上越数学教育研究，第 39 号，上越教育大学数学教室，2024 年，pp. 23-32

割合のインフォーマルな知識を利用した子どもの学習過程

佐藤　茂太郎
兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科院生

１．研究の背景と目的

(1)　割合に関する先行研究(割合は比例関係が前提とする立場)

割合の指導に関しては，これまでにも多くの研究が積み重ねられてきている。この中には「差で比べる」と「倍で比べる」の対比から割合の見方へと高める研究がある。例えば，シュートの成功率に関して，比例関係を前提として同じ数対をつくり出し，それらに共通する比例定数に着目させるといった研究がある(土屋，2002；田端，2003；早川，2004)。また，割合の素地指導としては，前提となる比例関係を顕在化させる試みもなされてきている(青山，2012)。これらを受けて，子どもが比例をどのように見出し，また認めていったかについての詳細な検討をしている研究がある(高橋・田端・市川，2014)。このような蓄積のもと現在使用される教科書では，シュートの成功率を求めたり試合の勝率を考えたりする場面が扱われる場合が多い。教科書によっては，割合は比例関係が前提であることを明示的に示しているものもある(例えば，藤井ほか，2020，5 年下，p.71)。このような学習素材は，子どもの身近な生活場面を想起させるものであり工夫されているものと思われる。

(2)　割合に関する先行研究(子どもの潜在的にもっている見方や考え方を活かす立場)

一方，ここまで述べてきた先行研究や学習素材に対して渡辺(2011)は「大小関係はわかるが全体の中の部分の数を見ることは難しい」，「バスケットの投げた数と入った数では，子どもはどちらが上手いかを感覚的に捉えることが難しい」，「比例関係のない場面に，比例関係を取り入れることは子どもにとって問題を難しくする面もある」と指摘している。

そして，割合の見方を学習する前の子どもの中には，全体の量と部分の量の関係で見る子どもが存在することを述べ，未習の子どもが潜在的に持っている割合の見方に着目した研究を行い，その有効性を検証している。

半澤・小泉(2021)も渡辺(2011)の研究に依拠する形で実践を行い，子どもが本来持っている割合の見方を引き出すことができたと述べている。

このことに関わって中村(2002)は「今後の割合研究の方向性」の中で，「割合の見方は，潜在的に子どもは持っていると考える」と述べ，その考え方を算数指導の中で顕在化させていくことを指摘している。さらに，これまで以上に倍概念や乗除法の意味指導，分数指導などと関連付けて割合指導を意識的に指導すべきであるとも述べている。

ここで述べてきたことに関連したことは海外でも指摘されている。例えば，人間には比(割合)の原初的な知覚装置(処理システム)が備わっていること，人間やサルに関して比率の大きさにとても敏感であることを指摘している研究もある(Matthews & Lewis，2016；Matthews & Ellis，2018) 。

ここまで述べてきたように，同じ数対から比例定数を導出する研究に対し，子どもの潜在的に持っている割合の見方を生かすべきとの見解も生じている。それに関わり研究が行われ，検証されてきていることが分かる。

(3) 割合のインフォーマルな知識を利用した立場

(2)で述べてきた研究に類似する先行研究として，割合に関するインフォーマルな知識に着目した研究もなされてきている。この割合に関するインフォーマルな知識は，子どもが持っている知識で，割合を学習する以前に日常生活の中で獲得した知識のことである。本研究ではこの割合に関するインフォーマルな知識を，(2)で述べた，子どもの潜在的に持っている見方や感覚，生活経験で有した知識と捉える立場とし，例えばタブレットやスマートフォンで見るバッテリー残量を表現する%(百分率)等がそれに対応する。

このことに関し吉田・河野・横田(2000)は，割合をまだ学習していない公立小学校の第 5 学年の子どもに対して 40 個のおはじきの 50 %や 25 %などを問うている。未習の学習にも関わらず約 7 割の子どもは，40 個の 50 %を求めることができたと述べている。

また，吉田・河野(2003)は，割合を学習する以前から子どものインフォーマルな知識はかなり豊かであることを指摘し，日常生活の中で割合の基本的な意味を獲得していると述べている。この論文では，百分率(%)を量という視点から理解しているとしている。また，未習の内容にも関わらず，既習事項やインフォーマルな知識を利用して，比の第 2 用法の問題を解決することができることを明らかにしている。

