

上越数学教育研究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 40 号

目次

〈研究論文〉

分数の学習におけるディスコース

ーテンプレート駆動を視点とした小学校第3学年の学習の考察ー.....布川 和彦..... 1

割合のインフォーマルな知識を利用した4年生の子どもの様相.....佐藤 茂太郎.. 15

2025

上越教育大学数学教室

* 上越数学教育研究は 2020 からウェブ上での刊行のみとなりました.

研究論文

分数の学習におけるディスコース — テンプレート駆動を視点とした小学校第 3 学年の学習の考察 —

布川 和彦
上越教育大学

1. はじめに

今井ほか (2022) の調査では、分数についても小学生の理解を調べている。「同じ大きさのまるいケーキ」の $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ ではどちらが「たくさん」食べることができるかを問うた際には 3 年生、4 年生、5 年生の正答率がそれぞれ 41.5 %、59.7 %、78.5 %であったのに対し、 $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ のどちらの方が「大きい」かを問うた際にはそれぞれ 17.6 %、22.4 %、49.7 %であったとされる (p. 111)¹⁾。ここから同じ $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ の大小比較であっても、ケーキを切るという場面を伴い、量の多さとして問われる場合と、純粋に数の大きさとして問われる場合とでは、児童の反応が異なることが伺える。特に量の場面では 3 年生や 4 年生の下位の児童でも 22.4 %と 28.3 %の正答率であるのに対し、数の場面ではそれぞれ 6.1 %と 6.5 %に留まっており、下位の児童にとってはその理解がかなり難しいことが示唆される。

他方で 0.2 と $\frac{1}{2}$ の大小判断では 3 年生でも正答率が 73.2 %となっており、5 年生では 82.6 %と 8 割を越えている。ただし小数との比較であっても $\frac{1}{2}$ と 0.7 の比較では正答率は 3 年生 31.0 %、4 年生 50.7 %、5 年生 54.4 %であり、0.5 と $\frac{1}{3}$ の比較ではそれぞれ 23.9 %、39.6 %、42.3 %に下がっている。

わが国の算数の学習では、その学習の系統から、分数 a/b が「除法との直接的なつながり」を持ち、除法を通じて「より強力な意味の生成元」(Sfard, 2000, p. 76) になるとは言いがたい。だとすれば、“ a/b ” という数字は、

それが指し示す対象を持たない空の状態から始まり、徐々にそこに意味が満たされていくという Sfard (2000) が示す別の過程をたどる可能性が高いと考えられる。分数の源泉が操作や割合にある (布川, 2022, 2024a) とすれば、その過程も容易なものではないことが予想される。

そこで本稿は、こうした移行を可能にすると考えられる Sfard (2000) のテンプレート駆動の考え方に着目し、その視点からわが国の分数の初期の学習を検討することで、移行がより適切に生じるための方向性を探究することを目的とする。

なお本稿では、テンプレート駆動としての使用から対象媒介的な (object-mediated) 記号の使用につなげるという Sfard (2000) の考え方を参照し、「記号表現 (signifier) が記号内容 (signified) に先立つ」(p. 53)、つまり新たな記号表現は対応する記号内容がなくても導入が可能であり、後になって徐々に記号内容が構築され続けると考えていく。したがって、記号表現を強調するときは“ $\frac{1}{2}$ ” のように引用符を付けて表すが、学習者がそこに必ずしも教師と同じ記号内容を見ているとは限らない。

2. テンプレート駆動と対象媒介的

今井ほか (2022) の調査結果を見ると、少なくとも分数の記号表現“ a/b ” が導入された時点では、児童が「その背後にある抽象的な対象を持っていることは期待できない」(Sfard, 2000, p. 57)。この場合の対象としては、ある

種の数が想定されるが、上の状態でも児童はその記号表現を使用することになる。Sfard (2000)が例えば、負の数も最初は単に数直線上の点の名前として提示される(p. 55)と指摘していることを参照すると、初期の時点での“ a/b ”の使用の仕方もテンプレート駆動(templates-driven)だと考えられる²⁾。すなわち、数直線の0より右側の点の名前が数を表すので左側にある点の名前も何らかの数を表すであろうと学習者が推測するように、文や図式の数字のあった場所(スロット)に“ a/b ”という記号表現を用いることで、それも数字と同様の記号内容を表すのだらうと学習者が推測することになる。教師と同様に、記号表現が記号内容を表すかのような対象媒介的な対話が学習者も可能になるのは、もっと後のことになる(p. 58)。

対象媒介的という場合、対象が必ずしも存在しているとはいいきれないが、それでも、あたかも何らかの存在するモノ(entity)を見ているかのように数学の表現記号を用いるのである。これにより、数学というVR(virtual reality)にAR(actual reality)の主要な特性を与えることができるとされる(p. 41)。ARでは多くの場合、語が示すモノを対話者が共有できている(taken-as-shared; Cobb et al., 1992)と想定しており、それによりコミュニケーションがスムーズに行われるが、対象媒介的であればVRでも同様の効果が期待できる。

対象が構成される過程は社会的相互作用により刺激され、形成される。「対象媒介的な使用への最終的な移行は、生徒の他者との交流により可能となる」(p. 55)とし、その他者には教師、同級生、親、教科書著者が含まれるとしている。ここから、テンプレートの数が入るべきスロットに新たな記号表現が入れられ、あたかも数であるかのように皆で使っている中で、その記号表現が表す対象として何らかの数が存在するかのように思われ、対象媒介的な使用へ移行するのだと考えられる。

例えば表現記号“5”が数5を表すとして扱われている場合、典型的な数が用いられる一群の文で、“5”の入ったスロットを新たな表現記号で置き換えると、それが空のシンボル(empty symbols)であっても、数5が現れる他の文や数5に対する操作を想起すれば、その記号表現に対する操作もおよその見当がつく(p. 63)。記号内容を伴うとは限らない記号表現に対するディスコース的操作が、まだ存在しないモノを対話者が操作している、かのように見えるディスコース的活動を可能にする(p. 49)。記号表現“-2”などが学習者にとって抽象の対象としての負の数となるのも、算術のテンプレートにおける配置から出発する過程に拠るのだとされる(p. 64)。

テンプレート駆動によって記号表現を使用し、それに対する他者からのフィードバックを受けるという社会的相互作用を繰り返す中で、次第に対象媒介的な使用として学習者にも感じられるようになり、記号表現が徐々に意味で満たされていくのだと考えられる。

Sfard (2000)は数学的ディスコースとその対象は相互構成的であるとし、したがって数学的对象に対する必要性も、ディスコース的活動が創り出すと述べている(p. 47)。数といった数学的对象の必要性は、ディスコースの参加者が対象媒介的に記号表現を使えるようにすることから生じるが、記号表現が記号内容である対象を示しているという感触は逆に、参加者間で対象に関してコミュニケーションを行うというディスコース的活動により支持される。このことが、初学者に対しては学習のパラドクス(Sfard, 2008, p. 40)を生じさせるのだと考えられる。

3. 数の学習と2つのディスコース

Sfard (2000)は、新たな記号表現を使う際に用いることのできる古いテンプレートは、様々な種類のディスコースから来るとしている(p. 64)。記号表現“ a/b ”を数のスロットに入

れることのできるテンプレートは、分数の学習以前に数を利用した文や式が現れるディスコースから得られるので、そうしたディスコースとして少なくとも2つのものが考えられる。

(1) 数値化された量のディスコース

量の比較における直接比較や間接比較を想起すると、数値化する前でも量に対して操作をしたり、それをもとに推論することができる。例えば、田村(1978)は、量が満たすべき性質を次のような公理として規定している；(1) 2つの量は等しいか、どちらかが大きいかの何れかが成り立つ；(2) ある量が第一の量より大きく第二の量より小さければ第一の量は第二の量より小さい；(3) 2つの量をたすことができ、結果も1つの量となる；(4) 量の加法では交換法則、結合法則が成り立つ；(5) 量にある量をたすと大きくなる；(6) 小さい方の量にある量をたして大きい量と等しくできる；(7) 量は何等分かにすることができる；(8) 小さい方の量を何個かたしあわせて大きい方の量よりも大きくできる。長さや液量について、私たちは日常的な経験を通して、これらを当然のことと考えているし、その際、数値化しなくても上の性質を考えることができる。また、個数などモノの多さについても(7)以外は同様であろう。

他方で、小学校第1学年で任意単位による測定を学習する以前でも、日常的に長さや重さ、液量などの普遍単位は広く用いられており、量を数値と単位の組み合わせにより捉えることも普通に行われる。個数なども、多さの数値化と考えることができる。分数や小数の学習以前は、個数の場合だけでなく、長さや液量についても、数値化は自然数により行われる。特に、学習者にとって馴染みがあるという点で考えると、自然数により数値化された量に関する文は、数を入れるスロットを含むテンプレートとして利用されうる。

実際、Sfard (2000)も“ $2/3$ ”や“17”という記号表現は物理的量の比喩を伴い、比喩がARと

VRの双方での記号表現の使用を制御すると指摘している(p. 87)。さらにARは数学の意味の源泉として大変重要であり、場合によっては替えがきかない(p. 90)とも述べている。分数の学習においては、測定値を用いながら量を扱う現実場面をARとして想定できよう。

(2) 数のディスコース

小学校ではモノの多さを基に10までの自然数を学習することから始め、より程度の高い多さも10や100のまとまりに対応する数で表せるようにする。大小比較も数に対応するモノの多さに応じて決められる。さらに四則演算についても、モノに対する操作とその結果を観察し、記述することにより、算術の基本的事実(fact)や演算に関わるきまりなどを定式化している。こうした学習は、量を数値化できるように数の範囲を拡張したり、量に対する事実や操作と整合するように数の事実や操作を決めたりしていると見ることができる。

