上 越 数 学 教 育 研 究

Joetsu Journal of Mathematics Education

第 41 号

目 次

2026

上越教育大学数学教室

＊上越数学教育研究は 2020 からウエブ上での刊行のみとなりました.

研究論文

上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 1-12

数の学習におけるディスコース
ー小学校第 1 学年の学習と数の成立ー

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

算数や中学校数学において新しく数を学習する際には、量が参照されることが多い。こうした学習の仕方は、学習者の量に関わる経験に基づいて数や計算の学習ができるという利点を持つとともに、田村(1978)に代表されるような、数を量の倍変換と捉える立場とも整合性を持つ。さらに、割合を測定値とする捉え方(文部科学省, 2018, p. 218)にも接続しやすく、m や kg といった単位を適切に捉えた場合には、量の測定とも無理なく接続できる(布川, 2024a)。

しかし、3 本のペン、3 人の子ども、3 個のブロックなどは実際に見ることもでき、またそこから 1 個除くといった操作も可能であるのに対し、数の 3 は見ることも触ることもできないように思われる。その意味において、分数の学習で見られた量と数との関係に関わる問題(布川, 2025)は、自然数の学習でも存在すると考えられ、学習内容に内在する問題から生じる指導上の問題(布川, 印刷中)は、自然数の指導においても無関係ではないと考えられる。

一方で、自然数、特に小学校第 1 学年の最初に学習する 10 までの自然数や、第 1 学年でその後に学ぶ自然数については、概ね良好な理解状況にあるように見える。そうであるならば、この段階の数の学習は、量を利用しながら数やその計算を学習する過程の、一つの雛形を与えるものと考えられ、その過程を詳細に吟味にしておくことにも意味はあろう(布川(2021)。また、分数の学習についてディスコースの観点から考察することを試みる(布川, 2025, 印刷中)場合、自然数の学習からより直接的な示唆を得るためには、第 1 学年での数の学習についても同様にディスコースの観点から考察をしておく必要もある。

そこで本稿は、量のディスコースを参照しながら数のディスコースへの参加を促すという観点から、小学校第 1 学年の自然数の学習について検討することを目的とする。

２．検討の前提

(1) 学習に現れるディスコース

布川 (2025)は小学校第３学年の分数の学習を考察するに当たり、次のような３つのディスコースを想定している：(i) 量のディスコース QD (Quantities Discourse); (ii) 数値化された量のディスコース QQD (Quantified Quantities Discourse); (iii) 数のディスコース ND (Number Discourse)[1)]。本稿でもこの想定に沿うことにする。ただし、第３学年の分数の学習では自然数の範囲での ND を前提としていたが、小学校第 1 学年の数と計算の学習では、この ND を構成すること自体を扱うことになる。

なお QD は Resnick (1992)が想定した 4 つの数学的思考のうちの原-量(proto-quantities)の数学に、QQD は量の数学に、ND は数の数学にそれぞれ対応すると考えられる。

また Sfard (2007)が挙げる数の規則に対する、次のような２通りの承認のためのメタ規則(meta-rules)も同様に参照する；(i)「[数の規則

は]具体的なモデルにより満足されていなければならない」；(ii)「[数の規則は]公理と呼ばれる他の対象レベルの規則の所定の集まりと整合しなければならない」(p. 584)。

(2) 量についての経験

田村(1978)は次のような量に関わる公理を挙げている；(1) 2 つの量は等しいか、どちらかが大きいかの何れかが成り立つ；(2)ある量が第一の量より大きく第二の量より小さければ第一の量は第二の量より小さい；(3) 2 つの量をたすことができ、結果も 1 つの量となる；(4) 量の加法では交換法則、結合法則が成り立つ；(5) 量にある量をたすと大きくなる；(6) 小さい方の量にある量をたして大きい量と等しくできる；(7) 量は何等分かにすることができる；(8) 小さい方の量を何個かたしあわせて大きい方の量よりも大きくできる。モノの個数の場合、(7)は考えにくい場合もあるが、基本的にこれらの性質は、日常生活の中で経験してきていると期待できる。

QD ではこれらの公理に基づく操作や推論が遂行される。ただし、面積や体積については「大きい／小さい」と表すが、長さについては「長い／短い」と、個数については「多い／少ない」と表すのが普通であろう。

なお　量自体として「指せるものは存在しない」と考え、「『3 メートル』は『3 メートルのひも』のことではない」(宮下, 2008, p. 68)とすると、同様に、「3 個のブロック」は「3 個」という量自体ではない。しかし学習においては、当該の量を指したり、操作したりする必要から、当該の量を“持つ”と考えられる具体物を用いることになる。そこで、本稿でも、量についてはブロックの個数やテープの長さなどで示すことにする。

さらに Sfard (2000)の「記号表現(signifier)が記号内容(signified)に先立つ」(p. 53)、つまり新たな記号表現は対応する記号内容がなくても導入が可能であり、後になって徐々に記号内容が構築され続けるとする考え方を、本稿でも踏襲する。

３．ディスコースの観点からの 小学校第１学年の数と計算の学習の検討

教科書[2)]では動物や果物、花などの数を話題にできそうなイラストが数ページ続いた後、下の図を提示し、記号表現"3"を導入する。

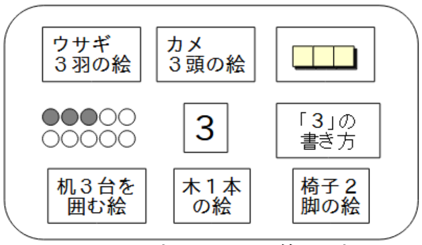

図１：記号表現"3"の導入時の図

ここではウサギ、カメ、ブロック、塗られた丸、机の絵に共通する何かと記号表現"3"を関連付けている。その何かが何かは説明されないので、"3"の記号内容も明確にはされていない。つまり、「記号表現が記号内容に先立つ」(Sfard, 2000, p. 53)ことになる。おそらく、subitizing (Trick & Pylyshyn, 1994)も想定しつつ、その“多さ”を記号内容として児童が把握することを期待していると考えられる。

記号表現である数字"3"や数詞「さん」を児童が日常生活を通して既に知っていると仮定する(樺澤と村山, 2024)と、ここでの学習は、それらと量との関係を明確化している。その中で　"3"や「さん」を「三匹」「三個」と意図的に区別して扱うことは、量とは異なる対象として数を扱うことであり、QQD とは異なる ND の対象として数を導入しようとしていると考えられる。

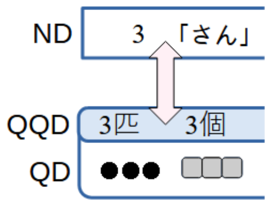

図２：QQD と ND との区別と関連付け

なお上図が提示される前に、イラスト中の特定の動物や花の数だけおはじきを置いたり、○を塗ったりする活動がある。これは、１個

に当たる多さによる“測定”(布川, 2021)を意識させる活動とも言える。結果としての測定値に焦点を当てると、数字の記号内容は 1 対 1 対応がつく集合に共通した特性、あるいは 1 対 1 対応に基づく同値類と考えられる。操作としての測定に焦点を当てると、記号内容は倍変換、つまり指さしたりブロックを置いたりする「行為の多さ」(Giusti, 1999, p. 53)ということになる。

同様に"1"、"2"、"4"、"5"が導入された後、モノがいくつか描かれた絵を見て数を表す数字カードを選ぶ活動、数字カードを見てその個数だけブロックを置く活動、モノの絵と同数のブロック、数字、数詞をセットにした資料を作る活動が示されている。

なお上の活動に続けて、1 個から 5 個までのブロックの図とモノの絵とを対応付ける活動も示されている。これはいわゆる半具体物であるブロック(磯野, 2007)を介在させることで、数字の記号内容を明確化する活動とも捉えられるが、また、ブロックをモノの集合の代表的なものとして扱えるようにすることを意図していると考えることもできる。つまり、同値類で言えばブロックをその代表元とすることであり、倍変換で言えばブロックを測定のための標準的な道具とすることである(布川, 2021)。

1 から 5 までの数の学習の最後には、5 本の杭に 1 羽ずつ鳥がとまっていく絵が示される。これは例えば 3 羽を図 1 のように個別に提示するのではなく、1 羽から 5 羽の系列の中に位置付けることになる。3 羽は 2 羽より 1 羽多く、3 羽より 1 羽多くすると 4 羽になるといったことが、示されていると考えることができる。この QQD での系列を ND で考えれば、2→3→4 という数の系列が明確化される。つまり、メタ規則(i)を想起すれば、QQD での量の系列を参照して、ND での数の系列が構成されていると捉えることができる。

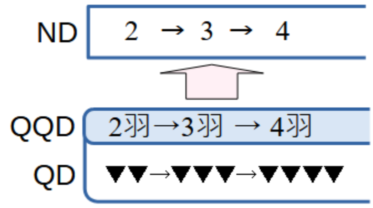

図３：QQD での系列と ND での系列

数詞の列「に・さん・し」が既知の場合、数詞の列と対応する量や数字の系列とが関連付くことにもなろう。

数 1 から 5 が以上のように導入された後、数 6 から 10 までも同様に導入される。さらに、1 羽の鳥が飛び去ったり、2 個の菓子を 1 ずつ食べてなくなったりする絵が示され、数 0 が導入される。1 以上の数がそれぞれ、モノの集合の“多さ”を記号内容とすることを期待されていたことを想起すると、集合もなく“多さ”もない状態を数と関連付けるのは不自然とも言える。2 個→1 個の系列で 0 個を考え、対応して 2→1→0 という数の系列を構成することで、数 0 を導入していることになる。

10 までの数と 0 が導入された後、6 匹と 7 匹等のペアでどちらが「多い」かを判断する活動があり、続けて 2 枚の数字カードでどちらが「大きい」かを判断する活動が示されている。2 つの量の多寡の比較を通して 2 つの数の大小比較が確立されている。

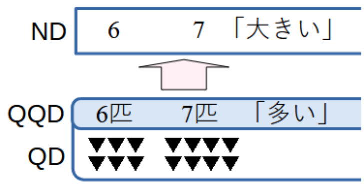

図４：量の比較と数の大小比較

ここではメタ規則(i)を背景に、QD や QQD での量の多さの判断に基づいて「数 6 は数 7 より大きい」といった ND のナラティブが承認されることが期待されている。ND における語彙として「大きい」が導入され、他の数との大小関係に関する性質が数という対象に付与されたことになる。量を参照せずに 2 数の大小比較ができるとすれば、大小比較をするという ND のルーチンも確立されることに

なる。
第 1 単元の最後では、0 から 10 までの数字カードを並べる活動が設定されている。0 個から 10 個までのブロックが順に並んだ図も示されているので、QD や QQD を参照しながら ND での数の系列を総合していることになる。しかし直前で 2 数の大小比較をした結果を適用すると、2 数の大小比較の組み合わせにより 10 までの数全体の系列を ND の内部で構成することも考えられる。

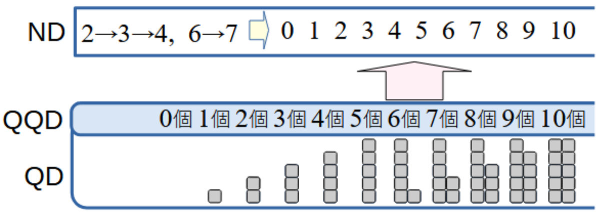

図５：量の系列と数の系列

数の系列という ND の中の対象全体に構造ができることで、QQD の「多さ」を参照せずに、数の大小を ND の中だけで判断することも可能になるとも考えられる。
第 2 単元では、数の分解・合成が扱われる。5 個のボールやブロックを 3 個と 2 個などに分けた絵が示され、それを「5 は 3 と 2」とまとめている。なお、ボールを分けた図では「3 こと 2 こにわかれる」との記述もあるが、ブロックに関しては個数による記述は見られない。ここでもメタ規則(i)を背景に、ボールやブロックに対する QD での操作やその結果を表す QQD のナラティブに基づいて、数に関するナラティブが承認されていると考えられる。

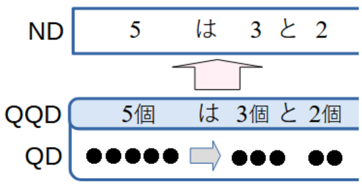

図６：物理的対象への操作と数の分解

これ以前に数 5 には 2 つの数に分解できるという性質や「加法的合成の性質」(Resnick, 1992)が明確には想定されていなかったとすると、今の活動により、2 つの数に分解するという性質が数に付与されたことになる。また数の間には上述の大小の順序関係はあったが、今の活動により、数 5 と数 3 や数 2 との間に、別の関係が生まれ、3 や 2 とそうした関係を持つという性質も数 5 に付与されたことになる(Gravemijer &Bruin-Muurling, 2019)。数 3 もまた 5 や 2 とのある関係を性質として持つことになる。こうした様々な性質を持つようになることは、数 5 や 3 がそれ自身として ND の一つの対象として成立するのを促すと言える(Slavit, 1997)。
さらに 5 を分解する操作に着目すると、数は分解という操作を施すことができる対象として扱われることになる。数 3 と 2 も合成という操作の対象として扱われる。二面性の議論(布川, 2024b)を想起するならば、このように数が対象として操作できるとの感覚は、逆に数を対象として捉えることにつながる可能性がある。
第 3 単元では、上述の数の大きさに基づく数の系列を利用して、前から 3 番目、下から 5 番目などとモノの位置を表す、いわゆる序数が扱われる。

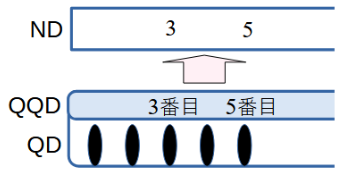

図７：番目の学習

この学習では、多さや大きさから派生した数の系列が、人やモノの位置を表すために用いられている。常に「～番目」という表現であり、数が単独で現れることはない。しかし、後の数直線の学習において、原点からの長さで数を表すことから各目盛りで数を表すことへ、さらに数直線上の各点で数を表すことへと移行すること(布川, 2024b)や、数の系列全体における位置こそが数であるとする立場(Resnik, 1994)を想起するならば、3 番目の個物と数 3 が対応することは、数 3 が多さを形

容する存在から、個物のような名詞的存在へと移行することを、促す可能性も考えられる。

第４単元で加法が学習される。ブロックに対する操作と一緒に、加法の式が示される。金魚を合わせる場面で「なんびきになりますか」と QQD の問いが提示され、またブロックの操作という QD での操作が示唆されるが、結果は「3 と 2 をあわせると 5 になります」や「3+2=5」と ND のナラティブとして記述されている。

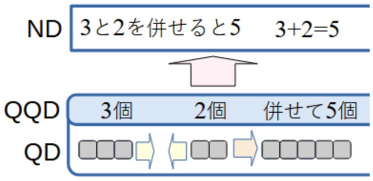

図８：QQD からの加法の規定

数を“たす”とはどのような操作であるかが、ND で定義されるわけではない[3)]。最初の 3+2＝5 といった式は、メタ規則(i)を背景に、QD での量の操作とその結果についての QQD での記述に対応するように、ND に導入されたと考えられる。「3+2＝5」という ND のナラティブは QQD に依拠して定式化され、それにより ND における加法が規定され、ND でのルーチンとして導入されることになる。また、数は加法という操作が施される対象にもなるので、これにより数の対象としての捉え方もさらに促進されると考えられる。

なお、既習の「5 は 3 と 2」という分解についてのナラティブから「3 と 2 で 5」と合成のナラティブを派生させ、メタ規則(ii)に沿うことで、それを「3+2＝5」という加法の式で表すこともできるが、この段階ではそうした ND 内部での加法の導入は見られない。

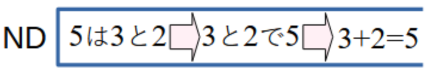

図９：ND 内部での加法の規定

ただし counting-on により加法を行うことは、一方で出発点となる数を対象として捉えることになり、他方で数の系列に関する ND での知識を活用することになる。counting-all がモノの個数をかぞえる QQD での活動であるのに対し、counting-on は上のような意味で ND での推論であると考えることができる。

第５単元で減法についても同様に扱われる。数の分解・合成から「5 は 3 と 2」なので 2 を除くと 3 になるとして、ND の内部で減法を考えることもできるが、加法と同様、そのような減法の導入はされず、メタ規則(i)に沿った形での導入となっている。

ただし加法や減法の学習で現れる計算練習において、ブロック等を用いずに計算することを想定する場合には、加法や減法が ND 内部のルーチンとして確立されていることが前提となる。

第７単元ではまず 20 までの数が扱われ、最後に 20 より大きい数として 33 までの数が現れている。"13"と"15"が動物の匹数、木の実の個数を表す記号表現として導入されるが、その際「10 と 3」「10 と 5」であることがまず確認され、その後「13 びき」「15 こ」という QQD の語彙が導入される。つまり 13 や 15 は最初から、既習の数を合成することにより ND の中で構成され、それを 10 匹や 10 個を越える多さを表すために利用するという立場であるように見える。

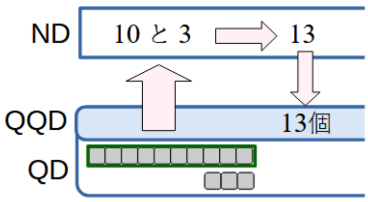

図 10：10 と 3 から 13

その後、11 から 20 までの数の「10 といくつ」という形の合成・分解が扱われるが、ブロックは 13 の場合だけ示され、それ以外は数だけで考える形になっている。２位数としての構造を意識化することが目指されると同時に、新たな数を既習の数と関係づけることで、新たな数も ND の対象として捉えることにつながると考えられる。

続けて 20 までの数の数直線が提示される。

数直線はNDの視覚的媒介物と考えられるが、ここでは、区間に沿って動物が跳ぶという設定になっており、跳んだ跡が円弧で示される。

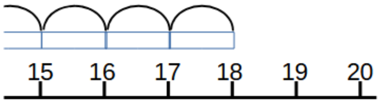

図11：数直線の右端部分

したがって、図11の18を跳んだ回数や円弧の個数としてQQDで解釈もできる。他方で「どこまですすみましたか」と問うて、跳んだ結果の最終位置に学習者の注意を向けており、数直線の位置が数を表すとのNDでの解釈を促してもいる。実際、数直線を見て気づくこととして「右にある数の方が大きい」ことを示唆しており、大小比較の問いも数直線での位置関係に基づいて判断することが期待されているように見える。つまりNDでの視覚的媒介物のscanningの仕方(Sfard, 2008, p. 134)を扱っている。さらに数字カードによる数の系列の穴埋めも行われ、数の系列の中での個々の数の位置に重点が移っている。ここでの学習では、数が多さを表すものから、特定の位置を占める個体としての対象へと、捉え方が変わっている。

数が系列の中の位置として捉えられることで、「12より3大きい数」や「18より4小さい数」等を考えるNDのルーチンや、それについてのナラティブを扱うこともできるようになっている。こうしたナラティブは数15や14に新たな性質を与え、これらの数を対象として捉えることを促すと考えられる。