吉田・河野(2003)の研究では百分率のインフォーマルな知識を利用しながら学習活動を進める群と，教科書に準拠した学習活動を展開する群とに分けて分析している。ここでは，具体的な授業の発話記録等の質的データを分析するというよりも，事前事後調査の結果を統計的手法により分析するに留めた研究となっている。

割合のインフォーマルな知識を利用した他の研究として，山口(2007)や Nunokawa(2012)がある。山口(2007)は，第 5 学年の子どもが百分率を学習する前に，百分率に関する豊かな感覚があることを指摘している。第 1 時の導入では子どものインフォーマルな知識である百分率を考えさせている。そしてその後の課題では，割合メーターを活用して小数で表現された割合を考える活動になっている。Nunokawa(2012)は視覚モデル(割合メーター)を用いて数学的概念や技能に関して，子どもの学習過程を分析している。この研究についても，小数で割合を表現した導入から行われていることが分かる。

海外の研究では， Moss ら(1999)は，百分率を「核となる理解」にし，小数や分数の理解へと広げていく指導系列を提案している。我が国の指導系列は小数や整数で表現された割合を出発点としているが，Moss らによる研究はこれとは異なることが分かる。彼らは，その理由の一つに「数のリボン」表示といったパソコン等で馴染み深い表現が使えることなどを挙げている。つまり，ダウンロードのローディング等，百分率に関するインフォーマルな知識

を利用することと関連するものと考えられる。

２．全国学力・学習状況調査から分かる子どもの割合の理解に関する実態

次に，子どもの割合に関する理解の状況について見ていく。これは，全国学力・学習状況調査の結果からうかがうことができる。

(1)　平成 28 年度算数 A 問題 8

平成 28 年度の同調査算数 A 問題 8 では，テープ全体に対する赤い部分の割合で，最も赤い部分の割合が大きいものを 1 ～4 から選択する問題が出題された。正答率は 74.5 %であった。この結果から，「割合」の意味に関して，感覚的には一定数の子どもは理解しているものと捉えることができる。これは前述した潜在的に持っている割合の見方とも整合するものと考えられる。一方で，全体に対する赤い部分の割合として考えるのではなく，赤い部分の「長さ」に着目して最も長い「4」を選択している子どもも 16.1 %と一定数いることが分かっている。長さに着目して「4」を選択した子どもは，視覚的な量に依存して選択していることが分かる。

(2)　平成 30 年度算数 A 問題 8

平成 30 年度の同調査算数 A 問題 8 では，全体数 200 人に対する 80 人の割合を問うている。その正答率は 53.1 %であり，これは平成 21 年度の類題の正答率 57.1 %とさほど変化がないどころか，正答率のポイント数は若干落ちていることが分かる。こうした状況に対して布川(2022)は「算数教育関係者のこれまでの努力にも関わらず，小学校 5 年で学習する割合や単位量あたりの大きさについての子どもたちの理解は依然として十分とは言えない状況にある。」と指摘している。国立教育政策研究所(2018)の解説(p. 56) には「基準量と比較量を正しく捉えることができず「200÷80＝2.5」と計算し，「2.5 %」と捉えていると考えられる」と指摘している。基準量と比較量を正しく捉えることができていないことや，どのような計算をしたらよいか理解していないものと考えられる。そして子どもは，計算した結果が何を表現した数値であるか理解できていないと推察される。

(3)　平成 24 年度及び平成 25 年度算数 A 問題 8

平成 25 年度同調査算数 A 問題 8(1)は 200 cm の 50 %の長さ，(2)は 500 gの 120 %の重さをそれぞれ問うている。正答率は(1)(2)でそれぞれ 76.9 %，77.1 %となっている。(1)の基準量 200 cm よりも大きい場合を選択した子どもが 14.1 %，(2)の基準量よりも軽い場合を選択した子どもが 16.5 %いることが分かっている。

平成 24 年度同調査算数 A 問題 8 は円グラフを示し，そのうち 25 %に対応する人数が 8 人で，全体量を求める問題が出題されている。正答率は 58.7 %であるが，その内訳をみると正答者のうちの 1/3 以上の子どもがインフォーマルな知識を利用していると解釈できる結果を示している。この解決方法は，25 %分が 8 人であるに対し，100 %分を求め際に「8×4」で解決している。学校数学で一般的に指導されるフォーマルな知識としては，8÷0.25＝32(人)で求めるものと考えられよう。しかしながら，子どもの中には，この解決方法以外で考えることが分かっている。