しかし実際には、全ての数がそのように扱われているわけではない。20以下の自然数は確かに、1つ1つ実際の多さに対応しながら導入される。しかし、第1学年で21から100までの数を学習する際には、例えば「10が8こと1が2こで82」としてのみ言及され、モノの個数が示されない数も多い。つまり既に知っている数から直接新たな数が構成される。

そう考えると、算数における数の学習では、量に整合するように数を構成する局面と、既に確立された数を組み合わせて数を構成する局面があることになる。これは大小比較や四則演算でも同様であろう。

以上のことに鑑み、本稿では数値化せずに量について行うコミュニケーションを量のディスコース QD (Quantities Discourse)、測定値を用いて量について行うコミュニケーションを数値化された量のディスコース QQD (Quantified Quantities Discourse)、そして数自体について行うコミュニケーションを数のディスコース ND (Number Discourse)と呼ぶこ

とにする³⁾。

(3) 2つのディスコースとメタ規則

ある文に対してそれが正しいとして承認する方法も、複数考えられる。Sfard (2007)は、数の学習において数の規則に対する支持のメタ規則(meta-rule)として、2通りのものをあげている(p. 584)。一つはそこでの数の規則が「具体的なモデルにより満足されていなければならない」というものであり、もう一つは数の規則が「公理と呼ばれる他の対象レベルの規則の所定の集まりと整合しなければならない」というものである。「公理」とあるが、取り上げられている事例では乗数が1減ると積は被乗数分だけ減るというきまりが想定されているので、これは数に関わり既に確立されたきまりと考えることができよう。Sfard (2007)は負の数の学習では、支持のメタ規則が前者から後者に変容するとしているが、上で見てきたことからすると、少なくともわが国の算数の学習においては、自然数の学習において、上述の2つの支持のメタ規則が併用されていると見ることができる。

つまり、数値化された量に対してQDでの操作を施し、そのプロセスや結果をQQDで記述できるように、NDでの数の関係を決めるという場合も考えられる。他方で、NDにおいて既に確立され共有された数についての事実やきまりを用いて、新たな数を構成したり、数の間の関係や演算の仕方を確立することも可能であろう。

例えば、NDで10までの数しか存在していない状態で、数10の3倍をNDでの操作として考え、その結果を“30”と表して数と考えることは、NDの中で既知の数から新たな数を構成したことになる。一方、ブロック10個のまとまりを3個併せた時の多さも数値化できるように「30個」と表すことにして、「30個」の数のスロットに現れる“30”も数と考えていくことは、QQDを拡張することを通してNDを拡張することになる。

後者の場合、数字や数詞は最初、ブロックの集まりを形容したり限定したりといった役割として導入されるが、やがて名詞のようになり、何らかの対象を示すかのように扱われ

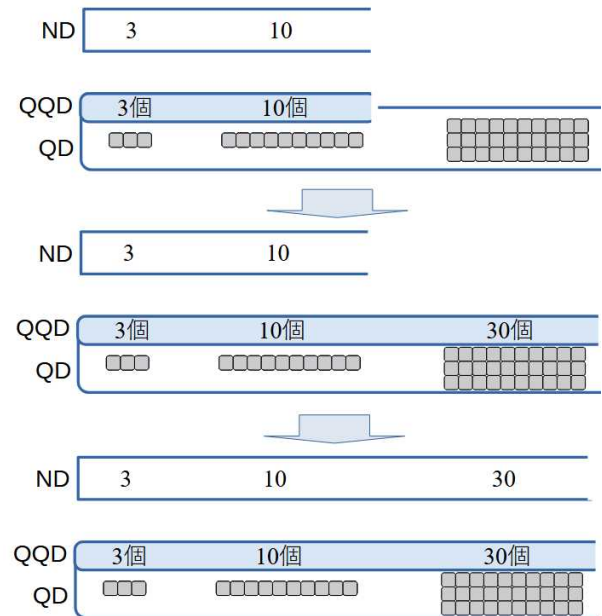


図1：QQDの拡張を経由したNDの拡張

ると想定される(有安, 2022; ワイルダー, 1980)。自然数は「数えるという操作から生まれ」、数の大きさは数えるものに対応した印をつける「行為の多さを反映する」(Giusti, 1999, p. 53)が、後に量を探る道具から「研究の対象」へと変容する(p. 51)のだと考えられる。

4. 第3学年の分数の学習内容の構成

本節では、小学校第3学年での分数の学習について、各学習内容に対する教科書での扱われ方を、上述の視点を用いて検討する。

(1) 新たな数の導入

第3学年では1m未満の長さを「 $\frac{1}{3}$ m」などと表すことを学習する。これは「2 m」というQQDからのテンプレートで、数2のスロットに入れるという形で表現記号“ $\frac{1}{3}$ ”を使用している。この使用により、“ $\frac{1}{3}$ ”も数2と同様の対象を指すのかも知れないと、学習者も推測することができる⁴⁾。

これは、量を何等分かするという QD での操作により構成できる長さについて、ND には適当な数がないので、とりあえず QQD でのテンプレートを利用してその表現方法を取り決めたものと考えられる。その際、数の入る単位 m の前のスロットに、QD での「3 等分して、その 1 こ分を取り出す」というプロセスを反映した「 $1/3$ 」という記号表現を入れている。

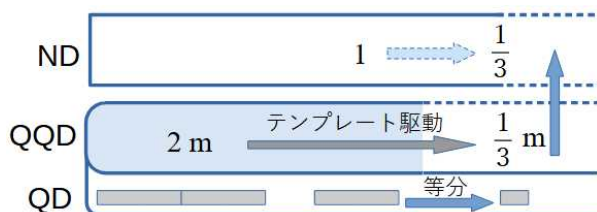


図2：QQDの拡張による分数の導入

Sfard (2000)は、新たな記号表現の導入が「前のディスコースのプロセスをテーマ化しそれらを数学的会話の焦点とするのを助け」(p. 53)、新たなディスコースの形成の触媒として働くとしている。そこでは「以前は単に実行されるだけであった数学的プロセスがモノ化された研究の対象となる」(p. 53)が、プロセスであった場所に名詞を用いることはそれを促す(p. 68)とされる。上述のQDでの「3 等分して、その 1 こ分を取り出す」というプロセスを「 $1/3$ 」という記号表現で表し、さらにこれが何かを指す名詞のように用いることは数 $1/3$ という対象についてのコミュニケーションが行われるかのような新たなディスコースの形成を促すと考えられる。

ただし「 $1m$ を3等分した1つ分の長さを $1/3m$ という」とする説明については、単純にテンプレート駆動とは言えない。単位 m を用いて長さを表すには「 $1m$ のいくつ分か」を考えると、長さの学習では説明していた。「 $1m$ の2つ分の長さを $2m$ という」はこの例であり、QQDからのテンプレートとなる。しかし数2のスロットに記号表現「 $1/3$ 」を形式的に入れて、「 $1/3$ ぶん」としても上で見た「 $1/3m$ 」の説明にはならない。

上の文の「2 ぶん」のスロットに「3 等分した 1 こ分」というフレーズを形式的に入れることも考えられるが、その場合、学習者が「3 等分した 1 こ分」を「2 ぶん」に当たるものとして受け入れるかが問題になる。「 $1m$ を3等分した1こ分」だから「 $1/3m$ 」という説明が、「 $1m$ の2 ぶん」だから「 $2m$ 」として、基準の長さの個数を数えて数値化するというQQDの規則に従っているように見えるかは、自明とはいえない。

「 $1m$ の $1/3$ の長さを $1/3m$ という」と説明する教科書もあるが、テンプレートの形だけに着目すると、「2 ぶん」と「 $1/3$ 」とは形が異なっている。「 $1/3$ 倍」を未習の段階では「2 ぶん」を「2 倍」と読みかえてから数2のスロットに「 $1/3$ 」を入れることもできない。逆に「 $1m$ の $1/3$ の長さ」を直接導くテンプレートになりうる「 $1m$ の2の長さ」といった文はそれまでに用いられていない。

以上より、分数を導入する部分での分数の記号表現の使用は、長さ自体の表現だけを見ると数を示唆する使用になっているが、QQDでのその表現の説明まで含めて考えると、必ずしも自然とはいえず、「 $1/3$ 」などの記号表現が数を表していると学習者が推測しにくいこと、「 $1/3m$ 」がどのような長さかを学習者が理解するのが難しいことを、テンプレート駆動の観点からは見出すことができる。

(2) 分子が1でない分数の導入

単位分数の導入に続けて、「 $1/3m$ の2 ぶん分の長さを $2/3m$ という」などとして、分子が1でない分数が導入される⁹⁾。この場合も「 $2/3m$ 」という表現だけを見ると、記号表現「 $2/3$ 」が数2などと同様の対象を表すと学習者は推測しやすいが、「 $1m$ の2 ぶん分の長さを $2m$ という」という文を用いたテンプレート駆動による記号表現「 $2/3$ 」の使用として見ると、「 $1/3m$ 」が「 $1m$ 」に当たるものとして学習者が認めているかが問題になる。また基準の長さを数えて長さを数値化するというQQD

の規則から考えると、1 m でないものを基準とすることは規則に合わないとも言える⁹⁾。

この場合も教科書によっては「1 m の $\frac{2}{3}$ の長さを $\frac{2}{3}$ m という」と説明しており、この使用の時は、(1)で述べたように、「2 つ分」のスロットに記号表現“ $\frac{2}{3}$ ”を入れることが、学習者に受容されるかが問題となる。