簡単な加法と減法も扱われるので、11から20までの数も加法や減法という数の操作を施す対象として位置付けられる。その際、まず上述の数の合成・分解により和や差が求まる場合が扱われる。つまり、ここでの加法と減法は、メタ規則(ii)に沿って、NDのナラティブに基づいて承認されることが期待されていることになる。その後、12+3や15–2で答えが求まる文章題も扱われるが、その際も、12を10と2に分解してそこに3をたすとする考えが示される。12+3＝(10+2)+3＝10+(2+3)と結合法則により既習の場合に帰着させ、NDでの承認が想定されている。ただし結合法則自身はQDの操作やQQDでのナラティブに基づき前提されることになろう。

単元の最後で20より大きい数が扱われる際には、20と3で23といった数の構成に加えて、「10が3こ」や「10が3ことばらが2こ」といった表現も見られる。10はブロック10個などのまとまりを指すものの、「10このまとまりが3こ」ではなく「10が3こ」と表現されることで、数10がブロックなどのモノと同じように、個数をかぞえることができる対象として扱われている。10の個数を考えられるようになることで、NDの中で20以上の数を構成することが可能になっている。

第10単元では7+3+4や10–3–2といった3項の計算が扱われる。加法や減法は本来2項演算であるので、3項の計算は結合法則を用いて規定する必要があるが、ここではメタ規則(i)を背景に、QDにおいて量の増減を続けて行う操作との対応で、3項の計算も当然できるものとして想定されている。

第11単元では、繰り上がりのあるたし算が扱われる。その際、9個のブロックは10個入りのケースに入れた状態で示され、10個は9個と1個というQQDのナラティブが示唆される。ただし観察した結果は「4を1と3にわける」「9に1をたす」などとNDでの記述としてまとめられている。

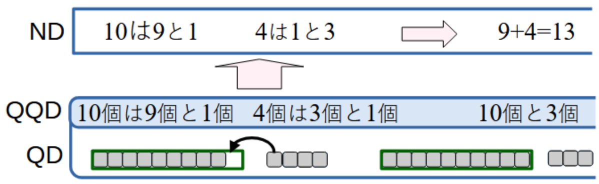

図12：繰り上がりのあるたし算

さらに操作の結果はいわゆるサクランボ図にまとめられる。これは数字というNDの記号表現だけで構成されるので、数の分解・合成に基づく計算方法を表す、算数独自のND

の視覚的媒介物と考えることができる。

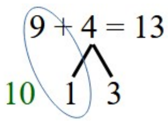

図 13：サクランボ図

つまり、繰り上がりのあるたし算の計算方法は、QD での操作や QQD での推論により補助されつつも、数の分解・合成という既習の ND のナラティブに基づいて承認され、ND でのルーチンとして確立することが期待されていると見ることができる。

逆に言えば、サクランボ図の各数字は、ブロックとケースとは異なり、それ自体では合成・分解の方法を示唆しないので、その数字が表す数の性質に関する ND のナラティブに基づいて操作を進めるしかないことになる。

その後、たし算の書かれたカードを規則的に配列したり、そこからきまりを見つける活動が扱われるが、数式どうしの関係を考察するという点で、演算の数学(Resnick, 1992)に関わるものであり、ND において演算自体を対象とする活動とも考えられる。

第 12 単元では繰り下がりのあるひき算が学習されるが、第 11 単元と同様の進め方となっている。

第 15 単元では 100 までの数が学習される。導入ではブロックの個数をかぞえるという QQD での活動が行われる。その際に 10 個のまとまりが強調されるが、その結果は単純に個数に関する QQD でのナラティブではなく、「10 が 3 こ」という ND でのナラティブと「ばらが 4 こ」という QQD でのナラティブが混在した表現となっている。「1 が 4 こ」という表現は最初は用いられない。

さらに位を表す枠という ND の視覚的媒介物が導入され、10 個のまとまりが 3 つある QD の図と「十の位」の"3"を対応させ、ばらのブロック 4 個と「一の位」の"4"を対応させている。ここで「十の位」「一の位」という用語が ND の語彙に追加され、「十の位」が 10 の個数を表すとされる。「一の位」はこの時点では「ばら」の個数を表すとしているが少し後では 1 の個数を表すとして扱われる。これにより数 1 も個数をかぞえる操作の対象となり、3 や 8 といった数は数 1 の集まりとしても捉えられることになる。

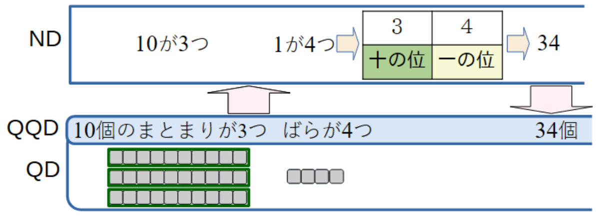

図 14：２位数の構成

第 17 単元では、少し複雑な場面における演算決定が扱われる。例えば「10 人並んでいる時、左から 4 番目の人の右側には何人いるか」「リンゴが 6 個あり、みかんはリンゴより 4 個多い時、ミカンは何個か」といった場面が文により提示される。これについて図 15 のような図をかき、図を見ながら式と答えを書くことが求められている。

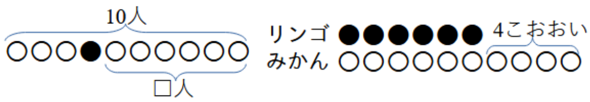

図 15：場面を表す図

ここでは、QD の操作と図を参照した QQD での推論を行うことで、既習の ND の演算を適用することが目指されている。したがって ND の対象レベルの新たなナラティブの生成というよりも、本単元で現れるような複雑な場面でも既習の演算が利用可能であると学習することで、ND の知識の適用の可能性を理解することが目指されていると考えられる。

4．ND の対象としての数の成立

(1) 数の成立

第 1 単元では図 1 のようにモノの集合の絵という QD の視覚的媒介物を、「三個」などの QQD の語彙を経由しながら、助数詞を伴わない ND の語彙である"3"や「さん」が導入

される。いくつかの集合に共通の何かを数 3 が反映していることは伺えるが、この時点では、数 3 に当たる"3"の記号内容は明確ではなく、前述の通り「記号表現が記号内容に先立つ」(Sfard, 2000, p. 53)状態と考えられる。ND の対象があることが宣言されたに過ぎない。

しかし図 3 のように、モノを 1 つずつ増やしていきながら多さの系列を作り、メタ規則(i)を背景に、それと並行して数の系列を考えることで、数 2 の次、数 4 の前という性質が数 3 に付与される。さらに図 4 のように、モノの集合の多さと並行して数の大きさを考えることで、数 1 や数 2 よりも大きいという性質や、数 4 や数 5 よりは小さいという性質が数 3 に付与される。ND の対象である数の間に大小関係という関係が導入され、数は大小比較の対象となる。10 までの数の集合ではあるが、全順序集合という構造が導入されたとも言えよう。図 5 のような提示は、この構造を明確化したものとも考えられる。

図 6 のように数の合成・分解が学習されると、数は分解と合成という ND の操作の対象にもなる。またその結果として、数 3 に 1 と 2、あるいは 2 と 1 に分解できるという性質や、数 2 と合成されると数 5 になるという性質が付与される。これはまた数 3 と 2、5 の間のある関係が、ND の対象レベルのナラティブとして承認されたということでもある。ただし ND の既に承認されたナラティブだけではこの関係を正当化することはできないので、メタ規則(i)に則り、QQD のナラティブに基づいて、それと並行した関係が成り立つと想定しているのだと考えられる。

図 8 の加法の成立は数が加法という操作の対象となることを意味し、数が ND の対象として確立することも促進すると期待できる。また数の間の関係に関わる ND のナラティブが、生成されているとも言える。

図 10 のように 10 より大きい数を学習する際には、10 と 3 の合成であることが数 13 の基本的な意味となっており、ND 内部で新たな数が構成されている。数の大小比較も、数直線や数の系列での位置関係から判断が求められており、ND の中での推論が想定されているように見える。つまり、ある程度の ND の確立がこの時点では求められている。また、学習に現れる数は合成・分解の対象となったり、特に数 10 と 1 は個数をかぞえる操作の対象となったりすることから、逆に ND の対象としての確立も進むことが考えられる。

なお ND の中での新たな数の構成では、ある数の個数を数で表すという、再帰的な操作が含まれる点には注意する必要があろう。

100 までの数の学習でも、QD の視覚的媒介物であるブロックの個数をかぞえるという QQD の活動を行いながらも、結果は数 10 や 1 の個数という ND のナラティブとして記述される。さらに数 10 と 1 の個数をそれぞれ記入する ND の視覚的媒介物が導入され、それぞれの位の数字を並べることで、新たな数が導入されている(図 14)。数 10 と 1 の個数に基づいて数が構成されており、ここでも ND の内部で新たな対象が構成されたことになる。

数と計算の学習においては、10 を 1 つの対象と捉えることと、10 を 10 個の 1 からなる対象と捉えることとの間を柔軟に行き来できることが必要となる(Cobb & Wheatley, 1988)。これは上で見てきたように、一方では大きい数という新たな ND の対象を既存の数から構成するために必要となる数の捉え方であると同時に、それにより数 10 や数 1 をかぞえる対象とし、ND の対象としてより確かなものにするための機会にもなっていると考えられる。

以上のように、0 から 10 までの数は、ある多さに関わる数として導入されるものの、それぞれがどのような数であるかが明示的に説明されることはない。しかし学習の中で大小関係や合成・分解、加法・減法を通して他の数と関係付けられることで、それぞれの数はそうした関係に相当する性質を付与されるこ

ととなり、様々な性質を有する対象として徐々に確立していくこと(Slavit, 1997)が目指されていると考えられる。また後で 11 以上の数を構成する際に合成の操作の対象となったり、個数をかぞえる対象となったりすることは、10 までの数が ND の対象として確立されることをさらに促すものと考えられる。

これに対して 11 以上の数は、既に確立された 10 までの数を合成することで構成されるので、どのような数であるのかは ND 内において明確である。このように構成された上で、10 個を越える多さを表現するために QQD の語彙の中でこれらの数は用いられる。

ただいずれにしろ、「数の関係網 (network of number relationships)」を構成することが数を対象として捉えることの本質であるとの指摘(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019)を踏まえると、数どうしの関係が豊かになることが、ND の対象としての数の学習にとって本質的に重要な活動であると言えよう。

(2) 演算の成立

数の合成・分解(図 6)は演算自体ではないが、数を他の 2 数と関連づけるという意味では、演算と同様の関係を扱っている。メタ規則(ii)に従うならば、このナラティブを参照して ND 内部で加法や減法を規定することもできる(図 9)。またくり上がりやくり下がりのルーチンでは数の分解・合成のナラティブが用いられ、ND 内部でのルーチンの確立を可能にしていると言えよう(図 13)。

加法や減法の最初の学習では、図 8 のように、QD の視覚的媒介物の操作、QQD の問いが提示され、メタ規則(i)に従って ND の操作である加法と減法が導入される。なお加法に関わり QD の場面として合併と増加が扱われるので、両者に共通する数量関係が加法を規定していると思われるが、それが何かは明確にはされない。また単元の途中の計算問題では、図やブロックを用いて和を求めることが想定されているかどうかにより、ND のルーチンとしての加法の遂行か、ルーチンの確立を目指す活動かが異なってくる。後者では、3+2⇒ 3 個と 2 個の合併⇒5 個⇒5 と QQD や QD を経由した推論を 3+2⇒5 とショートカットできるようになることで、ND のルーチンや数に対する操作としての加法が確立されることに、重点があると考えられる。つまり QD や QQD と並行した数に対する操作として ND で規定された演算が、ND 内部のルーチンとなること自体が目指されることになる。

これに対し第 7 単元で 10 より大きい数を学習する際に現れる加法と減法については、10 といくつといった数の分解・合成に基づいて考えられており、ND 内部で計算の仕方が考案されたり、正当化されたりすることが期待されている。ND の承認されたナラティブを用いて ND 内部で新たなルーチンの確立が目指されている。

くり上がりのあるたし算では QD の操作の支援を受けるが、その結果は ND のナラティブとして記述され(図 12)、またサクランボ図(図 13)に見られるように、ND の承認されたナラティブである数の合成・分解を参照することも同時に期待されている。つまり QD や QQD の助けを借りながらも、ND のナラティブに基づいて、くり上がりを伴う加法のルーチンを確立することが目指されていると考えられる。またこの場合も、現れる数は分解・合成の操作の対象となることで、ND の対象としての確立も進むことが考えられる。

第 10 単元の 3 項の演算は、個々の計算の部分では ND のルーチンが利用されるであろうが、3 項の演算を考えることができること自体は QD の操作に依拠しており、2 つの考え方がそれぞれの役割を果たしている。

第 17 単元(図 15)は図の上で QD や QQD での推論を行うことで、既習の ND の演算の適用可能性を広げる学習であり、演算に関して ND での対象レベルのナラティブは新たに生成はされない。したがって、ND 内の数に対

する操作としての演算は、くり上がりのある加法とくり下がりのある減法の学習の時点で、完了されるものと考えられる。

くり上がりのない加法やくり下がりのない減法はブロックの個数をかぞえるといったQQDの操作やその結果を記述するという形で演算が規定されるが、10をこえる数の計算やくり上がり、くり下がりを伴う計算への拡張では、その前までに確立が期待されるNDのルーチンや数の分解・合成というNDのナラティブを組み合わせることで、計算の仕方の構成が目指されていることがわかる。

(3) 基数と序数

数は4(1)で見たように、モノの集合のある特性－おそらく“多さ”－を表現するために導入された後、数どうしの関係に関わる性質を付与されたり、分解・合成や演算の対象とされたりすることを通して、NDの対象として確立されていくと考えられる。ただ、その途中で、図7に見られるような、モノの位置を表す数の利用が扱われる。

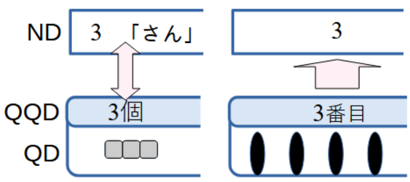

図16：基数としての3と序数としての3

数がNDの対象として確立された後で、それを位置を表すためにも援用する、つまり基数を数の基本的な性格とし、序数をそこから派生した用法と考えることもできる[4]。しかし図11のような数直線を学習する際には、「どこまで」進んだかを問うたり、「みぎにあるかずのほうが」とキャラクターに発言させたりしており、数は数直線の位置により表されるようにも見える。その後、数直線が数の学習において重要な役割を果たすことを想起すると、位置としての数も、数の重要な性格だと考えられる。

これら二つの性格は、区別されるとともに、どちらが数の性格として優勢であるかは自明ではない(Resnik, 1994)。実際、序数の方は後者関数を基本とするペアノ流の数の構成と類似しているが、基数の方はそれまでの数を要素として包摂しながら数を構成するノイマンの構成方法に類似しているように見える。

数がNDの対象として確立していない時点で基数と序数という異なる性格が扱われた場合、それぞれの数の基本的な性格が曖昧になることも考えられる(布川(印刷中)参照)。また数の分解・合成や演算の場合も、4(2)で見たようにモノの集合に対する操作を参照しながら、基数の性格を基にして構成されていくが、そうした演算と序数としての数との関連は曖昧なままになる可能性もある。

例えば、基数を基本として「5は2と3」という分解や「2＋3＝5」という加法についてのNDのナラティブを構成し、承認してきている。第17単元の「左から4番目の人の右側には何人いるか」の場合には、図をかいて考えることで、4番目という序数的用法を4人という基数的用法に変換して考えることはできる。しかし、数直線の学習で現れた「12より3大きい数」を求めることを12＋3＝15という加法と関連付けるとすれば、数直線の12の位置から3番目の目盛りを見いだす操作が、加法のイメージにつながる可能性もある。つまり数直線上での「2＋3＝5」の一つの説明として、2の位置から3番目の位置にあるのは5だとするものである[5]。

自然数の加法について、こうした位置の移動に基づく説明も利用するのであれば、序数と加法の関係も無視できないものとなる。またいずれにしろ、数直線を用いる際には、数を表すのが区間の長さなのか直線上の位置なのかの問題が生じる。自然数の範囲では区間の長さは区間の個数であり、位置は順序に当たるとすれば、初期の学習でNDの対象である数について、基数としての性格と序数としての性格をどう扱うのかは、その後の数直線というNDの視覚的媒介物の用い方にも関わ

ることであり、検討される必要のある問題と考えられる。

６．おわりに

小学校第１学年で数を学習し始める時点で、モノの個数をかぞえることのできる児童も多いであろう。他方でそれぞれの数自体が考察の対象となることは、少ないかもしれない。その中で、第３節で見てきたように、数字や数詞という記号表現が導入され、そしてその記号内容が徐々に豊かになる、という形で、ND の対象としての数が成立していっていると考えられる。数字の記号内容は直接説明されるわけではないが、数どうしの関係や関連付けを通して各数に性質が付与されたり、分解・合成や演算などの操作の対象とされたりする中で、量とは独立した ND の対象として確立されることが目指されていた。ただし初期の段階では QD や QQD を参照し、メタ規則(i)を背景に持ちながらの確立であった。

しかし 10 を越える数では、最初から既に確立された数、つまり ND の対象を組み合わせることにより、ND の内部で新たな数が構成されていた。演算も既に確立された演算という ND のルーチンや数の分解・合成という ND のナラティブに基づいて構成されていた。この時点では ND が、メタ規則(ii)に従い、自律的にも成長することが期待されていると考えることができる。逆に言えば、この学習の際には、児童にとっても ND がある程度確立されていることが求められることになる。

以上のような学習が行われるためには、QD や QQD と ND を包摂した数の学習のためのディスコースを想定し、その中で ND の構成の仕方に関するメタ規則を教師が意識をする必要がある(布川, 印刷中)。メタ規則(i)を背景に持つ学習では、QD の操作や QQD のナラティブから ND のナラティブを意識的に構成し、それを ND の対象の性質として明確化することで、ND の対象の確立を図ることになる。他方でメタ規則(ii)を背景にする学習では、必要とされる程度の ND が児童に確立されているかに注意するとともに、ND 内部で新たな対象を確立するという、少し進んだ思考を行っているとの自覚も求められよう。

こうした学習を効果的にするためには、背景にあるメタ規則を学習者と共有することも考えられる。小学校低学年の児童とこうしたメタ規則を共有する可能性についても、今後考えていく必要がある。

註および引用・参考文献

1) 本来であれば Discourse on Quantities から DQ などとすべきであろうが、本稿では各ディスコースを明確にするため Q や QQ、N を前に出し、QD、QQD、ND と呼んでおく。
2) 本稿では令和 6 年度版の学校図書の教科書を参照している。
3) 量に依らずに加法を定義することは、例えば仲田(2021), p. 50 を参照。ちなみに減法は加法の逆として定義される(p. 66) 。
4) 自然数の数学的な構成の場合、例えばまず序数として自然数を構成し、その後、モノの集合の多さを序数の集合を用いて「測る」とする考え方もある(仲田(2021), p. 37 参照)。「いち、に、さん、…」という数詞の系列を序数としての自然数の集合と考えれば、第 1 学年の導入で個数等をかぞえながら学習することは、むしろこの考え方に近いとも考えられる。
5) もう一つの説明としては図 11 の区間の個数に着目し、数は数直線の位置ではなく区間の個数で表されるとする説明である。

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children’s initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10* (3), 1-28.