これまで述べてきた子どもの状況から次のことが分かる。まず，一定数の子どもは割合に関する潜在的な見方や考え方を有していること，これは割合に関する感覚的な見方とも言い換えることができる。次に，基準量と比較量が明示的に示されていても，全体に対する部分の割合を求めることに困難性があるということである。これは

基準量と比較量を同定することができないことにつながっている。

平成 28 年度の問題は選択式で 50 ％台の正答率あった。この問題で考えれば，200 人が全体量の 100 ％である。考える対象の 80 人は全体の 200 人のうちの半分よりやや少ない人数である。このことから，割合も半分より少し少ない，つまり，50 ％よりも少し少ない数値であることが予想できる。50 ％よりやや少ない数値は，選択肢の中で 40 ％のみであるので，計算をせずとも選択することができる。こうした子どもの割合の感覚や知識を活かした指導を検討していく。

まず，子どもは割合の感覚的な見方や考え方を有していることに注目する。本研究では，こうした感覚的な見方や考え方もインフォーマルな知識とする立場とする。次に，日常生活経験によって割合の知識，特にここでは百分率(%)のインフォーマルな知識を有していることに注目する。これらの見方や考え方，知識を指導に活かすことで割合の理解につなげていくことを考える。その一つのアイディアが割合のインフォーマルな知識を利用し活性化させることである。

先行研究では，子どもの既に有している割合，ここでは特に百分率に関する知識を単元の導入から扱っているものがある。その一方で，割合のインフォーマルな知識を利用し単元全体を通して教師の発問や子どもの発話記録，子どものワークシートに記述したデータを分析している先行研究は行われていない状況にある。つまり，学習過程を分析した研究は行われていない。

３．研究の目的及び方法

以上のことから本研究は，子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用し，割合を学習していく過程に焦点を当て，そこでの子どもの様相を分析し検討することを目的とする。なお，本研究における割合とは，比較量が基準量と比べた時，どの程度かを表す数といった立場とする。

埼玉県内公立小学校 5 年 1 学級(24 名)において，割合の授業 13 回を，観察者のビデオカメラ 1 台とスマートフォン及びタブレットを使用して記録した．特に第 1 時の比の第 2 用法を扱った授業，第 5 時の比の第 1 用法を扱った授業，第 8 時の比の第 3 用法を扱った授業の発話記録を分析対象とした。分析対象とした理由は，それぞれの用法ごとの導入場面であり，導入場面を分析することで，子どもの学習の様相がつかめるものと考えたからである。また，解決過程の情報を得るために子どもの記述したワークシートも分析の対象とした。子どもの学習の様相を捉えるためにワークシートに記述された表現は，本研究の目的を達成するために必要と判断したためである。なお，本研究については，所属長，担任及び該当児童の保護者に許可を得た形で行っている。

４．子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用した学習過程

(1) 第 1 時の比の第 2 用法を扱った授業

導入では，メスシリンダーやビーカーに色水を入れる活動を行い割合の量としての視点から捉えさせることにした。これは山口(2007)が「割合の量の視点から捉えることのできるインフォーマルな知識を所有しており，量感覚も確かであることが示された」(山口, 2007, p. 105)と述べられているように，今回対象とした学級でも同様の発言が見られた。例えば，100 ％と満杯が同じであると判断したり，半分程度を 50 ％と判断したりしている発言が随所にみられた。

別の視点では，教師から発問を投げかけなくても，分数や小数の発言を子どもが自ら行っている場面が表出した。例えば，教師が満杯まで入れると何 %になるか尋ねると，Toya は「分数で言うと，1/2 が 50 %で，1/2 は半分だから 2 個分で 100 %」といった発言をした。自発的に分数と割合のインフォーマルな知識を関連付けながら説明した。また，Aka は色水を満杯に注いだ場合が 100 %になる理由について，全体量を 1 と考え，半分が 0.5 になり，全体量というのは 100 だと考えることを述べている。論理性には乏しい発言ではあったが，%のインフォーマルな知識と小数のフォーマルな知識を合わせながら発言した。

次に，教師は約 10 %分の色水を注いだ。すると Junya は「約 10 %」と発言をする。教師は理由を尋ねると Junya は「1/10 くらいだから。」と発言した。さらに教師は色水を 25 %ほど注いだところ，ある子ども(子どもの特定ができない)からは「1/4」といった発言があった。

