上 越 数 学 教 育 研 究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 39 号

目 次

〈研究論文〉

〈実践報告〉

2024

上越教育大学数学教室

＊上越数学教育研究は 2020 からウエブ上での刊行のみとなりました.

研究論文

上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 1-14

割合の指導に関わる諸問題

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

子どもたちの割合の理解が十分でないことは、これまでも指摘され続けている。令和 5 年度全国学力・学習状況調査算数問題 4(1)は 30 %と同じ割合として「100 人をもとにした 30 人の割合」と「10 人をもとにした 3 人の割合」を選ぶ問題であったが、正答率は 46.3 %であった。また令和 4 年度の調査で果汁 40 %の飲み物 1000 mL に含まれる果汁を求めることができた児童は 64.8 %、500 mL の飲み物を二等分した時に果汁の割合が変わらないと判断できた児童は 21.6 %に留まった。こうした理解の不十分さは異種の二量の割合についても指摘されてきており、例えば令和 3 年度の調査で道のりを時間で割った時の商が表す内容を四つの選択肢から選ぶ問題では正答率が 56.0 %であり、平成 30 年度の調査で同様のことを混み具合の場面で尋ねた問題の正答率 50.3 %から大きな改善は見られなかった。

こうした指摘は以前からなされ、それらを受けて割合の指導についての様々な研究や提案もなされてきた。その上でまだ上述のような状況であるとすれば、従来の研究や提案とは異なる観点からの検討を行うことにも意味があろう。

従来と異なる観点を考える手がかりを、教科書における割合の定義の中に見いだすことができる。ある教科書では「もとにする大きさを 1 とみたとき、くらべられる大きさがどれだけにあたるかを表した数」を割合と言うとしているのに対し、別の教科書では「何倍にあたるかを表した数」が割合であるとしている。前者の教科書もこの定義の直前で「倍を使ってくらべること」を扱い、またその少し前では「5 倍というのは、3 m を 1 とみたとき、15 m が 5 にあたることを表している」と説明しているので、割合を倍と関連づけて考えてはいる。しかし割合が何かの説明としては、前者が「どれだけにあたるか」を基本としているのに対し、後者は「倍」を基本としており、二つの教科書には違いがあるように見える。このことは、割合とは何かについて私たち教師の間にも明確な共通理解がないのではないか、という疑問を抱かせる。

そこで本稿は、割合を理解する上で必要となりそうな事項でありながら、私たちの間で共通理解があるのかが明確ではなく、指導において曖昧になっているものがないかを検討することにする。そのためにまず、共通理解の拠り所である学習指導要領解説(文部科学省, 2017)における割合の説明を確認する。次に、その説明から派生する事項で、算数教育において明確に説明されることの少ないものを取り上げ、検討を加える。なお本稿の引用において、ページ数だけを記したものは全て学習指導要領解説からの引用である。

２．学習指導要領解説における割合

(1) 同種の二量の割合

第 4 学年の学習内容である「簡単な場合に

ついて、割合を用いて比べること」に関し、「簡単な場合」とは「二つの数量の関係が、基準とする数量を 1 とみたときにもう一方の数量が、2 倍、3 倍、4 倍などの整数で表される場合」(p. 218)であると説明されている。ここでは基準量を「1 とみた」時に比較量が何倍と表されるかが割合とされている。

さらに第 4 学年の箇所では割合について次のような説明もなされている：「二つの数量 A と B の関係を，割合を用いて比べるとは、二つの数量のうちの一方、例えば B を基準にする大きさ（基準量）としたときに、もう一方の数量である A（比較量）がどれだけに相当するのかを、A÷B の商で比べることである。この表された数(商)が割合である」(pp. 217-218)。さらに「割合を表す数は，基準量を単位とした比較量の測定値であるともいえる」(p. 218)とされる。ある量を基準量とすることはその量を「1 とみた」ことだとすると、比較量が「どれだけに相当するのか」は上述の倍により表されると同時に、「A÷B の商」であるとされていることになる[1)]。

第 5 学年に関しても、第 4 学年と同様、次のように説明がなされる：「二つの数量のうちの一方を基準にする大きさ（基準量）としたときに、もう一方の数量（比較量）がどれだけに相当するのかを、比較量を基準量で割った商で比べることである。この表された数（商）が割合である」(p. 267)。

なお割合については次のような記述も見られる：「さらに、様々な事象における二つの数量の関係について、それらの数量の間に成り立つ比例関係を前提として乗法的な関係から把握される『割合』について学習する。割合は、二つの数量を比較するときに用いられる関係であり、またその関係を表現する数でもある」(p. 35)。

二組の数量のペアを割合を用いて比べることに関しては、次のように説明されている：「二つの数量の関係と別の二つの数量の関係を比べるとは、A、B という二つの数量の関係と、C、D という二つの数量の関係どうしを比べることである。[中略] 比べる対象や目的によって、割合でみて比べる場合がある。割合でみるとは、二つの数量を、個々の数量ではなく、数量の間の乗法的な関係でみていくことである」(p. 64)。

(2) 異種の二量の割合

第 5 学年で学習する単位量当たりの大きさに関わっては「異種の二つの量の割合として捉えられる数量があることを学習する」(p. 264)とされる。例えば、速さを「単位時間当たりに移動する長さとして」捉える (p. 265) としており、速さという単位量当たりの大きさは、時間と長さという二量の割合とされている。「(速さ)＝(長さ)÷(時間）として表すことができる」ことも、「A÷B の商」が割合だとする(1)で確認した割合の説明とも整合している。また単位量当たりの大きさは「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)であるとも述べられている。

(3) 乗法と除法

前項の引用部に見られるように、割合はしばしば「乗法的な関係」として特徴付けられる(p. 35，p. 64，p. 218，p. 219)。では乗法がどのように説明されているかを見ると、「乗法は、一つ分の大きさが a のものの b 個分の大きさ、あるいは b 倍に当たる大きさを求める計算として意味付けられる」(p. 45)とされる。さらに第 5 学年で学習する乗数が小数の乗法については、「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p であるとしてまとめることができる」こと、また「A を『割合に当たる大きさ』とすると、B×p=A と表すことができる」(p. 239) ことが説明されている。

乗法をこのように捉えることで、乗法の逆算にあたる除法も「基準にする大きさ(B)」あるいは「一つ分の大きさを求める場合」と、「割合(p)」あるいは「幾つ分になるかを求め

る場合」(p. 45)とを考えることになる。そして前者を「等分除」、後者を「包含除」と呼んで区別し、教科書でも二つの場合が別に取り上げられている。

３．同種の二量の割合に関わる問題

(1) 下位基準量の不自然さ

2(1)で確認したように、学習指導要領解説では「割合を表す数は、基準量を単位とした比較量の測定値である」(p. 218)とも説明されている。ここで「量の測定とは、量 B を基準にとるとき、他の量 A がその何倍に等しいかを調べ、この何倍に当たる数 p によって量 A の大きさを表現すること」(p. 58)であるので、ある量が別の量の何倍かを求めることが測定の操作であり、また測定こそが倍や割合を求める操作であるとも言える。

例えば長さ 15 cm のテープ A を長さ 5 cm のテープ B を基準として測定するとすれば、基本的には B を任意単位とした測定、つまり B をいくつかつなぎ合わせて A と同じ長さになるようにし、つなぎ合わせた数を用いて「A の長さは B の長さ 3 本分」などと表現するであろう [2)]。この場合、5 cm の 3 つ分で 15 cm となることから 15＝5×3 の乗法が成り立つ。しかし実際に基準量を合わせる操作を遂行しなくても、B を n 本つなぎ合わせて A の長さになると想定して 15＝5×n と考え、その n を除法 15÷5 により求めることもできる。A÷B の商が割合であったことを想起すれば、この n は B を基準にとったときの A の測定値であるとともに、A の長さが B の長さの何倍か、あるいは B の長さを基準量とした時の A の長さの割合を表している。

12 cm のテープ C についても同様に考えると、12÷5=2.4 となるので、C の長さは B の長さの 2.4 倍、あるいは B の長さを基準量とした時の C の長さの割合は 2.4 となる。そして「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p」であったので、12＝5×2.4 でもある。この「×2.4」である小数の乗法については、「1 とみた」大きさの 10 分の 1 を 0.1 に当たる大きさとして考えることになる(p. 242)。今の事例では、基準量である B の長さ 5 cm の 0.1 に当たる 0.5 cm を作り、2.4 なので基準量 5 cm の 2 つ分と、0.1 にあたる 0.5 cm の 4 つ分とを合わせた長さが 12 cm になっていると捉えることになろう。この乗法をテープ A の時と同様に基準量をつなぎ合わせる操作とみなすと、「×2.4」は基準量 B を 2 個つなぎ合わせ、さらにその 10 分の 1 の量を 4 個つなぎ合わせる操作に対応する。基準量の 10 分の 1 の量を下位基準量と呼ぶならば、測定値の 2.4 は、基準量と下位基準量を組み合わせて比較量と同じにする測定操作の結果である(布川(2021)参照)。

つまり、「割合を表す数は，基準量を単位とした比較量の測定値」であり、その測定値は「何倍に等しいかを調べ」た結果の表現なのであるから、C の長さが B の長さの 2.4 倍ということも、基準量 B と下位基準量を組み合わせて C の長さと同じにする測定操作やその結果の表現ということになる。

離散量の場合であっても、例えば 12 個は 4 個の何倍かを考える際に、下図のように、4 個のまとまりを基準量とし、それをいくつか合わせて比較量と同じになるようにすることを「測定」と考えるならば、同様の解釈が可能であろう(布川, 2021)。

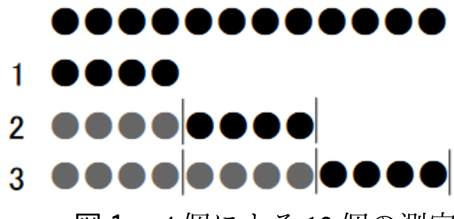

図１：4 個による 12 個の測定

離散量の小数倍でも、例えば 14 個が 4 個の何倍かを考えて 14÷4＝3.5 から 3.5 倍という結果が得られた場合、4 個という基準量から 2 個のまとまりという下位基準量を構成し、それが 0.5 に当たると考えることで、3.5 倍を

基準量と下位基準量の組み合わせによる測定値として解釈することはできる。

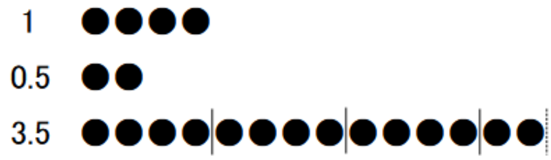

図２：3.5 倍の測定によるイメージ

15 個が 4 個の何倍かを考えると 15÷4＝3.75 倍となるが、これも、4 個という基準量から 1 個という下位基準量を構成し、それが 0.25 にあたると考えるならば、基準量 3 つ分と下位基準量 3 つ分を組み合わせる測定操作、あるいは基準量 3 つ分、0.5 にあたる下位基準量 1 つ分、0.25 にあたる下位基準量 1 つ分を組み合わせる測定操作の結果として解釈が可能である。

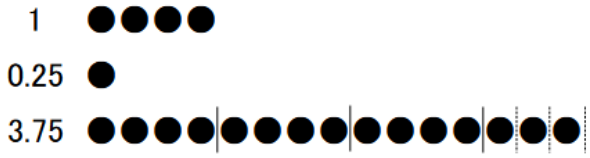

図３：3.75 倍の測定によるイメージ

ただしここでは、4 個を 1 と見たときに 2 個は 0.5、1 個は 0.25 に当たるという理解が必要となる。その際、個数と倍の数とは比例関係にあることや 1÷4=0.25 といった理解も求められることになろう。

長さの倍関係を求める際には、下位基準量として基準量の 0.1 や 0.01 に当たる大きさを構成すれば、小数値の倍を解釈できた。同じことを離散量で行おうとすると、0.1 や 0.01 に当たる下位基準量が 0.4 個、0.04 個などとなってしまう。2 個を 0.4 個で測定したら 5 つ分と考えることで 14 個が 4 個の 3.5 倍であることを解釈することはできるが、「0.4 個」という下位基準量は上の「0.5 cm」という下位基準量に比べ不自然であると言えよう。

このように、離散量の割合で値が小数になる場合、連続量の場合と同様に下位基準量を構成することで測定値として解釈することは可能であるが、単純に基準量の 0.1 や 0.01 に当たる大きさを下位基準量とすることが連続量のときに比べて不自然な場合もあり、逆に 1 個など自然な量を下位基準量にしようとすると、それがいくつに当たるかを考える部分が 0.1 などよりも複雑な数になってしまう。そのため、離散量については小数倍をどう解釈するかに問題が生じうると考えられる。

(2) 異なる基準量による比較

割合によりいくつかの対象を比較する場面では、それぞれの対象により基準量が異なる。割合が測定値であるならば、それぞれを異なる基準量により測定した結果の測定値だということになる。いわば 3 インチと 6 cm を比較するようなものとなる。しかも、実際には 3 インチの方が長いにも関わらず、測定値が 3 と 6 なので 6 の方が大きいと判断するのである。こうした問題を考慮するならば、なぜ割合により比較できるのか、あるいは割合で比較する場合、測定値は対象の何を表しているのかがさらに問題となろう。

異種の二量の割合では基準を同一の単位量 (1 m^2、1 時間等)に揃えるために比較を考えやすいことから、同種の二量の割合による比較を学習する際に、単位量当たりの大きさの考えを利用するという提案もなされてきた(田端, 2003)。例えば第 4 学年で用いられることの多いゴム紐や包帯の伸び具合を考える場面で、1 cm に対応する伸びた長さを考え、その長さで比較することを通して、割合による比較を受容することが考えられる。50 cm のゴム紐が 150 cm に伸びた場合、伸びた後の 150 cm を元の 50 cm に均等に割り当てるならば、元のゴム紐 1 cm に伸びた後のゴム紐 3 cm を割り当てることとなる。他のゴム紐では 100 cm のものが 200 cm に伸びたとすると、200 cm を元の 100 cm に均等に割り当てて、元の 1 cm に伸びた後の 2 cm を割り当てることになる。そして伸びた後の長さである 3 cm と 2 cm の比較により伸び具合を比較し、これを 1 cm が 3 倍に伸びたことと 2 倍に伸びたことと

捉え直すことで、割合による比較を正当化することはできる。これは$B \times p=A$で B の値が 1 の時の A の値が p と等しくなることによるものである。

このような解釈は、包含除的である倍を求める除法$A \div B$を一度、1 当たりを求める等分除的に捉え、それを経由して包含除としての$A \div B$を捉えることになっている。上のゴム紐の事例で言えば、伸びた後の 150 cm を 50 等分した結果の 3 cm と 200 cm を 100 等分した結果の 2 cm との比較を経由し、これらの 3 と 2 の値が、包含除の結果、つまり 150 cm を 50 cm で測定した測定値の 3 と 200 cm を 100 cm で測定した測定値の 2 とそれぞれ等しいことから、測定値による比較の妥当性を納得し、同種の二量の割合による比較を正当化しているものと考えることができる。

実際、ゴム紐を扱ったある教科書の教師用指導書では、次のように書かれている：「50 cm から 150 cm に伸びるゴム A は、10 cm あれば 30 cm に伸びる。それに比べて 100 cm から 200 cm に伸びるゴム B は、10 cm あれば 20 cm しか伸びない」。ここでは 10 cm であるが、二種類のゴム紐で基準量を揃え、その伸びた後の長さの違いから、前者のゴム紐の方がよく伸びると判断している。

またいくつかの教科書で「いつでも同じように伸びる」ことを確認したり、指導要領解説や実践(例えば加固(2021))で、割合による比較において比例関係を前提とすることを強調しているのは、一方の量(伸びた後の長さ)を他方の量(元の長さ)に均等に割り当てられるための条件であるからだと考えられる。

価格の割引などは、ゴム紐の場面と同様、状態の変化であるように見える。例えば 1500 円の商品を 1200 円で購入した場合、定価を元にした購入価格の割合は 0.8 であるが、ゴム紐の場合と同様に考えると、これは定価の 1 円が 0.8 円に変化したものと解釈できる。24 m^2の塀のうち 6 m^2を塗った時の、全体の面積を元にした塗った部分の面積の割合 0.25 も、塀の各 1 m^2の部分のうち 0.25 m^2だけ塗られた状態に変化したとして解釈することができる。つまり塗った分の 6 m^2を 24 等分して各 1 m^2に割り当てたとして捉えられる。その割り当てられた面積の値 0.25 が割合の値に等しくなっている。ここでも等分除を経由して包含除を捉えることが可能である[3)]。