分子が1でない分数が導入された後に、そこまで現れた分数を用いて「分数」の用語が導入される：「 $\frac{1}{3}$ や $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{5}$ のような数を分数という」。ここでは「 $\frac{1}{3}$ や $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{5}$ のような数」として「 $\frac{1}{3}$ や $\frac{3}{4}$ 、 $\frac{4}{5}$ 」が数であることは前提の上で、それらの種類の名前を説明している。つまり、“ $\frac{1}{3}$ ”、“ $\frac{3}{4}$ ”、“ $\frac{4}{5}$ ”といった記号表現が数という対象を表すという前提である。上で見てきたようないくつかのテンプレート駆動による使用を経た上で、これらの記号表現がこの段階で既に対象媒介的となっており、学習者と教師でそれらの記号内容が共有されていると見なせることが期待されていることになる。

なお、分数の学習以前に、ND の中で新たな数を構成することも経験されている。例えば「10 が3 こで30」という文を、学習者は既に経験している。この文をテンプレートと見なし、数10のスロットに記号表現“ $\frac{1}{4}$ ”、数30のスロットに“ $\frac{3}{4}$ ”を代入し、「 $\frac{1}{4}$ が3 こで $\frac{3}{4}$ 」として“ $\frac{1}{4}$ ”と“ $\frac{3}{4}$ ”を使用することもできる。この文が受容されるには“ $\frac{1}{4}$ ”を数10に当たるものとして学習者が認めている必要はあるが、そうした形で分子が1でない分数を導入することもできる。しかし教科書ではこうしたND内での導入ではなく、QQDの拡張という点から数を導入するという方法を選択していることになる。

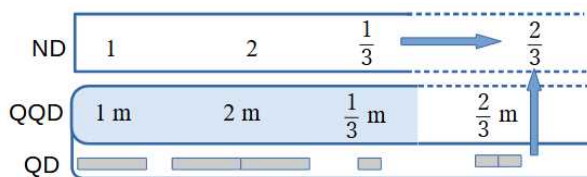


図3：数を構成する2つの道筋

(3) 数の相等関係

教科書では、 $\frac{1}{5}$ m の3 つ分や $\frac{1}{6}$ L の5 つ分などを考えた後に、 $\frac{1}{5}$ m の5 つ分や $\frac{1}{6}$ L の6 つ分を構成するQDの操作を考え、その結果が1 m や1 L と等しくなるというQQDのナラティブとしてまとめる。次にそれをNDのナラティブに翻訳し、「 $\frac{5}{5}$ や $\frac{6}{6}$ のように、分母と分子が同じ数のときは1 と等しくなります」と説明している。さらにそのことを等式により「 $\frac{5}{5}=1$ 」や「 $\frac{6}{6}=1$ 」としても示している。

しかし、この学習以前に、2つの数が「等しい」とする文が現れていないとすると、上のNDのナラティブは記号表現“ $\frac{5}{5}$ ”や“ $\frac{6}{6}$ ”のテンプレート駆動による使用ということにはならない。自然数の学習においては、2つの自然数が「等しくなる」という文が現れることは期待できない。小数の学習では「0.1 が10 個分で1 になる」、つまり0.9 の次は1 であることは扱われるが、“ $\frac{5}{5}$ ”のように、0.1 の10 個分である数を表す“1”とは別の独自の記号表現はないので、そうした数を「数学的会話の焦点とする」(Sfard, 2000, p. 53)ことができない。したがって、2 が10 個分で20 になる」と同じ意味で「0.1 が10 個分で1 になる」ことは話題にできても、0.1 の10 個分である数が1 と「等しい」ことを話題にすることはできない。

これは「 $\frac{5}{5}=1$ 」や「 $\frac{6}{6}=1$ 」という等式の場合も同様である。0.1 の10 個分である数を表す記号表現がないのでそれが1 と「等しい」ことを「 $=1$ 」の等式として表すことはできない。また自然数については、不等号の導入時にそれとの対比で「 $3=3$ 」といった式は現れるものの、両辺に異なる数字が入った等式は現れていないであろう。したがって、「 $\frac{5}{5}=1$ 」といった式は、テンプレート駆動による記号表現“ $\frac{5}{5}$ ”の使用とは想定できない。

上の説明も等式もテンプレート駆動による使用とは言えないとすると、この説明や等式

を通して、「 $5/5$ 」といった記号表現が数を表すのであろうと学習者が推測することはできない。むしろ、説明や等式は対象媒介的な使用という想定で、記号表現「 $5/5$ 」が数 1 と「等しい」とか「 $=1$ 」となりうるような記号内容を持つことを、学習者がこの時点で既に理解している(Hofweber (2005)の p. 195 参照)と期待されていることになる。

仮にそうした想定が可能であるとしても、こうした説明や等式に ND のナラティブとして過去に出会っていないとすれば、この時の「等しい」や等号が記号内容に関わるどのような関係を指すのかを推測することも難しい可能性がある。

それ以前の学習でも $1\text{ km}=1000\text{ m}$ や $0.1\text{ L}=10\text{ dL}$ など、等号の両辺のロットに量が入った式は現れている。したがって「 $5/5\text{ m}=1\text{ m}$ 」であれば、 $1/5\text{ m}$ の長さを 5 つ合わせた長さがちょうど 1 m になるという QGD のナラティブとして解釈できる。またその正しさは、実際に $1/5\text{ m}$ の長さを 5 つ合わせるという QD の操作を行った結果が、 1 m と表される長さと同しくなるかを直接比較により調べたり、5 等分したものを 5 つ合わせるので元に戻ると QD における推論を行ったりすることで確認できる。しかし ND からテンプレートとして用いることのできる文や等式が得られないとすると、ND のナラティブとしてどのように解釈すべきかを学習者は推測できないことになる。

一つの可能性は、数の規則は「具体的なモデルにより満足されていなければならない」というメタ規則に従うとして、QGD の事実である「 $5/5\text{ m}=1\text{ m}$ 」に従うように「 $5/5=1$ 」と「決める」と解釈するものである。

それでも、この規則が何を意味するのかは明確ではない。最も単純には、「 $5/5$ 」という記号表現が現れた際には、これを「1」という記号表現で置き換えてもよいという、記号運用上の規則を述べたものと解釈することである

う。しかし記号表現「 $5/5$ 」の何らかの記号内容を想定するとすると、記号内容に基づいて解釈する必要が出てくる。例えば、「 $5/5$ 」と「1」は見た目は異なるが同じ記号内容を表すという意味に解釈することが考えられる⁷⁾。ただし、「 $5/5$ 」と「1」に共通する対象が何かは「捉えにくい(elusive)モノである」(Sfard, 2000, p. 38)との指摘もある。

「 $5/5$ 」に分数として独自の記号内容を想定するとすれば、「 $5/5$ 」の記号内容と「1」の記号内容が等しいという解釈になるが、今度はそれら 2 つの記号内容が「等しい」とはどのような意味かが問われることになる⁸⁾。2 つの数の「大きさが等しい」という意味だと解釈することもできようが、そうすると今度は「 $5/5$ 」と「1」それぞれの「大きさ」とは何で、それらが等しいことはどのように確認できるかが問題となってくる。

以上より、「 $5/5$ 」が 1 と等しいという説明や等式は、テンプレート駆動による使用と見ることはできないが、しかし対象媒介的として想定しても、学習者にとってその意味を推測することは容易ではないと考えられる⁹⁾。

第 3 学年では「 $1/10=0.1$ 」という式も現れるが、ここでの記号表現「 $1/10$ 」の使用も、同様の理由でテンプレート駆動とは言えない。「 $1/10$ 」が「 0.1 」の書き替えであるとの理解であれば可能かもしれないが、この使用を通して「 $1/10$ 」が「 0.1 」とは別な独自の数であると学習者が推測することは期待しにくい。

また分数と小数の関連づけとして、同じ数直線の上に $1/10$ 、 $2/10$ 、 $\dots$ と 0.1 、 0.2 、 $\dots$ をとったものを提示するが、同じ位置に 2 つの数が表示された数直線を学習者が経験していないとすると、数直線についても同様の問題が生じうると考えられる。数直線も一種のテンプレートと考える(Sfard (2000) の p. 55 参照)と、今の数直線もテンプレート駆動による「 $1/10$ 」の使用とは考えづらいことになる。また、2 つの異なる数が同じ位置にあること

が何を意味するのも、明確ではない可能性がある。

Sfard (2000)は関数について、文字式やグラフを指して「これが2次関数です」とする言い方が、「これが2次関数の式(グラフ)です」「この式(グラフ)は2次関数を表しています」とする言い方へ変わることは、式やグラフが何らかの対象を表すものへと変容したことを示すとしている(p. 78)。同様に考えると「5/5」と「1」が「同じ数を表している」と言うことは、これらの数字が何らかの対象を表す状態へ変容することになる。ただし、算数ではこのような説明は通常行わないであろうし、数の場合にはこの変容が難しいと Sfard (2000)が指摘している(p. 78)ことにも注意する必要がある。

(4) 数の大小比較

第3学年では $\frac{3}{5} \text{ m}$ と $\frac{4}{5} \text{ m}$ ではどちらが「長い」について考える。(2)で見たように $\frac{3}{5} \text{ m}$ が $\frac{1}{5} \text{ m}$ の3つ分、 $\frac{4}{5} \text{ m}$ が4つ分であることから、学習者はQQDのナラティブとして「 $\frac{4}{5} \text{ m}$ の方が $\frac{3}{5} \text{ m}$ より長い」や「 $\frac{1}{5} \text{ m}$ だけ長い」が正しいと判断が可能である。教科書によってはこれを「 $\frac{3}{5} \text{ m} < \frac{4}{5} \text{ m}$ 」と不等号を用いて表している。不等号の両辺のスロットに量が入った式は、それまでの量の学習では、第2学年のかさで少し扱われる程度で、ほとんど用いられていないが、より長い、より多いを不等号を用いて表す方法として、学習者にとっては受容しやすいと考えられる。