この後メスシリンダーからビーカーに容器を変えて，つまり基準量を変えてメスシリンダーのときと同じような活動を展開した。教師はビーカーに 50 %分の色水を注いだ。

なお，このような活動の際には教師は子ども達に注いでいる状況に集中させて，子どもの割合のインフォーマルな知識を利用させていた。また，インフォーマルな知識を利用する集中させる活動は，この後の学習以降についても同様で，例えば，図(モデル)における説明活動を行う際も行われていた。

これらの活動後，「全体の量 200 mL のうちの 50 %分は何 mL か」について解決していった。ここで第 2 用法を扱った意図は先行研究でも指摘があること(吉田・河野，2003)，現行では第 2 学年で「12 個の 1/3」などを扱っており，第 2 用法としての知識を利用するためである。

24 名のうち 2 名の子どもは 200÷50 としていたものの，その他の子は，200 mL の半分や÷2，1/2 と考え 100 mL であると発言した。

Shun はこの時「50 %は 100 mL です。理由は，100 のいや違う，100 %，いや 100 mL の 50 %は，50 mL だと，と思うから，おんなじ風にやって，100 の半分が 50 だから，200 の半分は 100 だと思う」と発言した。特に「100 の半分が 50 だから，200 の半分は 100 だと思う。」は比例的推論を働かせて考えていると捉えることができる。

全体での確認では，割合のインフォーマルな知識と，分数や小数との関連付けを図ること，比例的推論を働かせやすくなることを意図したモデルを示しながら，学習活動を展開した。ここでは 100 %から 50 %に「÷2」していることと同時に「mL」といった量も「÷2」していることを確認した。その際，多くの子どもから「比例」や「比例関係」という言葉が表出した。また，導入素材のメスシリンダーやビーカーの活動を想起させ教師が「50 %って分数でどうやって表したの？」と改めて問うと多くの子どもから「1/2」といった発言がなされた。

次の問題は「全体の量 200 mL のうちの 25 %分は何 mL か」についてであった。Aki は，モデルを使用しながら 25 %分を 1/4 と表現し，100 %を 4/4 と表現した。さらに説明を加えて「50 %が，ちょっと書き足しますけど，75 %が 3/4 で，ここが 4/4，で，それでここが□，ここで 1 回わり算を挟んで，それからこれがわり算で，ここからここも比例して÷2 になって，だから 50 になった。」といった説明をした。

このように展開し第 1 時は終えた。子どもの中には，25 %分を求める問題で 1/4 することや「÷4」することの理解が難しい場面もあったため，第 2 時では素材を連続量から離散量に変更した。さらにモデルを使用しながら説明ができるように指導した。それでも理解に苦しむ子どももいたため，授業内だけではなく，個別に対応し理解していけるようにした。

(2)　第 5 時の比の第 1 用法を扱った授業

問題は「40 このうち，20 こは何 %でしょうか。」であった．Shun は問題提示後「順番が逆になった.」と発言している。Harunori は「40 このうちの 20 こは半分だから，それと同じで 100 パーのうちの半分は 50 パーだから。」と比例的推論を働かせながら説明することができた。全体で確認する際はモデルを使用しながら，40 こと 20 この関係について÷2 あるいは×2 であること，その中で「比例」という用語を子どもが使用しながら説明し合う活動が続いた。

次の問題は「40 このうち 10 こは何 %でしょうか。」であった。この場面では Toya が「40 を 4 等分したうちの 1 こだよ。」といった発言をした。これは 40 の 1/4 することを意味している。また，Remi は，2 段階の基準で考えた。まずは 40 この半分を，次に 20 この半分をといった考えである。この考えと百分率を関連付けながら 25 %であることを確認していった。

さらに，問題「40 このうち 4 こは何%でしょう。」を扱った。Aki は，「1/10」することや「20 を 5 等分する。」といった発言をした。Yugo は，「4」が大体どのくらいか見当を立てる際に，「25 %分の 10 この半分の 5 よりちょっと少ない。」と述べていた。ここではモデルの使用とともに，見積り方略を使いながら学習を進めていた。また，Toya は，「20 こを 5 こに分けたので，20÷5＝4 で，50 パーも 5 で割ると 10 で，4 この時は 10 パーと同じになる。」と説明している。これも比例的推論を働かせて問題解決していることと捉えることができる。さらに Aki は，20÷5＝4(こ)と 50÷5＝10(%)をモデルと関連付けながら説明した。