Giusti, E. (1999). 数はどこから来たのか：数学の対象の本性に関する仮説 (斎藤憲訳). 共立出版. (原著は 1999 年)

Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019).

Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain of number. *Quadrante*, *28* (2), 6-31.

磯野和美 (2007). 半具体物の操作から数の操作への移行におけるプライベートスピーチに関する研究：小学校第 1 学年「くりあがりのある足し算」を事例として. 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 397–402.

樺澤茉宝, 村山敏夫 (2024). STEAM 教育プログラム開発に向けた幼児期における数唱・計数能力の経年推移の評価. 日本 STEM 教育学会第 7 回年次大会予稿集, 5-8. https://www.j-stem.jp/wp/wp-content/uploads/2024/09/A-2.pdf (2026 年 2 月 12 日アクセス)

宮下英明 (2008).「わり算」「割合」の概念整理. 日本数学教育学会誌, 90 (4), 67-70. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.4_67

文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領解説(平成 29 年告示)算数編. 日本文教出版.

仲田研登 (2021). 算数科のための基礎代数：代数構造と順序構造の入門. 岡山大学出版会.

布川和彦 (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372. http://hdl.handle.net/10513/00008350 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2024a). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, *11*, 195-205. http://hdl.handle.net/10513/0002000148 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2024b). 小学校算数科における二面性の問題. 上越教育大学研究紀要, 44, 125-135. http://hdl.handle.net/10513/0002000277 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2025). 分数の学習におけるディスコース：テンプレート駆動を視点とした小学校第 3 学年の学習の考察. 上越数学教育研究, *40*, 1-14. https://www.juen.ac.jp/math/journal2/files/vol40/25Nunokawa.pdf (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (印刷中). 分数の学習におけるディスコース：授業における量と数の錯綜. 上越教育大学研究紀要, *46*.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to Operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373–429). Lawrence Erlbaum Associates.

Resnik, M.D. (1994). Numbers as Structures and as Positions in Structures. In D. Jamieson (Eds.), *Language, Mind, and Art* (pp. 55-67). Springer.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 567–615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Slavitt, D. (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.

Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101* (1), 80-102. https://doi.org/10.1037/0033-295X.101.1.80

上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 13-26

人間形成と数学教育

—高校数学における統計的考え方の展開—

高　橋　　等
上越教育大学

以下は，2025 年 8 月 19 日にホテルニューオ—タニ長岡で開催された令和 7 年度第 48 回新潟県私学教育研修会における講演原稿となる。主催者から, 令和 7 年度から共通テスト数学 IA において統計が必答問題となるに当たって, 高校教員の参考となる内容としてほしいとの要望があり, 当面取り掛かっていた科研費研究の理論部分を前半に据え, 次に確率論と統計学との係わりを歴史的に論じ, 教材研究の参考となるように論を構成した。その原稿を上越数学教育研究第 41 号に投稿するに当たって，後に得た知見を加えることも考慮したものの, 講演内容をできる限りそのままに公表した方がよいと思案し, 多少の誤字の修正の他は手を加えていない。作成した原稿では本文を丁寧体で記述しており，常体に変更もしない。

はじめに

只今ご紹介に預かりました髙橋等と申します。出身は秋田県で，上越教育大学にまいりましたのが 1997 年の 2 月ですから，かれこれ 28 年余りを新潟県で過ごしてきたことになります。本日の演題を，人間形成と数学教育—高校数学における統計的考え方の展開—と致しましたのは, 以前から教育実践の目標の第一義が人間形成であることを, 学術的側面から学校現場の先生方と一緒に考えたいと思っていたところに，今回の講演依頼がまいりまして，それも大学入学共通テストで必答問題となりました統計の話題を取り上げてほしいということでしたので, 折角ですから人間形成という視点から統計教材を考えてみることにしたわけです。

教育の目的及び理念

平成 30 年に告示された高等学校学習指導要領の 2 ページ目に教育基本法が掲載されています。目次の次のページへの記載ですから，この法律は我が国の学校教育の教育課程における第一の方針ということになります。小学校も中学校も学習指導要領の冒頭には, この法律が掲載されておりまして, 学習指導要領に関心の強い先生方には周知のことと思います。

教育基本法の前文，及び，第一章を，抜粋しますと次になります。

教育基本法

我々日本国民は, たゆまぬ努力によって築いてきた民主的で文化的な国家を更に発展させるとともに, 世界の平和と人類の福祉の向上に貢献することを願うものである。

我々は，この理想を実現するため，個人の尊厳を重んじ，真理と正義を希求し，公共の精神を尊び, 豊かな人間性と創造性を備えた人間の育成を期するとともに，伝統を継承し，新しい文化の創造を目指す教育を推進する。

ここに，我々は，日本国憲法の精神にのっとり, 我が国の未来を切り拓く教育の基本を確立し, その振興を図るため, この法律を制定する。

第一章　教育の目的及び理念

（教育の目的）
第一条　教育は、人格の完成を目指し、平和で民主的な国家及び社会の形成者として必要な資質を備えた心身ともに健康な国民の育成を期して行われなければならない。
（教育の目標）
第二条　教育は，その目的を実現するため，学問の自由を尊重しつつ，次に掲げる目標を達成するよう行われるものとする。
一　幅広い知識と教養を身に付け，真理を求める態度を養い，豊かな情操と道徳心を培うとともに，健やかな身体を養うこと。
二　個人の価値を尊重して，その能力を伸ばし，創造性を培い，自主及び自律の精神を養うとともに，職業及び生活との関連を重視し，勤労を重んずる態度を養うこと。
三　正義と責任，男女の平等，自他の敬愛と協力を重んずるとともに，公共の精神に基づき，主体的に社会の形成に参画し，その発展に寄与する態度を養うこと。
四　生命を尊び，自然を大切にし，環境の保全に寄与する態度を養うこと。
五　伝統と文化を尊重し，それらをはぐくんできた我が国と郷土を愛するとともに，他国を尊重し，国際社会の平和と発展に寄与する態度を養うこと。（文部科学省，2018，p.2）

この第一条と第二条を読みますと，教科の内容に対応する知識や教養と共に，真理を求める態度や豊かな情操と道徳心といった情意面と，健やかな身体を養うという体育的な面が併記されております。その他の教育の目標の条文と合わせて，教育の目的で掲げる人格の完成とは教科の内容のみでなく，情意面や健康，更には様々な価値観が得られてこそ成ると言ってよいでしょう。勿論，この解釈はやや理想的なところがあって，実際には教科の内容を得ることは，子どもたちにとって至極大切なことです。ただ，例えば数学の授業では知識技能や考え方を得ることのみが目標となるのではなく，数学を好き，面白いと思う情意や，場合によっては道徳性を培うことが並列的に目標となるということなのです。学習指導要領の目標における三つの柱，「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」は，よくこの第一条と第二条を反映しています。昨今では，「学びに向かう力，人間性等」は益々重要視されています。

ササラ型とタコツボ型

ここで何故に，最初に教育の目的及び理念を話題にしたかと言いますと理由があります。その理由を話す前に我が国の社会や思想について少し考えてみます。我が国の学問，特に教育学を含めた文系の学問に係ることですけれども，近隣の専門分野でもどうも意思の疎通がうまくいかない，コミュニケーションがうまくとれないということがよくあります。最近では少々改善されているのかも知れませんが，こうした状況は明治以降ずっと続いているようです。その状況の根底にあるものを日本の思想や文化を考察することによって明らかにした方に丸山真男（1914 年〈大正 3 年〉－ 1996 年〈平成 8 年〉）がいます。丸山先生は 1900 年代中頃から後半にかけて活躍した著名な政治学者ですので，ご存じの皆さんも多いでしょう。ササラ型とタコツボ型とは主にヨーロッパの文化や思想と日本のそれとを対比するために丸山先生が用いた語ですけれども，ヨーロッパには社会や思想において共通の土台というか理念があって，その土台を基に様々な専門が分化しており，丁度，竹の先の方だけを幾つかに割ったササラ型の状態になっています。他方で日本は明治期に細分化された専門分野そのものを，その基になる土台や理念なしに輸入したものですから，各々の専門分野がタコツボの中に入るタコツボ型になっており，タコツボ間で意思の疎通がうまくいかないという状態になっているようなのです。丸山先生はその主な理由を明治期の学問輸入の仕方にあると見ているよ

うです。私が考えますに，どうも日本人の身の守り方, そうした社会の創り方も理由にあるでしょう。これは広くは地政学にも係わることですので，ここでは深く追究しません。何れにしても, このササラ型に対するタコツボ型というのは我が国の様々な状態に当てはまることになります。

教育実践におけるタコツボ型の打破

我が国が明治期に細分化された専門分野を輸入したと申しましたけれども, 学校の教科や科目は, そうした専門分野と大まかには対応しています。学術的な研究分野の衰勢はあるものの, 大学の教科・科目と, 厳密にではなくとも，高校の教科・科目や中学校の教科・科目，小学校の教科・科目とを結び付けることは容易に出来ます。小学校ではやや例外的であるものの，高校や中学校では教科や科目毎に担当教員も違いますし, 最近の教科横断的な扱いは別にして各々の教科・科目を積極的に繋げることはしていないことを考慮すれば, どうも高校や中学校の教科・科目は一種のタコツボを形成しているようです。各学校の教科・科目の共通となる部分は, 学校の教育目標や方針など様々にはあるのですけれども, 各教科や科目を派生させた共通の文化的土台, 即ち理念や哲学を見出すことは難しいのかも知れません。

ヨーロッパでは古代ギリシャ時代から進展してきた哲学, 哲学から派生した今日の専門分化していく知識の元となった教養を出発点として，共通の文化的土台を形成しています。勿論, ヨーロッパの各国や地域では特徴的な文化や哲学はありますけれども, それぞれが無関係ではなく関連しています。ヨーロッパではそうした文化的土台を基に学校での教科や科目に対応した専門分野も発展してきています。フランスではサロンがあって, 違う専門領域の研究者や教育者が互いに専門的なことを話したとしてもコミュニケーションができています。我が国でもそうしたコミュニケーションは多少はできますけれども, そのコミュニケーションをする場としてのサロン的な仕組みは発展していない，作ろうとしないのです。

このことで何も我が国の教育は駄目でヨーロッパのものはよいということを話そうというのではありません。寧ろ，教育実践という点では世界のどの国よりも我が国の教育はうまくいっているのです。ただし，そのうまくいっているというのは我が国が地政学的に海に囲まれていて, ヨーロッパに比べて同質的な集団を形成していることから，あ，うんの呼吸が通ずる, 右に倣えが当たり前ということと無関係ではないかも知れません。ただし，うまくいっているというのは相対的な見方で, 今日的な多様性の時代には，あ，うんの呼吸が通じない場合も多く現れていることでしょう。この多様性の時代, 全日制の高校を避ける子どもの人数も増加してきています。多様性を生き抜くために, 我が国の文化圏での各教科や科目を派生させ支える共通の文化的土台を創ること, 更にその土台を意識することは, 必要なこととなります。学校教育におけるタコツボ型の打破と, ササラ型文化の創造ということが必要です。

学校教育におけるササラ型文化の形成と教育基本法

教科や科目の教育を巡るタコツボ型の打破とササラ型文化の形成のために，あ，うんの呼吸とは何か, どういう内容と仕組みをもっているかを分析し, 明らかにすることは一つの方法です。ところで，この，あ，うんの呼吸がいつ頃形成されたかは, 我が国の文化をよほど掘り下げていかないとわからないでしょう。何れにしても島国であることと何らかの関連はあるでしょう。申しました通りに，あ，うんの呼吸が身を守る術であったり, 文化的同質性に依存するだけのものであるならば，それを分析し，明らかにしたところで, 教育界を今より発展させることは難しいかも知れません。現状維持ということになってしまいそうです。必要なのは,

あ，うんの呼吸であったとしても，それが学校の各教科や科目と連なる文化的土台であって，しかも我々がその土台を意識することなのです。

少し，立ち返って考えてみましょう。何故に教育するかということです。子ども達に各教科や科目の内容を理解させることのみが教育というのであれば，教育実践の成果は教科や科目の内容が分かったか分からなかったかという点でしか評価することができません。それだけでは各教科や科目と繋がり，下支えする教育文化の必要性は明瞭になりません。先に述べました教育基本法の前文，及び第一章と第二章の内容を振り返りますと，教育の目的は人間形成です。各々の教科や科目の教育は，教科や科目の内容を扱うことのみならず，第一には人間形成でなければならないということです。この人間形成というのが，実は，各教科や科目の教育の土台となる共通文化となります。無理矢理に，各教科や科目と連なる文化的土台を創るとすれば，そこに教育基本法を入れ込むことはできましょう。もっとも，この法律を形だけ入れ込んでも，殆ど無意味です。学校に携わる方々が共通理解として人間形成を行っていることを意識することが必要です。ここで，各教科や科目であっても人間形成を行っていることなど当然ではないか，との意見がございましょう。しかしながら，人間形成を行っていると自ら信じ込んでも，教科や科目の内容を理解させることによってのみそれを意識しているのであれば十分ではありません。殊更に，各教科や科目における「学びに向かう力，人間性等」，更には各教科や科目で共通な「学びに向かう力，人間性等」を育てることに力点を置くことが必要となります。子ども達に「学びに向かう力，人間性等」があるからこそ，専門分化した各教科や科目の内容を学習することができるのです。

主体的学習ということ

そこで，何をもって人間形成と言うのか，そもそも人間とは何かということが論点となります。人間とは何かについては，様々な哲学や宗教において，それぞれの人間観があります。では，世界中で，少なくとも我が国において，どのような人間観の元に人間形成をすればよいのでしょうか。我が国において共通の土台とすべき人間観とはどのようなものでしょう。共通の土台と言うからには，学校教育に携わる方々に様々な考えがあったとしても殆どの方が一応は頷けるものである筈です。共通の土台としての教育基本法や学習指導要領の中の文言を探すことも一つの手で，しかも教育実践において十分に浸透した文言であれば非常によい，他方で「学びに向かう力，人間性等」のように文言としての大きな器だけがあって中身がつかめないものでは困ります。

主体性はどうでしょうか。主体的・対話的で深い学びなどとよく言われます。主体性もつかみどころがなく，先生方においてはそれぞれの主体性のイメージをお持ちの文言ではあります。しかしながら，「学びに向かう力，人間性等」のようにどうとでもとれるものではありません。

主体性とは，そもそもが哲学用語，実存主義哲学のキーワードです。実存主義哲学以前にも主体性という語は用いられたことがあったかも知れませんが，思想における主要な語として用いられたのは実存主義哲学においてです。実存主義哲学は，第二次世界大戦後に世界を席巻しましたから，その際に我が国の学習指導要領にも，主体的学習という語が取り入れられたものと強く推察できます。推察というのは，当時，誰がこの語を持ち出して，学習指導要領に入れ込んだかがどうにも調べ尽くせないでいるからではあります。

ヨーロッパにおいては，哲学の主題とは人間とは何か，どういうものかでした。人間の存在，人間とはどういう存在なのかを問うのです。古代ギリシャのソクラテスもそうでした。ヨーロッパでは長らく，人間は神に拵えられたものと

見做されていました。デカルトやライプニッチは数学者であり哲学者ですけれども，彼らも神に拵えられた人間には原型，即ち普遍性に伴う本質があって，人間の存在はその原型乃至本質を反映していると考えているようです。こうした本質主義はプラトンもとっており，更にカントからヘーゲルに至るまで人間に本質があるという立場の哲学が展開されます。その本質は先ず以て理性であり，理性こそが人間の精神の主要な部分ということになります。実は，こうした人間観は数学をはじめ各教科や科目の内容を第一に考える教育には非常に都合がよく，理性に訴えて内容を教えさえすればよいという教育観を生み出すことにもなります。

特に，ヘーゲル哲学は強力で，理性主義であり，彼の抽象的一般的存在としてのみ人間を見做す人間観は，一時，ヨーロッパ哲学の主流となりますけれども，そのヘーゲル哲学を否定，克服していくのが実存主義哲学ということになります。実存は本質に先立つ，というのはサルトルによる有名な言葉です。本質とは，述べました通り，精神が主に理性からなり，定義によって与えられ普遍的であるものの没個性的なものです。その一方で，実存とは，このとき，このところに，現実的具体的に存在する個々の人間で，現実存在(existence)ということになります。実存においては，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいきます。実存には個別性と主体性が含まれており，実存であるための基が主体性です。人間の本質が個別性と主体性を除き去って，人間を一般化し対象化するところに成り立つのに対して，人間の実存は，本質の枠を打ち破り，めいめいが独自な仕方で自己を形作っていくことになります(松浪，1962)。

ですから，主体的学習，主体的学びとは，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいく，独自な仕方で自己を形作っていく学習ということであり，我々が教育の土台として共通して持ち得る人間観は，まさに子ども達は学ぶことを通して実存となる一人びとりであるということになります。個別最適な学びを連想なさる方々がいらしゃるかも知れません。

実存は個別性と主体性を基にしますけれども，実存は決して殻をまとった存在ではありません。サルトルは，他者の実存はいわば私の実存の条件でさえもあると言い，実存と実存との交流を積極的に論じています。交流はあっても各々が実存でありますけれども，教育実践で重要視される共感とか他者理解，対話的な学びなどが，それらが実存であることを確固たるものとしていきます。何れにしましても，主体的・対話的で深い学びは，授業で何となく学習し，何となく皆と同意したでは成立しないし，同意即ち見かけ上の学習内容の共有があったとしても，学習内容が実存に取り込まれることによってのみ真の学力となります。

ここまでお話ししたことにより，よく言われる自主性と主体性には明確な違いがあることがわかります。自主性，自発性もそうですけれども，単に自ら行うという水準ではない厳しさを主体性はもつことになります。

数学授業における主体的学習

それでは，数学授業における主体的学習，主体的学びとはどのようなものになるのでしょう。教師のもつ数学観と授業形態とを対応させた研究があり(湊&濱田，1994)，その研究では数学が完全な存在で人間界の外にあるというプラトン的数学観が講義型，やはりプラトン的数学観が教師が真理を握っており教師と子どもの相互作用によってその真理に近づけさせる問答型，数学的存在は人間に対して外在するのではなく数学的知識を人間が創るのだという内在的数学観が自力解決・討論型の授業に対応しているとします。

しかし，実際には，小中学校では兎も角，高等学校では扱う教育内容の多さ，更には外部試験や大学入試等への対策として，殆どの授業が

講義型や教師主導の問答型の授業にならざるを得ないでしょう。勿論，小集団学習を取り込んだ授業を行っている先生方もおります。講義型の授業で主体的学習を保証するにはどうしたらよいしょうか。講義型や問答型で主体的学習を保証するには，一つには個性を認める，ということがあります。こうした個性を認めるというのは，教師が授業で教えたことを子どもが同じく理解するのではなく，各自の適性によって理解の状態が異なるということを認めること，数学の好き嫌いが様々であることを認めることを含みます。