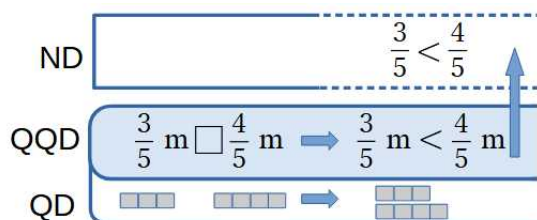


図4：2数の大小の判断

さらにこうした長さや液量の判断を基に、「 $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ 」といったNDにおける数の大小比較についてのナラティブも現れる。第2学年

で不等号を学習して以降、「 $3 < 4$ 」のように不等号の両辺のスロットに数が入った式は用いられてきている。したがって、「 $\frac{3}{5} < \frac{4}{5}$ 」のように不等号の両辺のスロットに記号表現「 $\frac{3}{5}$ 」、「 $\frac{4}{5}$ 」を入れる使用は、テンプレート駆動となり得て、両辺のスロットで使用されることが、これらの記号表現が数3や4と同様の対象を指すのであろうと学習者が推測することを可能にすると期待できる。

ただし、第1学年後半から第3学年における自然数の学習では、数の大小を判断するためのルーチンとして、数の系列でどちらが後に来るか、あるいは数直線でどちらが右側にあるかを確認することや、2位数や3位数の上の位から順に1桁の数の大小を比べることが用いられていた。しかし $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{4}{5}$ などを自然数のように数の系列として並べることが行われていないと、NDの中での同様の判断の仕方は難しくなる。数直線で示される場合に長さの単位mが付けられている場合は、長さである $\frac{2}{5} \text{ m}$ 、 $\frac{3}{5} \text{ m}$ 、 $\frac{4}{5} \text{ m}$ の長短の比較となる。したがって、自然数の数直線とは異なり、数を直接比較するのではなく、QQDでの長さの長短をNDでの数の大小に読み替えることが継続していることになる。

分数ではむしろ、この読み替えが期待されているように見える。これは、第1学年で10までの数を学習したときに、数の大小をその数に対応するブロック等の多寡により判断し、QQDでの判断を基にNDでの数の大小を決めた判断に類似していると言える。つまり数の大小に関わるNDでの規則が具体的モデルに当たるQQDでの事実を満たすようにするというメタ規則(Sfard, 2007, p. 584 参照)が適用され続けている。

なお、第3学年における数直線に関しては、単位m等が付されていることに加え、学習に現れる分数が必ずしも、同一の数直線の上に表示されないという点でも、自然数や小数の学習における数直線の使用とは異なっている。

自然数の学習では、各学習において現れる数はすべて1本の数直線の上に位置づけられるので、それを基に大小を比較することができた。このことは、第3学年で小数の学習でも同様となっている。しかし分数では、学習に現れた数および既習の自然数を全て1本の数直線に表すことは行われない。(3)で言及した数直線も分母が10の分数と小数だけが表示されているのにすぎない。

この点においても、分数での数直線での利用はテンプレート駆動とは必ずしも言えず、少なくとも、学習した数を「数直線上で整列した1つの系列」として捉えることにはつながらないと考えられる。学習した数を「数直線上で整列した1つの系列」として捉えることが、児童なりの数の全順序集合のイメージとなり、逆にその集合の要素として見なすことが、大小比較の判断を支えるだけでなく、そもそもそれぞれの数字を数として理解することに寄与していたとするならば、分数においてはそうした理解の促進が、テンプレート駆動としては期待できないことになる。

(5) 分数の加法と減法

$1+2=3$ や $7-5=2$ といった自然数の加法と減法の式をNDからのテンプレートとして用い、上の式の数のスロットに分数を入れた式は、「 $2/5$ 」などのテンプレート駆動の使用と考えることができる。したがって、こうした使用により、「 $2/5$ 」などが数2などと同様の対象を指すのであろうと学習者が推測することを可能にすると期待できる。また、教科書では量の合併や減少の場面を用いているが、これらは第1学年で加法や減法を初めて学習した際にも用いられたので、「+」や「=」が表すものも推測することができよう。

加法の説明では「 $1/5$ Lの2つ分」「 $1/5$ Lの3つ分だから $3/5$ L」といった文が用いられる。これは分子が1でない分数の導入にも現れていたため、QQDのナラティブとして学習者に受容されていることが期待できる。ま

た、長さやかさの学習において加法・減法を行った際に、「1 cmが4つと3つだから」といった推論を行っている教科書もあり、その場合は、「 $1/5$ Lの1つ分と2つ分で3つ分だから $3/5$ L」といった説明も、「 $1/5$ 」や「 $3/5$ 」などのテンプレート駆動による使用と考えられる。そしてここでも、NDでの数の操作の規則がQQDでの事実を満たすようにするというメタ規則に従うことで、「 $1/5$ L + $2/5$ L = $3/5$ L」というQQDでの事実をもとに、「 $1/5 + 2/5 = 3/5$ 」というNDのナラティブが生成されることになる。

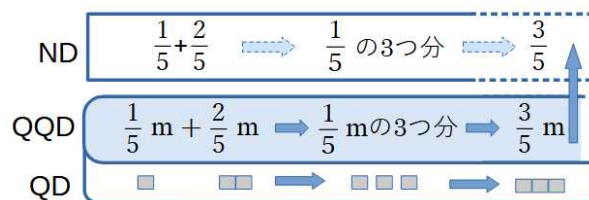


図5：加法の計算の説明

ただし(2)で述べたのと同様に、Lにより液量を表現する場合、1 Lのいくつ分で表すというQQDの規則からは少し外れている。

他方で、QQDでの加法・減法では自然数の加法・減法の結果や筆算を主に利用し、単位量の個数を数えることが明示的に行われていない場合、上の説明を学習者が受容できるためには、「 $1/5$ L」を第1学年の加法・減法で用いたブロックと同様のものとして捉えることが必要となるかもしれない。

「 $1/5$ の3つ分」という説明の場合は、まず分子が1でない分数の導入の際に、「 $1/5$ の3つ分を $3/5$ という」といったNDでの分数の既定が明示的に行われていたかが問題となる。それがない場合は、QQDからNDへの翻訳が学習者自身により既に行われ、学習者も記号表現「 $3/5$ 」を対象媒介的に使用でき、その記号内容を「 $1/5$ の3つ分の数」として捉えていることが必要となる。

ある数のいくつ分かにより和や差を説明する文は、小数の学習での「0.1のいくつ分になるか」として現れているが、自然数の加法

や減法でも、10のまとまりの個数を数えたり、1万などを一つ分として考えたりして和や差を求めるという考え方には表れている。したがって、“ $1/5$ ”の個数により和や差を正当化するNDのナラティブやそれにより和や差を求めるNDのルーチンが学習者に受容されるかは、学習者にとって“ $1/5$ ”が10や1万のようにNDの対象として「一つ分」と見なせるようになっているかに拠ることになる。

なお、自然数や小数の加法・減法の学習では、最終的に筆算の形でまとめられ、その実行がNDでのルーチンとして機能していた。またその際には、位ごとの計算をするという考え方が基本的に採用されていた。位の部分を各単位に読み替えることで、筆算は長さや液量の学習でも利用されており、いわばNDのルーチンがQQDへ翻訳された形になっていた(布川, 2021a)。一方で分数の場合には、いわゆる筆算の形にまとめられることはなく、位という考えにより計算を説明することも行われな。つまりNDでは最も標準的なルーチンが、分数についてはルーチンとはならない。また $1-3/5$ で1を $5/5$ と直す部分を自然数の減法における繰り下がりと対応させて受容できるかは、上述の「 $5/5=1$ 」をどのように解釈していたかに拠る。NDを分数を含むように拡張した時に、筆算のルーチンの部分ではそれ以前の数の学習との連続性が保たれないことになる¹⁰⁾。

5. 分数を含むディスコースの生成と問題点

(1) テンプレート駆動の適切性

「 $1/3\text{ m}$ 」や「 $3/4 < 2/4$ 」「 $1/5 + 2/5$ 」といった分数の記号表現の使用に関しては、これらの文の数のスロットに自然数が入った表現が以前の学習で用いられており、テンプレート駆動と考えることができ、それを基にして学習者は“ $1/3$ ”等も自然数と同様の記号内容を持つのであろうと推測することが可能であった。

ただし、その際に現れる説明の文を吟味す

ると、必ずしもテンプレート駆動による分数の記号表現の使用とは言えない場合も含まれていた。「 1 m を3等分した1こ分の長さ」、「 1 m の $1/3$ の長さ」、「 $1/3\text{ m}$ の2こ分の長さ」といった文はQQDの規則やそれに基づく文に正確に合致しているとは言えなかった。大小判断では、NDでの判断を行うためには、記号表現の対象媒介的な使用がこの段階で既に必要であった。またNDにおける大小比較のためのルーチンが適用しづらいという問題も見られた。加法と減法についても、NDでの説明には単位分数を10や100と同程度に対象媒介的に使用することが必要であり、また筆算というNDのルーチンはそもそも分数では使用しにくいという問題が見られた。