定員と乗客数の場合も、定員 1 人を例えばイスやポスト(地位)などにより象徴的に表すならば、1 つのイスに座ろうとしている人が何人いるか、つまりイスに割り当てられる人数として商を捉えることができる。定員が 140 人のところに 245 人が乗っているとすれば、 定員 1 人に乗客が 1.75 人いる状態として等分除的に解釈できるが、その人数の値 1.75 が割合の値に等しいことから、今の解釈を通して割合が混み具合を表していることを受容することが考えられる。

ただし、等分除的な解釈が自然には行いにくい場面も見られる。例えば 200 人の子どもが集まり、その中の 80 人が 5 年生であったという場面で、200 人を元にした 80 人の割合である 0.4 を上のように解釈しようとすると、子ども 1 人に対して 0.4 人の 5 年生を割り当てるとか、子ども 1 人が 0.4 人の 5 年生に変化するといったことになり、自然な解釈とは言いがたい。

あるいは 8 回シュートをして 6 回成功した場合、シュート回数を元にした成功数の割合は 0.75 である。これを、成功した回数 6 回を 8 等分したときに、シュート 1 回に対し成功 0.75 回を割り当てるとして解釈することも、シュート 1 回が成功 0.75 回に変化すると解釈することも自然とは言えないであろう。ある教科書では「シュートの成績は、もとにするシュートした数を 1 としたとき、比べられる入った数がいくつにあたるかで表すことができます」と説明されているが、なぜ表すことが「できる」のかは明確には説明されていな

い(この問題に関しては門間(2017)も参照)。

つまり、割合の学習で現れるいくつかの場面の中には、等分除的な解釈を経由して、包含除による割合を受容するということが行いにくいものが存在するということになる。また等分除的な解釈が自然な場面を意図的に活用するとしても、そうした場面での学習とそうでない場面とをどう関連付け、割合による比較を学習者に納得してもらうのかを検討しておく必要があろう。比較をするにも関わらず基準量がそれぞれで異なるということから、以上のような問題が生じうると考えられる。

仮に、シュート数を元にした時の成功数の割合を「成功した程度」(Nunokawa (2012)、杉山 (2012)参照)や「成功する確率」などと解釈することで、つまりある人がシュートした事象の質やシュートした人の質を表す数として解釈することで、この問題を解消しようと試みることも可能かもしれない[4]。これにより、複数の対象をある質により比較することにはなる(Silverman (2021)参照)。ただしその場合も、割合を求める除法がどうして「程度」や「確率」を表すことになるのかや、その「程度」や「確率」がどのようなことを意味するのかを、学習者に理解してもらうという問題に、割合による比較の問題が帰着されることになる[5]。

４．異種の二量の割合に関わる問題

(1) 「均す」ことの難しさ

異種の二量の割合では、被除数となる量が離散量であることは「均す」方の量が離散量ということになり、小数値の解釈がさらに難しくなる。例えば 5 m^2 に 9 人がいる場合、1 m^2 当たり 1.8 人となるが、0.8 人を物理的に実現できない以上、どこかの 1 m^2 の上に実際に 1.8 人がいるという状態にはできない。確かに図 4 のように人を均等に配置し、境界線上にいる人は、その状態に応じて適宜小数値として解釈するという考え方もあろう。

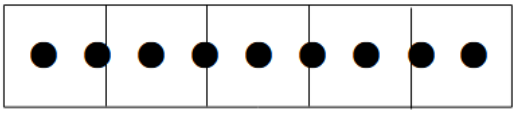

図４：「1 m^2 当たり 1.8 人」の一つの解釈

しかし、図 5 の太線の 1 m^2 を新たに考えてみると、この 1 m^2 については 1.8 人いる状態にはならない。

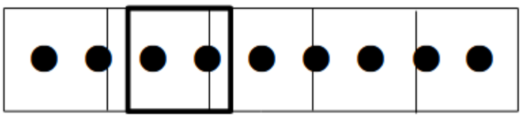

図５：1.8 人とならない 1 m^2 の場合

速さの場合、例えば 1600 m を 20 分で歩いたので分速 80 m と求めた場合、どの 1 分間をとっても 80 m 歩いたと想定する。つまり、歩き始めてから最初の 1 分間、1 分後から 2 分後までの 1 分間で 80 m 歩いたと想定するだけでなく、1 分 37 秒後から 2 分 37 秒後の 1 分間においても 80 m 歩いたと想定する。しかし、「1 m^2 当たり 1.8 人」に関してはこうしたことが成り立たないことを、上の図 5 は示している。

このように考えると「1 m^2 当たり 1.8 人」という単位量当たりの大きさを、どのように解釈するかは自明ではない。もちろん図 6 のような場合の平均の人数と説明することもできるが、その場合は「平均 1.8 人」をどのように解釈するかに問題が帰着される。また図 5 の場合の解釈の問題も依然として残る。

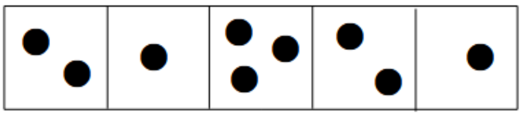

図６：平均による解釈

さらに 44.38 km^2 の面積に 4190 人がいる地域の人口密度を考える場合、仮に図 6 のように単位面積の枠を考えるとしても、1 km^2 の枠が 44 個のほかに 0.38 km^2 分が残ってしまうので、44.38 km^2 の上で 4190 人を「均す」ことはいっそう自明な操作ではなくなる (「均す」操作については新堀(2000)も参照)。

2(4)で確認したように、割合は「乗法的な

関係」として特徴付けられ，「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p」であり、「A を『割合に当たる大きさ』とすると，B×p=A と表すことができる」(p. 239)のであった。異種の二量の割合である単位当たり量についてもこれが成り立つとし、B を面積、A を人口と考えると、「1 m^2 当たり 1.8 人」は上の式の p に当たることになる。このように人口が面積に比例するとした場合の比例定数として捉える、いわば面積を人数に変換する際の変換効率を表すといった解釈に留めるならば、「均す」操作を想定しなくても単位量当たりの大きさを考えることはできる。ただしこの場合は、「均す」操作と等分の操作から除法で単位量当たりの大きさを求めることを正当化するのではなく、乗法の逆として除法になることを正当化することになる。

(2) 量の意味の捉え直し

単位量当たりの大きさは、1 km^2 に対応する人口や 1 時間に対応する進んだ距離など 1 に対応する量を除法により求める。上でも触れたように、これは 1 人分などを求める除法とされた等分除に当たるように見える。ただし等分除を改めて検討すると、例えば 12 個を 3 人で割るという量どうしの除法をしているのではなく、12 個を 3 等分して 4 個という結果を得るものであり、個数という一方の量の等分を考えているに過ぎない。

単位量当たりの大きさの場合にも、基本的には一方の量の除法を行っていると見ることができる。その際、二量が比例していると仮定して、比例的推論を用いることになる。先ほどの 44.38 km^2 の面積に 4190 人がいる地域の人口密度を求めるには、1 km^2 の面積に対応する人口を求めることになる。面積が 44.38 km^2 から 1 km^2 へ÷44.38 をすることになるので、人口の方も÷44.38 をすることにより 1 km^2 の面積に対応する人口を求める。この時、確かに÷44.38 をすることは 44.38 km^2 が 1 km^2 の 44.38 倍であるという、面積の倍関係からきているが、実際に行っている除法は 4190 人について÷44.38 をするという人口に関する除法、つまり 44.38 倍すると 4190 人になるような人口を求めているに過ぎない。

同様に B 時間で A km 進んだ時の速さ p を求める際は、時間と進む距離とが比例すると想定した上で、時間が 1 時間から B 時間へと B 倍になっているので、距離も 1 時間で進む距離を B 倍すると A km になると考える。B 時間を 1 時間にするには÷B をするので、距離の方も÷B をすればよいから p は A÷B で求まると言えることになる。÷B をすることは B 時間が 1 時間の B 倍であるという、時間の倍関係からきているが、実際に行っている除法は A km について÷B をするという距離に関する除法、つまり B 倍すると A km になるような距離を求めていることになる。

このことは、教科書に見られる図 7 のような図においても行われている。そして、この比例関係を利用して、一方の量における同種の二量の割合を、他方の量における同種の二量の割合として読み替えていると考えられる。

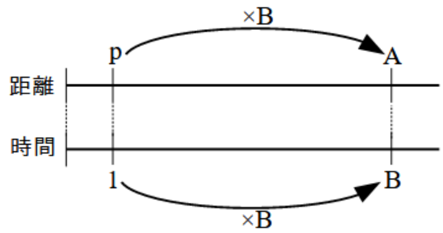

図 7 ：教科書における二重数直線

単位量当たりの大きさという考え方は、今のように、一方の量の単位量に対応する他方の量を比例的推論に基づいて求めた上で、「1 時間当たり 4 km 進む」と「当たり」という言葉を含めることにより、「1 時間では 4 km 進む」という情報と、「時間と距離は比例している」という情報を含むようにしていると考えられる。つまり、距離が時間に比例すると考えた場合の比例定数として、得られた結果を解釈する。それにより、「1 時間で

は 4 km 進む」という情報が、対象としている移動全体の特性や質を表すものとなる。このように 1 時間分の距離が移動全体の特性や質を表すものへと転用される点に、単位量当たりの大きさの要点があると考えられる。これは具体的な二量の比から「反省的に抽象された一定の比」である比率が生まれる必要性に関する Thompson (1994)の指摘(p. 192)とも関わる問題だと考えられる。

「1 時間で p km 進む」を「1 時間当たり p km 進む」と読み替えることで、対象としている移動の一部、あるいはその延長と想定できる移動に関しては同じ比例関係を適用できるので、k 時間に進む距離を p km の k 倍として $p \times k$ の乗法により求めることができる。このように p は、この移動における時間という量から距離という量への対応、あるいは時間を距離に変える変換(Simon & Placa (2012)参照)を表すと考えることができる(図 8)。

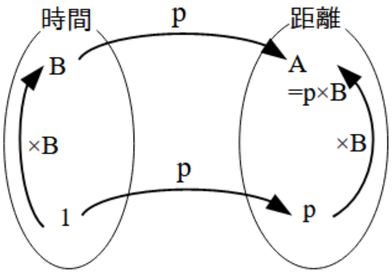

図８：p による時間の距離への変換

異種の二量の割合に関して「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)であるとされるが、単位量当たりの大きさ p を異種の二量の間の対応や変換を与える「量」と考えるならば、確かにそれ以前に学習してきた量とは異なったものと言えよう[6)]。

以上のように、異種の二量の割合とされる学習内容は、実質的には比例的推論を伴った同種の二量の割合の組み合わせであり、結果として得られる量も基本的には一方の量(上の速さの場合には距離)であると考えられる。ただしその学習においては、他方の量の単位量分の一方の量(上の 1 時間分の進んだ距離)を、対象全体の特性や質を表すものとして捉え直したり、比例定数として二つの量の対応や変換を表すものとして捉え直したりすることが求められる。そのために、その捉え直すことに関わる問題が生じる可能性があると考えられる。

(3) 数の除法と量の除法

割合を「乗法的な関係」と考える(p. 35，p. 64，p. 218，p. 219)と、基準にする大きさ(B)、割合に当たる大きさ(A)、割合(p)の関係は $B \times p = A$ と表され(p. 239)、p を求める $A \div B$ の商が割合となるのであった(p. 218)。単位量当たりの大きさを「異種の二つの量の割合として捉えられる数量」(p. 264)とすると、$B \times p = A$ における量 A と B が異なる種類の量の時の p がその割合であり、単位量当たりの大きさということになる。

ただしこの場合、割合を「基準量を単位とした比較量の測定値」(p. 218)とすると不自然なことになってしまう。例えば A が距離、B が時間であった場合に測定の捉え方をそのまま適用し、速さという単位量当たりの大きさを距離と時間という異種の二量の割合と考えると、速さは距離を時間で「測定した」測定値ということになってしまう。しかし距離を時間で「測定する」ということは、長さなどの測定と同様の操作としては考えにくい[7)]。

ここで量の種類という点に注意をして、乗法的な関係を表す $B \times p = A$ の式を検討してみる。距離 A km を B 時間で走った場合の速さを 1 時間当たり p km と求めたとする。この時、$B \times p = A$ の式における量の種類のあり方として、次の三通りが考えられる。

(a) B×p＝A　（数 B×数 p＝数 A）

(b) B×p km＝A km　（数 B×量 p＝量 A）

(c) B 時間×p km＝A km　（量 B×量 p＝量 A）

(a)では B×p＝A は単に数どうしの乗法であり、それにより積である数を得るので、整合した式となっている[8)]。また(b)は、距離 p km

のB倍を求めて距離A kmを得るので、量の倍を考える式としてやはり整合したものである。しかし(c)の場合には、時間と距離をかけて距離を得るという形となるので、「量の四則演算」(quantity calculus)あるいは「量の代数演算」(algebra of quantities）(国際度量衡局, 2019, p. 117)の観点から、整合性を欠くものとなる。

これを解消するためには、「1時間当たりp km」を、移動全体の特性を表すとか、時間と距離の対応や変換を表すような、「基本的な量の性質をもっていない」距離とは別種の量と捉え、またそれを明確にするような新たな単位を与える必要がある。具体的には時間をかけて距離を得ることから、その単位をkm/時とし、時×(km/時)＝kmとすることが考えられる。実際、量の四則演算では、40 km/h×2 h＝(40×2)×(km/h×h)＝80 km といった計算が行われる(伊藤と山下, 2020; 森川と西山, 1997)。異種の二量の割合が「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)となるということは、pをこのkm/時といった単位を持つ量として捉える、いわゆる内包量や組立量として捉えるとすれば、理解しやすくなる。

このように、単位量当たりの大きさを含む乗法的な関係を量の間の関係として捉えるとすれば、内包量の導入も含め、それら量の間の関係を整合性を持った形でどう理解すべきかの問題が生じることになる。

この問題は、実際には小学校第2学年において乗法が初めて学習される際に、既に生じている。例えば1台の車に4人ずつ乗ったカートが5台あり、5台分の人数を4×5＝20として求める場合、乗数の5を数と考え、4人という量の5倍の人数を求めると考えるならば量としての整合性が保たれるが、乗数の5も5台という量として、4人×5台＝20人と考えた場合には、上と同様に整合性を欠くものとなる。整合性を保つためには、「4人ずつ」という条件を「1台当たり4人」という単位量当たりの大きさとして解釈し、さらにこれを4人/台という内包量として捉えることになる。しかし今度は、小学校第2学年において単位量当たりの大きさの考えを、潜在的であるにしろ認めるのかの問題が生じる。

同様の問題は、除法についても生じることになる。第3学年で12個のあめを4人で分けたら1人分が3個になるといった場面が扱われるが、12個÷4人＝3個や12個÷3個＝4人と考えると、量としては整合性がとれないことになってしまう。整合性をとるには、3個を3個/人という内包量として捉えるか、12個÷4＝3個や12個÷3個＝4として、4倍すると12個になるのが3個であるといった個数の倍関係として捉えることになる。そして前者の場合には、乗法と同様、小学校第3学年で単位量当たりの大きさの考えを認めるのかの問題が生じることになる。

このように除法を量の間の演算と考える場合にも、ある量を異なる種類の量で割ることがどのような操作であるのか、またその結果得られる商はどのような意味を持つのかが、問題となる。これに加えて、除法を量の演算と考える際には、元になる乗法の被乗数と乗数のどちらを求める除法なのかの問題もあるため、上の(a)～(c)の議論はより複雑になる。(a) 数B×数p＝数AではBもpも数であると考えているので、それぞれを求めるB=A÷pとp=A÷Bとで特に違いはないと考えられる。しかし(b) 数B×量p＝量Aの場合、B=A÷pの除法はAがpの何倍か、つまり図8の縦向きの矢印を求めることであり、割合の第一用法になる。p=A÷BはB倍するとAになるようなpを求める除法、図8の縦向きの矢印の逆に当たる除法であり、基準量を求める第三用法となる。特にBが自然数の場合には、AをB等分した量pを求める除法となる。(c) 量B×量p＝量Aで量としての整合性がとれるよ