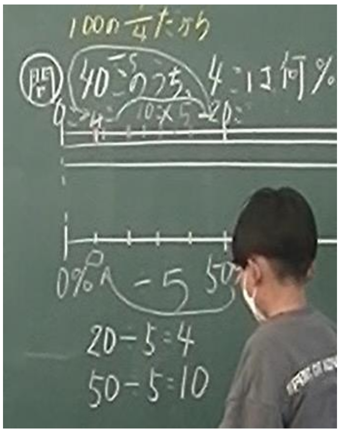

図 1．モデルと結び付けながら説明する Aki

(3)　第 8 時の比の第 3 用法を扱った授業

第 8 時の問題は「ある店では，今日，牛乳が 180 円で売られています。このねだんは，昨日のねだんの 90 %にあたります。昨日の牛乳のねだんはいくらでしたか。」であった。教師は「見積り立てていこうか，いくらくらいですか。」と結果の見積りを子どもに問うた。Reo は「200 円くらい。」，Soushi は「190 円くらい。」と発言した。Aka は 100 %が□になる説明を「問題に書いてあるのが今日の牛乳の値段が 180 円はそれだけだから，昨日の値段が分からないから□。」，さらに「昨日の値段の 90 %って書いてあるから，昨日の値段が 100 %じゃないと求められない。」と述べた。多くの子どもが昨日の牛乳の値段の方が高いイメージを持てていることは，基準量を意識していることが分かる。また，モデルのイメージが身に付いてきていると推察される。ここでは多くの子どもが，10 %ベンチマークを使って，180÷9＝

20(mL)，20×10＝200(mL)と解決した。図は二重数直線になる子ども(Yuna)も出てきており，比例的推論を矢印で表現しながら説明した。

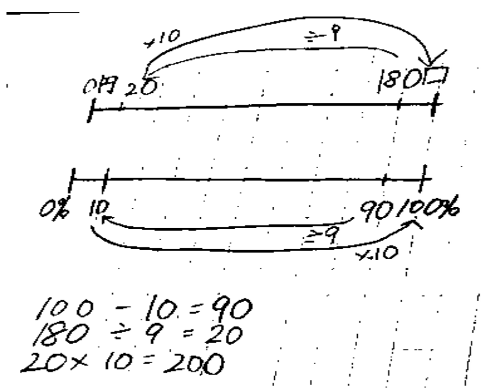

図 2．Yuna による第 3 用法の問題の説明

５．考察

上で述べてきた実際の授業で表出した子どもの反応を受けて考察していく。Lamon (1999)は，割合(%)と分数を関連付けながら指導することが重要だと指摘している。本研究は，子どもの発話記録からこの点において整合するものと考えられる。それは割合のインフォーマルな知識を利用したことによるものと示唆されるからである。なぜなら，教師から何%か問われた子どもが自発的に分数の知識を発言し，%と分数を結び付けて考えているものと推察できるからである。ここで，分数の知識はフォーマルな知識であり，インフォーマルな知識とフォーマルな知識を結び付ける子どももいることが分かった。

先行研究では，導入場面で小数倍の割合を中心に扱っているため，有理数の表現としては小数の場合が主である。今回，子どもが自発的に分数についての知識を表出したことと，割合のインフォーマルな知識を利用したことが関係しているものと考えられる。また，今回扱った百分率の数値は整数値を多く扱ったため，子どもにとって考えやすかったと考えることができる。一般には小数や整数で割合を表現し，その後百分率の指導と関連付けて行うわけであるが，この接続が困難なものであると推察される。

分数との関わりについて杉山(2014)は「整数でも，小数でも，分数でも割合を表すのに用いることができるが，割合を表すことに適しているのは分数である。」(p. 6)と指摘している。本研究のように割合に関するインフォーマルな知識を利用することで，子どもが自発的に割合を分数で表現する発言があることが示唆される。現行の学習指導要領解説算数編(文部科学省，2018)の第 2 学年において，乗法や除法の見方の素地となるよう指導すること，おはじきなどの具体物を用いて，元の大きさの 1/2 や 1/3 の大きさの学習といった解説がある(p. 107)。本研究における子どもの発言は，こうした割合としての分数表現を活かしているものと解釈できる。