教師が外在的数学観をもつ場合は，実際，子どもの個性などというものは殆ど念頭にないかも知れません。例えば，同じく教えているのだから解らない子どもがおかしい，更には悪い，などと言うのだとすれば，教師は全くに一人びとりの子どもの個性を認めていないことになります。子どもの適性は各々で異なるのだから，学習の速い子もいれば遅い子もいる，理解できる子もいれば理解が追いつかない子もいるのです。それを認めないことは，子どもの主体性を認めていない。子どもの主体性を保証するような授業をしていないということになります。

個性は主体性の特長の一つです。先生方が子どもの個性を認めることは，子ども達が自分のことを先生方が気にかけてくれているという意識，信頼感をもたらします。私は長らく暗黙知(Polanyi, 1958, 1966)の研究をしておりますけれども，暗黙知の範疇に入るものにヒドゥンカリキュラム，所謂隠れたカリキュラムがあります。明示された意図したカリキュラムの他に，主に先生方が潜在的に発したメッセージが子ども達に伝搬していくものですけれども，子ども達のもつ信頼感というのもヒドゥンカリキュラムの教育効果の一つでしょう。

主体的学習と数学教材

多くの先生方がそう思っているように，単元や教材によって子どもの活動の仕方が異なる場合があります。平成 30 年に告示された高等学校学習指導要領理数編で示されている所謂ぐるぐるの図がありますけれども，この図は数学の世界と現実の世界との各々のサイクルになっています。主体的学習は全ての単元で保証されなければならないのですけれども，取り分け活用の文脈では数学の世界の問題と共に現実の世界の問題の解決が，主体的学習を促すものとして重視されているようです。実際，共通テストにおいても，日常の問題と称する現実の問題が必ず出題されています。統計の問題や確率の問題は，もともと現実の世界を反映するので，主体的学習を促すのにうってつけです。ただし，統計の問題は他の数学の問題と比較して，少々異質なところがあることに先生方もお気付きのことでしょう。

高校数学の統計の内容には，他の領域が演繹的推論を明示しているのに対して，経験的で，帰納的な面持ちがあります。統計は古代国家が人口統計に用いるなど，古くからあり，後に，数学的には確率論によって統計学の理論が支えられるのですけれども，高校では確率論の扱いは十分ではありません。特に数 I では十分でなく，数 B で確率変数や確率分布などがようやく登場します。更に，数 B の確率論で提示される公式は証明が付与される場合が多くはなく，背景にある解析学的な証明が高校生にとっては難しい場合が多いのです。何れにしても，高校の統計は実学的で，主にはデータに対して，理論を適用することによって問題を解くことが多いのです。演繹的推論に力点を置く先生方には，高校の統計の内容がどこか掴み所のないように見えるかも知れません。

統計学の歴史

確率論，統計学の源流と 17 世紀の発展

高校の統計の数学的位置付けを考えるために，統計学の歴史の概略をご紹介します。既にご存じの先生方も多いかと思います。統計学に相当するドイツ語 Statisik は 17 世紀になっ

て用いられた語で，この語が一般的に使用されるのが 18 世紀ですので，現代の統計学の基礎ができてきたのが，その頃ということになります。他方で，国家行政という点から，統計調査は既に古代国家によって行われていました。それらの統計調査は，人口調査，経済事情の調査，兵役能力に係る調査，租税負担力に係る調査といったものです。紀元前 3000 年頃には，古代エジプトではピラミッドの建設のための統計調査が行われています。古代ローマでは，紀元前 500 年頃にダリウスが全数調査を行って人民簿を作成しています。このように国家と統計は密接な関連をもち，国家の繁栄にとって統計は不可欠のものとなっています。

16 世紀から 17 世紀にかけて近代国家が出現し，人民の経済活動が盛んになりますと，国家がその把握のために行政統計と呼ばれるものを用い出します。特に，経済政策における条件ともなる人口数の把握，各種産業間の関連の把握のために統計を用い，その後の統計学の発展のための基盤を造ることになります。この頃，統計学の発展はドイツとイギリスに，更に確率論の芽生えがフランスに見られます。ドイツでは，ドイツ大学派統計学の創始者であるコンリング（1606～1681）が出現します。実は，コンリングは数学者ではなく，法学者で哲学者，医者でもあるのですれれども，国情論という著作を出版し，この書籍が統計学の基礎の一つとなっています。国情論ではアリストテレスの考えを基に，国家行動という目的因に対して，質量因を土地と人民，形相因を制度と行政，動力因を財政と兵役として，国家目的と各要因との関連を扱っています。

イギリスでは政治算術が登場し，統計学を発展させせます。小間物商人グラント（1620～1674）は，1625 年にロンドン市における出生，死亡，婚姻，移民といった人口動態現象を比較して，人口の発展状況に関する法則性に係る論文を発表します。クラントの友人である財政学者ペティ（1623～1687）は，1679 年に，政治算術，という呼称を創案し，人口や経済に関して推算した数字を利用してイギリスと諸外国との国力を比較します。更に，キング（1648～1712）はイギリスの人口の将来予測を行っています。

フランスでは，この頃，古典的確率論が発生します。パスカル（1623～1662）は，数学者であり，哲学者，神学者，物理学者ですけれども，19 歳の時，メレから投げかけられた賭についての問題「１つのサイコロで６の目を出すのに４回まで試行する場合と，２つのサイコロで２つとも６の目を出すのに 24 回試行する場合とを考えてみると，前者では有利なのに後者では不利になる。これはなぜか。」を契機として，確率論の発想に至ることになります。更に，パスカルとフェルマー（1607～1665）との往復書簡により，古典的確率論の基礎が誕生していくことになります。

18 世紀の確率論，統計学の発展

18 世紀になると，確率論と統計学が更なる発展を遂げます。統計学においては，オランダの財務官僚ケルセボーム（1690～1771）が自ら作成した生命表を示しながら終身年金現在価額と地域・都市の人口の総数・構成を推計し，人口統計を大きく発展させせます。ケルセボームは更に，素朴な大数の法則に類する考えを「一見不規則，偶然と見えるものはすべて我々の無知によるもの，つまり，そのような現象に関する種々の原因が錯綜していて，その規則性を洞察できないでいる状態に過ぎない。結局多数の事柄が観測されさえすれば，我々の目を逃れていた規則性が発見できるようになる。」と述べています。フランスのド・パルシュ（1703～1768）も 1764 年に，人間の寿命の確からしさに関する論文を提出し，平均余命に対する理論付けを行っています。プロシャの牧師ジュスミルヒ（1707～1767）は，全市民の健康状態を調査し，大量観察から規則性を見出しました。これにより衛生統計学が発展します。ジュスミルヒは，人口統計に係る調査も行い，社会現象のような

場合でも大数の法則に類するものが成り立つことに言及し，統計学を一般の場合にも適用できる科学として位置付けます。

確率論においては，フーリエ（1768～1830）の無限級数の考えを，ヤコブ・ベルヌーイ（1654～1705）が確率論に応用します。この 18 世紀に辿り着いた無限という概念は解析学を飛躍的に発展させ，現在でもフーリエ解析などと呼ばれたりしますけれども，同時に確率論も大きな発展を遂げます。ベルヌーイは，それ以前は素朴な言及に留まっていた大数の法則を命題として提示します。即ち「或る試行で都合のよい場合の数を a，都合の悪い場合の数を b とする。このような試行を相当の回数繰り返すならば，都合のよい結果が起こる回数の全試行回数に対する比が，（a－1）/（a＋b）と（a＋1）/（a＋b）の間に入るケースがこの範囲外に出現するケースより何倍も確からしくなる。」という命題を示します。これは数学的に規定される確率の値と経験的に得られる確率の値との関連性を指摘したものです。この大数の法則により，統計的方法が社会現象の様々な問題に対して有効であることを示したことになり，統計学に対して，確率論が数学的基礎を与えたことにもなります。また，フランスからイギリスに逃れたド・モアブル（1667～1754）はパスカルの確率論を発展させ，更に大数の法則を精緻化します。更に，イギリスの牧師トーマス・ベイズ（1701～1761）はベイズの定理で有名です。ベイズは，繰り返し観測される事象について，結果から原因を推論する方式を構築しますけれども，これはフランシス・ベーコン（1561～1626）の帰納論理に数学的基礎を与えたものです。よく中学校数学の確率で屋台のくじ引きに並ぶ場面で当たりくじを引く確率を考える問題がありますけれども，ベイズ理論を用いれば異なる問題になったりします。先にくじを引いた人の結果を知るか否かが論点となります。

18 世紀の確率論を集大成したのがフランスのピエール＝シモン・ラプラス（1749～1827）となります。もっともラプラスの仕事は 19 世紀にまたがったものとなります。ラプラスはベルヌーイの大数の法則の拡張により，中心極限定理の特殊な場合に証明を与えています。更に 1812 年にラプラスは，確率の解析的理論，という著述を発表し，確率の概念の定義を行っています。その定義は，「事象の確率とは，すべての起こり得る場合の数に対する都合のよい場合の数の比であって，このときすべての場合は同程度に起こり得るものでなければならない。種々の場合，同程度に起こり得るかどうかの評価が偶然の解析上最も微妙な点の一つである。」というものです。実はこの定義には特に今日の確率論と統計学との結び付きにも係わる重大な曖昧さが含まれています。第一に，同程度に起こり得るということは保証されるか，第二に，すべての起こり得る場合が，有限でなく無限の場合についてどうするかです。第三に，都合のよい場合が，社会現象などの場合に定義できるかというものです。この三点により，数学的確率と実験的確率との違いも明確化されますので，先に述べました通り，演繹的推論を行うことを数学と見做す方々にとっては，統計学に違和感を覚えるということにもなります。何れにしても，この三点を解決することにより，確率論と統計学は更に発展することになります。

19 世紀の確率論，統計学の発展

19 世紀には産業革命が起こりますけれども，同時に科学技術が飛躍的に進歩し，それまでと全く異なった産業構造や社会構造が生じます。そうした中で，イギリスのトマス・ロバート・マルサス（1766～1834）は，労働者の貧困の原因を自然法則によるものであることを統計的に実証しようとし，1978 年に出版した，人口論において，人口は幾何級数的に増加するのに対して食料は算術級数的にしか増加しないという仮説を提示します。更に，広汎な社会現象に確率論や統計学を適用し，社会物理学を創案し

た数学者にベルギーのランベール・アドルフ・ジャック・ケトレー(1796～1874)がいます。ケトレーは,人間を肉体的にのみでなく,精神的・道徳的面からも観測し，平均人，という者が社会的集団の重心的位置にあるとしました。その上で,自然科学の場合と同様に社会科学の中にも普遍的合法則性があるとし,その探究のための補助的方法の提供に統計学があるとします。ケトレーは人口増加の法則を物理現象の法則からの類推により,人口増加速度に比例した抵抗が働くと考えました。後に，ピエール＝フランソワ・フェルフルスト(1804～1849)が，ケトレーの考えを,現人口数の２乗に比例した抵抗が働くと修正し,人口増加曲線となるロジステック曲線を生み出します。更に，ケトレーの後継者の一人であるドイツのエルンスト・エンゲル(1821)はザクセン王国の統計局長となり,統計学は人間共同体の体系的叙述に資すべき実体学でなければならないと考え,労働者の福祉の測定に関する統計的研究を行います。エンゲルの法則は今日的にも有名です。その後，アドルフ・ワグナー(1835～1917)が，国民総生産の増大に伴い国費の支出が増加するというワグナーの法則を提出しますけれども,ワグナーは自然科学であれ社会科学であれ法則の発見にのみ学問の進歩があるとし,法則の発見を可能にするのが統計的方法であると述べました。他方で,ヴィルヘルム・レキシス(1837～1914)は,各法則性の安定度を問題とし,観測対象の分散に着目しています。

更に，この頃，自然科学の発展に対しても統計的方法が適用されます。進化論で有名なイギリスのチャールズ・ロバート・ダーウィン(1809～1882)の従兄弟であるフランシス・ゴルトン(1822～1911)は,天才と遺伝との相関関係を提示します。実は，進化論を起源とするゴルトンの生物統計学は生物学を神による決定論的な対象から,真に科学的な対象に転換させたとも言えます。更に，相関関係に係るゴルトンの考えは，カール・ピアソン(1857～1936)によって大きく発展します。今日の，線形回帰，相関とピアソンの積率相関係数の開発者としても有名ですし，χ^2 検定も開発しましたし，ピアソン型分布曲線と呼ばれる分布の類型化も行いました。標準偏差，モードという概念もピアソンが導入しました。

イギリスのジェームズ・クラーク・マクスウェル(1831～1879)は現代物理学の中心の一つとなる統計力学を創始します。マクスウェルは,気体の圧力は気体分子が壁面に衝突することにより生ずるという仮説をたて,気体を集合概念として捉え確率的にみて安定した関係を要求し，分子運動の理論を展開します。更に，オーストリアのルートヴィッヒ・エードゥアルト・ボルツマン(1844～1906)が，マクスウェルの理論を発展させ,無秩序の状態の度合いを示すエントロピーという概念を導入します。

18 世紀は，数学においても，非ユークリッド幾何学,集合論などが登場した頃ですけれども，ドイツの著名な数学者ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス(1777～1855)が誤差論を提出します。ガウスはゲッティゲン大学卒業後,天文台長の職に就いていましたけれども,天体観測を通して誤差論を展開しました。ガウスは,誤差には避けることのできない偶然誤差があるものの，偶然誤差にも法則性があるとして,その特徴付けをしました。ガウスは偶然誤差が,①誤差の生じ方が正負同程度に起こる(対称性),②絶対値の大きな誤差ほど生じにくい(単調性)，③何回か測定した値の算術平均が真の値の最も確からしい測定値である(平均の最尤性)，の三条件を満たすときに，偶然誤差の分布が正規分布になることを解析学的に証明しました。正規分布は今日でも統計学で広く用いられている分布です。

20 世紀の確率論，統計学の発展

20 世紀は二度の世界大戦があった世紀で,それまでのヨーロッパにおける価値観の転換期でもありました。哲学においては，ヨーロッ

パで長らく展開されていたイマヌエル・カント（1724～1804）からゲオルク・ヴィルヘルム・フリードリヒ・ヘーゲル（1770～1831）に至る理性中心の人間観に対抗する実存主義哲学が誕生します。ヘーゲル哲学は数学を行うことを支えるのに便利な哲学ですけれども，先にも述べました通り，数学教育には実存主義の考えが支えとなります。統計学においても，ゴールトンやピアソンによる大標本を対象としたものから，イギリスのロナルド・エイルマー・フィッシャー（1890～1962）を中心とした小標本理論が展開されます。実は，大標本を嗜好するのはプラトン主義的な場合が多く，全数調査でなければならないと考えるのは更にその傾向が強いのです。全数調査というのは現実離れしていますし，小中学校の全国学力状況調査においても全数調査を原則にしていますけれども，実際にはそうなってはおりません。学力調査の全数調査というのは，授業実践へのフィードバックをするには，なるべく対象学年の全小中学生に調査した方がよいということであって，学力調査としては小標本調査で十分なのです。学力調査のやり方に対しては，特に統計学者やテスト理論の研究者から疑問の声が寄せられる場合もあります。

フィッシャーの実験計画法は今日でも統計調査のバイブルになっていますけれども，その開発の契機となったのはウィリアム・シーリー・ゴセット（1876～1937）によるｔ分布の発見です。ゴセットは，正規分布の標本から計算される分散がピアソンの提示した分布に対応することと，標本平均と分散との相関係数が殆ど０になることを実験によって確かめてから，標本平均と標準偏差の比の分布を決めています。この分布がｔ分布ということになります。フィッシャーは，ピアソンによる大標本でなければ適用できないような方法論は，実際上のデータの利用においては極めて不適切なものであると論破しています。フィッシャーは，更に，データからの適切な情報を抽出するのに仮説的母集団の概念を導入し，データはすべて母集団からの標本であると見做しました。彼は標本に基づき母集団の傾向を伺い知ることが統計的知識であるとしました。今日でも，統計学はこの考えに基づいています。

小標本理論は，統計調査自体にも全数調査から標本調査へと変革をもたらしました。ロシア生まれのイェジ・ネイマン（1894～1981）や，アメリカのウィリアム・エドワーズ・デミング（1900～1993），ウィリアム・ゲメル・コクラン（1909～1980）などにより，標本を小さくしかも精度の高い標本を得る方法を研究する「標本調査論」が展開されます。今日では，こうした統計的方法は，生物学，医学，経済学，社会学，教育学など，幅広い分野で用いられることになります。

確率論においては，19 世紀の停滞から脱し，1932 年にロシアのアンドレイ・ニコラエヴィッチ・コルモゴロフ（1903～1987）が，確率論の基礎概念，という論文において，確率を測度として捉えることにより集合論の公理系を導入して，測度論的確率論，を展開します。測度論的確率論は，フィッシャーなどによる小標本理論に数学的な理論的根拠を与えることになります。

コルモゴロフの確率論は，ダーヴィット・ヒルベルト（1862～1943）が 1900 年にパリで開催された国際数学者会議において提示したヒルベルトの 23 の問題の一つである，確率論の基礎を確立せよ，に応えたものです。コルモゴロフは，確率を数学の閉じた世界で定式化しました。例えば，実際のサイコロを用いるのではなく，数学の世界で理想化されたサイコロを仮定するのです。このことにより，確率につきまとう現実世界を一端切り離し，数学の世界のみで確率を論ずることができるようになります。この現実世界と確率との間を埋めるのが統計学で，即ち，確率論で現実世界を理想化し，数学世界で構成したモデルが適切かどうかを問うのが統計学ということになります。理想化した

数学モデルのサイコロが適切かどうかを,実際にサイコロを何度も投げたデータから判断するということになります。大数の法則にも関連することです。

このように,確率論,統計学の発展を見てみますと,確率論と統計学はほぼ独立的に誕生し,その発展において確率論が統計学を支える理論を提供しながら互いに影響を与えたことがわかります。確率論は現実世界との関係に難題を抱えていたところ,コルモゴロフによって確率モデルの概念が展開され,確率モデルの研究がなされることにより,確率論と統計学との関連性が密になったと言えます。

確率論と統計学とを扱った数学入門書

ここで,確率論と統計学とを扱った数学入門書の目次を紹介します。こちらは資料1の方を御覧下さい。やや手当たり次第に,皆本晃弥.(2015).スッキリわかる確率統計―定理の詳しい証明つき―.近代科学社.をとりあげます。スッキリなどという書籍なので,中身が軟派なものかとの印象をもたれる方もいるかと存じますが,大学生の教科書にしてもよいものです。★は皆本先生が付けた高校数学を多く含む内容ですので,高校の先生方が参考にするには便利な書籍かと存じます。

目次

共通テスト数学ＩＡの統計の特徴

ここで，高校の統計に少し踏み込んで，共通テスト数学ＩＡの問題を取り上げてみます。配布しております資料２を御覧下さい。昨年度の問題ですので，既に分析済みの先生方も多いかと存じます。2．３分時間をとりますので，少し取り組んでみてください。第２問の［２］は通常，統計の問題からなります。昨年度は，47都道府県の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の動向を題材にした問題と，キャンペーンを題材とした簡単な仮説検定の問題の出題となっています。