うに量 p を内包量と捉えるとすると、p=A÷B は内包量を求める除法、つまり図 8 の対応 p である右向きの矢印を求めることとなる。これに対し B＝A÷p は一方の量を内包量で割る除法であり、対応 p がわかっている時に A に対応する B、いわば A の逆像 p^{-1}(A)を求めることであり、右向き矢印の逆を考えることになる。このように、量として整合するように除法を考えた場合には、五通りの除法が区別されることになる。

量に関する乗法や除法として単位量当たりの大きさに関わる場面を検討してみると、そもそも乗法と除法を算数においてどのような演算として導入するかの問題とも関わってくる。もちろん、学年段階に応じた指導がなされてよいであろうが、ただその場合でも、下の学年での乗法や除法の学習が、上の学年の学習で現れる乗法や除法と整合している、あるいはそこへの発展の仕方が意図的に設計されている必要がある [9)]。

５．二つの割合の関係

図 7 に現れていたように、異種の二量の割合を学習する際、実際には同種の二量の割合を考えていた。他方で 3(2)で確認したように、同種の二量の割合を理解する際に、比例関係を前提として基準量の単位量に対応する比較量、いわば単位量当たりの比較量を考えることがあった。このように、同種の二量の割合と異種の二量の割合とは、学習の中で互いに関連し合っている。

しかし同時に、単位量当たりの大きさを内包量あるいは「基本的な量の性質をもっていない量」(p. 264)として捉える場合には、同種の二量の割合と直接には関連しにくくなる。しばしば言及されるように、前者は(外延量)＝(内包量)×(別種の外延量)の形の量の乗法となるのに対し、後者は(外延量)＝(同種の外延量)×倍という形になるからである。もちろん量の四則演算のように 40 km/h × 2 h＝(40×2)×(km/h×h)と計算してよいのであれば、(40×2)×(km/h×h)＝(40×2)×(km)＝40 km×2 とも計算できるので、二つの乗法を形式的に関連付けることはできる。しかし算数の学習ではこうした単位の計算は行われないので、この形式的な関連付けに期待することはできない。

しかもこの二種類の乗法の問題は、小学校第 2 学年で初めて乗法を学習する際から生じていた。この単元では初めて「倍」も現れ、2 倍、3 倍は基準量の二つ分、三つ分だとされる。単元の導入部では「1 台の車に 4 人ずつ乗ったカートが 5 台あるので、乗っている人は全部で 20 人」という場面を 4×5＝20 と表すといったことを学習する際、4(3)でも指摘したように、これを 4 人の 5 倍と考えるならば後の「倍」の学習と整合するが、「4 人ずつ」を「1 台当たり 4 人」と単位量当たりの大きさのように考え、また乗数も「5 台」と量として考えるならば、倍に基づく解釈とは接続しにくくなる。

乗法については「A を『割合に当たる大きさ』と」したときに「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作が B×p である」(p. 239)ともされていたが、(外延量)＝(内包量)×(別種の外延量)という乗法の捉え方は、無次元量である数の倍を考えるこうした説明とも整合しないことになる。

確かに、乗法的な関係 B×p=A を基にした時、「基準にする大きさ(B)」あるいは「一つ分の大きさ」を求める等分除 (文部科学省, 2017, p. 45)は単位量当たりの大きさに接続し、「割合(p)」あるいは「幾つ分になるか」を求める包含除 (p. 45)は倍や割合に接続するように見える。しかし単位量当たりの大きさの場合は B×p=A の B と A は異種の二量であるのに対し、倍や割合の場合にはそれらは同種であるから、量の間の関係を考慮した場合は、同種の二量の割合 p に関する B×p=A と、二種の二量の割合 p に関する B×p=A とは、基本的

に異なる乗法的な関係である。したがって、4(3)で見たように、乗法的な関係の(b)の解釈において被乗数を求める除法と乗数を求める除法の二通りが考えられたり、(c)の解釈において二通りの除法が考えられたりはするが、一つの乗法的な関係から、同種の二量の割合と異種の二量の割合が直接、現れると考えることはできない。乗法的な関係 B×p=A は p が同種の二量の割合なのか異種の二量の割合なのかにより、表面的には同じ形をしていても、その内容はかなり異なっている。

このように、乗法の二通りの解釈をどう関連付けるのかの問題は小学校第 2 学年の乗法の導入時において既に存在し、その後に学習される乗法や除法をどのように捉えるかにも関わってくる。そしてその関連付けは、割合や単位量当たりの大きさに現れる乗法や除法をどのように解釈するかとも密接に関わると考えられる。しかしその関係は、以上で見てきたように必ずしも明確ではなく、ここにも割合の指導に関わる問題点が存在していると言えよう。

6．暗黙的な形式的拡張

第 3 節や第 4 節で見た問題点に関わっては、ある種の形式的な拡張が暗黙的に行われていることが関わっている。

同種の二量の割合の学習では、第 4 学年までは長さを中心に連続量の場面が用いられることが多い。この場合は 3(1)で見たように、下位基準量を自然に考えることが可能なので、小数倍も自然に解釈することができる。しかし第 5 学年の学習では、回数や人数など離散量が扱われることが多く、そのため下位基準量を考えることが自然にはできにくい場面も多くなる。したがって 3(1)で見たような問題点が解消されていなければ、離散量の割合については測定操作と結びつきにくく「基準量を単位とした比較量の測定値」(p. 218)として理解しにくくなる。そのため、連続量の場合に測定値である割合が比較量÷基準量の商として得られたことを参照して、離散量の場合も比較量÷基準量の商が割合であると捉えざるを得ない可能性が出てくる。つまり、割合は商によっても得られるというよりも、比較量÷基準量の「数(商)が割合である」(pp. 217-218, p. 267)として、割合を規定してしまうのである。ここでは、測定値という量の操作に基づく割合の意味づけから、商という数の操作による規定へ変更するという、ある種の形式的な拡張を見ることができる。

同種の二量の割合に基づく比較の場合も、3(2)で見たように、第 4 学年で扱われるゴム紐などでは、同じゴム紐の変化前と変化後のように、一様性や比例関係が想定しやすい場面が扱われていた。そのため、割合は伸び率といったそのゴム紐の質を表す指標としても解釈しやすく、割合で比較することの妥当性を納得しやすくなっていた。第 5 学年の学習では、一様性や比例関係を自然には想定しにくい場面も含まれるが、もしも 3(2)で見たような問題が残されているとすれば、比例関係を想定しやすい場面では基準量が異なる場合を割合により比較できたという経験をもとにして、そうした想定がしにくい場面でも、基準量が異なる場合は割合により比較することができるはずだと考えることになろう。つまり、納得しやすい場合をもとに、他の場合は形式的に拡張していくことになる。

単位量当たりの大きさで「均す」操作を行う際、確かに 4 枚のマットに 12 人の子どもがのっている場面であれば、それぞれのマットに 3 人がのるように「均す」ことは比較的しやすく、それをもとにマット 1 枚当たりにのっている人数を考えることもできる。しかしマット 4 枚に 2 人しかのっていない場合は、マット 2 枚ごとに 1 人のっていることを「1 枚当たり 0.5 人」と解釈する必要がある。さらにマット 4 枚に 3 人がのっている場合は、そうした解釈も難しくなる。4(1)で述べた問

題が残っているとすれば、「均す」操作がしやすい場面で単位量当たりの大きさの意味を学習し、またその値が等分除により求まることを納得した上で、「均す」操作が容易ではない場面でも、同様に等分除の商が「均す」操作の結果を表すはずだと考えることになろう。つまりここでも、ある種の形式的な拡張が行われることになる。

単位量当たりの大きさの直前に学習される平均の学習でも、同様の傾向が見られる。導入時には液量のように「均す」操作が行いやすく、その結果も目で見える場面が用いられる。しかしその後扱われるものの重さや回数などでは、「均す」操作を物理的には実行しにくく、結果もジュースの 1 杯分のように具体的に見えるとは限らない。そこではジュースの場面で学習したことをもとに、同様の計算により平均が求まることや得られた平均値の表すものを推測することになると考えられる。

このように、最初の学習では量の操作に基づき新たな考え方を納得できるように学習が展開されるが、途中からはそうした操作が遂行しにくい場面も含まれ、そのために、最初の学習で現れた除法の式やその商に基づき納得せざるを得ない状況になる可能性がある。本稿で見てきた問題点は、実際には量的な操作に基づいて納得がしにくい場面について、割合をどのように納得するかの問題に関わるものと言えよう。したがって、これらの問題点を考えることは、そうした形式的な拡張が、私たちの指導において暗黙的に行われていないかを検討することでもあると考えられる。

7．おわりに

同種にしろ異種にしろ子どもたちの割合の理解については問題があるとされ、全国学力・学習状況調査でもそれらの問題の正答率が十分なレベルにないことが繰り返し指摘されてきた。しかし本稿で見てきたように、子どもたちの理解の前に、私たち教師の側の理解にも曖昧な点が多く残されている。その曖昧さを減らし、低学年での乗法と除法の導入の段階から高学年での割合の学習までが整合した展開となるように指導を計画すること、あるいは暗黙的に行われがちな拡張をより明示的に行えるように指導体系を整備することが、教師側に求められていると言えよう。

一つの考え方としては単位量当たりの大きさについて 4(3)で取り上げた(b)の捉え方を採用することにした上で、乗法が「『基準にする大きさ(B)』の『割合(p)』に当たる大きさを求める操作」(文部科学省, 2018, p. 239)だという立場を徹底することである(布川, 2024)。この場合は、単位量に対応する外延量である単位量当たりの大きさを、新たな意味で用いる点を明確にして、それを理解してもらうことが一つの重要な点になる。あるいは学習のしやすさを考慮した上であえて低学年と高学年での乗法と除法の捉え方を変えるという選択肢もありうるが、その場合は、途中のどの段階でどのようにしてその転換を図るかも計画の中に含まれるべきである。

どのような展開を構想するにしろ、本稿で見てきたような諸問題については一定の解答が得られているべきであろう。またそれらの問題のように、私たち教師の割合の理解の中に他にも曖昧なままになっている部分がないかに常に注意を払うこと、そしてその私たちの理解の中の曖昧さが指導の曖昧さとなり、結果として子どもたちが理解しにくい指導につながる可能性を見逃さないことが、割合の理解をいっそう改善するためには必要であると考えられる。

註および引用・参考文献

1) 宮下(2008)は「1 と見る」が実際はかなり難しい考え方であることを、量と数の関係から示している。

2) 栗山と吉田 (2013)は、第 2 用法の文章題の

正答率が 70 %であった時に、第 1 用法と第 3 用法の正答率がそれぞれ 58 %と 60 %であったと報告している。これもあるいは、第 2 用法に相当する基準量の何倍かを構成する操作の方が、基本的であることを示唆しているとも考えられる。

3) これは 30 %を、100 人を元にした時の 30 人の割合などと捉えることに似ている。割合を人数により捉えるのである。

4) シュート数 8 回を元にした時の成功数 6 回の割合に関わり、両者の比例関係を想定して、それぞれを何倍かした場合でもうまさは同じと考えることがある(例えば、高橋ほか (2014))。今の割合 0.75 をシュートが成功する確率と考えた場合、このうまさのままで 100 回シュートした時に 75 回成功する確率は、二項分布をもとに計算すると約 9 %である。したがって、75 回入るとは限らないと考える子がいた場合、むしろその子の方が正しいとも言えよう。確かに期待値は 75 回となるので、(疲労などを考慮しなければ)75 回程度の成功は見込めるかもしれない。しかし単純に割合で考えた場合、例えば成功する確率が 0.75 でも 73 回や 77 回入ることも約 8 %の確率で生じるが、割合としては異なる値となる。8 回中 6 回成功したことと 100 回中 75 回成功したことを「同じうまさ」と考える時、どのような意味でそう言えるのかは自明ではない。

5) 山口(2007)はメスシリンダにどの程度の水が入っているかを%で表すことを割合単元の冒頭で取り上げているが、まだ割合の学習前であるにも関わらず、100 %を越える場合も含めて理解できていたとしている。これは、場面によっては「程度」による解釈が子どもたちにとっては理解しやすいことを示唆しているのかもしれない。

6) 合併では量の値の加法が成り立たない場合でも、異なる量のあわせ方によっては成り立つ場合もあろう。例えば速さの場合、ある速さで動いているものの上で、さらに別の速さで移動した場合、外から見える速さはそれぞれの速さの値の和として表される (Sonin, 2001)。いわば「重ね合わせる (superimpose)」ことが可能な場合には、重ね合わせた後の量の値はそれぞれの量の値の和になる。

7) m はある時間に光が進む距離として定義されているので、距離を時間で表すことも可能かもしれないが、ここではそうした考え方はしないでおく。

8) もしも乗法を数の乗法として捉えるならば、算数で扱う正の有理数の範囲では乗法の交換法則を想定するであろうから、かけ算の順序は問題にならない。またそれにより、除法についても被除数を求めることと除数を求めることを区別する必要もないので、等分除と包含除の区別も意味をなさなくなる。

9) 乗法の意味の発展という際に、「いくつ分」が「倍」へと意味が拡張されるといった説明がなされることがある。しかしその場合も、乗法を「倍」の意味で捉えるとはどのようなことを指すのかが明確にされなければ意図的な設計はできないであろう。また乗法における被乗数と乗数の順序の問題が話題にされることもあるが、そのように乗法において量の性格を重視するのであれば、むしろ量どうしを乗ずることの意味やその場合の単位の整合性などに注意を払うべきであろう。

伊藤雅貴, 山下和之 (2020). 量計算の式に単位を含めるか. 山梨大学教育学部紀要, *31*, 215-224. https://doi.org/10.34429/00004965

栗山和広・吉田甫 (2013). 子どもの思考を基にした教授介入：割合概念について. 愛知教育大学研究報告教育科学編, *62*, 99-104. http://hdl.handle.net/10424/5041 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

国際度量衡局 (2019). 国際単位系(SI)第 9 版

(産業技術総合研究所計量標準総合センター訳). 同センター. https://unit.aist.go.jp/nmij/public/report/si-brochure/pdf/SI_9th_日本語版_r.pdf (2024 年 2 月 24 日アクセス)

宮下英明 (2008). 「1 と見る」の数学. 日本数学教育学会誌, *90* (12), 25-29. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.12_25

文部科学省 (2017). 小学校学習指導要領(平成 29 年告示)解説算数編. 日本文教出版.

門間 祐. (2017). 割合の意味理解を意図した学習指導の研究：小学校第 6 学年の比例の学習場面に焦点を当てて. 山形大学大学院教育実践研究科年報, *8*, 250-253. https://yamagata.repo.nii.ac.jp/records/4171 （2024 年 2 月 24 日アクセス)

森川鉄朗, 西川保子 (1997). 科学教育における量の計算法について. 上越教育大学研究紀要, *17* (1), 365-375.

Nunokawa, K. (2012). Multi-relation strategy in students' use of a representation for proportional reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, *8* (4), 233-248. https://doi.org/10.12973/eurasia.2012.842a

布川和彦 (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372. http://hdl.handle.net/10513/00008350 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

布川和彦 (2022).「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, *104* (2), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.104.2_2

布川和彦 (2024). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, *11*, 195-205. http://hdl.handle.net/10513/0002000148 (2024 年 2 月 29 日アクセス)

Silverman, J. R. (2021). Exploring sustainability metrics in general chemistry using intensive and extensive properties of matter. *Journal of Chemical Education*, *98*, 2741-2745. https://doi.org/10.1021/acs.jchemed.1c00113

Simon, M. A. & Placa, N. (2012). Reasoning about intensive quantities in whole-number multiplication? A possible basis for ratio understanding. *For the Learning of Mathematics*, *32* (2), 35-41.

新堀 栄 (2000). 数学的道具としての概念形成を目指した教材構成に関する研究：「単位量あたりの大きさ」を例として. 上越数学教育研究, *15*, 61-74. http://hdl.handle.net/10513/2405 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

Sonin, A. A. (2001). *The Physical Basis of Dimensional Analysis*. Department of Mechanical Engineering, MIT. https://web.mit.edu/2.25/www/pdf/DA_unified.pdf (2024 年 2 月 24 日アクセス)

杉山吉茂 (2008). わり算は包含除：割合の理解の素地として. 日本数学教育学会誌, *90* (2), 2-6. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.2_2

杉山吉茂 (2012). 倍と割合：倍がわかれば、割合もわかる？ 算数授業研究, *83*, 4-7.