このことに関わって清水(2014，p.25) は下学年における分数指導について，「歴史的には，このような割合的な意味につながる初期の扱いは排除されてきたが，子どものインフォーマルな経験に基づく学習もあってよい。」と述べている。百分率におけるインフォーマルな知識を利用したことにより，割合分数としての知識が表出した可能性がある。

小学校学習指導要領・算数科編 (試案)(文部省, 1951)では「一年の指導内容」における「E　分数」の中で「2．次の用語の理解を深めるとともに，これを実際の場において，正しく使えるようにする」とし，その中には「はんぶん」「はんぶんのはんぶん」「しはんぶん」とあり，過去の指導内容においては小学校 1 年生でこの内容を扱っていたことが分かる。これらは全体の半分，全体の半分の半分といった割合

としての分数とも解釈することができ，そうした経験が 5 年生での割合の学習につながっていたものと示唆される。

大谷(2020)は，国外の割合の研究について「分数との関係が常に重視されている。その意味で，新しい学習指導要領の他の領域との関係を視野に入れた割合指導を今後も進めていくことが期待される。」(p. 6)と述べ，割合と分数との結び付きを検討する上で，割合のインフォーマルな知識を利用するといった視点は，有効であるといった可能性があるものと推察される。

子どもたちの解決の中には， 10 %ベンチマークの方略が確認された。これは Van den Heuvel-Panhuizen(2003)の中でも複数回紹介されている。例えば，25 %ベンチマークを用いて基準量(元々の双眼鏡の値段)を求める問題が事例として示されている．また彼女はベンチマークについて，子ども自身で持ちうる方法は，柔軟に対応できるといった教育的なメリットがあることを指摘している。本研究でもこうした姿が見られた。

第 9 時の比の第 3 用法の問題は「ペットボトルに入ったお茶が，増量して売られています。増量後のお茶の量は 600 mL です。600 mL は増量前の 120 %にあたります。増量前のお茶の量は何 mL ですか。」であった．Yuga は，20 %分を 600÷6＝100 と求めその後，100×5 をして基準量を求めていた。この解決についても比例的推論を働かせていることが分かる。

単元を通して教師は，数直線図(モデル)などに焦点化させたり集中させたりしていた。これは子どもが自発的にある量に対して着目させているとも捉えられる。量的関係に着目しやすい子どもほど，分数概念が発達していることを述べている先行研究にも整合するものと考えられる(McMullen & Hannula-Sormunen, 2014) 。教師が意図的にそのような活動を適宜取り入れていく活動は意味のあるものだと捉えることができよう。

６．結論

本研究は子どもの割合に関するインフォーマルな知識を利用し，割合を学習していく過程に焦点を当て，そこでの子どもの様相を分析し検討することを目的としてきた。

割合に関するインフォーマルな知識を利用したことにより子どもは次のように割合を学習していくことが示唆された。まず，百分率のイメージと分数とを同時に考えながら，子どもは学習を進めることが示唆されたことである。また，子どもによっては，自発的に分数だけでなく小数のフォーマルな知識と関連付けながら考え，割合を理解していくことが示唆された。さらに，学習が進んでいくと，1 %や 10 %，25 %をベンチマークとして解決する姿が見られた。これと同時に，ここでは比例的推論を働かせ問題解決する姿も見受けられた。例えば，200 人のうちの 80 人の全体に対する割合を求める問題では，200÷10＝20(10 %に相当する人数)とし，20×4 が 80 なので 10 %を 4 倍して 40 %と解決する姿が見られた。こうしたことから，子どもが自らベンチマークを考え，それをもとに解決する際に比例的推論が働きやすくなりのではないかといった示唆が得られた。

７．今後の課題

成果が見られたものの課題もある。200 人のうちの 80 人の割合を求める際に前述したように解決したわけであるが，子どもは一般に指導される 80÷200(比較量÷基準量)のようには解決するに至らなかった。第 2 用法の問題「定員 60 名の 25 %」を求める問題でも，60÷2 をして再度÷2 をして

15 名であると求め，60×0.25 への学校数学で指導されるフォーマルな知識に移行することがうまくなされていない。

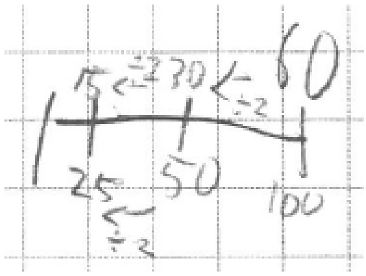

図 3．Taku による 60 名の 25 %分を求める解決方法

今後は，単元のどの時間帯でどのように割合のフォーマルな知識への移行が可能か検討していく。また，分数の理解，除法の理解についても子どもによって困難な場合が見受けられた。下学年からどのようにしてこれらの概念を理解させていけばよいかといったことについても課題として考えられる。

引用文献

藤井斉亮ほか (2020). 新編 新しい算数 5 下, 東京書籍.