宿泊者数の問題に限らず，統計の問題はリード文の文章量が多く，必要な情報を捉えることが必要です。解決に関係ない情報は当面，読み飛ばしてもよいでしょう。数ＩＡの統計の問題では，官公庁などで公表されているデータを使うことが多いのも特徴です。

（１）の（ｉ）では散布図を示し．データの読みを求めています。散布図の縦横の縮尺が違いますけれども，これは統計学での慣習で，正方形の図として示すのが通常だからです。ａ，ｂともに正で，ａの二つの点のうち一つは図の右端の方にあり，こうした点を見逃さないことが必要です。ｂでは，図の破線がｙ＝10ｘとなっていることを読み取れればよいことになります。

（ⅱ）では表になっているデータの読みが必要となります。外れ値の計算ができれば，解決可能です。外れ値の求め方はリード文の冒頭に示されています。

（2）は分散と共分散に係る問題です。分散を求める式，共分散を求める式，相関係数を求める式が解っていれば，計算によって解決できます。基本的な公式や，式変形のやり方を身に付けておくことが必要です。更に，相関関係の強さを散布図から読み取れるようにしておくことも必要です。

（3）は仮説検定の問題ですけれども，文章量が多いです。仮説検定の考え方を理解していれば，解決できる問題です。

概観してみますと，数ⅠAの統計の問題では，用語や公式の意味をきちんと理解しているか，式変形や計算が簡潔にできるか，を問うているようにも見えます。他方で，数ⅠAの統計の問題に限っては，官公庁などで公表されているデータを題材にしていますので，現実のデータを分析し，その傾向を把握するという現実場面の解決を扱っていることになります。もし，高校の授業で現実場面の解決を扱うことができれば，子ども達の主体的学習を促すことがやりやすくなるかも知れません。

現実場面について

ここで，現実場面というのは，我々の直面している現実であって，世の中の出来事を指す場合が常識的に考えられるものですけれども，数学者などにとっては直面している数学の問題が現実となります。その様に考えますと，子ども達にとっても，直面している数学の問題が現実であったりもしますので，その辺りの解釈は微妙なものとなります。

このことについてもう少しお話ししますと，対象が現実世界となるかどうかというのは，触知可能かどうかということになります。現実の世界などの日常は，我々にとって思考の対象となっていますので，明らかに触知可能な世界です。数学などの抽象概念は，子ども達にとってはなかなか触知可能な世界になりませんので，数学を教材化して，触知可能なものに翻案して学校教育では扱います。他方で，数学者には数学そのものといった抽象概念が触知可能であり，現実の世界とも言え，研究対象となるのです。この触知可能の度合いは，子ども達にとっては，通常，数学の世界よりも現実の世界の方が大きいのです。幼年期から大人になるにつれて，この触知可能な世界が具体的な世界から抽象的，形式的な世界にまで広がっていくのです。

結語

これまで，人間形成と数学教育ということで主体性，主体的学習の促進，更には主体的学習を実現するための高校数学の統計について，お話ししてきましたけれども，統計教材に限らず，現実の場面を数学とした殆どの場面で，子ども達，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいく，独自な仕方で自己を形作っていく学習を実現していくことが，教育上の目標となります。数学教材を巡る主体的学習，これは教育実践においては子ども達の意欲と密接に係わりますけれども，それを如何に保証し，促していくかが，我々数学教師の課題ともなります。

高校の統計教材は，現実的事象を分析する統計学とその数学的土台となる確率変数や確率分布により構成されていますけれども，主立った方向は現実事象の分析を行う統計的考え方の育成となります。統計的考え方は，今申しましたとおりに，現実事象の解決ですので，確率論をはじめ他の数学諸分野の数学的な世界を数学的方法によって探究するという方向とは，異なる方向による探究を要求していることになります。応用数学的と言えばそうですし，数学的モデリングに近いのです。数学的モデリングは現実的事象を説明するための数学的モデルを提出しますけれども，統計の場合は，あくまで現実の分析，例えば，統計の検定にあたっ

ては仮説を棄却するかどうかによる現実の分析が要求されていることになります。

嘗て,統計学は数学でないなどと言う数学教育学者もおりましたけれども,その背景には応用数学的なものは数学とは認めないという非常に古い数学観があります。例えば日本数学会は，分科会として，統計数学や応用数学を設けていますし,一層広い数学観のもとで数学を捉えています。何処にあっても，統計学は数学ではないという見方は通用しません。ただし，今申しました通りに,事象に対する探究の方向が統計教材と他の数学教材では異なることになります。先に取り上げましたぐるぐるの図の現実の世界のサイクルに統計的考え方が入ることになります。

探究の方向が異なるということは,学習する子ども達の側に立てば，数学とは何か，という点で,戸惑うことになるかも知れません。凡そ,数学の世界で完結していた多くの領域に対して，現実の世界の解決，現実事象の分析を主たる活動とする統計教材は,異質の感を抱かせるものともなり得るからです。もしかしたら，データの分析の単元の冒頭の授業で,それまでの単元とは探究の方向が異なることを子ども達に説明することが必要かも知れません。この点は,実際に高校生を教育している先生方の実感に基づく方針にお任せすることになります。何れにしても，統計教材は，子ども達が現実事象を分析する過程において主体的学習を展開するために極めて有用なものとなります。

これまで，先生方におかれましては，分かりきったような話を長々と話してしまいました。これで今回の話は一旦終了となります。ご清聴有り難うございました。

註

この稿の理論部分は,日本学術振興会科学研究費助成事業（科研費）基盤研究（C)（課題番号：24K06379）の助成を受けたものである。

文献

釜江哲朗．(2005)．確率・統計の基礎，放送大学教育振興会.

松浪信三郎．(1962)． 実存主義． 岩波.

皆本晃弥.(2015).スッキリわかる確率統計—定理の詳しい証明つき—.近代科学社.

湊三郎&濱田真.(1994).プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか—数学観と数学カリキュラム論との接点の存在—． 日本数学教育学会誌，76(３)，2-8.

文部科学省.(2019).高等学校学習指導要領(平成30年告示)． 東山書房.

文部科学省.(2019).高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説数学編理数編.学校図書.

Polanyi， M． (1958)． Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi， M． (1966)． The tacit dimension. Gloucester: Peter Smith Pub.

Ray，Olivier．池畑奈央子監訳．(2020)．統計の歴史． 原書房.

Sartre， Jean-Paul．伊吹武彦他訳．(1996)． 実存主義とは何か． 人文書院.

杉田敦(編)． (2010)． 丸山真男セレクション． 平凡社.

多尾清子.(1991)． 偉大な統計学者，ナイチンゲール—衛生統計学に示した業績を見る． 看護教育，32(2)，1116-122.

上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 27-34

割合のインフォーマルな知識を利用した学習活動に関する研究

- 小数倍の理解との関わりに焦点を当てて -

佐藤　茂太郎
兵庫教育大学大学院連合学校教育学研究科院生

1．はじめに

（1）研究の背景

子どもたちの割合の理解が十分でないことは，これまでも指摘され続けている（布川，2022，2024a；国立教育政策研究所，2023）．他方で，子どもの割合のインフォーマルな知識や割合の潜在的な見方を有していることが分かっている（吉田，2003；栗山・吉田・中島，2017；佐藤，2024a；渡辺，2011）．

割合のインフォーマルな知識は，割合の学習以前に豊かに有している（吉田・河野・横田，2000）．本研究における割合のインフォーマルな知識は佐藤（2024b；2025b）で述べられているように，コストパフォーマンスなどに見られる人間の感覚的な知識，タブレット端末やスマートフォン等に示されるバッテリー表示（%）であり，全体のどの程度なのかを判断するイメージが身に付いている．児童によっては，「○%引き」といった知識を日常生活経験によって身に付いていると考えられる．さらに，「A さんの持っている半分の重さ」や「B さんの 30 %がどの程度か」といった第 2 用法に関するインフォーマルな知識を含めている（吉田，2003）．

（2）割合の学習と小数倍の学習

割合指導に関わる学習として，小数の乗除計算や小数倍の学習が位置付けられている．小数倍は，割合の理解を深める上でも重要な学習内容である（田端，2001）．現行の学習指導要領解説算数編の第 4 学年には，小数倍に関わり 2.5 倍の説明がある（文部科学省，2017）．実際にそれ以前の教科書（例えば藤井他，2011）でも「小数の倍」については位置付けられていた（杉山，2012）．

小数倍の理解に関わっては，平成 26 年度全国学力・学習状況調査大問 2 の結果からうかがうことができる．（1）（2）ともに，図示している式を選択する問題であった．（1）は 1 より大きい場合の小数倍（80×1.2）を選択する，（2）は 1 より小さい場合の小数倍（80×0.4）を選択する問題である．正答率はそれぞれ 72.1 %，54.3 %であった．帯小数倍の正答率も不十分であることが分かるが，純小数倍の理解においてはさらに不十分であることがうかがえる．

小数倍に関わる学習内容は，第 2 学年のかけ算九九における「倍」の学習で開始される．この時，基準量の 1 つ分，2 つ分，3 つ分をそれぞれ 1 倍，2 倍，3 倍といった形で指導される．2 年生では第 2 用法として倍の学習が展開される．この学習は，第 1 学年や第 2 学年の長さの学習とも関連付けられ測定とも関わるものになっている．実際，任意単位による測定は，ある基準をつくりその何倍として考える操作となっている．

第 3 学年は除法を既習として倍の計算が扱われる．このとき，教科書によっては，第 2 用法に基づく考え方が示される．ここ

での学習も，ある基準に対して，いくつ分が何倍であるか考えるようになっている．

第 4 学年は，小数倍が初めて登場する．小数倍の意味に関しては，第 5 学年の学習内容であることから，整数÷整数＝小数といった形で導出するに留まる．ただし，教科書によっては，テープ図と数直線を合わせた図を用いて，小数倍のイメージを持てるよう工夫している．

第 5 学年では小数の倍の意味を学習する．この学年では，テープ図と二重数直線を合わせた図を用いて，小数倍のイメージを持たせる工夫が見られる．ただ，測定操作や測定値としての倍のイメージが想起しにくい面もある．実際，第 3 学年まで倍指導に関する図は，ある単位のいくつ分を示しているものの，4 学年以降では，そうした図は必ずしも明示的ではない．

本稿では，倍の指導をできるだけ整合した形で進めるために，布川（2024b）に依拠し，小数倍を「基本的には基準量の倍変換」として捉えることにする（布川，2024b）．

第 2 学年から第 3 学年の自然数倍は基準量の何倍として考えればよい．しかしながら，小数や分数では一度基準量の下位基準量を構成し，その何倍として考えるステップが増えることから「対象化が，自然数よりは生じ難くなる（同，p.197）」ことが考えられる．

こうした考えは市川（2003）が指摘する「倍を求めるとは，基準をもとに再測定している」とも整合する．市川（2003）によれば，小数倍の学習は割合の見方が顕在化する最初の場面であり，田端（2001）の指摘と同じように割合の学習と小数倍が関わっていると言える．

これらの先行研究では，小数倍の理解と割合のインフォーマルな知識を利用した学習活動との関連が図られた検討はなされていない．本稿は，第 5 学年における割合学習と小数倍の学習が関わっていることから，どちらの学習内容にも焦点を当てながら検討していくことにする．

(3) 分析対象の児童

ここまで述べてきたように，割合の学習と小数倍の学習は関わっている．そこで，割合学習前に割合に関するインフォーマルな知識や，小数倍に関する知識の実態調査を行うことにした．

その結果，本研究における分析対象の児童を，2 名（児童 A と児童 B）とした．その理由について，まず 2 名の児童は，事前調査問題において，割合（百分率）に関するインフォーマルな知識が身に付いていることが確認されたからである．

また，小数倍のイメージに関する事前調査結果について，児童 A は次のように小数倍を捉えていた（図 1）．このことから，小数倍のイメージが不十分であることが確認された．他方で児童 B は適切に捉えていた（図 2）．児童 B は，0.1 倍をつくりその幾つ分と考えている様相を示した．

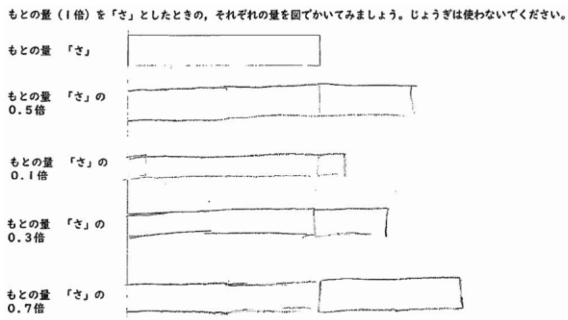

図 1　児童 A による小数倍のイメージ

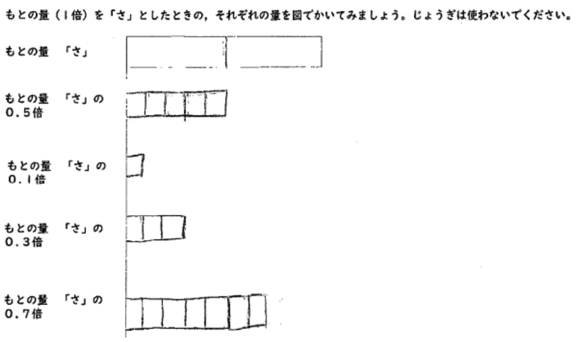

図２　児童Ｂによる小数倍のイメージ

（4）本研究の目的

先行研究では，割合のインフォーマルな知識を利用した研究はあるものの，割合のインフォーマルな知識から一般的な水準への移行が詳細に述べられていないこと（Van den Heuvel-Panhuizen，2003），また，小数倍の理解との関連を図った検討はなされていない．

そこで，本研究の目的は次の通りである．割合学習以前に小数倍の知識が不十分な児童や，適切に身に付いている児童に焦点を当て，そうした児童が，割合のインフォーマルな知識を利用して学習活動を進めることで，model of から model for への移行がどのようになされるか，その様相を明らかにすることである．また，その様相から，第5学年割合指導における新たな示唆を得ることを目的とする．

２．理論的枠組み

本研究は，割合のインフォーマルな知識からフォーマルな知識への移行を意図している．こうした水準間の移行を意図した先行研究に，RME 理論がある．RME に関わって，K.Gravemeijer（1997）は，水準間の移行に関わるモデルの発展について次のように述べている．「初め，モデルは文脈固有のモデル（mode of）として構成され，次にモデルは状況を越えて一般化される．したがって，モデルは性格を変え，それ自体実体となり，この新しい形では，フォーマルな水準における数学的推論のためのモデル（model for）として機能している」（p.339）と述べている．

つまり，特定の問題状況との密接なつながりにおいて構成されたモデル（model of）が，状況を越えて一般化された数学的な推論のためのモデル（model for）となる．

本研究はここで述べられる，図3に見られる4つの水準の model of から model for への移行に着目し，インフォーマルな知識からフォーマルな知識への移行において，児童がどのような様相を示すか分析する．

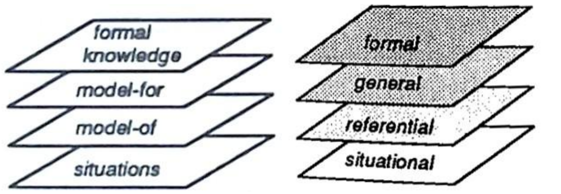

図３　モデルと活動の水準
（K.Gravemeijer，1997，pp.338-339）

例えば，第2用法の問題「70 mL の 30 ％は何 mL ですか」で考えてみよう．問題状況との密接なつながりにおいて構成された model of の水準では，10 ％や 1 ％の量を求めてから 30 ％を求める方法を想定した．また，model for の水準では，70×0.3 といった一般化された水準を想定した．

３．研究の方法

小学校5年1クラスにおいて，割合（百分率）を扱う授業14回を，観察者のビデオカメラ2台で記録した．児童Ａと児童Ｂのデータはワークシートである．このワークシートと授業データ（他の児童の発話記録，板書写真）を分析の対象とした．

４．検証授業の実際と考察

(1) 割合のインフォーマルな知識の表出を期待した学習活動

色水をメスシンダーに入れ，どの程度入っているか問うた（佐藤，2024a；2025a）．教師は 50%分を注ぐと，児童から「約半分」「1/2」「2/4」といった発言があった．他の言い表し方はあるかどうか問うとある児童は「50 パー」（教師が 50%と言い換える）といった反応があった．児童は，学校数学で学習したフォーマルな知識や，割合のインフォーマルな知識を発言した．

(2) 割合のインフォーマルな知識を利用した第 2 用法に関する学習活動

第 2 時～第 3 時は，百分率に関するインフォーマルな知識と，フォーマルな知識である倍との結び付きを図る活動を行った．

基準量 80 ｇを固定し，それぞれ基準量の 200 %，300 %，150 %，250 %が基準量の 2 倍（×2），3 倍（×3），1.5 倍（×1.5），2.5 倍（×2.5）と百分率と倍を関連付けて考える活動を行った．そして児童が，百分率と倍の数値に着目するよう促し，百分率の数値から倍の数値へは 1/100 していること，逆であれば 100 倍していることに児童は気付いた．また，例えば 230 %が基準量の 2.3 倍であることなど児童が発言した．その際，児童 A が表現したバー・モデルが以下の図 4（第 3 時）である．

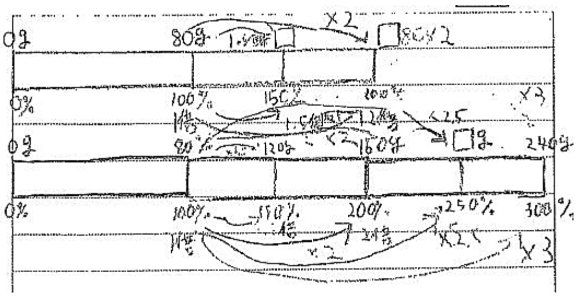

図 4　児童 A によるバー・モデル（第 3 時）

初めは，バー・モデルを利用し比例的推論を働かせながら，model of の水準で活動を進めた．そして，徐々に，一般的水準（model for）への移行が見られた．

第 4 時～第 6 時は，比較量が基準量よりも小さい場合，例えば，70 mL の 30 %の液量を求める問題等を扱った．教師は児童に，全体が 100 %であるといったインフォーマルな知識を確認した．ある児童が「先に 50 %をやった方が簡単」と発言したことから，図を全体で確認した．

その後，児童はバー・モデルを利用しながら，10 %を求めその 3 つ分（3 倍），つまり 70÷10×3 であることを確認した．この考え方を本稿では，一度 10 %を求めその 3 倍にあたる 30 %を求めていることから「2 ステップ」の方法と呼ぶことにする．

ここでは，問題の状況との密接な結び付きが考えられる，model of の水準で活動していることが分かる．

次時で，一般化された水準（model for）への高まりを検討するために，2 ステップではなく 1 ステップで解決する方法への移行を促すようにした．児童から，70÷10 を 70 の 0.1 倍や 70×0.1 とし，その 3 倍（×3）である反応を期待したが，児童からの発言が無かったため教師が介入し，小数倍について確認した．ここでは，70×0.1×3 の考え方から瞬時に 70×0.3 への移行を意図した授業デザインによるものであった．