田端輝彦 (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, *85* (12), 3-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_3

高橋丈夫・田端輝彦・市川啓 (2014). 導入時における比例関係の顕在化に関する一考察：同じ割合の数対を作ることを通して. 日本数学教育学会誌, *96* (4), 4-15. https://doi.org/10.32296/jjsme.96.4_4

Thompson, P. W. (1994). The development of the concept of speed and its relationship to concepts of rate. In G. Harel & J. Confrey (Eds.), *The Development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 179-234). State University of New York Press.

山口 潤 (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究：「割合のイメージを生かした表象」の効果. 上越数学教育研究, 22, 101-112. http://hdl.handle.net/10513/2509 (2024 年 2 月 24 日アクセス)

上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 15-22

算数数学授業におけるメタディスコースの情意的性格

髙　橋　　等
上越教育大学

各自が同じ内容を背景としていると思い込み会話をしている際に，各々が異なる内容を背景として話していることがある。算数数学授業においても，教師と子ども，或いは子ども同士が同じ内容を考えていると思い込みコミュニケーションを成立させているにもかかわらず，その後互いに異なることを考えていたことに気づくことがある。

こうした場合，ただの勘違いとしてコミュニケーションは修正され，互いが共有すべき内容を確認していくことになる。算数数学授業においては，この勘違いが授業を進展させる契機となる場合さえある。しかしながら，算数数学授業でコミュニケーションが成立しているにもかかわらず互いに異なる内容を考えているような状態が，授業が進展しても解消されない状態があれば，それは授業の構成員にとって不利益を生じさせることになる。

Güçler (2016)は Sfard(2008)の言うメタディスコースという見地から，大学での授業において関数の捉えに係る異なるメタ規則をもつ学生の活動を分析している。メタディスコース，即ちメタ規則とは，考察している対象へのディスコース参加者の活動―思考を含む―のパタンを定義するものであり，暗黙的なものである。Güçler (2016)は，関数というものについてディスコースしている授業参加者が，教授実験の後も未だ関数の異なる捉えをしていたことを浮き彫りにしている。その様々な関数の捉えがある状態はメタディスコースという視点から説明できるものである。なお，Güçler (2016)はメタディスコースの分析を主たる目的としており，教授実験後も多様さの残る関数の捉えに必ずしも焦点を当てているわけではない。

ところで，Güçler (2016)の教授実験を分析するなかで，メタディスコースに情意的性格が関与していると考えざるを得なくなるに至っている。Sfard(2008)はメタディスコースの特徴に情意的性格があるとは論じていないし，Güçler (2016)の分析においても殊更に情意的性格に言及しているわけではない。ここに，メタディスコースの特徴として情意的性格をあげてよいものか議論する必要が生じてくる。

この研究の目的は，算数数学授業におけるメタディスコースの特徴を，情意的性格に焦点を当てて理論的に明らかにすることである。研究目的の達成のために，最初に，Sfard (2008)の理論におけるメタディスコース論を概観する。次いで，Güçler (2016)の教授実験を概観し，Sfard(2008)の理論をもとに Güçler (2016)の教授実験の結果を分析する。この分析は Güçler (2016)の論文中の分析とはややかけ離れたものとなっている。最後に，その分析を通して得られた結果からメタディスコースと情意的性格との関係について提案をする。

１．Sfard (2008) によるメタディスコース

Sfard(2008) は，L. Vygotsky 及び L. Wittgenstein の理論を発展させ, 人間の認知

とコミュニケーションに対するアプローチを融合させた視点としたコモグニション論を提唱している。その論のなかにメタディスコースとルーティーンがある。

メタディスコースはしばしばメタ規則という呼称で代替されるけれども，Sfard(2008)は対象レベルの規則とともに次のように定義している，

object-level rules are narratives about regularities in the behavior of object of the discourse, whereas metarules define patterns in the activity of the discursants trying to produce and substantiate object-level narratives. (p.201)

Sfard(2023)による和訳を付す，

対象レベルの規則は，ディスコースの対象の振る舞いにおける規則性についての「語り」であり，それに対して，メタ規則は，対象レベルの「語り」を生成し立証しようとする，ディスコース参加者の活動におけるパターンを定義するものである。（p．221）

ディスコースの対象とは，ディスコースで取り上げている数学的対象のことであり，振る舞いにおける規則性とは，ディスコースの進展によって変容していく数学的対象の基にある数学的規則である。他方で，メタ規則とは，数学的対象についてディスコース参加者がもっている規則性で，反復的に表れ，例えばある数学的対象に対して何時も用いる証明の仕方であったり，或る集団のみの共通理解となっている数学的事実であるものの一般性をもたない知識であったり，数学史的にはその変遷過程で承認されてきた各々の数学的事実―或る期間は数学的事実乃至は真理として承認されてきた―である。

更に，Sfard(2008)は，メタディスコースの特徴を次のように述べている，

The word *rule* has many connotations, only some of which would be proper in the present context, Thus, for example, although the word implies constancy, metadiscursive rules may *evolve* over time (as opposed to the object-level rules of mathematics, which, once formulated, remain more or less immutable). Metarules are also made distinct by being mainly *tacit,* and by being perceived as *normative* and value-laden whenever made explicit. Finally, metarules are *constraining* rather than deterministic and are *contingent* rather than necessary. (p.202)

Sfard(2023)による和訳を付す，

規則という言葉には，多くの意味合いがあるが，現在の文脈では，それらのうちのいくつかが適切であるに過ぎない。例えば，その言葉は恒常性を含意するが，メタディスコースの規則は時間とともに**進化する**ことがある(対照的に，数学の対象レベルの規則は，一度定式化されると程度の差はあれ不変なままである)。また，メタ規則は，主として**暗黙的**であるものとして区別され，さらに，明示的にされるときはいつも**規範的**で価値負荷的なものとして認識されることによっても区別される。最後に，メタ規則は決定論的というよりもむしろ**制約的なもの**であり，必然的というよりもむしろ**偶然的**である。(p.222)

これら可変性，暗黙性，価値負荷性，柔軟性，偶然性は，授業を含めた学習時のコミュニケーションにおける人間の活動を想像すれば，当然の如く当てはまる特徴である。メタディスコースは，授業時に頻繁に現れる。

２．Sfard(2008)によるルーティーン

メタディスコースと対になる語にルーティーンがある。Sfard(2008)はルーティーンを次のように定義している，

A *routine* may be defined as a set of metarules that describe a repetitive discursive action. This set of pattern-defining rules may be divided into two subsets:

・The *how* of a routine, which is a set of metarules that determine, or just constrain, the course of the patterned discursive performance (*the course of action* or *procedure*, from now on) and
・The *when* of routine, which is a collection of metarules that determine, or just constrain, those situations in which the discursant would deem this performance as appropriate. (p.208)

Sfard(2023)による和訳を付す，

ルーティーンは，反復的なディスコース的行為を記述するメタ規則の集合として定義されるだろう。パターンを定義する規則のこの集合は，２つの部分集合に分割されるだろう。

・ルーティーンの**どのようにして**(*how*)という部分集合。これはパターンを有するディスコース的行為遂行の系列(これ以降，**行為系列**あるいは**手続き**とする)を，決定する，あるいは単に制約するメタ規則の部分集合である。
・ルーティーンの**いつ**(*when*)という部分集合。これはディスコース参加者がこの行為遂行を適切なものとみなす状況を，決定する，あるいは単に制約する，メタ規則の部分集合である。(p.229)

このルーティーンとは，観察者によるディスコースの捉えに依存する。観察者にとっては，ルーティーンを見定めることにより，その背後にあるメタディスコース，即ちメタ規則を顕わにすることが必要となる。

３．Güçler(2016)の教授実験の概観

Güçler(2016)は Sfard(2008)に基づく研究で，米国東部の大学での微積分に係る教授実験を行っている。調査参加者は一名のプレサービス中の大学生，七名のインサービス中の現職教員である。現職教員には四年から 12 年の教員経験がある。教授実験の授業は現職教員が研修期間中に参加する唯一の微積分の授業であり，彼ら彼女らが大学で微積分の授業に参加してから五年以上経っている。教授実験の様子はビデオ録画され，授業の振り返りの記述，及び学期の終わりに実施された半構造化インタビューの結果もデータとなっている。

Güçler(2016)は，最初の授業で調査参加者に，関数を自分の言葉で定義するように要求している。調査参加者 Carrie は，“独立変数と従属変数との関係，ただし各々の独立変数は一つの独立変数と確実に組になっている，” Fred は，“二つの変数の関係，ただし各々の入力値はただ一つの出力値となる，” Lea は，“ある変数の他の変数への従属関係，” Martin は，“或る定義域が値域を生み出すために特定の法則と結びついている数学的概念，” Milo は，“グラフの形状，” Ron は，“ただ一つの出力値をもつ,各々の入力値のこと，” Sally は，“各々の x のただ一つの y に対する一対一対応，垂直線テストを通過すること，” Steve は，“y 値が二つの異なる x 値に重ならない方程式のような概念, それとギャップ(不連続性)がないこと，” と紙に書いている。

続く授業で調査参加者は関数の定義づけの活動をする。最初の活動では，関数とは･･･，という文を一つの言葉で完成させるもので，調査参加者たちは，関係，法則，過程，モデル，写像，グラフ，パタンという言葉を提示している。次の活動は，関数とは･･･，という文を複数の言葉で完成させるもので, Lea は，

“或る変数の他の変数への(単射と全射での)従属関係,” Fred は,“垂直線テストを通過すること,” Carrie は,“総ての入力値が与えられればそれに応じた一つの出力値が出る関係もしくは法則,” と書いている。なお，八名総ての調査参加者はこれら三つの関数の定義に同意している。

次いで教授実験での教師が, 少なくとも 10 通りの関数の定義が集まったけれども，これらは同じ定義か, と問うたところ, Steve は,“関係が全部を取り込んでいると思う，グラフ，写像，パタンは関係の成分,” Sally は,“関係は人々の関係のようにも使えるので曖昧な捉え方だけれども，関係と他の用語の使い方を見れば，関係として関数を話していることを皆が理解している,” と言う。ここで, Güçler(2016)は，Steve と Sally に最初の関数の定義づけからの変化があったとしている。

この後の教授実験で教師は調査参加者に現在の微積分の教科書に掲載されている二つの関数の定義に至る前の数学史における四つの関数の定義が書かれたシートを提示している。Euler の 1748 の定義は, 関数を変量と見るもので，変量の関数は，この変量と幾つかの定数量から或る方法で合成された解析的表現である，というものである。Euler は 1755 の定義では，関数を或る変量が他の変量で決定される総ての様相であると特徴づけている。Dirichlet の 1800 年の定義は，二つの変数 x と y との対応に言及したものである。Güçler(2016)は, Dirichlet の関数の定義により，それまでの Euler の定義からなるディスコースのメタ規則を変化させたとしている。Bourbaki の 1939 の定義では, 関数は二つの集合の要素 x と y との関数関係とし，y は x の関数値としている。Güçler(2016) は Bourbaki の定義に至ってメタ規則が静的になったとしている。

教授実験での教師が，Euler の 1748 の定義について何を考えるか調査参加者に問うたところ，Steve は，“自分が述べた方程式は解析的表現のことだ,” と述べる。教師が，Euler が七年後に定義を変えたことを尋ねたところ, Sally は，“転換があって法則や定義を変える必要があった,” と言い，Milo は，“変化への着眼が分かった,” と言う。教師が，Euler の最初の定義に変化への着眼があったかどうか尋ねたところ，Milo は，“最初のへは無く，最初の定義が方程式に似ているのに対して，次の定義では変量に取り替わっている,” と述べる。Sally は，“誰かが最初の定義が間違っていることを立証したのか,” と言う。Güçler (2016)は, Sally の言う転換がメタ規則の転換を指摘しているとする。

Euler の定義の検証の後，調査参加者は Dirichlet と Bourbaki の定義に対する議論をする。Martin は，“Dirichlet の対応の使用が写像の考えの現れである,” と言い, Steve は,“Bourbaki の定義は誰もが深く理解し得る普遍的な関数の定義である,” と述べる。

調査参加者が学期の終わりのインタビューで，関数の定義を自分の言葉で述べることを求められたところ，教授実験の最初に示した彼ら彼女らの定義から変容があったと Güçler(2016)は述べている。Carrie は，関数を，“或る集合から要素を取り出し，それらを別の集合の要素に関係づける若しくは写像する法則である,” とし，Fred は，関数を，“変化であり対象である，自分の頭の中では強力なモデルなので，まだ入力値と出力値のモデルを使用したい,” と述べる。Lea は，“関数は或る変数から他の変数への従属関係，何かが変化するとそれに関して他の何かが変化する原因となる,” と言い，Martin は，“何かが入力するとただ一つが出力する総ての入力値,” と述べる。Milo は，“単射と全射が思い浮かぶ,” と述べ，Ron は，“数学者にとっては写像であり，子どもたちにとっては各々の入力値がただ一つの出力値をもたなければならないもの,” と述べる。Sally は，“入力値と

出力値との関係，ただし各々の入力値はただ一つの出力値をもつ，”と述べ，Steve は，“一つの入力値が二つの出力値をもたない変数の集合，”と述べる。

４．Güçler(2016)の教授実験の結果の分析

ここでは，Güçler(2016)の教授実験をGüçler(2016)自身の分析からやや離れて分析していく。最初の授業から学期後のインタビューまでに関数の捉えを明らかに変容させたのは，Carrie, Martin，Milo，Ron，Sally，及び Steve であり，変容させていないのがFred 及び Lea である。

各々の調査参加者が最初の授業で示した関数の捉えは，強いメタ規則となっている。現在の教科書に掲載されているような関数の定義に対して，調査参加者が示した関数の多くの捉えは，より初歩的であり，幾つかは関数の性質を射止めているものの，幾つかは曖昧さを含んでいる。Güçler(2016)によるデータとしては提示されていないものの，或る数学的対象—最初は関数の教材として提示されるとしてもよい—を巡り調査参加者が議論することとなれば，各々による異なる関数の捉えが現れるのだろう。

教授実験では，それぞれの関数の捉えをしている調査参加者が関数の定義づけを要求され，Steve と Sally が関数を捉えるための鍵概念が“関係である”と述べる。関数の捉えを変容させていく Steve にとっては学期後のインタビュー時に至るまでの過度期における関数の捉えの現れである。Sally は最初の授業で一対一対応に着目していることから，それを更に包括する視点で関係という語の使用に同意しているのかも知れない。

更に，数学史に出現する関数の定義を巡る議論で，Sally は定義の進化，Euler b による最初の定義から次の定義への転換への着目に言及し，Milo はそこでは変化への着眼があったと述べている。Martin は Dirichlet による対応への着目を指摘し，Steve は Bourbaki の定義の普遍性に言及している。Sally，Milo，Steve とも関数の捉えを最終的に変容させるけれども，数学史に現れる数学者のメタ規則——一定期間承認されている関数の定義と定義の変遷—に曝されることにより，自身のメタ規則を変容させていくことになる。

５．好意性や信念とメタディスコース

Fred と Lea とは教授実験の最初と学期後とでは関数の捉えを変容させなかったけれども，しばしばメタディスコースが反復性を示すことを考慮すれば，彼ら彼女らの関数の捉えはメタ規則となっている。更に，Fred が，“自分の頭の中では強力なモデルなので，まだ入力値と出力値のモデルを使用したい，”と述べるように，彼のメタ規則には何らかの固着性が関与しているともとれる。Fred と Lea とも，教授実験を通して，様々な関数の捉えについて考え，関数の定義の歴史的推移についても考えていることから，メタ規則を変容させる機会は多くあった筈である。その上で，彼ら彼女らの関数の定義を変えさせないものは何であろうか。Sfard(2008)は，比較的安定したメタ規則もあるなかで，その可変性を大きな特徴の一つとしてあげているにもかかわらずにである。

認知論からの分析をするとすれば，その固着性を信念もしくは好意性という語によって説明できそうである。信念や好意性によって支えられるメタ規則をメタディスコースとして認めてもよいものだろうか。勿論，特に信念には Sfard(2008)の言うメタ規則の価値負荷性，即ち共同体で共有されている規範が関係していそうであるけれども，信念は一人の個人の有するものでもあり得る。

Fred の，“自分の頭の中では強力なモデルなので，”という発言の背景には，入力値と出力値のモデルを学習した際の何らかの文脈，例えば当時の担当教師との係わりや授業の状況，或いは学習後でのそのモデルの使用経験など様々な影響があるのかもしれない。何れ