これらを考慮した場合、上述の説明が十分に機能しているかに注意を向ける必要が出てくる。例えば、“ $1/3\text{ m}$ ”や“ $2/3\text{ m}$ ”が表す記号内容を、教科書の説明により学習者が適切に捉えることができているのかが問題となる。 2 m を3等分した1個分の長さを $1/3\text{ m}$ と考える子どもの存在も、そもそも“ $1/3\text{ m}$ ”の記号内容が誤って捉えられていることによる可能性もある。

説明に際して、分数の記号表現の対象媒介的な使用を想定する場合は、単元の中でそれを促す手立てが準備され、必要な時点で対象媒介的な使用になると期待できるかの検討が必要となろう。

(2) NDのナラティブとしての曖昧性

上述のメタ規則に従い、QQDの拡張やそこでの量に関する事実に基づいて、NDを拡張したり数の相互関係や大小判断、演算結果を決めるという場合は、NDでのナラティブはQQDでのナラティブにより正当化されるというよりは、むしろ「そのように決める」ことになろう。

しかし実際には、QQDでのナラティブに続けて特に説明もなく、対応するNDのナラティブがNDの事実であるかのように提示さ

れていた。それにより QQD と ND との関係が曖昧となり、分数は ND をどのように拡張したのかも曖昧になる可能性がある。冒頭で見た今井ほか(2022)の調査結果は、この曖昧さを反映しているとも考えられる。

例えば「2 の 2 倍は 4」「1 の 2 倍は 2」という文の最初のスロットに“1/2”という記号表現を入れた「1/2 の 2 倍は 1」という内発的な(endogenous)テンプレート駆動による使用を中心として分数の初期の学習を進めることもできよう。しかし現行の指導ではむしろ、量に関わる QQD のナラティブに依拠した外発的な(exogenous)テンプレート駆動の使用を中心に分数の初期の学習は進められている。いわば「AR と VR の間の家族的類似性」(Sfard, 2000, p. 65)に基づいて ND という VR を構築しようとしている。

その際、QQD と ND との関係をあえて曖昧なままにしておくのか、それとも ND を独立したディスコースとして学習者に提示するのか、するとすればどのタイミングと想定するのかなどが問題となる。今井ほか(2022)の調査結果とも関わり、そうした問題を検討する必要があると考えられる。

(3) ND における分数の規定

5(2)の曖昧性と関わり、分数が「どのような数であるか」を ND の中で説明することも考えられる。例えば探究する対象となるには、ある程度の一般性を持った“定義”により規定される必要があり、それにより「自律的な存在を得る」(Giusti, 1999, p. 42)とすると、分数が「自律的な存在を得」て、対象媒介的な探究や対話が成り立つためには、分数を算数なりに定義することも考えられる。

また数詞は他の対象を説明する形で導入され(Hofweber, 2005)、そこからある種の対象とされる捉え方に移行するとともにされる(有安, 2022; ワイルダー, 1980)。ただしそうした対象としての数はある「理論」に相対的なものである(須長, 2000)とすれば、我々が学習者に参

加してほしい ND が明確となるよう、ND の中で他の数との関係に基づいて分数を説明する必要があるとも言えよう。それは、量などの具体的なモデルの観察から単純に抜き出すこととは、異なる捉え方でもある(Tall et al., 2000)。ND の中で分数を定義することが算数でも可能なかどうか、それを採り入れるのかが問題となる。つまり 1/3 や 3/4 などが「どのような数なのか」を、学習者に明確にするのかが問題である。

例えば $1/527$ は $1/17 + 1/31$ の和を理解する上で必要な分数であるが、多くの学習者が 8527 を量を通してではなく、1000 や 100、10 のいくつか分により ND の中で直接的に構成する形で出会っているであろうように、単位分数 $1/527$ についても、量を経由せず ND の中で構成することが期待されるかもしれない。だとすれば、学習者が ND の中で新たな分数を量に拠らずに構成できる程度に、ND に参加できるようになることも必要となろう。

(4) テンプレート駆動が利用できない場合

数の相等性は分数を自然数と関連づける重要な学習内容であるが、テンプレート駆動による使用とはなっておらず、したがってその効果も期待しづらい。簡単な等式であり、教師にとっては当然の事実であるが、実際は、以前の学習にテンプレートとして使える文がないこと、対象媒介的な使用をするとしても記号表現や等号の表す記号内容がそれほど明確ではないことが見出された。

分数を含むように ND を拡張するという点で決定的に重要な等式であることを考えると、この式が何を意味しているのかの検討と、それを学習者に理解してもらえるための手立ての準備が必要となる。

また、等式の解釈によっては、1つの数を記号内容とする多くの記号表現が存在することになるが、これは自然数とは全く異なる特徴である。「 $5/5=1$ 」といった等式や「大きな同じ数」に関わる新たなナラティブが含

まれるディスコースになるという意味では、分数の導入により ND は単に拡張とされたと言うよりも、新たなディスコースに生まれ変わるとも言える。正の自然数のディスコースから正の有理数のディスコースへの変容である。

自然数では数字をカードに一つずつ書いたものを系列として順に並べる活動がしばしば見られ、これが数直線への移行を支えているように見える。数字をカードに書いて並べた表現も視覚的媒介物(Sfard, 2008)であり、テンプレートになりうると考えるならば、分数でもテンプレート駆動による同様の提示を、単位 m などの伴わない数直線への移行を支える手立てとして利用することも考えられる。しかし 4(4)で述べたように、現れる分数全てを系列としては並べにくいことから、分数ではこの表現を利用しにくいことになる。

対応するテンプレートが以前のディスコースに見出せないとなると、新たなナラティブが生成されることになる。逆に以前のテンプレートが使いにくいとすると、それに関わるナラティブは生成できないことになる。ND を分数を含むよう拡張すると、こうした意味で、全く新たなディスコースが生じると考えることもできる。この点から分数の学習の難しさを検討することも必要であると言えよう。

(5) テンプレート駆動の可能性

自然数の学習では、計算のきまりを利用し工夫して計算するという文脈で、暗算が行われることがある。その工夫を行うことは、一種の数学的推論であり「ナンバー・トーク (number talks)」(Woods, 2022)とも呼ばれる。他方で分数に関しては、第3学年の加法・減法はもちろん、その後の学習でも、分子や分母についての比較的小さい自然数の四則演算を行うだけなので、こうしたナンバー・トークを行う機会が少ない。

暗算までいかなくても、例えば小学校第1学年で自然数を学び始めた直後には、数の分

解・合成が扱われる。この際、「7は3と4」のように、数どうしを関係付けることになる。確かに学習の際はブロックを QD において操作し、その結果を記述するという形をとるが、しかし観察結果は QQD での個数ではなく、上の例のように数の間の関係として、つまり ND での事実として記述される(布川, 2021b)。

この「7は3と4」という文は、3つの数のスロットに分数を入れて使用するためのテンプレートとして利用可能である。特に和が1になる「1は $\frac{2}{5}$ と $\frac{3}{5}$ 」といったテンプレート駆動の使用は、数10の分解・合成に対応するものとも考えることもできるし、分数を自然数と関係付けるという点で、ND において必要な学習とも考えられる。特に「数の関係網 (network of number relationships)」を構成することが数を対象として捉えることの本質であるとの指摘(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019)を踏まえると、数の学習にとって本質的に重要な活動とも言えよう。しかし、分数の学習では、そうしたテンプレート駆動による分数の分解・合成での使用は明確には行われていないように見える。

4(2)でも触れたが、分子が1でない分数を ND の中で定義しようとする、単位分数を10と同程度には数として捉え、それを1つ分としてそのいくつ分かを考える必要がある。10を1つ分と捉えることは必ずしも容易ではない(Cobb & Wheatley, 1988)が、加法や減法に加え、新たな数の構成など様々な場面で10の個数を考える機会のあることが、その捉え方を促していると考えられる(布川, 2024b)。だとすると、単位分数に関しても同様の経験が意図的に準備される必要があることになる。10や100の個数に言及した文を用いて分数の記号表現をテンプレート駆動により使用してみるなど、単位分数を数えることが自然に思える程度に、対象媒介的に使えるようになる機会が保証されているかが問題となる。

6. おわりに

新たな数を学習する際、一つの拠り所は既習の数についての知識であろう。自然数の使われ方との類似性を吟味するという点で、本稿で行ってきたような、テンプレート駆動による使用と見なせるかを確認することは、学習者から分数も自然数と同様の数であると感じてもらうためにも必要である。さらに自然数のQQDでの使用とNDでの使用との関係や前者から後者の移行を確認することは、分数をNDにおいて明確に位置づけるための手立てを考える(布川, 2021b)上でも役立つと期待される。

本稿ではテンプレート駆動と対象媒介的な使用とを視点としたが、Sfard (2008)の述べる受動的使用からルーチン駆動、フレーズ駆動を経て対象駆動へと至る過程(pp. 181-182)では、変容をさらに詳細に捉えようとしている。そうした視点も援用することで、分数が空の記号表現から記号内容と一体化した記号へと移行する過程をていねいに検討することも必要となろう。

註および引用・参考文献

- 1) 本稿では紙幅の関係から、 $\frac{a}{b}$ を a/b のように表すことにする。
- 2) Sfard (2008)がフレーズ駆動と呼ぶ語の使用の仕方は、テンプレート駆動よりも自由度が高くなり、個人の裁量によって他者から聞いたことのない文でも、語を含むフレーズを使用できる状態と考えられる。文章題において分数で答えよと言われればできるのに、多段階の問題の途中結果を分数で表して後で使うことはできない(布川, 2023a) 子どもは、こうした自由度が低い状態に留まっている可能性もあろう。
- 3) 本来であれば Discourse on Quantities からDQなどとすべきであろうが、本稿では各ディスコースを明確にするためQやQQ、Nを前に出し、QD、QQD、NDと呼んでおく。