事前の授業デザインでは，model of から model for の水準への移行について，児童同士の相互作用を期待したが，実際には教師の介入によって，model for の水準の考え方を共有するに留まった．

(3) 割合のインフォーマルな知識を利用した第 1 用法に関する学習活動

第 7 時は，第 1 用法「問題：庭全体が 120 ㎡です．そのうち 36 ㎡が車を置くスペースです．庭全体をもとにしたとき，車を置く

スペースの割合を求めましょう」に関する活動を行った．全体が 100 %であることや 10 %が 10 個で 100 %であるインフォーマルな知識を利用し，10 %分が 12 ㎡，36 ㎡はその 3 つ分として 30 %であることを説明した．図 5 と図 6 のように，児童 A と児童 B は表現した．

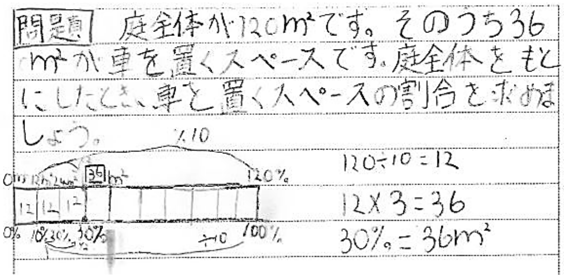

図 5　児童 A による第 1 用法の解決の様相

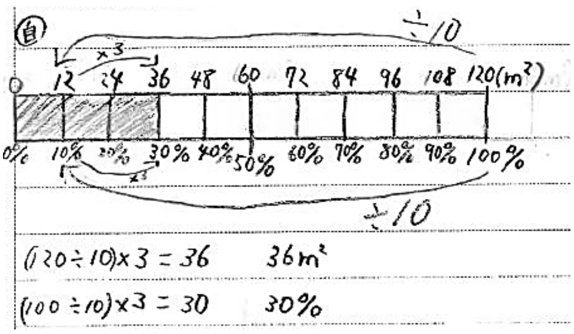

図 6　児童 B による第 1 用法の解決の様相

ここでは，基準量の 10 %を求めるために「基準量÷10」に留まっていることが分かる．また，比例的推論を働かせて図を活用して解決している．

ここでの活動では，model of の水準だと捉えることができる．ただ，質的に見ると，児童 A と児童 B では，様相が異なる．児童 A は，バー・モデルを 10 等分したうちの 1 つ分に「12」と示しているに対して，児童 B は，目盛りの位置に「12」と示している．問題の状況に密接なつながりのある水準が同じと捉えられても，その水準内での思考の様相の違いを見ることができる．

(4)　割合のインフォーマルな知識を利用した第 3 用法に関する学習活動

第 9 時は，第 3 用法「問題：お茶が増量して売られています．増量後のお茶は 600 mL です．600 mL は増量前の 120 %にあたります．増量前のお茶の量は何 mL ですか」に関する活動を行った．

児童は，10 %10 個で 100 %であるインフォーマルな知識を利用してバー・モデルを描き，120 %にするために 10 %を 2 つ加えた．また，120 %が 600 mL であることを示した．ある児童は，10 %が 12 個分で 120 %であることをもとに，10 %分の量を求める際に 600÷12＝50，100 %は 10 %が 10 個分の考えを活かして，50×10＝500 と発言した．さらに，1 %が 100 個分で 100 %である知識を活かして解決している児童がいたため，教師が紹介した．

フォーマルな知識への移行については，100 %から 200 %に 2 倍していることをもとに，120 %であれば基準量から 1.2 倍であることを確認し，基準量を求めるためには，600÷1.2 であることを確認した．児童 A（図 7）は，2 ステップで解決する方法であるが，児童 B（図 8）は 1 ステップで解決した．

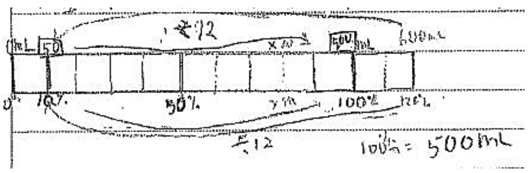

図 7　児童 A による第 3 用法の解決の様相

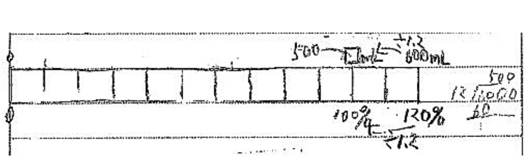

図 8　児童 B による第 3 用法の解決の様相

児童Bは「振り返り」に図9のように表現した．

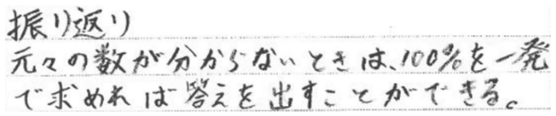

図9　児童Bによる第3用法の学習時の振り返り

第3用法では，児童Aは，model ofの水準，児童Bは，model forの水準で解決している様相を示した．児童Bの振り返りは，model forの水準で考えることのよさを，実感しているものとも捉えられる．

（5）割合のインフォーマルな知識を利用した割引・割増問題に関する学習活動

第10時は，200円の30 %引きの代金を求める問題であった．児童は30 %引きをイメージし「結構お得」と発言した．個人追究の際，教師は100 %が全体であるインフォーマルな知識を利用するために，この問題の100 %は何であるか問うた．その後，バー・モデルを利用して，基準量の30 %分の代金を求め，200円から引く方法と基準量の70 %の代金を求める方法を取り上げた．

児童Aの練習（れ）のバー・モデルには，「×0.1（÷10）」とあり式も「1800×0.1（÷10）×7＝1260」とある．「ふり返り」には「1800÷10（0.1）×7」と記述されている（図10）．

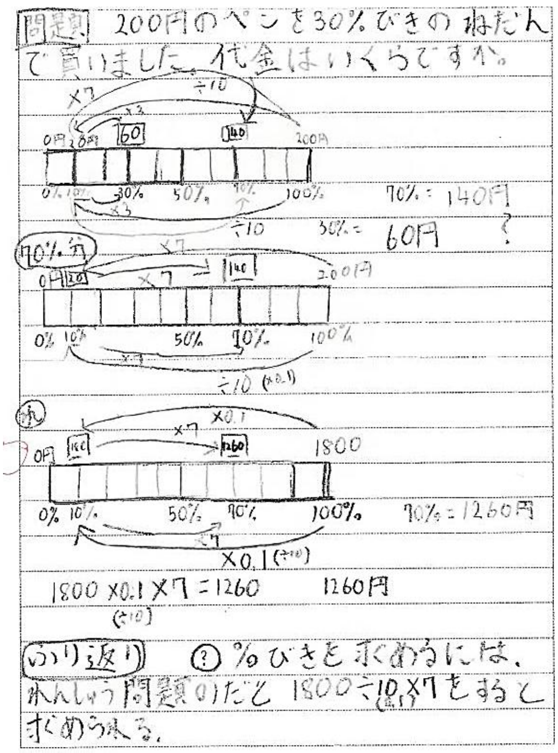

図10　児童Aによる割引問題の解決の様相

児童Bは，初めの問題のバー・モデルは「×0.1」「×3」とされていた．また，式では，200÷10×3＝60，200－60＝140（円）といった記述があった．その後全体で，30 %引きは，基準量の70 %を求めればよいことの確認がなされた．児童Bはその後の練習（れ）において，1800円の30 %引きを求める際，「1800×0.7」と解決した（図11）．

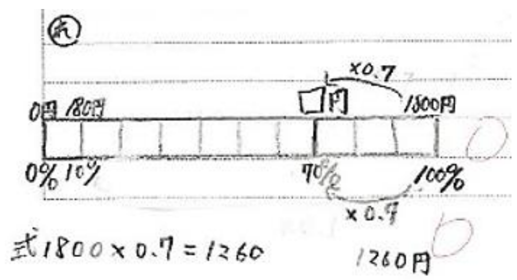

図11　児童Bによる割引問題（練習問題）の解決の様相

第 11 時は，500 円の筆箱に 30 %の利益を加えて売る場合の売値を求める問題であった．バー・モデルを確認する際，教師は 30 %加えた位置になったら「ストップ」と言うように児童に指示した．解決結果の発表では，10 %分の値段を求めてから解決する 2 つの考え方が発表された．また，練習問題の確認では，3000 円の 1.2 倍であることを，100 %と 200 %の 2 倍である関係性をもとに，1.2 倍であることを確認した．

児童 A は，model of の水準であることが分かる．ただ，練習（れ）では，1800×0.1（÷10）×7＝1260（円）という記述がある。model of から model for の水準への移行を試みているとも捉えられる。

児童 B は，model of の水準から model for の水準への移行が，同じ学習時間内で見られた．こうしたことは，Van den Heuvel-Panhuizen(2003)で見られた，model of と model for への移行も一つではないことの指摘と整合する．

５．結論

本研究の結論は次の通りである．割合のインフォーマルな知識を利用したことで，小数倍のイメージが不十分な児童は，このイメージが改善された．割合の問題解決では，model of の水準から model for の水準への移行を試みながらも，model of の水準に留まっている様相を示した．このことから，割合の学習前に小数倍のイメージを身に付けておくことが必要であることが示唆された．

他方で，小数倍のイメージを身に付けていた児童の第 2 用法の問題解決では，1 ステップではなく，2 ステップで解決する model of の水準が続いた．しかし，その後の第 1 用法，第 3 用法，割引問題等の問題解決では，model of や model for の水準の様相を示した．問題によっては model of の水準での解決も見られたことから，小数倍のイメージが身に付いている児童は，問題の場面や数値によって解決方法を，柔軟に変更することが可能であることが示唆された．

６．指導への示唆及び研究の限界

指導への示唆として，割合学習の前に，小数倍の理解に関する不十分な点を補っておく必要が考えられる．研究の限界として，本検証では model for の水準への移行に関して，教師の介入が必要であったことである．また，本研究は 2 名の児童に焦点を当てて分析し，割合指導の示唆を得た研究である．そのため，結論の一般化には限界がある．また，今後は理論的枠組みを精緻にし，詳細に分析していくことが考えられる．

＊本研究については，所属長，学級担任及び該当児童の保護者に許可を得た形で行っている．

註および引用・参考文献

1）本稿は日本数学教育学会第 58 回秋期研究大会での発表原稿を大幅に加筆・修正したものである．

藤井斉亮他 40 名（2011）．新しい算数 4 下．東京書籍．

Gravemeijer, K. (1997). Mediating Between Concrete. And abstract. In T.Nunes & P. Bryand (Eds.) *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*. Psychology Press Ltd..315-345.

市川啓（2003）．割合の見方を育てる小数倍の意味指導. 日本数学教育学会誌，第 85 巻第 12 号．31-41．
https://doi.org/10.32296/jjsme.85.12_31

国立教育政策研究所（2014）．平成 26 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.
国立教育政策研究所（2023）．令和 5 年度全国学力・学習状況調査報告書【小学校算数】.
栗山和広，吉田甫，中島淑子（2017）．子どもの思考に基づいた新しいカリキュラム-割合概念の場合-. 愛知教育大学研究報告教育科学編．66，69-76.
文部科学省（2018）．小学校学習指導要領解説（平成 29 年告示）算数編．日本文教出版.
中村享史（2002）. 割合指導に関する研究の動向と今後の方向. 日本数学教育学会誌算数教育, 84 (8)，14-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.84.8_14
布川和彦（2022）．「小学校下学年における比例的推論の基礎を形成する授業に向けた学習軌道の探究」プロジェクトへのリアクション. 日本数学教育学会第 10 回春期研究大会論文集創成型課題探究の部，267-270.
布川和彦（2024a）. 割合の指導に関わる諸問題. 上越数学教育研究，39，1-14.
布川和彦（2024b）． 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理．上越教育大学教職大学院研究紀要， 11，195-205.
佐藤茂太郎（2024a）. 割合のインフォーマルな知識を利用した子どもの学習過程. 上越数学教育研究，39，23-112.
佐藤茂太郎（2024b）インフォーマルな知識を利用した割合指導に関する研究 - model of から model for への移行を意図した授業の構想 - . 日本数学教育学会第 57 回秋期研究大会発表収録，153-156.
佐藤茂太郎（2025a）. 割合のインフォーマルな知識を利用した 4 年生の子どもの様相. 上越数学教育研究，40，15-22.
佐藤茂太郎（2025b）割合のインフォーマル知識を利用した学習指導に関する研究 - 小数倍の理解との関わりに焦点を当てて - . 日本数学教育学会第 58 回秋期研究大会発表収録，177-180.
杉山吉茂（2012）．倍と割合 - 倍がわかれば，割合もわかる？ - ． 算数授業論究 Vol. 83. 筑波大学附属小学校算数研究部編. 東洋館出版社．pp. 4-7.
田端輝彦（2001）． 小数倍の導入についての一考察 - 小数倍に表すよさに焦点をあてて - ．日本数学教育学会誌，83(12)，4-12. https://doi.org/10.32296/jjsme.83.12_2
吉田甫（2003）． 学力低下をどう克服するか　子どもの目線から考える．新曜社.
吉田甫，河野康男（2003）. インフォーマルな知識を基にした教授介入：割合の概念の場合. 科学教育研究，27 (2)，111-119. https://doi.org/10.14935/jssej.27.111.
吉田甫・河野康男・横田浩（2000）. 割合の問題解決におけるインフォーマルな知識の利用と解決方略の分析. 宮崎大学教育文化学部紀要・教育科学，2，123-133.
Van Den Heuvel-Panhuizen M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: an example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics 54(1): 9-35.* https://doi.org/10.1023/B:EDUC.0000005212.03219.dc
渡辺敏（2011）．児童が潜在的に持っている割合の見方を生かした導入についての研究． 日本数学教育学会誌， 93, (2), 11-21. https://doi.org/10.32296/jjsme.93.2_11

上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 35-44

「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた数学科授業
～生徒が課題に向き合う力を身に付けることを目指した授業の工夫～

平丸　美智子
上越教育大学教職大学院２年

１．はじめに
１．１．問題の所在および実践の背景

「数学が嫌い」という生徒にたくさん出会ってきた。授業開始時から数学を学ぶことをあきらめているように感じる生徒もいた。もちろん，数学が好きで，数学の問題を解くこと，数学について考えることが好きな生徒もいる。そのような様々な生徒がいる教室で，どのように授業を進めていけばよいのか悩むようになった。

それぞれの生徒が自ら学び続ける力の育成として，現行の学習指導要領(平成 29 年告示)では，「主体的・対話的で深い学び」の実現に向けた授業改善の推進が求められている。この実現を目指すことが，筆者の悩みに向き合うことになるのではないかと考えた。

「主体的な学び」の実現について藤野(2024)は，「学習対象が把握しにくいことや問題場面の把握が難しいこと，問題解決の手段や方法を身に付けていないこと」(p. 34)を課題に挙げている。また，筆者の授業実践を振り返ると，文字や記号を使い物事を抽象的・論理的に考察していく際に，抵抗感を与えてしまっているように感じる。これらのことから，主体的な学びの実現には，学習対象が把握しにくいという「数学」の教科特性を理解し，その特性に応じた手立てを考える必要があると感じた。そこで，数学的対象に対して生徒がイメージをもつことができれば，主体的に取り組む手がかりがつかめるのではないかと考えた。

１．２．数学的対象に対してのイメージ

実践 1 年目は，数学的対象に対して生徒がイメージをもてるようにすることを目指した 1 次方程式の授業を行った。手立てとしては，単元を通した代入の活用や GeoGebra による視覚支援に取り組んだ。生徒の様子から手立ての可能性を感じた一方で，「生徒が分かりやすいように，教師が授業の進め方を工夫するだけで良いのだろうか」という疑問が生まれた。そして，生徒が主体的に取り組むために，生徒自身が試行錯誤の仕方や数学的対象との向き合い方を身に付けられるようにしたいと考えた。それに伴い，そのような生徒の姿を目指すために，教師側がどのような支援を行えばよいかを考える必要が出てきた。この点に関して清水(2009)は，「Scaffolding の考え方を取り入れた支援」(p. 66)による「問い方の発達」という視点から，生徒自身の問い方を発達させられるような長期的な支援の中で，主体的な学びを実現させていく研究を行っていた。

１．３．課題に向き合う力

清水(2009)は，自ら問題解決を進展させる適切な「問い方」を子どもに身につけさせるための支援の在り方について，Scaffolding の考え方を取り入れた教師の支援についての研究を行っている。そして，Scaffolding，すなわち足場設定過程では，生徒に身に付けてほしい問い方を，教師が行ってみせることが重要であるとしている。また，教師の責任を子どもに移譲するように支援することによって，教

師の問い方が子どもに内面化され，子どもの問い方が徐々に発達していくと考えている。

生徒が主体的に取り組むためには，藤野（2024）の「学習対象や問題場面を把握する力」や，清水（2009）の「問題解決を進展させる適切な問い方」を，生徒自身に身に付けてほしい。また，それらを身に付けるためには，課題を捉える「視点」も必要であると考える。これは現行学習指導要領（平成 29 年告示）の「見方・考え方」にあるように「その教科等ならではの物事を捉える視点や考え方」(p. 4）であり，数学を学ぶ本質的な意義の中核をなすものであると捉える。

これらの「学習対象や問題場面を把握する力・生徒自身の問い方・問題解決に向けた視点のもち方」を「課題に向き合う力」として，中学校第２学年「１次関数」単元の指導において，生徒が課題に向き合う力を身に付けるための教師の手立てを考える。その際には，実践１年目の「数学的対象に対してのイメージをもたせる」という点も意識しながら取り組むこととする。

２．実践の概要

現行の学習指導要領（平成 29 年告示）解説では，「関数は，動的な対象を考察する際に用いられる抽象的な概念であり，数学の世界はもとより，現実の世界における伴って変わる二つの数量の関係を捉える場面においても有効に機能する」(p. 34) とある。しかし，その「抽象的な概念」を理解したり「二つの数量の関係」を捉えたりすることに困難を感じている生徒も多い。この点に関して，藤野(2024)は，問題解決の手立てとしてストラテジーの提示の有効性を述べ，関数指導において表の活用をストラテジーとして提示，研究を行った。また上田(2009)は，グラフの直感的・視覚的な理解のしやすさを生かし，グラフを中心として学習することが関数の概念や性質を理解する上で有効な手段となる可能性を示した。

これらをふまえ，単元導入時からグラフを扱い，1 次関数の特徴を視覚的に捉えられるようにした。その際に，カメレースという具体的事象についてのグラフを用いることで，1 次関数と具体的事象の結びつきを強め，生徒がカメレースをイメージしながら 1 次関数に向き合えることを目指した。また，表を中心とした問題場面の把握も意識付けることで，1 次関数の特徴を考察する視点を身に付け，式・表・グラフを関連づけながら，1 次関数を探ろうとしたり表現したりしようとすることを目指した。以下に，全 23 時間の授業実践の中から，特に，生徒がカメレースという具体的事象を通して 1 次関数という数学的対象を捉えていく様子と，グラフや表を中心として課題を把握していく様子を取り上げる。