にしても，認知論で言う信念や好意性を説明するには, Sfard(2008)の言うメタディスコースの特徴に新たな視点をもたせる必要がありそうである。

なお，メタディスコースの特徴に好意性―好き嫌い―を加えることを論じたのは浦野(2018)である。浦野(2018)は, Güçler(2016)の知見を分析することを通して，好意性に着目したのである。

６．情意的性格とメタディスコース

信念や好意性は認知の情意的性格と密接に係わり，好意性は情意的性格そのものである。ところで，Sfard(2008)は，その論を通して情意には言及していない。その理由として，Sfard(2008)が掲載している事例の各々で情意が扱われていないため分析の対象になっていないこともあり得るものの，コモグニション論の今後の展望で言及している主体化，アイデンティティは，本来的には情意的性格を含むものなのである(cf.　Erikson, 1959, 1968,; Bishop, 2012; 髙橋，2013，2014，2015)。参考のために Sfard(2008)が提示しているアイデンティティの定義をあげておく，

More specifically, subjectifying is the process constructing *d*-object signified by such personal pronouns as *I*, *you*, and *she*. (p.290)

Taking the ubiquitous phenomenon of subjectifying as a point of departure, we may now operationalize the term *identity* as signifying the products of this activity. According to this definition, identities are to be understood as reifying narratives about a person, endorsed by their authors as reflecting the actual or expected state of affairs. (p,291)

Sfard(2023)による和訳を付す，

より明確に言えば，主体化は，**私，あなた，彼女**のような人称代名詞によって記号表現される *d*-対象を構成するプロセスである。(p.321)

主体化するというどこにでもある現象を出発点とすれば，**アイデンティティ**という用語を，この活動の所産を意味することとして操作化できよう。この定義によれば，アイデンティとは，ある人についての具象化した「語り」であり，その作者が，実際のあるいは予期される事態を反映していると承認した「語り」として理解できる。(p.322)

Sfard(2008)のアイデンティティの定義に対しては，「語り」(narratives)の定義まで遡らなければ，その内容は分からない。Sfard(2008)の言う「語り」(narratives)とは次である，

Narrative is any sequence of utterances framed as a description of objects, of relations between objects, or of process with or by objects, that is subject to *endorsement* or rejection with the help of discourse-specific substantiation procedures. Endorsed narratives are often labeled as *true*.　(p.134)

Sfard(2023)による和訳を付す，

「語り」は，対象，対象間の関係，対象を用いるプロセスに関する記述として形作られる一連の発言であり，それはディスコースに固有な立証の手続きを使って，**承認**もしくは拒否にさらされる。承認された「語り」は，しばしば**真**とラベル化される。(p.146)

結局，Sfard(2008)の論においては，「語り」が情意の影響を受けなければ，主体化，アイ

デンティティが情意的性格を持つとは言えないことになるし，私，あなた，彼女のような人称代名詞によって d-対象を構成するプロセスに情意的性格が含まれれば，アイデンティティにも情意的性格が含まれることになる。

では，Sfard(2008)が数学的対象を巡る「語り」において情意的性格に焦点を当てているかと言えば，彼女の示す事例や理論展開を踏査しても，その様な形跡は見られない。Sfard(2008)は寧ろ情意的性格に言及することを避けているようにも見える。

数学的対象の「語り」には情意的性格が影響を及ぼさないものかどうか。一般的な見解から言えば,「語り」に相当する現象を分析する数学教育学研究において情意的性格は多く扱われている(e.g., Hannula, 2002; Goldin, 2002; Goldin et al., 2011)。数学教育における教育現象として情意的性格は無視できない，否，大いに影響があると見なさなければならない。なお，Goldin (2002) や Goldin et al.(2011)を始めとする情意研究には認知論に起源をもつものも多く, Sfard(2008)はコモグニション論に認知論を超えコミュニケーション論と融合的な視点をもたせるために，情意的性格を扱うことを避けたのかも知れない。

7．暗黙性とメタディスコース

Sfard(2008)はメタディスコースの特徴の一つとして暗黙性をあげている。メタ規則は，通常は観察者により特定されるもので，多くの場合ディスコースへの参加者にとっては意識されないものと Sfard(2008)は述べる。観察者から見てディスコース参加者の行為を制御しているのは運用されているメタディスコースであると言う。他方で，ディスコース参加者が自らのメタディスコースを意識し，自身の行為におけるパタンを反省し，それらのパタンを新しい数学的対象に転化することがある。こうした活動は数学者に多く見られるとされ，この場合は承認されたメタディスコースであると言う。Güçler(2016)における八名の調査参加者の関数の捉えの意識化は，この承認されたメタディスコースにおけるものである。

ところで，人間の意識していない内面─暗黙性─を Polanyi(1958，1966)は暗黙知(tact knowing)と呼んでいる。暗黙知は，豊富な情意的性格とイメージとを含む。Sfard(2008)の言う運用されているメタディスコースがディスコースへの参加者にとって暗黙であれば，メタディスコースに情意的性格やイメージが含まれるのではなかろうか。先に述べた信念や好意性が運用されているメタディスコースの方向付けとなるに違いない。

勿論，承認されたメタディスコースが自身によって運用されているメタディスコースへの反省という意識化を経たものであれば，承認されたメタディスコースにも情意的性格が含まれることになる。例えば，Güçler(2016)に登場する Fred は，自らの好意性を強く意識したかも知れないのである。

他方で，運用されているメタディスコースが承認されたメタディスコースとなる際に，情意的性格が引き離されて承認されたメタディスコースには情意的性格が含まれないという見解もある。しかしながら，Polanyi(1958, 1966)の論における焦点的意識と従属的意識とにおいては，焦点的意識が働く際，即ち Sfard(2008)による反省という意識化の際にも暗黙知にある従属的意識は強く働いている。従属的意識は意識の表層に出現せずとも，焦点的意識に影響を与える。この従属的意識は情意的性格を含むものである。承認されたメタディスコースが情意的性格を含まないことはあり得ない。

ここに，メタディスコースの特徴として信念や好意性という情意的性格を含めることを提案する。

8．結語

メタディスコースを巡って情意的性格を論じてきたけれども，大きくは L. Vygotsky と L.

Wittgenstein の理論に依拠している Sfard (2008)においては，情意的性格を積極的に論ずる必要はないのかも知れない。あったとしても，それは見せかけのメタディスコースの特徴でその他の範疇に入る性格なのかも知れない。しかしながら，コモグニション論が数学教育における現象の総てを説明し，数学教育実践の方向付けを試みるのであれば，情意的性格を論ずることは避けて通れないことなのではなかろうか。コモグニション論において認知論とコミュニケーション論の統合を図るなかで，双方の論のうちの何かを捨てなければならないとしたら，それは大きな損失であろう。認知論としては情意的性格が数学教育学研究として積極的に論じられてきたからである。

文献

Bishop, J.P. (2012).“She’s always been the smart one. I’ve always been the dumb one”: Identities in the mathematics classroom. *Journal for Research in Mathematics Education, 43, 1,* 34–74.

Erikson, E. H. (1959). *Identity and the life cycle*. New York: Norton.

Erikson, E. H. (1968). *Identity: Youth and crisis*. New York: Norton.

Goldin, G.A.(2002). Affect, meta-affect, and mathematical belief structure. In G. C. Leder, E. Pehkonen & G. Törner (Eds). *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?*, 59-72. Kluwer Academic Publishers.

Goldin, G. A., Epstein, Y. M., Schorr, R. Y., &Warner, L. B. (2011). *Beliefs and engagement structures: Behind the affective dimension of mathematical learning,* 43, 547–556. ZDM.

Güçler, B. (2016). Making implicit metalevel rules of the discourse on function explicit topics of reflection in the classroom to foster student learning. *Educational Studies in Mathematics, 91,* 375-393.

Hannula, M. S. (2002). Attitude toward mathematics: Emotions, expectation and values. *Educational Studies in Mathematics, 49,* 25-46.

Polanyi, M. (1958). *Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy*. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi, M. (1966). The tacit dimension. Gloucester: Peter Smith Pub.

Sfard, A. (2008).*Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York: Cambridge Univ. Press.

Sfard, A. 岡崎正和&山田篤史監訳. (2023). コミュニケーションとしての思考―人間の発達，ディスコースの成長，数学化―. 共立出版.

高橋等. (2013). 算数に関し子どもが形成する素朴なアイデンティティの様態 ―Waku の場合―. 数学教育学論究, 95, 217-224.

高橋等. (2014). 小学生のもつ算数に関するアイデンティティ ― 二年生時から三年生時までの一貫性のあるものの特徴について ―. 数学教育学論究，96，97-104.

高橋等. (2015). 或る小学生のもつ算数に関するアイデンティティ―情意的要素を中心としたアイデンティティの連関性と学習観の転換―. 日本数学教育学会誌，97，12，4-15.

高橋等. (2018). 関数史と我が国の中学校数学教科書における関数の定義の変遷―学校数学での関数の定義の扱い方への提案―. 東北数学教育学会年報. 3-16.

浦野正. (2018). 数学授業における子どものメタディスコースに係る理論. 上越数学教育研究，33，53-62.

上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 23-32

割合のインフォーマルな知識を利用した子どもの学習過程

佐藤　茂太郎
兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科院生

１．研究の背景と目的

(1)　割合に関する先行研究(割合は比例関係が前提とする立場)

割合の指導に関しては，これまでにも多くの研究が積み重ねられてきている。この中には「差で比べる」と「倍で比べる」の対比から割合の見方へと高める研究がある。例えば，シュートの成功率に関して，比例関係を前提として同じ数対をつくり出し，それらに共通する比例定数に着目させるといった研究がある(土屋，2002；田端，2003；早川，2004)。また，割合の素地指導としては，前提となる比例関係を顕在化させる試みもなされてきている(青山，2012)。これらを受けて，子どもが比例をどのように見出し，また認めていったかについての詳細な検討をしている研究がある(高橋・田端・市川，2014)。このような蓄積のもと現在使用される教科書では，シュートの成功率を求めたり試合の勝率を考えたりする場面が扱われる場合が多い。教科書によっては，割合は比例関係が前提であることを明示的に示しているものもある(例えば，藤井ほか，2020，5 年下，p.71)。このような学習素材は，子どもの身近な生活場面を想起させるものであり工夫されているものと思われる。

(2)　割合に関する先行研究(子どもの潜在的にもっている見方や考え方を活かす立場)

一方，ここまで述べてきた先行研究や学習素材に対して渡辺(2011)は「大小関係はわかるが全体の中の部分の数を見ることは難しい」，「バスケットの投げた数と入った数では，子どもはどちらが上手いかを感覚的に捉えることが難しい」，「比例関係のない場面に，比例関係を取り入れることは子どもにとって問題を難しくする面もある」と指摘している。

そして，割合の見方を学習する前の子どもの中には，全体の量と部分の量の関係で見る子どもが存在することを述べ，未習の子どもが潜在的に持っている割合の見方に着目した研究を行い，その有効性を検証している。

半澤・小泉(2021)も渡辺(2011)の研究に依拠する形で実践を行い，子どもが本来持っている割合の見方を引き出すことができたと述べている。

このことに関わって中村(2002)は「今後の割合研究の方向性」の中で，「割合の見方は，潜在的に子どもは持っていると考える」と述べ，その考え方を算数指導の中で顕在化させていくことを指摘している。さらに，これまで以上に倍概念や乗除法の意味指導，分数指導などと関連付けて割合指導を意識的に指導すべきであるとも述べている。

ここで述べてきたことに関連したことは海外でも指摘されている。例えば，人間には比(割合)の原初的な知覚装置(処理システム)が備わっていること，人間やサルに関して比率の大きさにとても敏感であることを指摘している研究もある(Matthews & Lewis，2016；Matthews & Ellis，2018) 。

ここまで述べてきたように，同じ数対から比例定数を導出する研究に対し，子どもの潜在的に持っている割合の見方を生かすべきとの見解も生じている。それに関わり研究が行われ，検証されてきていることが分かる。

(3) 割合のインフォーマルな知識を利用した立場

(2)で述べてきた研究に類似する先行研究として，割合に関するインフォーマルな知識に着目した研究もなされてきている。この割合に関するインフォーマルな知識は，子どもが持っている知識で，割合を学習する以前に日常生活の中で獲得した知識のことである。本研究ではこの割合に関するインフォーマルな知識を，(2)で述べた，子どもの潜在的に持っている見方や感覚，生活経験で有した知識と捉える立場とし，例えばタブレットやスマートフォンで見るバッテリー残量を表現する％(百分率)等がそれに対応する。

このことに関し吉田・河野・横田(2000)は，割合をまだ学習していない公立小学校の第 5 学年の子どもに対して 40 個のおはじきの 50 ％や 25 ％などを問うている。未習の学習にも関わらず約 7 割の子どもは，40 個の 50 ％を求めることができたと述べている。

また，吉田・河野(2003)は，割合を学習する以前から子どものインフォーマルな知識はかなり豊かであることを指摘し，日常生活の中で割合の基本的な意味を獲得していると述べている。この論文では，百分率(%)を量という視点から理解しているとしている。また，未習の内容にも関わらず，既習事項やインフォーマルな知識を利用して，比の第 2 用法の問題を解決することができることを明らかにしている。

吉田・河野(2003)の研究では百分率のインフォーマルな知識を利用しながら学習活動を進める群と，教科書に準拠した学習活動を展開する群とに分けて分析している。ここでは，具体的な授業の発話記録等の質的データを分析するというよりも，事前事後調査の結果を統計的手法により分析するに留めた研究となっている。

割合のインフォーマルな知識を利用した他の研究として，山口(2007)やNunokawa(2012)がある。山口(2007)は，第 5 学年の子どもが百分率を学習する前に，百分率に関する豊かな感覚があることを指摘している。第 1 時の導入では子どものインフォーマルな知識である百分率を考えさせている。そしてその後の課題では，割合メーター―を活用して小数で表現された割合を考える活動になっている。Nunokawa(2012)は視覚モデル(割合メーター―)を用いて数学的概念や技能に関して，子どもの学習過程を分析している。この研究についても，小数で割合を表現した導入から行われていることが分かる。

海外の研究では， Moss ら(1999)は，百分率を「核となる理解」にし，小数や分数の理解へと広げていく指導系列を提案している。我が国の指導系列は小数や整数で表現された割合を出発点としているが，Moss らによる研究はこれとは異なることが分かる。彼らは，その理由の一つに「数のリボン」表示といったパソコン等で馴染み深い表現が使えることなどを挙げている。つまり，ダウンロードのローディング等，百分率に関するインフォーマルな知識

を利用することと関連するものと考えられる。

２．全国学力・学習状況調査から分かる子どもの割合の理解に関する実態

次に，子どもの割合に関する理解の状況について見ていく。これは，全国学力・学習状況調査の結果からうかがうことができる。

(1)　平成 28 年度算数 A 問題 8

平成 28 年度の同調査算数 A 問題 8 では，テープ全体に対する赤い部分の割合で，最も赤い部分の割合が大きいものを 1～4 から選択する問題が出題された。正答率は 74.5 %であった。この結果から，「割合」の意味に関して，感覚的には一定数の子どもは理解しているものと捉えることができる。これは前述した潜在的に持っている割合の見方とも整合するものと考えられる。一方で，全体に対する赤い部分の割合として考えるのではなく，赤い部分の「長さ」に着目して最も長い「4」を選択している子どもも 16.1 %と一定数いることが分かっている。長さに着目して「4」を選択した子どもは，視覚的な量に依存して選択していることが分かる。

(2)　平成 30 年度算数 A 問題 8

平成 30 年度の同調査算数 A 問題 8 では，全体数 200 人に対する 80 人の割合を問うている。その正答率は 53.1 %であり，これは平成 21 年度の類題の正答率 57.1 %とさほど変化がないどころか，正答率のポイント数は若干落ちていることが分かる。こうした状況に対して布川(2022)は「算数教育関係者のこれまでの努力にも関わらず，小学校 5 年で学習する割合や単位量あたりの大きさについての子どもたちの理解は依然として十分とは言えない状況にある。」と指摘している。国立教育政策研究所(2018)の解説(p. 56) には「基準量と比較量を正しく捉えることができず「200÷80＝2.5」と計算し，「2.5 %」と捉えていると考えられる」と指摘している。基準量と比較量を正しく捉えることができていないことや，どのような計算をしたらよいか理解していないものと考えられる。そして子どもは，計算した結果が何を表現した数値であるか理解できていないと推察される。