半澤諒，小泉健輔 (2021). 児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした第 5 学年「割合」の導入の授業実践. 群馬大学教育実践研究, 38, 55-62.

早川健 (2003) . 「同じ割合」に焦点を当てた割合指導の導入. 日本数学教育学会誌, 85 (12), 23-30. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_23

J. Moss & R. Case. (1999). Developing children’s understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (2), 122-147.

国立教育政策研究所 (2010). 平成 22 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2012). 平成 24 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2013). 平成 25 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

国立教育政策研究所 (2018). 平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.

Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratio for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.

McMullen, J.& Hannula-Sormunen, M. M. (2014). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations in the Development of Children's Fraction Knowledge. *Cognition and Instruction*, 32(2), pp.198–218.

Matthews, P., Lewis, M. (2016). Fractions We Cannot Ignore: The Nonsymbolic Ratio Congruity Effect. *Cognitive Science A Multidisciplinary Journal*. 41(6).

Matthews, P., Ellis, A. (2018). Natural Alternatives to Natural Number: The Case of Ratio. *Journal of Numerical Cognition*, 4 (1), 19-58.

文部科学省(2018). 小学校学習指導要領解説(平成 29 年告示) 算数編. 日本文教出版.

文部省 (1951). 小学校学習指導要領・算数科編 (試案). 昭和 26 年(1951)改訂版, 日本図書.

布川和彦 (2022). 分数を含む文章題における小学校 6 年生の解決の様相. 日本数学教育学会第 55 回秋期研究大会発表収録，153-156.

布川和彦 (2022).「小学校下学年における比例的推論の基礎を形成する授業に向けた学習軌道の探究」プロジェクトへのリアクション. 日本数学教育学会第 10 回春期研究大会論文集創成型課題探究の部，267-270.

Nunokawa, K. (2012). Multi-Relation Strategy in Student' Use of a Representation for Proportional Reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 8* (4), 233-248.

中村享史 (2002). 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌，算数教育, 84 (8), 14-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_14

大谷実 (2020). 割合の見方を育む授業-比べる対象を明確にし，二つの数量関係と別の二つの数量関係を比べることを通して-. 新しい算数研究, 597. 4-7.

白石信子 (2006). 小数のわり算における子どもの学習過程に関する研究-数直線への比例的な見方の操作に基づく授業を通して-. 上越数学教育研究, 21, 69-80.

清水美憲 (2014). 分数の指導内容とその配列の検討-カリキュラム上の重点を何におくか-. 算数授業論究, 92, 22-25.

杉山吉茂 (2014). 分数のよさを生かそう. 算数授業論究, 92, 4-7.

高橋久誠 (1999). 小数の乗法の概念形成に関する考察-インフォーマルな知識からフォーマルな知識への発展-. 上越数学教育研究, 14, 145-152.

高橋久誠 (2000). 小数の乗法の授業構成に関する考察-比例の考えをもとにして-. 上越数学教育研究, 15, ページ番号不明.

土屋利美 (2002) . 比例の見方を用いた「割合」指導実践. 日本数学教育学会誌, 84 (8), 30-37. https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_30

田端輝彦 (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, 85 (12), 3-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_3

高橋丈夫・田端輝彦・市川啓 (2014). 割合の導入期における比例関係の顕在化に関する一考察-同じ割合の数対を作ることを通して-. 日本数学教育学会誌, 96 (4). 4-15.

Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54(1): 9-35*.

渡辺敏 (2011). 児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究. 日本数学教育学会誌, 93, (2), 11-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.93.2_11

山口潤 (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究-「割合のイメージを生かした表象」-. 上越数学教育研究, 22, 101-112.

吉田甫，河野康男，横田浩 (2000). 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学, 2, 123-133.

吉田甫，河野康男．(2003). インフォーマルな知識を基にした教授介入：割合の概念の場合. 科学教育研究, 27 (2), 111-119. https://doi.org/10.14935/jssej.27.111