた。数には絶対的な大きさはなく、相対的な大きさがあるだけだとすれば、こうした数の関係や相対的な大きさを頻繁に話題にすることは、分数を数として理解することにとって重要な支援だと考えられる。

５．おわりに

本稿で見てきた指導の手立ては、教科書を基本として展開された授業の中で行われたものであり、したがって、教科書に沿って展開される授業の中で十分に可能なものである。他方で、教科書の説明等に対してこれらの手立てを加味することは、前節で見てきたように、分数を数として扱うディスコースへの児童の参加を、さらに促すことにとって有用なものとも考えられた。

こうした手立てを蓄積し、多くの教師が利用できるように整備していくことで、日々の授業の中で、数としての分数の理解をさらに深めることが可能になると期待される。

謝　辞

授業の参観・記録をお許し頂きました上越教育大学附属小学校の倉又圭佑先生にお礼申し上げます。本研究は JSPS 科研費 JP20K03271 の助成を受けたものである。

註および引用・参考文献

1) 本稿では紙幅の都合上、分数 $\frac{1}{3}$ を 1/3 などと、特に帯分数は $1\frac{1}{2}$ を 1(1/2)などと表すことにする。

2) 数１を線分で表し、これを等分することは、啓林館の小学３年生用の教科書で分数の大きさを学習する場面で行われている。

Davydov, V. V. & Tsvetkovich, Z. H. (1991). On the objective origin of the concept of fractions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *13* (1), 13-64.

Dörfler, W. (2002). Formation of mathematical objects as decision making. *Mathematical Thinking and Learning*, *4* (4), 337-350.

布川和彦 (2016). 「数学=パターンの科学」の考えを視点とした算数から数学への移行についての考察. 日本数学教育学会誌, *98* (4), 3–14.

布川和彦 (2019). パターンの記述とパターンの対象化の観点に基づく教科書における分数学習の展開についての検討. 日本数学教育学会誌, *101* (12), 2-15.

布川和彦 (2021a). 分数の授業に見られるディスコースの特徴. 日本数学教育学会第 54 回秋期研究大会発表集録, 25-32.

布川和彦 (2021b). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372.

布川和彦 (2022).「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, *104* (2), 2-13.

瀬山士郎 (1996). 数をつくる旅 5 日間．星雲社.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 567–615.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Wu, H.-H. (2016). *Teaching school mathematics: Pre-algebra*. Providence, RI ： American Mathematical Society.

吉田　誠 (2010, 12 月). 同値分数指導について. 新しい算数研究, *479*, 34-35.