(3)　平成 24 年度及び平成 25 年度算数 A 問題 8

平成 25 年度同調査算数 A 問題 8(1)は 200 cm の 50 %の長さ，(2)は 500 ｇの 120 %の重さをそれぞれ問うている。正答率は(1)(2)でそれぞれ 76.9 %，77.1 %となっている。(1)の基準量 200 cm よりも大きい場合を選択した子どもが 14.1 %，(2)の基準量よりも軽い場合を選択した子どもが 16.5 %いることが分かっている。

平成 24 年度同調査算数 A 問題 8 は円グラフを示し，そのうち 25 %に対応する人数が 8 人で，全体量を求める問題が出題されている。正答率は 58.7 %であるが，その内訳をみると正答者のうちの 1/3 以上の子どもがインフォーマルな知識を利用していると解釈できる結果を示している。この解決方法は，25 %分が 8 人であるに対し，100 %分を求め際に「8×4」で解決している。学校数学で一般的に指導されるフォーマルな知識としては，8÷0.25＝32(人)で求めるものと考えられよう。しかしながら，子どもの中には，この解決方法以外で考えることが分かっている。

これまで述べてきた子どもの状況から次のことが分かる。まず，一定数の子どもは割合に関する潜在的な見方や考え方を有していること，これは割合に関する感覚的な見方とも言い換えることができる。次に，基準量と比較量が明示的に示されていても，全体に対する部分の割合を求めることに困難性があるということである。これは

基準量と比較量を同定することができないことにつながっている。

平成 28 年度の問題は選択式で 50 %台の正答率あった。この問題で考えれば，200 人が全体量の 100 %である。考える対象の 80 人は全体の 200 人のうちの半分よりやや少ない人数である。このことから，割合も半分より少し少ない，つまり，50 %よりも少し少ない数値であることが予想できる。50 %よりやや少ない数値は，選択肢の中で 40 %のみであるので，計算をせずとも選択することができる。こうした子どもの割合の感覚や知識を活かした指導を検討していく。

まず，子どもは割合の感覚的な見方や考え方を有していることに注目する。本研究では，こうした感覚的な見方や考え方もインフォーマルな知識とする立場とする。次に，日常生活経験によって割合の知識，特にここでは百分率(%)のインフォーマルな知識を有していることに注目する。これらの見方や考え方，知識を指導に活かすことで割合の理解につなげていくことを考える。その一つのアイディアが割合のインフォーマルな知識を利用し活性化させることである。

先行研究では，子どもの既に有している割合，ここでは特に百分率に関する知識を単元の導入から扱っているものがある。その一方で，割合のインフォーマルな知識を利用し単元全体を通して教師の発問や子どもの発話記録，子どものワークシートに記述したデータを分析している先行研究は行われていない状況にある。つまり，学習過程を分析した研究は行われていない。

３．研究の目的及び方法

以上のことから本研究は，子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用し，割合を学習していく過程に焦点を当て，そこでの子どもの様相を分析し検討することを目的とする。なお，本研究における割合とは，比較量が基準量と比べた時，どの程度かを表す数といった立場とする。

埼玉県内公立小学校 5 年 1 学級(24 名)において，割合の授業 13 回を，観察者のビデオカメラ 1 台とスマートフォン及びタブレットを使用して記録した．特に第 1 時の比の第 2 用法を扱った授業，第 5 時の比の第 1 用法を扱った授業，第 8 時の比の第 3 用法を扱った授業の発話記録を分析対象とした。分析対象とした理由は，それぞれの用法ごとの導入場面であり，導入場面を分析することで，子どもの学習の様相がつかめるものと考えたからである。また，解決過程の情報を得るために子どもの記述したワークシートも分析の対象とした。子どもの学習の様相を捉えるためにワークシートに記述された表現は，本研究の目的を達成するために必要と判断したためである。なお，本研究については，所属長，担任及び該当児童の保護者に許可を得た形で行っている。

４．子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用した学習過程

(1) 第 1 時の比の第 2 用法を扱った授業

導入では，メスシリンダーやビーカーに色水を入れる活動を行い割合の量としての視点から捉えさせることにした。これは山口(2007)が「割合の量の視点から捉えることのできるインフォーマルな知識を所有しており，量感覚も確かであることが示された」(山口, 2007, p. 105)と述べられているように，今回対象とした学級でも同様の発言が見られた。例えば，100 %と満杯が同じであると判断したり，半分程度を 50 %と判断したりしている発言が随所にみられた。

別の視点では，教師から発問を投げかけなくても，分数や小数の発言を子どもが自ら行っている場面が表出した。例えば，教師が満杯まで入れると何 %になるか尋ねると，Toya は「分数で言うと，1/2 が 50 %で，1/2 は半分だから 2 個分で 100 %」といった発言をした。自発的に分数と割合のインフォーマルな知識を関連付けながら説明した。また，Aka は色水を満杯に注いだ場合が 100 %になる理由について，全体量を 1 と考え，半分が 0.5 になり，全体量というのは 100 だと考えることを述べている。論理性には乏しい発言ではあったが，%のインフォーマルな知識と小数のフォーマルな知識を合わせながら発言した。

次に，教師は約 10 %分の色水を注いだ。すると Junya は「約 10 %」と発言をする。教師は理由を尋ねると Junya は「1/10 くらいだから。」と発言した。さらに教師は色水を 25 %ほど注いだところ，ある子ども(子どもの特定ができない)からは「1/4」といった発言があった。

この後メスシリンダーからビーカーに容器を変えて，つまり基準量を変えてメスシリンダーのときと同じような活動を展開した。教師はビーカーに 50 %分の色水を注いだ。

なお，このような活動の際には教師は子ども達に注いでいる状況に集中させて，子どもの割合のインフォーマルな知識を利用させていた。また，インフォーマルな知識を利用する集中させる活動は，この後の学習以降についても同様で，例えば，図(モデル)における説明活動を行う際も行われていた。

これらの活動後，「全体の量 200 mL のうちの 50 %分は何 mL か」について解決していった。ここで第 2 用法を扱った意図は先行研究でも指摘があること(吉田・河野，2003)，現行では第 2 学年で「12 個の 1/3」などを扱っており，第 2 用法としての知識を利用するためである。

24 名のうち 2 名の子どもは 200÷50 としていたものの，その他の子は，200 mL の半分や÷2，1/2 と考え 100 mL であると発言した。

Shun はこの時「50 %は 100 mL です。理由は，100 のいや違う，100 %，いや 100 mL の 50 %は，50 mL だと，と思うから，おんなじ風にやって，100 の半分が 50 だから，200 の半分は 100 だと思う」と発言した。特に「100 の半分が 50 だから，200 の半分は 100 だと思う。」は比例的推論を働かせて考えていると捉えることができる。

全体での確認では，割合のインフォーマルな知識と，分数や小数との関連付けを図ること，比例的推論を働かせやすくなることを意図したモデルを示しながら，学習活動を展開した。ここでは 100 %から 50 %に「÷2」していることと同時に「mL」といった量も「÷2」していることを確認した。その際，多くの子どもから「比例」や「比例関係」という言葉が表出した。また，導入素材のメスシリンダーやビーカーの活動を想起させ教師が「50 %って分数でどうやって表したの？」と改めて問うと多くの子どもから「1/2」といった発言がなされた。

次の問題は「全体の量 200 mL のうちの 25 %分は何 mL か」についてであった。Aki は，モデルを使用しながら 25 %分を 1/4 と表現し，100 %を 4/4 と表現した。さらに説明を加えて「50 %が，ちょっと書き足しますけど，75 %が 3/4 で，ここが 4/4，で，それでここが□，ここで 1 回わり算を挟んで，それからこれがわり算で，ここからここも比例して÷2 になって，だから 50 になった。」といった説明をした。

このように展開し第 1 時は終えた。子どもの中には，25 %分を求める問題で 1/4 することや「÷4」することの理解が難しい場面もあったため，第 2 時では素材を連続量から離散量に変更した。さらにモデルを使用しながら説明ができるように指導した。それでも理解に苦しむ子どももいたため，授業内だけではなく，個別に対応し理解していけるようにした。

(2)　第 5 時の比の第 1 用法を扱った授業

問題は「40 このうち，20 こは何 %でしょうか。」であった．Shun は問題提示後「順番が逆になった.」と発言している。Harunori は「40 このうちの 20 こは半分だから，それと同じで 100 パーのうちの半分は 50 パーだから。」と比例的推論を働かせながら説明することができた。全体で確認する際はモデルを使用しながら，40 こと 20 この関係について÷2 あるいは×2 であること，その中で「比例」という用語を子どもが使用しながら説明し合う活動が続いた。

次の問題は「40 このうち 10 こは何 %でしょうか。」であった。この場面では Toya が「40 を 4 等分したうちの 1 こだよ。」といった発言をした。これは 40 の 1/4 することを意味している。また，Remi は，2 段階の基準で考えた。まずは 40 この半分を，次に 20 この半分をといった考えである。この考えと百分率を関連付けながら 25 %であることを確認していった。

さらに，問題「40 このうち 4 こは何%でしょう。」を扱った。Aki は，「1/10」することや「20 を 5 等分する。」といった発言をした。Yugo は，「4」が大体どのくらいか見当を立てる際に，「25 %分の 10 この半分の 5 よりちょっと少ない。」と述べていた。ここではモデルの使用とともに，見積り方略を使いながら学習を進めていた。また，Toya は，「20 こを 5 こに分けたので，20÷5＝4 で，50 パーも 5 で割ると 10 で，4 この時は 10 パーと同じになる。」と説明している。これも比例的推論を働かせて問題解決していることと捉えることができる。さらに Aki は，20÷5＝4(こ)と 50÷5＝10(%)をモデルと関連付けながら説明した。

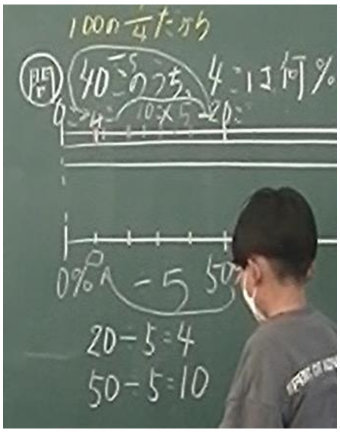

図 1．モデルと結び付けながら説明する Aki

(3)　第 8 時の比の第 3 用法を扱った授業

第 8 時の問題は「ある店では，今日，牛乳が 180 円で売られています。このねだんは，昨日のねだんの 90 %にあたります。昨日の牛乳のねだんはいくらでしたか。」であった。教師は「見積り立てていこうか，いくらくらいですか。」と結果の見積りを子どもに問うた。Reo は「200 円くらい。」，Soushi は「190 円くらい。」と発言した。Aka は 100 %が□になる説明を「問題に書いてあるのが今日の牛乳の値段が 180 円はそれだけだから，昨日の値段が分からないから□。」，さらに「昨日の値段の 90 %って書いてあるから，昨日の値段が 100 %じゃないと求められない。」と述べた。多くの子どもが昨日の牛乳の値段の方が高いイメージを持てていることは，基準量を意識していることが分かる。また，モデルのイメージが身に付いてきていると推察される。ここでは多くの子どもが，10 %ベンチマークを使って，180÷9＝

20(mL)，20×10＝200(mL)と解決した。図は二重数直線になる子ども(Yuna)も出てきており，比例的推論を矢印で表現しながら説明した。

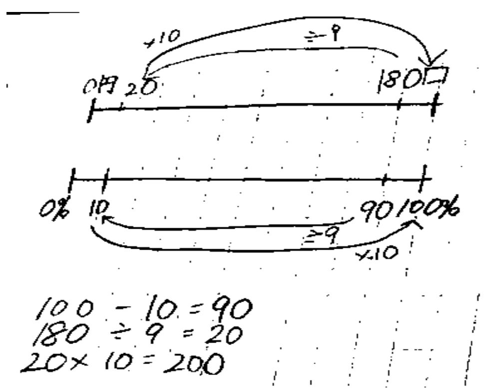

図 2．Yuna による第 3 用法の問題の説明

５．考察

上で述べてきた実際の授業で表出した子どもの反応を受けて考察していく。Lamon (1999)は，割合(%)と分数を関連付けながら指導することが重要だと指摘している。本研究は，子どもの発話記録からこの点において整合するものと考えられる。それは割合のインフォーマルな知識を利用したことによるものと示唆されるからである。なぜなら，教師から何%か問われた子どもが自発的に分数の知識を発言し，%と分数を結び付けて考えているものと推察できるからである。ここで，分数の知識はフォーマルな知識であり，インフォーマルな知識とフォーマルな知識を結び付ける子どももいることが分かった。

先行研究では，導入場面で小数倍の割合を中心に扱っているため，有理数の表現としては小数の場合が主である。今回，子どもが自発的に分数についての知識を表出したことと，割合のインフォーマルな知識を利用したことが関係しているものと考えられる。また，今回扱った百分率の数値は整数値を多く扱ったため，子どもにとって考えやすかったと考えることができる。一般には小数や整数で割合を表現し，その後百分率の指導と関連付けて行うわけであるが，この接続が困難なものであると推察される。

分数との関わりについて杉山(2014)は「整数でも，小数でも，分数でも割合を表すのに用いることができるが，割合を表すことに適しているのは分数である。」(p. 6)と指摘している。本研究のように割合に関するインフォーマルな知識を利用することで，子どもが自発的に割合を分数で表現する発言があることが示唆される。現行の学習指導要領解説算数編(文部科学省，2018)の第 2 学年において，乗法や除法の見方の素地となるよう指導すること，おはじきなどの具体物を用いて，元の大きさの 1/2 や 1/3 の大きさの学習といった解説がある(p. 107)。本研究における子どもの発言は，こうした割合としての分数表現を活かしているものと解釈できる。

このことに関わって清水(2014，p.25) は下学年における分数指導について，「歴史的には，このような割合的な意味につながる初期の扱いは排除されてきたが，子どものインフォーマルな経験に基づく学習もあってよい。」と述べている。百分率におけるインフォーマルな知識を利用したことにより，割合分数としての知識が表出した可能性がある。

小学校学習指導要領・算数科編 (試案)(文部省, 1951)では「一年の指導内容」における「E　分数」の中で「2．次の用語の理解を深めるとともに，これを実際の場において，正しく使えるようにする」とし，その中には「はんぶん」「はんぶんのはんぶん」「しはんぶん」とあり，過去の指導内容においては小学校 1 年生でこの内容を扱っていたことが分かる。これらは全体の半分，全体の半分の半分といった割合

としての分数とも解釈することができ，そうした経験が 5 年生での割合の学習につながっていたものと示唆される。

大谷(2020)は，国外の割合の研究について「分数との関係が常に重視されている。その意味で，新しい学習指導要領の他の領域との関係を視野に入れた割合指導を今後も進めていくことが期待される。」(p. 6)と述べ，割合と分数との結び付きを検討する上で，割合のインフォーマルな知識を利用するといった視点は，有効であるといった可能性があるものと推察される。

子どもたちの解決の中には， 10 %ベンチマークの方略が確認された。これは Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の中でも複数回紹介されている。例えば，25 %ベンチマークを用いて基準量(元々の双眼鏡の値段)を求める問題が事例として示されている．また彼女はベンチマークについて，子ども自身で持ちうる方法は，柔軟に対応できるといった教育的なメリットがあることを指摘している。本研究でもこうした姿が見られた。

第 9 時の比の第 3 用法の問題は「ペットボトルに入ったお茶が，増量して売られています。増量後のお茶の量は 600 mL です。600 mL は増量前の 120 %にあたります。増量前のお茶の量は何 mL ですか。」であった．Yuga は，20 %分を 600÷6＝100 と求めその後，100×5 をして基準量を求めていた。この解決についても比例的推論を働かせていることが分かる。

単元を通して教師は，数直線図(モデル)などに焦点化させたり集中させたりしていた。これは子どもが自発的にある量に対して着目させているとも捉えられる。量的関係に着目しやすい子どもほど，分数概念が発達していることを述べている先行研究にも整合するものと考えられる(McMullen & Hannula-Sormunen, 2014) 。教師が意図的にそのような活動を適宜取り入れていく活動は意味のあるものだと捉えることができよう。

６．結論

本研究は子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用し，割合を学習していく過程に焦点を当て，そこでの子どもの様相を分析し検討することを目的としてきた。

割合に関するインフォーマルな知識を利用したことにより子どもは次のように割合を学習していくことが示唆された。まず，百分率のイメージと分数とを同時に考えながら，子どもは学習を進めることが示唆されたことである。また，子どもによっては，自発的に分数だけでなく小数のフォーマルな知識と関連付けながら考え，割合を理解していくことが示唆された。さらに，学習が進んでいくと，1 %や 10 %，25 %をベンチマークとして解決する姿が見られた。これと同時に，ここでは比例的推論を働かせ問題解決する姿も見受けられた。例えば，200 人のうちの 80 人の全体に対する割合を求める問題では，200÷10＝20(10 %に相当する人数)とし，20×4 が 80 なので 10 %を 4 倍して 40 %と解決する姿が見られた。こうしたことから，子どもが自らベンチマークを考え，それをもとに解決する際に比例的推論が働きやすくなりのではないかといった示唆が得られた。

７．今後の課題

成果が見られたものの課題もある。200 人のうちの 80 人の割合を求める際に前述したように解決したわけであるが，子どもは一般に指導される 80÷200(比較量÷基準量)のようには解決するに至らなかった。第 2 用法の問題「定員 60 名の 25 %」を求める問題でも，60÷2 をして再度÷2 をして

15 名であると求め，60×0.25 への学校数学で指導されるフォーマルな知識に移行することがうまくなされていない。

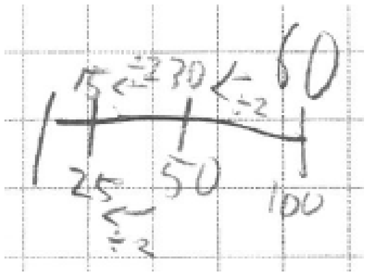

図 3．Taku による 60 名の 25 %分を求める解決方法

今後は，単元のどの時間帯でどのように割合のフォーマルな知識への移行が可能か検討していく。また，分数の理解，除法の理解についても子どもによって困難な場合が見受けられた。下学年からどのようにしてこれらの概念を理解させていけばよいかといったことについても課題として考えられる。

引用文献

藤井斉亮ほか (2020). 新編 新しい算数 5 下, 東京書籍.