２．１．授業実践期間及び対象

・実施期間：2025 年 7 月 18 日～10 月 14 日
・実践時数：23 時間
・対象：X 市立 Y 中学校 2 年 Z 組（34 名）
・授業者：平丸　美智子

対象生徒は，上越教育大学教職大学院の「学校支援プロジェクト」における連携協力校の中学 2 年生 1 学級である。本研究の実践期間以外は連携協力校の教科担任（A 教諭）が授業を担当しており，実践期間のみ筆者が授業を担当した。A 教諭からは本研究の授業実践を観察してもらうことで，生徒の実態をより客観的・具体的に把握できるように努めた。

２．２．授業の実際

２．２．１．単元前半

単元最初の第 1 時からグラフを読み取る活動を計画した（図１）。グラフの良さとして，現行学習指導要領（平成 29 年告示）解説に，おおよその数量関係を把握しやすくしたり見通しをもちやすくしたりするとあることからも，グラフを通して 1 次関数という新たな数学的対象に生徒が出会うことは有効であると考える。一方で，上田(2009)は，単なるグラフ表現だけでは抵抗を示す生徒がいる可能性を懸念していた。そこで，「カメレースの実況中

継をする」という活動を取り入れることで，具体的事象を関連づけながら 1 次関数に向き合うことを目指した。これは，上田（2009）が実践で魚レースを取り入れたように，図的表現であるグラフにその背後にある事象との結びつきを強めておくことをねらいとしている。

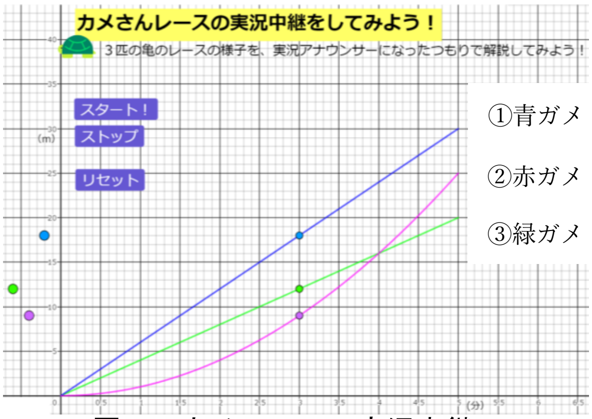

図１　カメレースの実況中継

グラフを読み取る活動を行うと，カメレースの様子を「グラフしかない状態から読み取る」「自分の言葉で表現する」ということに戸惑う生徒も多かった。その中で参考になる質問やつぶやき（○○の方が速いですか？・○分で○m進んでいる・ガンガン進む等）を全体で共有することで記述が増えた。記述内容としては，順位やスピード感，他のカメとの比較について記述する生徒が多かった。一方，分速を求めたり追い越される地点などの数値に注目したりする生徒は全体の 1 割程度しかおらず，無記述の生徒も 4 名いた（表１）。

表１　カメレースの記述内容

記述内容	人数	割合
白紙	4	12%
状況把握（他との比較）	19	58%
順位	18	55%
変化の様子（スピード感）	11	33%
分速（数値を計算）	3	9%
式:$y = 6x$, $y = 4x$ 等	0	0%

グラフから数値を読み取ることにはまだ慣れていないものの，多くの生徒は，順位やスピード感といったおおまかなレース展開を読み取っていることが伺えた。なお，無記述の生徒がいたという実態に対して，GeoGebra で実際のカメの動きとグラフを点の動きで連動させて見せることで，場面把握の支援とした。

さらに，その後のレース展開を予想させ，遅れている緑ガメも同時にゴールさせるためにグラフを変更する活動を行った（図２）。この活動を通して，比例や 1 次関数が他の関数とは異なり，一定の割合で変化していくからこそ予測しやすいこと，1 次関数はスピード（傾き）を変えずにスタート地点（切片）を変えた話ができることを視覚的に印象付けられるようにした。カメレースという具体的事象を通して，関数の特徴をグラフで直感的・視覚的に把握することで，1 次関数を探る際の視点となることを目指した。

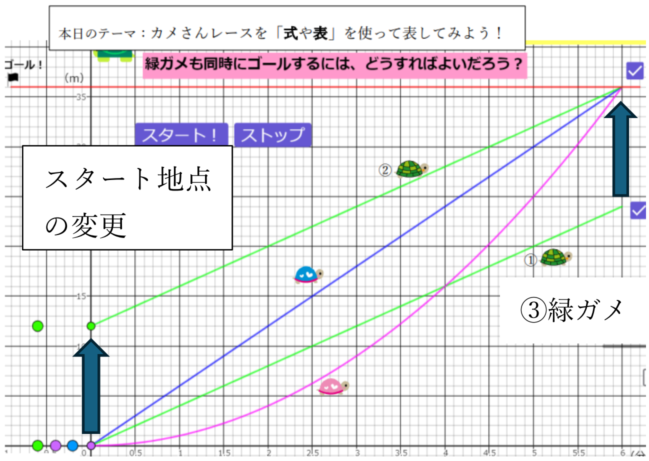

図２　その後の予想とスタート地点の変更

予想する際に，赤ガメ（2 乗に比例する関数）について，区間ごとの速さが異なり青ガメや緑ガメと同様に速さが求められないことに悩む生徒もいた。その悩みを共有することで，変化の割合に関する比例や 1 次関数の特徴を，「一定の速さで進む話」として印象づけることができた。

その後，それぞれのカメについて，グラフから分かる情報を表や式で表す活動を取り入れた。その際，生徒が「どこをスタート地点として，分速何 m で進むカメなのか」という視点を基に，表や式に現れる数値に注目できるようにした。そうすることで，1 次関数という数学的対象が，表・式・グラフという異なる形で表

現されても，その違いに戸惑うことなく，皆同じ「カメの話」として関連付けながら理解できることを目指した。

第３時以降の授業の際に，新たに「一定の速さで走り，スタート後３分で 26m，５分で 32m 地点を通過する黒ガメ」を登場させ，表やグラフで自由に様子を探らせる活動を行った（図３）。変化の割合や傾きが「カメのスピード」，切片が「スタート地点」というイメージをもつことで１次関数を把握しやすくしたり，カメレースに置き換えて考えることで求め方を考えやすくしたりすることを目指した。生徒は，「一定の速さで走る」という具体的事象から変化の仕方を把握し，表の数値を一定の値ずつ変化させながら埋めたりグラフで一直線上に点を取ったりしながら黒ガメの様子を表し，その様子を自分なりの言葉で表現しようとしていた（表２）。

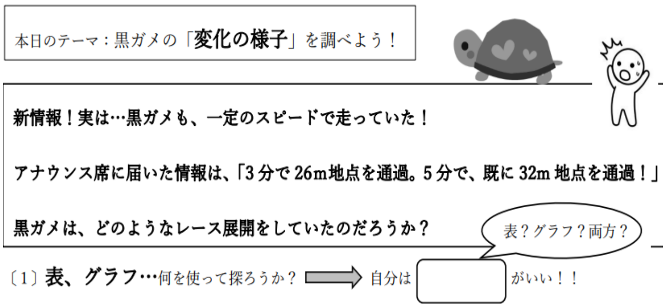

図３「変化の割合」をカメレースから探る

表２　黒ガメについての記述内容

記述内容	人数	割合
白紙	2	7%
状況把握（他との比較）	14	48%
変化の様子（〜ずつ）	10	34%
分速（数値を計算）	10	34%
スタート地点	19	66%
式：$y = 3x + 17$	11	38%

第１時の記述内容と比較すると，傾き（変化の割合）や切片について読み取ったり，式で表現したりする生徒が増えていることがうかがえる。また，「どの点からどのように進んだのか」を意識させることで，グラフ情報を探る生徒の記述に，速さの比較に関する記述（図４）や場面把握に関する記述（図５）も見られた。

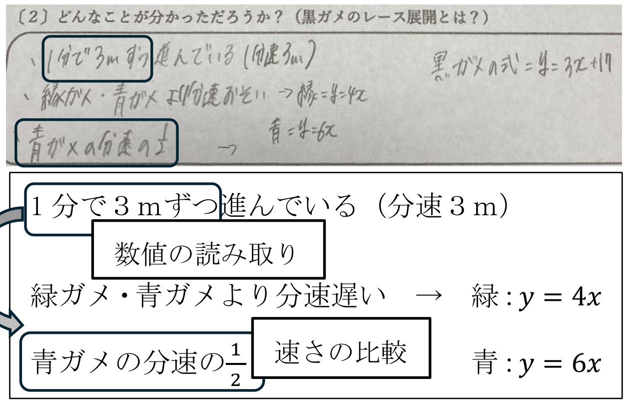

図４　速さの比較に関する記述

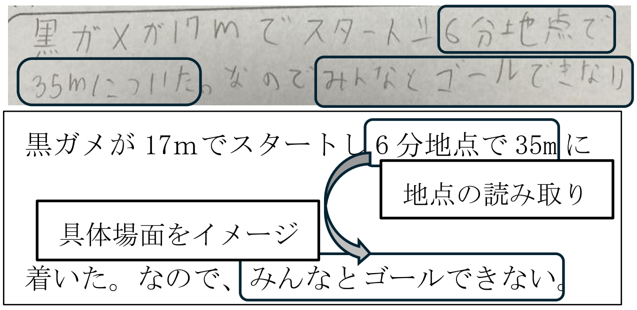

図５　場面把握に関する記述

これらの様子から，グラフと具体的事象の結びつきを図る学習が，生徒が１次関数を捉える際の素地となり得たのではないかという期待があった。しかし，後で詳しく考察するように，その後の学習でカメレースという具体場面から離れて変化の割合を求める際には，手が止まってしまう生徒の姿があった。この実態については，第６時に行った既習内容の定着を図る課題でも，変化の割合に関する問いで正答率が低く無答率が高い結果となっている。誤答内容としては，y の増加量と変化の割合，y の増加量と y の値との混同が見られた。

①１次関数 $y = 3x + 5$ で，x が２から６まで増加するときの，「変化の割合」を答えなさい。

正答率：67%　無答率：30%

②１次関数 $y = 3x + 5$ で，x の増加量が４のときの「 y の増加量」を答えなさい。

正答率：53%　無答率：43%

一方で，表の空欄を埋めて式を求める問いについては，正答率が 83%，無答率は３％であった（図６）。これらの様子から，カメレースという現実事象を通してスタート地点と変化の様子に注目できるようになったものの，変化の割合自体を十分に理解できていないことが分かった。

〔1〕次の１次関数の表の空らんを埋め、 y を x の式で表しなさい。

（1）

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
y		□	□	1	3	5	7	□	

図６　表の空欄を埋めて式で表す問い

２．２．２．単元中盤

第 13 時からの直線の式の学習では，単元前半に登場した「２点の情報が与えられた黒ガメ」を想起させる問いを行い，分かっている情報を比較させながら，傾きと切片を求めることを目指した。その際には，１次関数の特徴を「どのように走るカメなのか」という視点をもちながら，地点と変化の様子に注目しながら探究できるようにし，式・表・グラフの３つの表現で確認することを意識付けた（図７）。

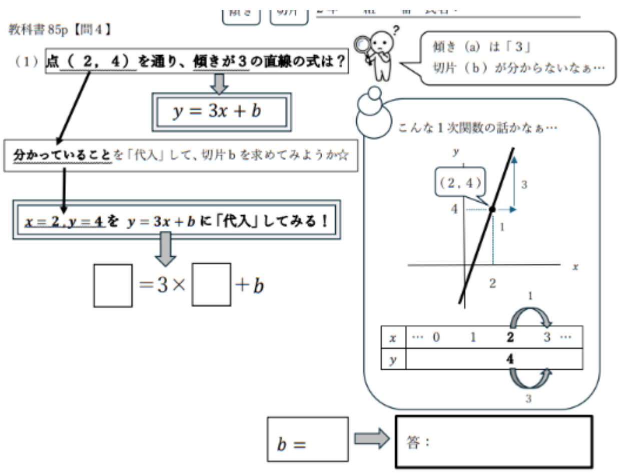

図７　式・表・グラフを関連し続ける

式・表・グラフを関連付けることについては，生徒同士が話し合う中で，大まかなグラフをかいて様子を探ったり表に書き出したりする姿が見られた。以下に，第 14 時での２人の生徒の姿を挙げる。

生徒 T は，傾きが負の数であるという特徴を，グラフで大まかな様子として捉えている。そして，座標や傾きを代入し計算して求めた直線の式について，１から３の x 座標を順に代入して確かめている様子が伺える。さらに，求めた y の値を表に書き込み，変化の様子から捉えた「x 座標が－１のときに y 座標が 6/3」という値と，問題文にある「点（－１，２）を通る」という内容が一致することを確かめている様子があった（図８）。

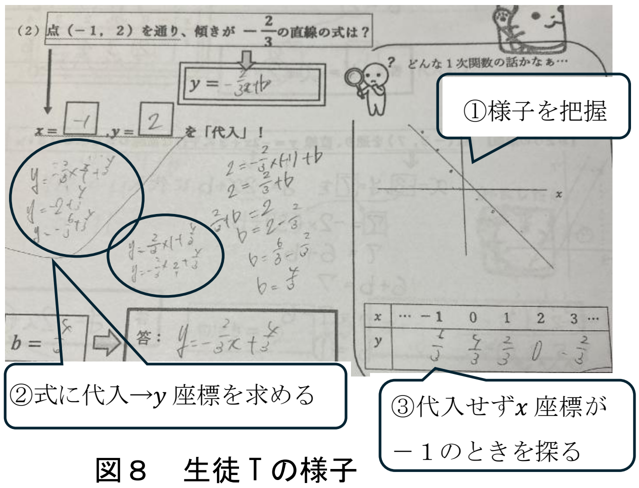

図８　生徒 T の様子

生徒 K は，他の生徒と話し合いながら取り組む際に，傾きが負の数であることから右下がりのグラフであることを捉えて点の並びで表現している。そして，１点の座標と傾きの情報を基に，表で x 座標が０までの変化を辿り，切片を明らかにしている様子があった（図９）。

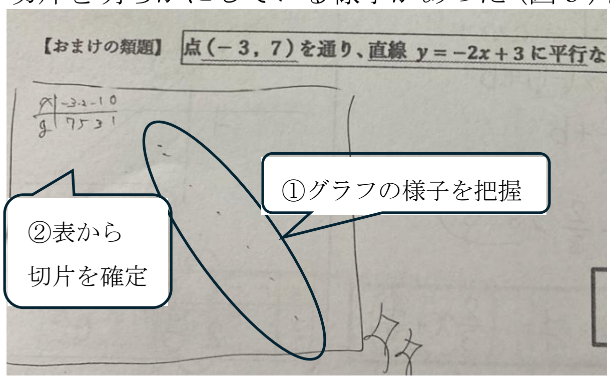

図９　生徒 K の様子

なお，生徒 T のように「代入して様子を探る」という良さや扱い方を生徒が身に付けることは，すぐにはできない様子も観察された。実際に，単元中盤では，表やグラフが式と整合しているかを確認する際に代入を薦めてきた。

例えば，第 12 時からグラフのかき方の定着を図る課題を何度か行った際にも，式に適当な x の値を代入して求めた座標が直線上にあるかを確かめさせてきた。しかし，自ら適当な x の値を選び代入しようとする生徒は，第 16 時の段階で全体の３割程度だった（図 10）。

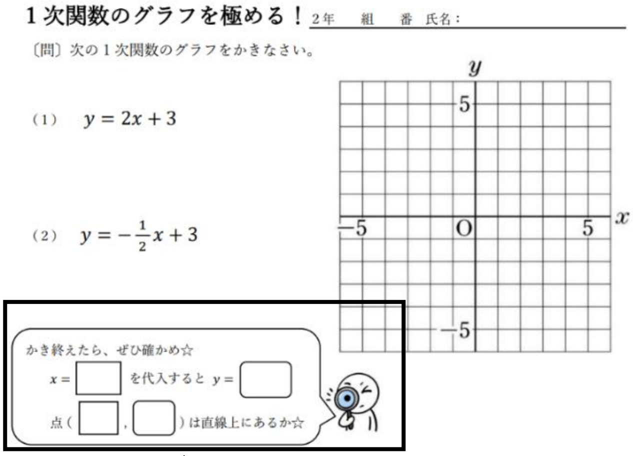

図 10　グラフにおける代入の意識付け

「関連付ける」ことに関しては，授業の導入課題や既習内容の定着を図る課題を提示する際にも，意図的に課題を関連付けておき，揺さぶりをかける問いを行うようにした。

例えば，第 15 時に行った既習内容の定着を図る課題では，6 問中 4 問で，同じ 1 次関数 $y = 2x + 1$について問う仕掛けを取り入れている（図 11)。それぞれの問題が正しく求められるかということだけではなく，１つの関数について様々な問い方をすることで，式・表・グラフを関連付けながら捉え直すことを目指した。最初の頃は，式・表・グラフの関係について気付くことを問うても，なかなか生徒からの発言はなかった。しかし，何度か同様の手立てを取り入れるうちに，授業後にその仕掛けについて気付いたことを伝えにくる生徒も現れた。

また，第 16 時では，既習内容の定着として導入時に行った課題(1 次関数 $y = -2x + 1$ の表）が，その授業の主課題「方程式と 1 次関数」の方程式 $2x + y = 1$ と関連付いており，同じ値の表になるということから生徒の気付きを促す活動を行った(図 12)。式の仕組みや関係性について全体に向けて発言する生徒は出てこなかったが，中には，生徒同士で熱心に話し合い，式変形をすると同じ形になることに自ら気付いた生徒もいた。その際の彼らの喜び様は授業者の予想以上であった。

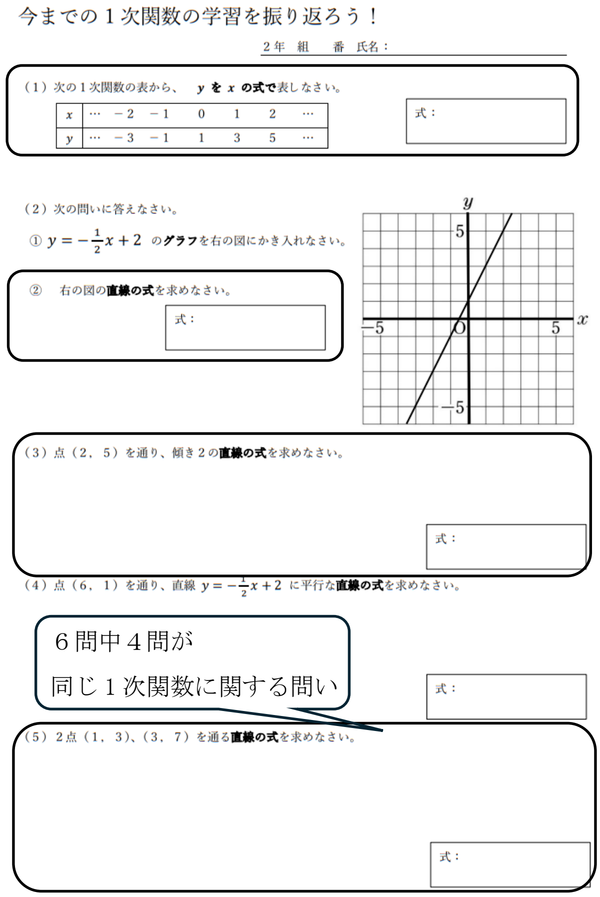

図 11　既習内容定着課題における手立て

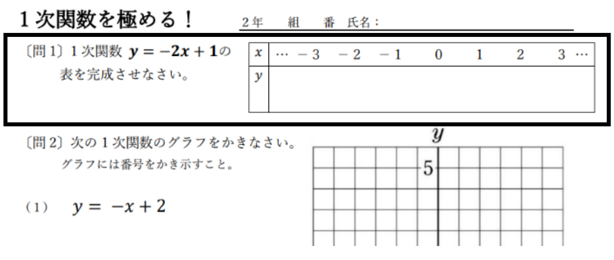

図 12　授業の導入課題における手立て

式・表・グラフを関連付けながら学習を進める中で，直線の式の求め方については，それぞれの生徒によって得意とする求め方があるということを再認識した。例えば「2 点を通る直線」に関しては，表を用いて傾きを求めて x の係数を決めた後，式に座標を代入して切片を求めていく生徒が多かったが，座標を代入し