4) 我々は $\frac{1}{3}$ を既に数字として利用しているので当然のように感じるが、仮に同じ長さを $\frac{1}{3}$ と表現すると知っただけだとしても、「 $\frac{1}{3}$ と $\frac{1}{3}$ をたす」と言えても「 $\frac{1}{3}$ は甘い」とは言えなそうであるという判断はできる(Sfard, 2000, pp. 60-61)。

5) これについても4)の「 $\frac{1}{3}$ 」を用いて、「 $\frac{1}{3}$ の2つ分の長さを $\frac{2}{3}$ という」としても、当該の量を表現し、コミュニケーションすることはできよう。

6) 「 $\frac{1}{3}$ の2つ分は $\frac{2}{3}$ 」という時は、 $\frac{1}{3}$ も $\frac{2}{3}$ も既に $\frac{1}{3}$ を基準として数値化され、わかっていることが前提となっている。

7) 例えば $\frac{1}{3}$ と $\frac{2}{3}$ は記号表現としては異なるが、それらの記号内容は通常、同じモノと想定されている。 $\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ では、大人でも違和感を持つ人もあろう。

8) 数学者がよく行うような有理数の構成をすれば、この等号も同値関係として解釈できよう。すなわち、自然数の順序対について (a, b) と (c, d) が同値であることを $ad=bc$ で定義するとともに、自然数 n を $(n, 1)$ として順序対の集合に埋め込めば、 $(5, 5) \sim (1, 1)$ となるので、これを $5/5=1$ の表す内容と解釈するのである。ただ、これが算数の学習で採用できる解釈でないことは当然であろう。

9) 逆にこれを $\frac{1}{5}$ の定義として分数を導入してしまうことも考えられる(布川, 2023b)。

10) この点については、分数の学習は、第6学年で除法も乗法の形に表すと学習することで、むしろ文字式の学習に接続していると見ることもできよう。

有安和人 (2022). 数学における唯名論への反論. 哲学(関西大学), 40, 1-21.

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 10 (3), 1-28.

Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics

- classroom situations. *Educational Studies in Mathematics*, 23, 99-122.
- Giusti, E. (1999). 数はどこから来たのか：数学の対象の本性に関する仮説 (斎藤憲訳). 共立出版. (原著は 1999 年)
- Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019). Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain of number. *Quadrante*, 28 (2), 6-31.
- Hofweber, T. (2005). Number determiners, numbers, and arithmetic. *The Philosophical Review*, 114 (2), 179-225.
- 今井むつみ, 楠見孝, 村杉伸一郎, 中石ゆうこ, 永田良太, 西川一二, 渡部倫子 (2022). 算数文章題が解けない子どもたち：ことば・思考の力と学力不振. 岩波書店.
- 布川和彦 (2021a). 分数学習のための基本枠組みの試論：変換としての分数とそのカプセル化. 上越数学教育研究, 36, 1-16. <http://hdl.handle.net/10513/00008476> (2025 年 2 月 26 日アクセス)
- 布川和彦 (2021b). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, 40 (2), 361-372. <http://hdl.handle.net/10513/00008350> (2025 年 2 月 26 日アクセス)
- 布川和彦 (2022). 「量分数」の再検討：「測定値としての分数」を視点として. 日本数学教育学会誌, 104 (2), 2-13.
https://doi.org/10.32296/jjsme.104.2_2
- 布川和彦 (2023a). 分数が明示されない文章題における小学 6 年生の解決の様相. 上越数学教育研究, 38, 1-10. <http://hdl.handle.net/10513/00008583> (2025 年 2 月 27 日アクセス)
- 布川和彦 (2023b). 数としての分数導入への試論. 上越教育大学研究紀要, 43, 107-116. <http://hdl.handle.net/10513/0002000014> (2025 年 2 月 26 日アクセス)
- 布川和彦 (2024a). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, 11, 195-205. <http://hdl.handle.net/10513/0002000148> (2025 年 2 月 26 日アクセス)
- 布川和彦 (2024b). 小学校算数科における二面性の問題. 上越教育大学研究紀要, 44, 125-135. <http://hdl.handle.net/10513/0002000277> (2025 年 2 月 26 日アクセス)
- Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, 16 (4), 567-615.
<https://doi.org/10.1080/10508400701525253>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.
- 須長一幸 (2000). フレーゲ算術と構造主義. 科学基礎論研究, 28 (1), 9-14.
- Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E. & Simpson, A. (2000). What is the object of the encapsulation of a process? *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (2), 223-241.
- 田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
- ワイルダー, R. L. (1980). 数学の文化人類学 (好田順治訳). 海鳴社. (原著は 1968 年)
- Woods, D. M. (2022). Number talks: Engaging students in mathematical reasoning. In P. M. Jenlink (Ed.), *Mathematics as the Science of Patterns: Making the Invisible Visible to Students through Teaching* (pp. 205-228). Information Age Publishing.

割合のインフォーマルな知識を利用した 4 年生の子どもの様相

佐藤 茂太郎

兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科院生

1. はじめに

小学校課程における割合指導は主に第 5 学年で行われる。教科書には「もとにする量」「比べる量」「割合」といった用語が登場したり、学習指導要領解説算数編（文部科学省，2017）では「%」が〔用語・記号〕として示されたりする。また、異種の二つの量の割合も学習する。

割合に関連する学習として、現行の学習指導要領解説算数編から第 4 学年で「簡単な場合についての割合」が位置付けられ、整数値で倍を用いた考え方を経験させることになった。ある教科書では、A と B の包帯の伸び具合を比較させ、元の長さと同じ長さの長さを考えて、倍で比較できることがあるとまとめている。また、別の教科書では、イルカとクジラのうまれた時の体長と現在の体長を比べ、今の体長が元の体長の何倍になっているか比較して考えている。

子どもの割合の理解の状況について検討すると、長きにわたり全国学力・学習状況調査等の結果から理解の不十分さが指摘されている（国立教育政策研究所，2018；熊倉他，2024；文部省，1957；布川，2024）。従来から割合指導の改善に関する研究が蓄積されてきているにもかかわらず、改善している傾向が見られていない（国立教育政策研究所，2023）。

割合指導に関しては、5 年生の子どもの対象に割合の導入における比例的推論の利用

を通して、関係する 2 量について同じ割合になる数対を生成する活動を通して、2 量の関係に焦点をあてた研究がある（市川他，2022；田端，2003；高橋他，2014）。また、子どもの割合のインフォーマルな知識をもとに導入を図る試みも見られる（栗山他，2017；佐藤，2024）。本稿は、後者の立場に依拠して行った研究である。なお、本稿におけるインフォーマルな知識は、学校数学でまだ公式に学習を行っていないにもかかわらず身に付いている知識のことである。例えば、割合についての感覚や百分率などの知識を指す（山口，2007；吉田，2003）。

割合のインフォーマルな知識をもとにした研究に栗山・吉田・中島（2017）がある。この研究は、認知心理学の視点からカリキュラムを構成している。子どもの割合に関する知識において、極めて豊かなインフォーマルな知識を有していると述べている。また、日常生活の中で割合の基本となる意味を獲得していることなどについて指摘している。さらに、割合の学習を行っていない子どもでも、割合の第 2 用法に対応する問題を解決できると述べている。

栗山・吉田・中島（2017）の研究のほかには割合のインフォーマルな知識に焦点を当てた研究がある（Van den Heuvel-Panhuizen, 2003；Nunokawa, 2012；山口，2007）。これらの研究では、5 年生や 6 年生を対象とした検証を行っている。また、佐藤（2024）は

割合のインフォーマルな知識に着目し, 第 5 学年の子どもを対象に, 単元を通してインフォーマルな知識をどのように利用しながら問題解決するか検証し分析を行っている. この研究では, 10 %や 1 %のベンチマークを利用して解決していた子どもの様相, 百分率と分数とを同時に考える姿があったことなどを報告している.

割合の学習や, 割合の学習と関わりのある比例的推論の学習活動の中で, 中学年の子どもの様相に着目した研究もある(青山, 2013, 2018; 布川, 2006, 2007). これとは異なり割合のインフォーマルな知識の分析を行っている研究もある(河野・吉田, 1999). 河野・吉田(1999)は, 割合のインフォーマルな知識の分析を 4 年生~6 年生を対象に行っている. 4 年生であっても割合の意味について, 70 %の子どもが割合の意味を獲得していることを指摘している(吉田, 2003, p.111).

これと関わり, 山口(2007)は検証の対象が 5 年生であったが, 百分率の指導の前に「割合を量の視点から捉えることのできるインフォーマルな知識を所有しており, 量感覚も確かである」と述べ, 百分率のインフォーマルな知識を子どもの姿から確認している(p.105).

つまり, 5 年生で割合(百分率)を学ぶ前に多くの子どもは百分率のインフォーマルな知識を有していることが分かる. したがって, このような百分率のインフォーマルな知識を利用して, 高学年への橋渡しとなる 4 年生に焦点をあて, 割合のインフォーマルな知識を利用した学習活動をデザインすることも改善のための一つの可能性として考えられる. しかし先行研究において, 検証する対象を 4 年生として, 割合のインフォーマルな知識を利用した一斉授業を分析した研究は管見の限り見当たらない.

そこで本稿は, 4 年生における割合のインフォーマルな知識を利用した一斉授業を分析し, その中で, 子どもの様相を検討することで, 割合指導における示唆を得ることを目的とする.

2. 研究の方法及び授業の概要

本稿で取り上げる授業は, 公立小学校の 4 年生 1 クラス(出席者 26 名)で行われた. 授業者は筆者であり 1 時間(45 分間)の飛び込み授業であった. 本稿では, 授業を記録した VTR から作成した発話記録, 板書記録, 子どもが使用したワークシートをもとに分析した.