半澤諒，小泉健輔 (2021). 児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした第 5 学年「割合」の導入の授業実践. 群馬大学教育実践研究, 38, 55-62.

早川健 (2003) .「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入. 日本数学教育学会誌, 85 (12), 23-30. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_23

J. Moss & R. Case. (1999). Developing children’s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 122-147.

国立教育政策研究所 (2010). 平成 22 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2012). 平成 24 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2013). 平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2018). 平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratio for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.

McMullen, J.& Hannula-Sormunen, M. M. (2014). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations in the Development of Children's Fraction Knowledge. *Cognition and Instruction*, 32(2), pp.198–218.

Matthews, P., Lewis, M. (2016). Fractions We Cannot Ignore: The Nonsymbolic Ratio Congruity Effect. *Cognitive Science A Multidisciplinary Journal*. 41(6).

Matthews, P., Ellis, A. (2018). Natural Alternatives to Natural Number: The Case of Ratio. *Journal of Numerical Cognition,* 4 (1), 19-58.

文部科学省(2018). 小学校学習指導要領解説(平成 29 年告示) 算数編. 日本文教出版.

文部省 (1951). 小学校学習指導要領・算数科編 (試案). 昭和 26 年(1951)改訂版, 日本図書.

布川和彦 (2022). 分数を含む文章題における小学校 6 年生の解決の様相. 日本数学教育学会第 55 回秋期研究大会発表収録，153-156.

布川和彦 (2022). 「小学校下学年における比例的推論の基礎を形成する授業に向けた学習軌道の探究」プロジェクトへのリアクション. 日本数学教育学会第 10 回春期研究大会論文集創成型課題探究の部，267-270.

Nunokawa, K. (2012). Multi-Relation Strategy in Student' Use of a Representation for Proportional Reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 8* (4), 233-248.

中村享史 (2002). 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌，算数教育, 84 (8), 14-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_14

大谷実 (2020). 割合の見方を育む授業-比べる対象を明確にし，二つの数量関係と別の二つの数量関係を比べることを通して-. 新しい算数研究, 597. 4-7.

白石信子 (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究-数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して-. 上越数学教育研究, 21, 69-80.

清水美憲 (2014). 分数の指導内容とその配列の検討-カリキュラム上の重点を何におくか-. 算数授業論究, 92, 22-25.

杉山吉茂 (2014). 分数のよさを生かそう. 算数授業論究, 92, 4-7.

高橋久誠 (1999). 小数の乗法の概念形成に関する考察-インフォーマルな知識からフォーマルな知識への発展-. 上越数学教育研究, 14, 145-152.

高橋久誠 (2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-. 上越数学教育研究, 15, ページ番号不明.

土屋利美 (2002) . 比例の見方を用いた「割合」指導実践. 日本数学教育学会誌, 84 (8), 30-37. https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_30

田端輝彦 (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, 85 (12), 3-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_3

高橋丈夫・田端輝彦・市川啓 (2014). 割合の導入期における比例関係の顕在化に関する一考察-同じ割合の数対を作ることを通して-. 日本数学教育学会誌, 96 (4). 4-15.

Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54(1): 9-35*.

渡辺敏 (2011). 児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究. 日本数学教育学会誌, 93, (2), 11-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.93.2_11

山口潤 (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究-「割合のイメージを生かした表象」-. 上越数学教育研究, 22, 101-112.

吉田甫，河野康男，横田浩 (2000). 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学, 2, 123-133.

吉田甫，河野康男. (2003). インフォーマルな知識を基にした教授介入：割合の概念の場合. 科学教育研究, 27 (2), 111-119. https://doi.org/10.14935/jssej.27.111

実践報告

上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 33-40

数学科における主体的な学びを支えるための手立て

−表の活用を生徒のストラテジーとして提示した関数指導−

藤野　真
上越教育大学教職大学院２年

1. はじめに

1.1. 問題の所在および実践の背景

変化の激しい現代社会において、子供たちがこれからの時代に求められる資質・能力を身に付け、生涯にわたって能動的に学び続けることができるようにするため、学校教育では主体的な学びを引き出す授業改善の取組を活性化していくことが重要となっている。

文部科学省(2017)は、主体的な学びを「学ぶことに興味や関心を持ち、自己のキャリア形成の方向性と関連付けながら、見通しを持って粘り強く取り組み、自己の学習活動を振り返って次につなげること」と説明している。

筆者は「粘り強く取り組み」という部分に課題意識を感じている。これまでの現職中学校教員の経験として、数学の学習場面において課題解決を諦めてしまうような生徒の姿を目にしてきた。学習課題に対して興味や関心があるにも関わらず、粘り強い取組につながらない状況の改善を図りたいと考えた。

現行の学習指導要領（平成29年告示）において、中学校数学科は四つの領域から構成されている。その中でも「関数」の領域は、生徒が学習に困難を抱えている領域の一つであり、関数指導における課題は他領域よりも多数存在するとの指摘もある(永田,2021)。したがって、関数指導における生徒の主体的な学びを引き出すことは中学校における課題の一つであり、指導の改善が求められる部分であると考えられる。

そこで本研究は、生徒の主体的な学びを支えるための関数指導の具体的な手立てについて示唆を得ることを目的とした。

1.2. 粘り強い取組

文部科学省(2019)は、主体的に学習に取り組む態度の評価の基本的な考え方として

①：知識及び技能を獲得したり、思考力、判断力、表現力等を身に付けたりすることに向けた粘り強い取組を行おうとする側面
②：①の粘り強い取組を行う中で、自らの学習を調整しようとする側面

の二つの側面から評価するとしている。つまり、粘り強い取組は教科や学習内容を通して生徒に身に付けさせたい資質・能力の育成を目指していく過程で発揮されるものであり、粘り強い取組自体が目指す生徒の姿になるべきではないと考えられる。

また、中尾(2020)は新しい時代を生き抜くことのできる粘り強さがある子どもの姿を、「未知なる問題に直面しても、その問題を打破できるように、新たな知識や技能を学び取ろうとする。そして、自分の学びを通して習得した力を活用して、思考し判断し表現しながら問題を解決していく」としている。関数学習の場面においても、生徒自身が新たな問題に立ち向かい、思考力・判断力・表現力等を発揮しながら問題を解決していくような経験が必要であると考えられる。

これらの点を踏まえ、本研究においては、関数指導における問題解決の過程で発揮される生徒の粘り強い取組を支える手立てを提案し、その効果の検証を行うこととする。

1.3. 関数指導における課題

現行の学習指導要領（平成29年告示）では、中学校数学科における関数指導の意義として次の二つの点を示している。

①：身の周りの具体的な事象を考察したり理解したりするに当たって、事象の中にある二つの数量の依存関係に着目し、表、式、グラフを用いて考察することが有用であること。

②：関数を用いて具体的な事象を捉え考察し表現することは、これまでの数学の学習の捉え直しやこれからの学習において重要な役割を果たすこと。

また、古藤(1991)は関数指導の具体的なねらいを以下の五つにまとめている。

ア：事象の考察に際して関数関係にある２つの数量をみいだす能力を伸ばす。

イ：関数関係にあるとみられる２つの数量の間の対応の規則を明らかにする。

ウ：関数関係を数学的に表現することによって、その関係の特徴を調べる能力を伸ばす。

エ：基本的な関数について、それらの特徴を知る。

オ：関数的な見方や考え方を、他領域の内容の理解のために利用したり、問題解決の場などに生かす能力を伸ばす。

これらを踏まえ、筆者は関数指導の意義やねらいを「事象における数量の関係を考察する際の手段として、関数関係の特徴や、表・式・グラフを用いた表現・考察方法について学ぶこと」だと捉えた。表現・考察方法について学ぶことは、あくまでも数量の関係を考察する際の手段であることを重視する必要があると考えられる。

しかし、これまでの調査や先行研究によると、生徒の関数学習の実態に対する課題の指摘がなされており、関数指導の意義やねらいが十分に達成されているとは言えない状況がある。平成19年度から平成30年度までに実施された全国学力・学習状況調査のA問題の領域別平均正答率では、平成25年度を除いた全ての年度において「関数」領域が最低である（永田,2022)。回答形式や難易度による多少の差異はあるとしても、生徒にとって関数領域の理解が十分ではないことが伺える。

また、布川(2015)は中学生が関数の学習に困難を抱える原因の一つとして、関数が数や図形のように思考の対象、探究の対象、学習の対象として生徒には成立していないと指摘している。これは上田(2009)が指摘する生徒の関数学習に対する感覚「何をしているのか、何のためにしているのか分からない」とも通ずる部分がある。

熊倉(2003)は、高校受験を終えたばかりの高校１年生に「関数で学んだことは何か」と問うと、「グラフ上で図形の問題を考えること」という返答であり、大学受験を控えた高校３年生への同様の質問に対する返答は「グラフを描くこと」であったと述べている。これらの実態から、生徒は関数の学習をグラフを中心とした表現や考察方法についての学習として捉えている部分があると考えられる。つまり「事象における数量の関係を考察する」という関数指導の意義やねらいの前提が十分に伝わらないまま、単なる操作的な学習として受け止められている実態があることが考えられる。

これらを概観すると、関数指導の意義やねらいが十分に達成されているとは言い難い。中学生にとって関数の学習は、関数関係の表現や操作を中心として受け止められており、事象における数量の関係を考察する際の手段としては受け止められていないと考えられる。この部分について、指導の改善の必要があると考えられる。

2. 先行研究の検討

2.1. 粘り強さとストラテジー

粘り強い取組が生まれにくい状況として、学習対象が把握しにくいことや問題場面の把握が難しいこと、問題解決の手段や方法を身

に付けていないことなどが考えられる。

古藤(1985)は、学習を子どもたちにとって真に意義のあるものにするためにも、自主的に自分の力で問題を解決していく能力の育成に配慮すべきだとし、問題の解決の手立てとしてストラテジー(方略)の指導の重要性を述べている。

近藤(2004)はストラテジーを、よりよく問題を理解したり、問題解決過程が進展したりするのに役立つ一般的な示唆だと述べており、栗原(1991)は1次関数における表や式、グラフを使うといった複数の具体的ストラテジーの指導が生徒の問題解決への意欲を高め、問題解決力を伸ばすのに役立つことを明らかにしている。

つまり、学習課題に対する生徒の粘り強い取組を支える上で、問題解決の手立てとしてストラテジーの提示が有効な方策の一つとなり得ると考えられる。

2.2. 数学的概念の二面性 (duality)

井上(1998)はSfardが示した数学的概念の認識の様式を関数概念に適用し、以下の二つの側面から捉えている。

操作的概念作用 (operational conception)
:関数概念を計算規則として捉える

構造的概念作用(structural conception)
:関数概念を対象として捉える(ただし、ここでは計算規則としての側面は捨象されるのではなく、それをいったん切り離して考えることのできる段階とする)

井上(1998)は、操作的概念作用と構造的概念作用の間を行き来しながら、数学的な記号を通して概念を二面的に認識できるようにするために、1次関数指導において次の五つの留意点を示している。

①:数での考察を基盤とする
②:計算規則としてのプロセスの側面を軽視しない
③:プロセスの比較によって1次関数を定義する
④:グラフによる表現と式による表現とのつながりを重視する
⑤:プロセスとしての関数そのものを学習の対象とする学習場面を設定する

実体がなく、つかみどころのない関数を考察対象として捉えるのは難しい。したがって、まずは数での考察や計算規則としてのプロセスを重視していくことが関数学習の初期段階では必要不可欠であり、操作的概念作用が徐々に構造的概念作用へと移行する場面を意図的に設定していくことで、関数概念を二面的に認識することにつながると考えられる。つまり、関数を操作や表現として捉える段階から、数量の関係を考察する手段として捉える段階への移行を意識した段階的な指導が必要だと考えられる。

2.3. 表の活用

東條ら(2019)は、表をつくることができている児童生徒は、式やグラフに表すこともできており、授業での学びが確実な知識となっていることを小中学校での調査・分析をもとに明らかにしている。また熊倉(2003)は関数指導において、表をもとにして変化の特徴を調べる活動の重要性を指摘している。

小学校の教科書(一松ら,2020)と中学校の教科書(池田ら,2021)を比較すると、小学校ではほとんどの場面で表が提示されているのに対し、中学校では表の提示は導入場面から徐々に減少し、式での提示が増えていく。中学校1年生段階での学習場面を考えると、これまで表をもとに考察していた対象が、式を中心とした考察に変わることのギャップは大きいと考えられる。

関数学習の際に表を作成することは、井上(1998)が示した上述の留意点①、②とも関連が深いと考えられ、数での考察や計算規則としてのプロセスを生徒に促すための具体的な手立てとなり得る。また、表を作成することが数量の関係を考察することにつながり、関数指導の意義やねらいに迫る学習につながる

と考えられる。

2.4. 本研究への示唆

これまでの先行研究から、生徒の粘り強い取組を支えるためには、問題解決のストラテジーの提示が一つの手立てとして考えられる。また、関数概念を二面的に認識できるようにするために、関数学習の初期段階では数での考察や計算規則としてのプロセスを意図的に取り入れながら徐々に関数そのものを学習の対象とする学習場面を取り入れていく必要がある。さらに、小学校では表をもとにした考察を中心として学習を進めているが、中学校の教科書では表の提示は少なくなり、表をもとにした学習経験の少なさが関数学習の困難さの一因とも考えられる。

そこで本研究では、関数指導において表の活用をストラテジーとして提示することが、生徒の粘り強い学習を支え、関数概念の進展に有効な手立てとなるのかを検証する。

3. 研究のねらいと方法

3.1. ねらい

関数指導において表の活用をストラテジーとして提示することが、生徒の粘り強い学習を支え、関数概念の進展に有効な手立てとなるのかを検証する。

3.2. 方法

中学校第1学年「比例と反比例」単元の指導の際に、表の活用を問題解決のストラテジーとして強調した形で生徒に提示する。特に単元前半の指導場面では、表をもとに学習を進める。単元指導全体を通して、生徒の問題解決の様相やその変化を授業中の姿及びワークシートへの記述から検証する。