授業開始前から授業者は割合のインフォーマルな知識を表出することを意図した. 授業日は 2024 年のある 3 連休後の 6 校時であった. そのため, この時間帯における子どもの疲労度を百分率で表現してもらうことで, 子どもとの関係を作るとともに, 百分率に関するインフォーマルな知識の最初の表出をねらった.

また, 実際の授業については次のように割合のインフォーマルな知識の表出を意図した学習活動をデザインした. まず, 山口(2007)や佐藤(2024)にあるように, 容器に色水を注ぐ活動を通して, 自然に割合に関するインフォーマルな知識の表出を意図した. ここでは色水が容器全体のどの程度の割合かを考える活動であった.

次に, 様々な大きさの容器を提示し, 50 %分の色水が注がれたら挙手や合図をするように求めた. これは 50 %に関するインフォーマルな知識の表出を意図した. また, 自発的に子どもに割合を考える機会を設定した(McMullen & Hannula-Sormunen, 2014).

その際, 60 mL の 50 %, 25 %, 12.5 % 色水が入った状態をイメージできる図を描く活動を取り入れた.

連続量を選択した理由は、吉田・河野・横田（2000）が離散量で扱っていることとの相対化を図るためである。また、連続量であった場合に、比例的推論を働かせるか検討するためであった。数値設定に関して、50 %は半分であるといったインフォーマルな知識であること、25 %は半分の半分として考えることも意図したものであった。25 %に関しては、令和 4 年度全国学力・学習状況調査大問 2 の（1）で正答が 71.3 %の反応率だったことから、分数でも考えることが 4 年生でどの程度理解できるか把握するという意図があった。さらに、25 %の半分である 12.5 %に関しては、半分の系列でどの程度考えることができるか分析するため設定した。

授業の終末での活動では、60 mL の 50 %分を求めることを指示し、ここでは第 2 用法に関するインフォーマルな知識を利用することを意図した。このことに関わっては、令和 4 年度全国学力・学習状況調査大問 2 の（2）では、1000 mL の 40 %分を求める問題の正答は 64.8 %であり、第 2 用法の問題は他の用法に比べ正答率が高いことから選択された。分析対象が 4 年生ということで、基準量の 40 %よりも考えやすい 50 %を選択した。

3. 割合のインフォーマルな知識に関わる学習活動

（1）授業前における子ども疲労度の確認

教師は、子どもの疲労度の状態を確認した。Ren は「1 %」と反応した。Konosuke は「最大が 10 なら 3 か」と反応した。また他の子どもは「5 %」と反応した。次に教師は全体に対して 10 %～100 %まで順に尋ねた。子どもは自分の疲労している状態を百分率の程度で考えてそれぞれ挙手した。

河野・吉田（1999）や吉田（2003）では、4 年生について 7 割程度インフォーマル

な知識が身に付いていることが報告されたが、ここでは 7 割以上の子どもが百分率のインフォーマルな知識を有している様子であった。また、Ren のように 1 %自体を思考の対象として捉えている子どももいることが分かるが、Konosuke のように全体と部分の関係性を捉え、検討する子どもも存在した。これは割合を学習する前においても、子どもが割合の意味を、ある程度捉えられているとする先行研究の指摘と整合するものである（栗山・吉田・中島，2017）。

（2）容器に色水を注ぐ活動

授業に入り、容器に色水を注ぐ活動を行った。教師がどの程度入っているか尋ねると何人かの子どもが「1 L」「4 L, 4 L」と反応した。このことから、容器全体に対する入った色水の量の割合を検討しているのではなく、色水の量を認識し子どもは発言しているものと捉えることができる。量は、経験と具体に基づく概念であるが、この場面において子どもは容器に注がれた量と関わり判断していることが推察される（田村，1978；布川，2023）。

（3）そえぞれの大きさの容器に 50 %程度色水を注ぐ活動及び満タンは 100 %であるといったインフォーマルな知識の確認

活動を続けた際、教師がどの程度入っているか尋ねると、「3」「1」「1 L」「1/2」「1/2 L」「200」「1/200」と何人かの子どもが発言した（氏名は不明）。その後、教師は分数「1/2」の発言を取り上げて「1/2」と板書した。また、教師から「何回入れたっていう話と違う言い方ができますか？」と問うと、ある子どもが「半分」といった反応があった。この活動から、子どもは初め、色水の量や何杯分入れたかといった「量」を対象として考察していると捉えられる。

次に教師は Yukino を指名した。Yukino は「100 %のうちの 50 %」と発言した。その

後, Kanon が「もしこのペットボトルが 100 %だとたとえていたら, その満タンのうちの」と発言したところで教師は発言を止め, 全体に「待ってね (板書する) 100 %が, 今何て言ったみんな, Kanon さんなんていった?」と問うた. すると, Konosuke が「ペットボトル満タンが 100 %」と発言した.

教師は, その意味を Hidemasa に確認すると Hidemasa は「えーと, それ以上入り切らない」と発言したため「じゃあ, 最初に私がここまで入れていたのは何%なの?」と確認すると Hidemasa は「100」と反応した. 全体が 100 %であることが確認されたところで, 教師は再度 Kanon を指名し先ほどの説明の続きを発表させた.

Kanon は「100 %が満タンだとしたら, そのうちの 100 パーのうちの 50 %で, Yukino ちゃんがたとえたと思います」と述べ, その後 Konosuke は「満タンが 100 %だとしたら, 100 %のうちの 50 %」や「100 %のうちの 50 %がまあ, だいたい半分だから」といった発言をした.

これらの発言から, Yukino のように全体と部分の関係性を捉え, 百分率のインフォーマルな知識を利用して 100 %に対して色水の量は 50 %だと捉えて判断していることが分かる.

一斉指導の中では子ども同士の相互作用により, 満タンが 100 %である割合のインフォーマルな知識の確認ができた. また, 半分为全体の 50 %であるというインフォーマルな知識も確認された.

(4) 容器に色水を 10 %~90 %程度注ぐ活動

満タンは 100 %であることの確認後, 容器におよそ 10 %分色水を注ぎ, どの程度入っているか教師は子どもに尋ねた. すると「10 パー (10 %)」 「1/10」 「5 パー (5 %)」 「7 パー (7 %)」 といった反応があ

った. その際どの程度の割合の色水が入っているか数名の子ども同士で確認をさせた.

確認後教師は Marino を指名した. Marino は「10 %のうちの 3 %」と発言した. 直後に他の子どもが「100 %のうちの 30 %」や「3/10」と発言した.

教師は Marino の発言を受け, 全体にどのような意味なのか確認した. すると Miko が「多分, 100 %のうちの 30 %?」と発言した. 教師は Marino に確認をした際, Marino はうなずいている様相であった.

その後, 教師は容器に 80 %程度の色水を注ぎ子どもは「70」「80」「90」といった反応を示した. 教師は百分率 (パーセント) をなぜ知っているか問うと, 「果汁 100 %」「何%引き」「携帯の充電」といった反応があった.

この活動でも多くの子どもは, 全体に対する部分の割合を直感的に捉えて, 何%程度か検討することができた. ただし, 中には Marino のような, 全体を 10 としたときの 3 の割合を考える子どももいることが推察される.

令和 5 年度全国学力・学習状況調査大問 4 の (1) では, 割合が 30 %になるものを 2 つ選択する問題が出題され正答率 46.3 %であった. 4 年生であっても全体を 100 や 10 とした場合を考えている様相を捉えることができた.

なお, 子どもによってはフォーマルな知識である分数を表現していることがあり, 割合を検討していく際に, 百分率や分数の知識を関連付けながら指導することも検討していく可能性が示唆される (Lamon, 1999).

実際 5 年生の教科書を確認すると割合 (百分率) 単元で分数を示している場合もある (一松他, 2024). このことに関わっては, 分数を数として日常で使用していくこ

ととの関わりもあると考えられる（布川, 2022）.

（5）様々な容器に 50 %程度注ぐ活動

図 1 にあるように様々な容器に 50 %程度色水を注ぐ活動を行った. 教師は「どうして同じ 50%なのに中に入っている量がちがうのなんだろう」と問うたところ子どもから「容器がちがうから」「容器の大きさが違うから」「容器によって 50%は違うから」といった反応があった. また, ある子どもは, 「怪獣の頭の大きさと人間の頭の大きさは違うから」と比喩的な表現を用いていた. Konosuke は理由を書いたうえで具体的事例として「3 L の 50 %は 1.5 L 6 L の 50 %は 3 L」と記述していた.



図 1：様々な容器に 50 %程度色水が入っている様子

子どもはそれぞれの容器の 50 %を直感的に捉えて, それぞれの基準量に対してどの程度の割合の色水が入っているか考えることができていると捉えることができる. 初めは, 色水の量について考えている様相から, 徐々に全体（基準量）と部分（比較量）の関係として捉えていることを自覚しているものと推察される.

また, ある子どもは図 2 のように図で基準量の 50 %を表現したり「それぞれようきにとっての 50 %がすべて同じではないのは, %が L ではないから」と記述したりしている.

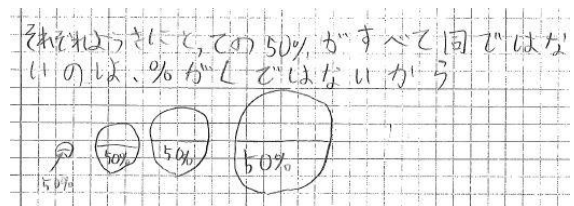


図 2：基準量に対して 50 %入っている状況を表現した図

これは, 子ども自身がある状況における基準量をイメージして, それぞれの 50 %分の図を示していることが分かる. また, 百分率と量が異なっていると思考している様相である. 割合と量が異なることを指摘している可能性がある.