4. 実践の概要

4.1. 授業実践期間及び対象

・実践期間：2023年10月26日～12月13日
・実践時数：21時間
・対象：Ｘ市立Ｙ中学校１年Ｚ組（33 名）
・授業者：藤野真

対象生徒は、上越教育大学教職大学院の「学校支援プロジェクト」における連携協力校の中学１年生１学級である。本研究の実践期間以外は連携協力校の教科担任(A教諭）が授業を担当しており、実践期間のみ筆者が授業を担当した。Ａ教諭からは本研究の授業実践を観察してもらい、授業者の視点からは気付きにくい生徒の様子について、フィードバックを受けた。

4.2. 授業の実際

表の活用を単元指導全体の中で強調して生徒に提示した。その中でも強調した提示の様子がよく現れていると考えられる場面を以下に述べる。

4.2.1. 単元前半①

関数の導入場面では、様々な関数の例を生徒に提示することで、小学校で学習した比例や反比例以外にも多くの関数があることを確認し、数量の関係に着目する活動を取り入れた。具体的には、携帯電話におけるデータ使用量と料金の関係や、2023年の各月の日数の関係などである。その際には表を提示する場面や表をもとに考察する場面（**図１**、**図２**）を意図的に設定した。「xの値を決めるとyの値がただ１つに決まる」ことの確認を表をもとに行うことで、考察の手段として表の活用を意識付けるような指導とした。

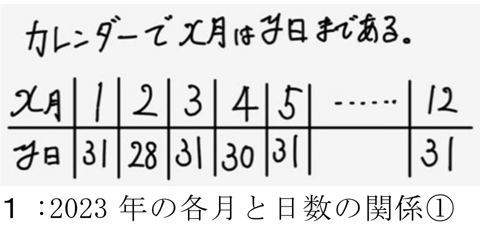

図１：2023 年の各月と日数の関係①

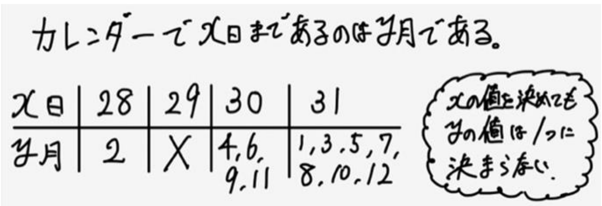

図２：2023 年の各月と日数の関係②

また、比例の学習においては、小学校で学習した比例の定義（一方の値が２倍、３倍…となる時に他方の値が２倍、３倍…になる）

を、表をもとに確認した。その表において、横の変化の様子に着目したのが小学校の比例の定義であり、中学校では縦の対応の関係に着目してその関係を式で表現するというように定義の捉え直しを行った。中学校では比例を$y = ax$の式によって定義するが、その考え方は表では縦の対応関係として捉えることができることを確認した（**図３**）。

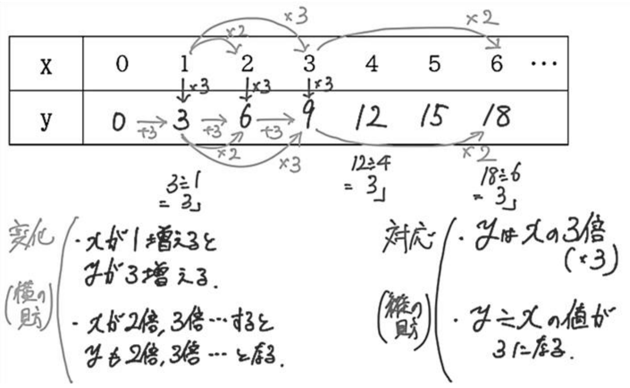

図３：比例の定義を表で確認

数量の関係を式で表し、比例かどうかを判断する問題解決場面においても表の活用を強調した（**図４**）。

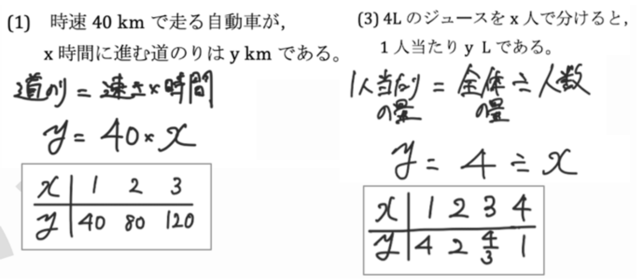

図４：比例かどうかを判断する場面

ここでは、式の形から判断することが出題の意図であると考えられるが、本実践では表を作成することを通して、数量の関係も考察した上での判断を促したいと考えた。実際に、式だけでは比例と納得できない生徒の中に、表での考察を通して納得することができたという生徒も見られた。

このように、単元導入期から表の活用を強調して提示した。関数や比例の定義の確認や問題解決の場面において、表をもとにした指導を多く取り入れた。

4.2.2. 単元前半②

与えられたxとyの値の組から比例定数を求め、yをxの式で表す問題解決場面「yはxに比例し、$x = 2$のとき$y = -8$である。yをxの式で表しなさい。」においても表を活用した解決の手立てを提示した（**図５**）。

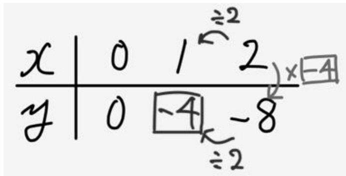

図５：表を活用した解法

教科書では式を活用した解法を扱っているため、表での解法を生徒と確認した後、式での解法も説明をした。

その後、練習問題に取り組む時間を設定したのだが、手が止まる生徒が多数見られた。生徒にどのように困っているかを尋ねると、「結局、表と式のどちらの方法で解けばいいんですか」や「yをxの式で表しなさい、という問題だから式を使って解くんですよね」といった生徒の反応が見られた。また、表を活用して取り組もうとしていた生徒は、与えられたxとyの値の組を記入した後に何をすればいいのかわからない様子であった。

4.2.3. 単元中盤

比例のグラフの学習場面では、表を作成してからx、yの値の組を座標とする点をとっていくよう指導した。これは、教科書も同様の流れとなっている。ただし本実践においては、練習問題の際にも表を作成して考えるよう強調した。黒板での説明の際にも、表をもとにしてx、yの値の組を座標とする点を座標平面上にとっていく過程を授業者が意識的に見せるようにした。比例のグラフは原点を通る直線となるため、原点以外に通る点が１つ見つかればすぐに書くことができる。したがって、比例定数をもとにして原点以外に通る点の座標を求めることで素早くグラフを書かせる指導も考えられる。しかし本実践においては、関数学習の初期段階でもある中学１

年生に、点の集合が線となっていることを実感させたいと考えた。そのためには表を作成してから x 、 y の値の組を座標とする点を１点ずつ座標平面上にとっていく経験が必要だと考え、表の活用を強調して提示した。

比例定数が分数である $y=\frac{2}{3}x$ のグラフについて考える自力解決場面では、多くの生徒が表を作成しながら粘り強く課題解決に取り組む姿が見られた。その中で x 、 y の値の組が整数同士となる点を見つけてグラフを書くことができた生徒の姿も見られた。グラフを書くことができなかった生徒の中にも、表を作成することで $y=\frac{2}{3}x$ のグラフは整数同士となる点を見つけることが難しいことに気付き、問題場面の把握につなげる姿が見られた。

4.2.4. 単元後半

視力検査で用いられるランドルト環の直径と視力の関係について考察する課題（**図６**）を単元末に扱った。

【課題１】
配られたランドルト環の直径(y mm) の長さを測り、視力(x)とどのような関係があるか考え、
視力 0.1 と視力 0.9 のランドルト環の直径を予想してみましょう。

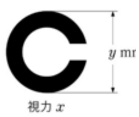

図６：単元末で扱った課題

視力検査に用いられるランドルト環の一部（視力 0.2 、 0.3 、1.5)を生徒に配布し、視力 0.1 と 0.9 のランドルト環の直径を予想するという課題とした。生徒は配られた３つのランドルト環を測定後、視力に対する直径をワークシートに記録していった（**図７**）。

視力 0.2 のとき、ランドルト環の直径は 23 mm
視力 0.3 のとき、ランドルト環の直径は 15 mm
視力 1.5 のとき、ランドルト環の直径は 3 mm

図７：ワークシートへの記録

その後、追加のランドルト環（視力 0.5 、1.0)を配布すると、生徒が自発的に表を作成する姿が見られた。表をもとに、横の変化の様子や縦の対応の関係に着目しながら数量の関係の考察を始める姿が見られた（**図８**）。

x	1.5	1.0	0.9	0.5	0.3	0.2	0.1
y	4	5		9	15	23	

図８：生徒が作成した表

生徒は表をもとに考察した後、「反比例っぽい」という感覚を持ちながら、グラフでの考察に進んでいった。グラフの概形が反比例のグラフと近いことを確認して、ランドルト環の直径と視力の関係を反比例とみなすことで、与えられていないランドルト環の直径を学習した反比例の性質（ $x\times y$ の値が一定）を根拠として予想することにつながった。

4.3. 考察

単元前半の関数や比例の定義の学習場面や、与えられた x と y の値の組から比例定数を求める学習場面においては、表を活用しながら数での考察を基盤として指導を行った。生徒にとっては、小学校で表を中心とした関数学習を行なってきているため、比較的受け入れやすかったのではないかと考えられる。また、様々な値を代入しながら変化や対応の様子、つまり数量関係を考察する素地を養うことにもつながったと考えられる。

しかし、4.2.2. で示した生徒の反応から、 x と y の値の組から比例定数を求める場面では問題解決のストラテジーとして表が有効に働いていないことが伺える。また、表における縦の対応の関係から比例定数を求めることと、式を使って比例定数を求めることを統合して捉えられるような指導になっておらず、それぞれが独立した解法として受け止められていたことがわかった。この部分の実践については生徒の反応から課題が見られた。

単元前半では生徒のアイディアとして表が出されるというよりも、授業者から積極的に表の活用を提示し、関数領域における考察の

手段、問題解決のストラテジーとして提示するような指導となった。前述のように、この段階では生徒にとって問題解決のストラテジーとして表の活用が有効に働いているとは言えない部分もあった。

単元中盤では、グラフを書く際に表の活用を提示しながら、徐々に授業者からの積極的な提示を減らしていった。未知の問題解決場面である比例定数が分数のグラフを書く場面では、表の活用を授業者から強調することはなかったが、自発的に表を作成する生徒の姿が増えていた。表の活用が、関数学習における課題解決や問題場面の把握のためのストラテジーとして生徒に受け入れられ、有効に働き始めていたと考えられる。

単元終末のランドルト環に関する課題では、表の活用が未知の問題解決場面における、場面の把握や数量関係の考察のためのストラテジーとして有効に働いていたと考えられる。単元終末の活用場面や応用問題では問われていることの把握や解決のための方策が立てにくく、手が止まる生徒も少なくない。本実践においては、多くの生徒が表を作成しながら２つの数量の間にある対応の規則を見つけようと粘り強く取り組む姿が見られた。表で考察した「反比例っぽい」という予想をグラフでも確認することで、考察を深めている生徒の姿もあった。関数指導の意義として示されている「身の周りの具体的な事象を考察したり理解したりするに当たって、事象の中にある二つの数量の依存関係に着目し、表、式、グラフを用いて考察することが有用であること」を単元終末の活用場面において、生徒自身に感じさせることができたと考えられる。

このことから、単元指導全体を通して表の活用をストラテジーとして提示したことが、生徒の粘り強い取組を支えることにつながり、関数学習を関数関係の表現や操作の理解に留めることなく、数量関係の考察のための手段として学ぶことにつながったと考えられる。

4.3.1. 成果

本実践では、中学校第１学年「比例と反比例」単元において、表の活用を単元全体で強調した形で生徒に提示する関数指導を行った。

中学校では式での表現や操作が中心となる問題解決場面が多くなってくるが、表の活用を取り入れることで数量関係の考察に意識が向きやすくなり、課題解決や問題場面の把握に有効に働くことが示唆された。特に、数学を苦手とする生徒の手が止まる場面が減少し、初学者の関数学習のストラテジーとして表の活用は有効な手立てとなり得ると考えられる。

単元前半では表の活用を授業者が積極的に促したが、単元中盤頃からは生徒自身が問題解決の手段や場面の把握として自発的に表を活用している姿も見られるようになり、表の活用が粘り強い取組を支えることにもつながっていたと考えられる。

4.3.2. 課題

本実践における課題を以下に述べる。

一点目は、表の活用を強調して指導したため、式を活用した課題解決や考察の場面が減少したことである。中学校では比例や反比例を式で定義し直しているように、式を活用した課題解決や考察を大切な学習と位置付けていると考えられる。本実践では、そういった式を活用した学習場面が従来の指導よりも減少してしまった。それをどう補うのかを検討することが今後の課題として残される。

二点目は、表と式を関連付けながら生徒に提示し、理解を深めるような指導の工夫が必要だということである。本実践では**4.2.2.**で示したように、表を活用した解法と式を活用した解法を統合して捉えさせることができずに、関数学習の困難さを感じさせてしまう場面が見られた。初学者の生徒の思考を十分に想定した上で、生徒自身が表、式、グラフそれぞれの関連を理解・納得できるような指導が必要である。

三点目は生徒たちの関数概念の進展につい

ての分析ができなかったことである。単元末の生徒の姿から、表の活用がストラテジーとして定着していることや課題解決や問題場面の把握に表が役立っている様子は観察されたが、そのことが関数概念の進展に寄与していたかどうかは定かではない。

以上のように、本実践に関わり残された課題もあり、さらなる研究と実践を重ねていく必要があると考えられる。

5. おわりに

本研究では関数指導において表の活用をストラテジーとして提示することが、生徒の粘り強い学習を支え、関数概念の進展にどのように寄与しうるのかを検証した。その結果、表の作成が課題解決のみならず問題場面の把握にとっても有効であり、手が止まる生徒を減少させ粘り強い取組を支えることにつながった。また、単元終末の生徒の姿から、表をストラテジーとして活用することで数量関係の考察に意識が向き、関数指導の意義やねらいの実現に対する一定の成果が見られた。

しかし、表の活用を強調して扱った分、式やグラフの活用が疎かになってしまった部分もある。本実践では、関数学習の初期段階として、表の活用をストラテジーとして提示したが、関数学習を進めていくにあたり、表の学習と式やグラフの学習をどのように関連付けていくかは今後一層精査していく必要がある。

引用・参考文献

池田敏和ほか.(2021).中学校数学1.学校図書.

井上芳文.(1998).数学的概念の認識における二面性に関する考察(4)−指導原理の関数における適用可能性いついて−.全国数学教育学会誌,4,187−195.

上田貴之.(2009).関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて−中学校２年「一次関数」の単元における影響についての一考察−.上越数学教育研究,24,41−52.

熊倉啓之.(2003).学ぶ意義を実感させる関数の指導に関する研究.日本数学教育学会誌,85(11),40−49.

栗原幸宏.(1991).自ら学ぶ力を育てる数学指導−１次関数のストラテジーの指導を通して−.日本数学教育学会誌,73(7),198−208.

古藤怜.(1985).問題解決におけるストラテジーの指導.明治図書.

古藤怜，正田實.(1991).新・中学校数学指導実例講座４数量関係.金子書房.

近藤圭太.(2004).数学的問題解決ストラテジーの構成に関する研究(V)−中学校第２学年における指導過程の実践的検討−.全国数学教育学会誌,10,49−58.

東條みどり，金児正史.(2019).小中学校をつなぐ関数指導の一方策−7人の児童生徒の活動に着目して−.鳴門教育大学授業実践研究,18,211−223.

中尾聡志.(2020).「第２章　粘り強くともに学ぶ子どもを育成する授業づくり」.石田英真編著，粘り強くともに学ぶ子どもを育てる−教材と深く対話する「教科する」授業の理論と実践−.明治図書.

永田潤一郎.(2021).全国学力・学習状況調査の結果に基づく中学校数学科における典型的な誤答の分析−「関数」領域と「データの活用」領域の考察−.文教大学教育学部紀要,55,215−232.

布川和彦.(2014).中学校数学における関数の対象としての構成−教科書の考察を中心に−.上越教育大学研究紀要,33,85−96.

布川和彦.(2015).関数の対象としての成立を視野に入れた教科書の試案.上越数学教育研究,30,1−12.

一松信ほか.(2020).みんなと学ぶ小学校算数６年.学校図書.

文部科学省.(2017).主体的・対話的で深い学びの実現(「アクティブ・ラーニング」の視点からの授業改善)について(イメージ).

文部科学省.(2018).中学校学習指導要領(平成29年告示)解説総則編.日本文教出版.

文部科学省.(2019).児童生徒の学習評価の在り方について(報告).