（6）状況を図で表現する活動と基準量の 50 %を求める活動

次にこの活動を図に表現する活動に移行した. 教師が容器に色水が 100 %注がれている様子を図で表現するように伝えと, 子どもはワークシートに表現した. 多くの子どもが同じように場面をイメージした図を表現した. そのことを代表の子どもに板書するように指名した. それが図 3 である.



図 3：容器に色水が 100 %注がれている図

その後, 基準量の 50 %, 25 %, 12.5 %分が注がれている状況を図に表現する活動を行った. Yusuke は半分の系列を想起して, 「6.25」といった発言をした. このような活動の中で表現したワークシートの一部が図 4 である.

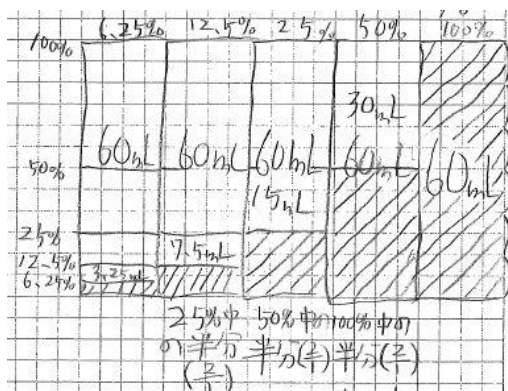


図 4：基準量に対する 100 %, 50 %などについて表現した図

さらに、基準量が 60 mL の 50 %は何 mL か尋ねると多くの子どもが 30 mL であると判断していた。理由を尋ねると、「1/2」といった発言や Akio は「100 パー（100 %）の半分だから」といった理由を発言した。Ako や Ai は理由の中に全体の「1/2」といった記述があった。Ayano は図 5 のように 10 mL を単位とした 6 つ分のマルの図を示し、3 つずつ囲み、それが 50 %分を指している説明を表現している。

別の子どもは「100 %のはんぶんは 50 と いっしょで 60 のはんぶんは 30」（図 6）と記述した。

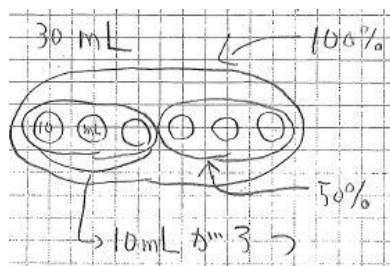


図 5：連続量を離散的に捉えた図

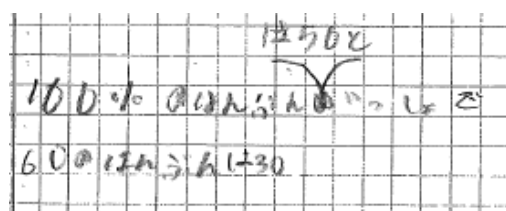


図 6：基準量に対して何%について表現した図

これらの活動から、教師からの働きかけはあったものの、子どもは問題場面の状況を想起した図を表現することができていることが分かる。検証授業は 1 時間だったため、その後の活動に活かすことができなかったが、問題の状況を参照した参照的水準（model of）で検討していると捉えることができる（Gravemeijer, 1997）。

また、基準量 60 mL に対して 50 %は 30 mL、25 %は 15 mL といった半分の系列を想起しながら活動できる子どももいることが分かる。こうした反応をする子どもがいることから、一斉授業の中で、全体で共有しながら活動を進めることも考えられる。

基準量の 50 %を求める活動が可能であることは、先行研究でも明らかにされている（河野・吉田, 1999）。本研究ではその理由について、基準量の「半分」や「1/2」と考える子どももいれば、図 6 の子どものように、一方が半分であれば他方も半分であるといった比例的推論を働かせている子どももいることが分かった。

4. 割合指導における示唆及び今後に残された課題

本研究の目的は、4 年生における割合のインフォーマルな知識を利用した一斉授業を分析し、その中で、子どもの様相を検討することで、割合指導における示唆を得ることであった。

先行研究の指摘の通り百分率のインフォーマルな知識を有することができていた。また教師の働きかけがなくても、全体を 10 や 100 とみて、入っている色水の量はそのうちのどの程度の割合か判断することができていた。インフォーマルに、こうした割合の知識が身に付いているものと推察される。

第 5 学年で百分率の学習活動を行うが、それよりも前に、単にバッテリー残量のような表示で「%」を見たことがあるという知識だけでなく、全体と部分を考えてどの程度の割合か判断できることが分かった。国立教育政策研究所（2016）大問 8 は、全体と部分の関係性を問うている問題であったが正答の反応率は約 75 % であった。本稿で分析の対象とした 4 年生であっても、同程度の正答の反応ではないかと授業を通して推察された。4 年生でも、上述してきたような知識を有している。こうしたことから、この知識を活かした第 5 学年の割合指導を検討することことが示唆されるとともに今後に残された課題である。

* 本研究については、所属長、学級担任及び該当児童の保護者に許可を得た形でやっている。

引用・参考文献

青山尚司（2013）. 割合の見方・考え方を育てる指導の工夫-数直線図上で対応する数量を操作する活動を通して-. 日本数学教育学会誌, 95(10), 2-10.
https://doi.org/10.32296/jjsme.95.10_2
青山尚司（2018）. 中学年における割合指導の一考察 -異種・同種の両方で捉えることができる教材を用いた実践を通して-. 日本数学教育学会誌, 100(6), 2-13. https://doi.org/10.32296/jjsme.100.6_2
Gravemeijer, K. (1997). Mediating Between Concrete. and Abstract. In T. Nunes & P. Bryand (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Psychology Press Ltd..315-345.
市川啓・高橋丈夫・青山尚司・加賀希支男（2022）. 算数教材研究 割合. 東洋館出版社.

一松信他（2023）. みんなと学ぶ小学校算数 5 年下. 学校図書.
河野康男・吉田甫（1999）. 割合を学習する以前の 5 年生がもつインフォーマルな知識の分析. 宮崎大学教育学部実践研究指導センター紀要, 6. 25-38.
国立教育政策研究所（2016）. 平成 28 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.
国立教育政策研究所（2018）. 平成 30 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.
国立教育政策研究所（2022）. 令和 4 年度全国学力・学習状況調査報告書小学校算数【速報版】.
国立教育政策研究所（2023）. 令和 5 年度全国学力・学習状況調査報告書小学校算数【速報版】.
熊倉啓之他（2024）. 小学生から大学生の割合の理解に関する横断的調査研究. 日本数学教育学会第 57 回秋期研究大会発表収録, 405-408.
栗山和広, 吉田甫, 中島淑子（2017）. 子どもの思考に基づいた新しいカリキュラム: 割合概念の場合. 愛知教育大学研究報告 教育科学編. 66. 69-76.
Lamon, S. (1999). *Teaching fractions and ratio for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers*. New York: Routledge.
McMullen, J.& Hannula-Sormunen, M. M. (2014). Spontaneous Focusing on Quantitative Relations in the Development of Children's Fraction Knowledge. *Cognition and Instruction*, 32(2), 198–218.
文部科学省（2017）. 小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編. 日本文教出版.

- 文部省 (1957). 全国学力調査報告書 国語・数学. 国立国会図書館デジタル版.
(調査日: 2021 年 10 月).
- 中村享史 (2002). 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌算数教育, 84 (8), 14-21.
https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_14
- 布川和彦 (2006). 比例的推論の授業における小学校 4 年生の学習の様相. 上越数学教育研究, 21, 1-12.
- 布川和彦 (2007). 小学校 3 年生による比例的推論の課題の解決: 下位単位の利用に焦点を当てて. 上越数学教育研究, 22, 1-10.
- Nunokawa, K. (2012). Multi-Relation Strategy in Student' Use of a Representation for Proportional Reasoning. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 8 (4), 233-248.
- 布川和彦 (2022). フロントライン 教育研究 分数を数として語り続けること～量と数の観点から～. 教育課程課・幼児教育課編. 初等教育資料 令和 4 年 10 月号, No.1025. 東洋館出版社. 80-83.
- 布川和彦 (2023). 量の概念を理解し, その大きさの比べ方を見いだすこと. 新しい算数研究 №630. 10 月号. 新算数教育研究会編. 東洋館出版社. 4-9.
- 布川和彦 (2024). 割合の指導に関わる諸問題. 上越数学教育研究, 39, 1-14.
- 佐藤茂太郎 (2024). 割合のインフォーマルな知識を利用した子どもの学習過程. 上越数学教育研究, 39, 23-112.
- 田端輝彦 (2003). 同種の量の割合の導入に関する一考察. 日本数学教育学会誌, 85 (12), 3-13.
https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_3
- 高橋丈夫・田端輝彦・市川啓 (2014). 割合の導入期における比例関係の顕在化に関する一考察-同じ割合の数対を作ることを通して-. 日本数学教育学会誌算数教育, 96 (4), 4-15.
https://doi.org/10.32296/jjsme.96.4_4
- 田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.
- Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics* 54(1): 9-35.
<https://doi.org/10.1023/B:EDUC.00000005212.03219.dc>
- 山口潤 (2007). 割合における児童の学習過程に関する研究-「割合のイメージを生かした表象」の効果-. 上越数学教育研究, 22, 101-112.
- 吉田甫 (2003). 学力低下をどう克服するか 子どもの目線から考える. 新曜社.
- 吉田甫・河野康男・横田浩 (2000). 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学, 2, 123-133.