て a と b の連立方程式を解いて求める生徒も３割程度いた。また，第 16 時の確認課題では，表による課題解決を好み，表のみを使って 1 次関数を探っている生徒もいた。その生徒は，分かる情報を表に書き出し，表から傾きも切片も探り出して直線の式を確定していた（図 13）。これらの姿から，様々な生徒が式・表・グラフを関連付けながら，自分なりのアプローチの仕方で課題に向き合い，課題解決に向けて主体的に取り組もうとする様子がうかがえた。

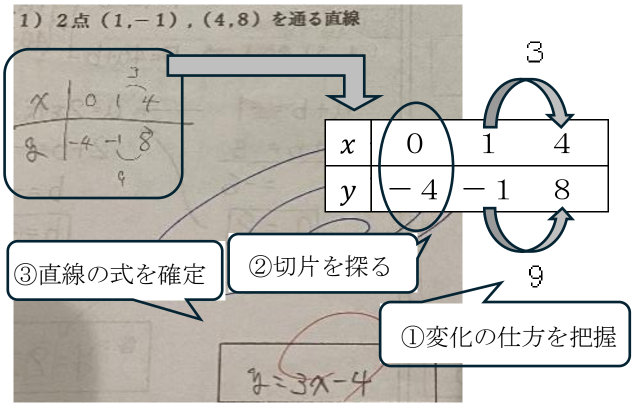

図 13　表のみで直線の式を求める

２．２．３．単元後半

第 20 時では，「グラフから情報を読み取り２人が出会うときを考える」という利用問題で，助走問題としてカメレースを扱った（図 14）。単元導入時から扱ってきたカメレースで「逆走」という状況を読み取る経験をさせることで，利用問題への抵抗感を減らし，課題への視点がもてるようにすることを目指した。

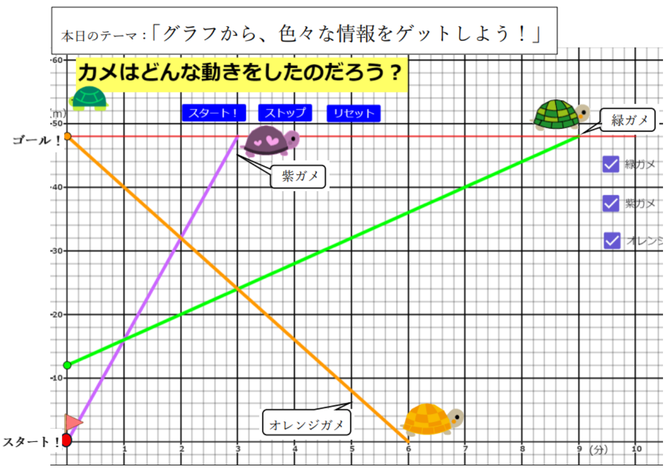

図 14　１次関数の利用への助走問題

生徒の記述を見ると，「逆走」という状況を読み取り，自分なりの表現で記述しようとする姿が見られた。そのため，「傾きが負の数・下がっている」という表現と共に，今までのグラフの学習と具体場面をつなげやすかった。一方「追い越す・出会う」という表現は出てこなかったことから，「合流している」という記述を全体で共有しながら交点の意味と具体場面をつなぐようにした。

第 21 時では，教科書の道のり問題についてカメレースと同様にグラフのみを提示し，読み取れることを自由に記述させた（図 15）。教科書の問いはまだ提示せず，「グラフからの情報を書き出してみる」という活動を行うことで，利用問題に抵抗のある生徒も，自分にできることを考え課題に取り組もうとする姿を目指した。

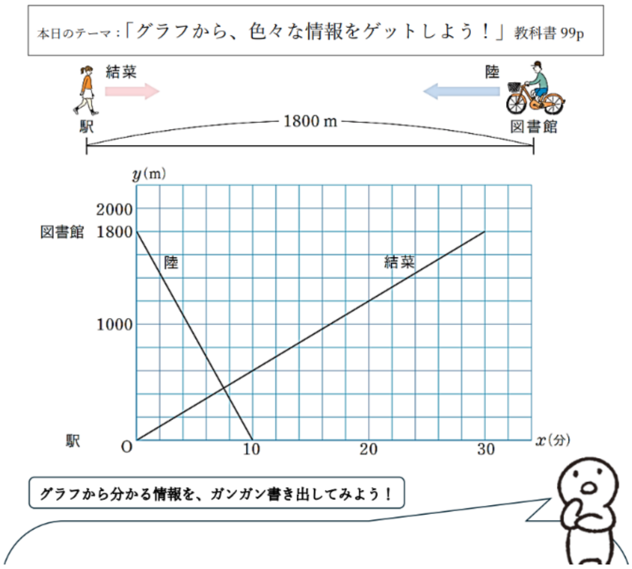

図 15　教科書の道のり問題（情報記述）

右上がりと右下がりという対照的な２つのグラフから，地点（切片）や２人の動き方の違いを比較しながら記述している生徒が多く，グラフの特徴をそれぞれの生徒が自分の言葉で表現しようとしている様子がうかがえた。「出会う場所」に注目する生徒も多く，「今回も出会っているけれど地点がはっきり分からない」という生徒の意見を基に，交点の座標を求める課題に入ることができた（表３）。

表３　教科書の道のり問題の記述内容

記述内容	人数	割合
白紙	0	0%
変化の様子（速さ）	6	19%
地点（スタート・ゴール）	15	48%
式：$y = 80x$, $y = -180x + 1800$	5	16%
状況把握（比較）	23	74%
状況把握（逆走）	3	10%
状況把握（出会う）	17	55%

また，課題追究の際には，表を好んで活用していた生徒 K が，出会う地点を求める際にも表を使って課題解決を試みたが，助走問題のようにグラフから読み取れず，表に書き出し代入して確認しても２直線が一致する数値を見つけられないことに悩んでいた（図 16）。その後，既習内容の「連立方程式の解を求める」ということを想起させることで解決することができた。

カメレースのグラフを通して 1 次関数を視覚的に捉え，表を使って探る力を身に付けつつあった生徒Ｋが，課題解決に行き詰った際に，2 直線の交点と連立方程式の解が一致するという考え方を必要感をもって学んでいく様子は，授業者として注目すべきであると考える。

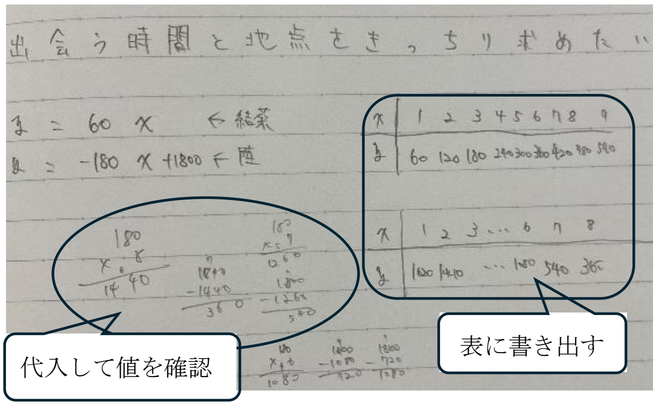

図 16　出会う地点を表で求めようとする

３．考察

今回の実践では，カメレースという具体的事象と 1 次関数という数学的対象を，単元を通して関連付け続けてきた。また，既習内容と本時の課題との関係や，式・表・グラフの関係，他学年の関数との関係などを比較しながら特徴を探っていく活動も，意識的に取り入れ続けた。その際の生徒の様子を取り上げてみることで見えてきた成果と課題を以下に述べる。

３．１．授業実践全体の成果

今回，単元導入時からグラフを用いて 2 つの数量の関係を視覚的に理解し，表や式と相互に関連付けながら関数を探ることを促してきた。特に，1 次関数はスピード（傾き）を変えずにスタート地点（切片）を変えた話ができるということや，変化の割合や傾きが「カメのスピード」，切片が「スタート地点」というイメージであることを，意識的に確認させてきた。また，単元を通して式・表・グラフを関連付けながら 1 次関数を探ることで，生徒が自らグラフや表を使って課題解決に向かおうとする姿を目指してきた。その際には，教師が繰り返しそれらの関係について問いかけていくことで，教師の問い方が生徒に内面化され，生徒自身が数学的対象や課題を把握するための視点がもてるようになることを目指した。その結果，グラフから情報を読み取ったり，表を使って課題内容を把握したりする姿から，それぞれの生徒が 1 次関数を捉えようとする様子が見られた。その際には，「どの点からどのように変化したか」ということが主な視点となっており，これは，カメレースでのカメの動き方のイメージが素地となっていると考えられる。これらの様子から，カメレースという具体的事象を用いることで，1 次関数の特徴が動的にイメージしやすくなり，表やグラフを関連付けながら，生徒が自分なりの課題に向き合う力を身に付けつつあったのではないかと考えられる。

３．２．授業実践全体の課題

課題としては，カメレースという具体場面は理解できても，変化の割合自体の理解には至っていないと思われる生徒の実態があった。

今回の実践では，「変化の割合（y の増加量÷ x の増加量）」を，似たような表現「速さ（距離÷時間）」というイメージで理解させる

ことを目指した。しかし，カメレースという具体場面から離れて変化の割合を求める際には，第６時のように，手が止まってしまう生徒の姿があった。この様子からは，表し方が似ていることでイメージが一致し，変化の割合への理解が深まったとは言い難い。その要因として，①2 変数の関係として捉える難しさ，② x の増加量・y の増加量の理解の不十分さという点から考察を行う。

３．２．１．２変数の関係として捉える

今回の実践では，数種類のカメを用いて，変化の割合の数値によってどちらが速いかを比較した。生徒の記述内容から「数値が大きい方が速い（小さい方が遅い）」ということを，グラフの傾きにつなげて「スピード感（勢い）」というイメージで考えさせることはできたと考える。一方で，変化の割合を「x の増加量という基準量に対して，y の増加量という比較量が，基準量のどれだけに相当するのか」という割合として捉えさせることが疎かになっていた。そして，その比較の前提となる「x の増加量と y の増加量は比例関係にあるか（何倍だろうか）」という点を探る時間が不足していたことが，変化の割合の意味を十分に理解させられなかった１つの要因であると考えられる。この点に関して，「x の増加量と y の増加量が比例関係にある（倍の関係にある）」ということを，生徒がイメージできるような手立てが必要であったと考える。その手立てとして，次のような支援を丁寧に行うべきであったと考える。

まず，３段表示の表（図 17）を活用することが 1 つの手立てになるのではないかと考える。3 段表示の表については，教科書でもグラフの切片を学習する際に用いられている。1 次関数が比例を平行移動したグラフであることを意識付けるねらいがあると捉えている。この表を，変化の割合を捉える手立てとしても活用し，カメレースの「スタート地点からの動き」と関連付けながら，比例部分を意識させるように，教科書のグラフの三角形の部分を強調して提示する（図 18）。このように，変化の割合がどこに現れてくるかということを視覚的に捉えさせ，式の $y = ax$ の部分との関係を理解できるように，比例の部分を強調しながら丁寧に確認するべきであったと考える。

（1）式：$y = 2x$

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…	10	…	30	…
$y =$ $2x$	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…	20	…	60	…

（2）式：$y = 2x + 3$

比例関係を確認

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…	10	…	30	…
$2x$	…	−6	−4	−2	0	2	4	6	…	20	…	60	…
$y =$ $2x+3$	…	−3	−1	1	3	5	7	9	…	23	…	63	…

＋３

図 17　表で比例の部分を見せる

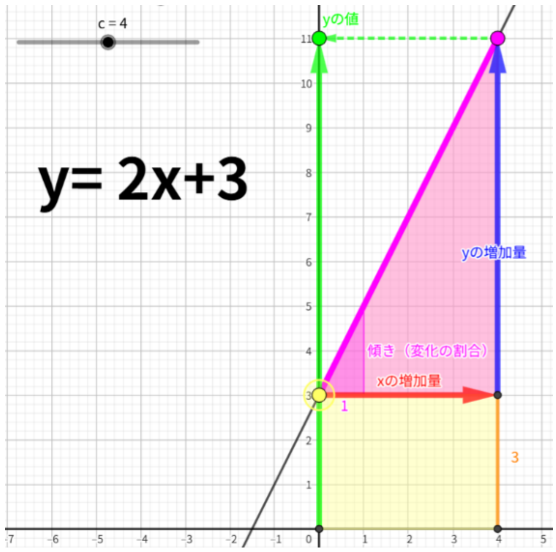

図 18　グラフによる視覚的把握

３．２．２．x の増加量・y の増加量の理解

変化の割合や速さを求める際に，x の増加量・y の増加量を考える。授業では，黒ガメという具体的事象で考えたり，表に矢印を書き入れながらその部分を見せたりしてきた。実際に，生徒が表やグラフに矢印を書き入れながら探究していた様子から，２点の情報があれば，表やグラフから増加量を読み取ることができるようになってきたと考えられた。一方で，「1 次関数 $y = 3x + 5$ で x の増加量が 4 のときのy の増加量」を考えさせた途端に，生徒の手が止まってしまった。求めた数値も，y

の増加量と y の値との混同が散見した。

これらの様子から，「x の増加量が４」と示された際に，任意のx_1 からx_2 まで変化したときの量が４であるということがイメージしにくく，「x の値」として４を代入し，y の値を求めてしまっていることが考えられる。この「任意のx_1 からx_2」について生徒が自ら考えられるようになるためには，「例えば」と例を出して考えていくことを教師が促したり生徒同士で話し合ったりする機会が必要である。その際には，単元中盤で生徒が自ら「代入」を行うようになるには時間がかかったことからも，教師側が意図的に機会を与え繰り返し経験させていくことが必要であると考えられる。

また，増加量という新たな用語に対して，生徒がどのように理解しているかを丁寧に把握する必要があった。授業では，主に，表に矢印を書き入れ「横にいくつ増えたか」を読み取ることで捉えさせてきた。この「表に矢印を書き入れて横の変化を見る」という見方は，比例を学習する際に「２つの数量の一方がm倍になれば，他方もm倍になる」という関係を探る際に経験している。同様の表現方法で，増加量を考える際には $x_2 - x_1$ という差を考えているということを丁寧に扱うべきであった。さらに，y の増加量が負の数になった際に，「－６増加する」という表現に戸惑う生徒がいたかどうかを十分に把握していなかった。実際に，同様の姿として，逆走しているカメの動きに対して「速さが負の値になる」ということに戸惑う生徒がいた。増加量という新たな数量を捉えようとした際に負の数になるということに抵抗感を感じていた生徒の様子を把握できていなかったことも，変化の割合を十分に理解させられなかった１つの要因であったと考えられる。

４．おわりに

主体的・対話的で深い学びの実現を目指し，1次関数の授業実践を通して，生徒が課題に向き合う力を身に付けるための教師の手立てを考えてきた。カメレースという具体的事象を素地として，生徒が自ら表やグラフから様々な情報を読み取ろうとするようになった姿が，１つの成果であると考える。また，単元を通して表やグラフを中心として関数を探る中で，1次関数の特徴を捉え，生徒自らが式・表・グラフを関連付けながら探究する姿が見られ，課題に向き合う力が身に付きつつあったと考える。一方で，変化の割合と速さを関連付ける際の手立てが不足していたり，変化の割合や増加量という新たな用語について数や文字を用いて探究する際に生徒の抵抗感を十分に把握できていなかったりした点が課題である。

今回の実践は，生徒がどのように数学的対象を捉えていくか，どのようなことにつまずきを感じるのかということを知る貴重な機会となった。また，その課題に対して考えられる要因や手立てについては，更なる研究と実践が必要であることを認識した。今後も目の前の生徒の様子を丁寧に見取り，生徒が主体的に取り組むために，課題に向き合う力として必要な視点や考え方を身に付けさせるための教師側の手立てを検討していく。

引用・参考文献

文部科学省(2018). 中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説数学編. 日本文教出版.

文部科学省(2018). 小学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説算数編. 日本文教出版.

藤野真(2024). 数学科における主体的な学びを支えるための手立て：表の活用を生徒のストラテジーとして提示した関数指導. 上越数学教育研究, 39, 33-40.

清水祐子(2009). Scaffolding の考え方を取り入れた支援による問い方の発達の様相. 上越数学教育研究, 24, 65-74.

上田貴之(2009). 関数の学習におけるグラフを利用したアプローチについて:中学校２年「一次関数」の単元における影響についての一考察. 上越数学教育研究,24,41-52

実践報告

上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 45-50

生徒のつまずきの分析を通した動的ツールの活用

石川　桃菜
上越教育大学教職大学院２年

１. はじめに

近年，ICT 機器の整備が進み，数学の授業においても動的ツールを活用した実践が広がっている。中学校学習指導要領解説（平成 29 年告示）においても，数学的な見方・考え方を働かせながら問題解決を図ることの重要性が示されており，ICT を効果的に活用することが求められている。GeoGebra のように図形やグラフを動的に操作できるツールは，数量や図形の変化を視覚的に捉えさせることができ，生徒の理解を支える可能性をもっている。

しかし，動的に表現すること自体が，直ちに生徒の理解の深化につながるとは限らない。実際の授業場面では，動きを「見る」ことにとどまり，それを自らの既習内容や概念と結び付けて捉えられない生徒も見られる。すなわち，教師が意図した学習効果と，生徒の実際の思考過程との間にずれが生じる可能性がある。

生徒のつまずきは多様であり，表面的には解けているように見えても，概念的理解が十分でない場合もある。こうした実態を踏まえると，動的ツールを活用すること自体を目的とするのではなく，生徒一人一人の理解の様相を丁寧に把握した上で，どの場面で，どのような目的で用いるのかを検討する必要がある。

本研究では，学校支援プロジェクトにおける２年間の実践を通して，生徒の思考やつまずきを詳細に捉えることが，動的ツールを学習支援として有効に機能させる前提であると考える。１年目および２年目の実践を振り返りながら，動的ツールの活用の在り方と今後の課題について考察する。

２. 学校支援プロジェクトの概要

本研究は，上越市内の中学校において行われた学校支援プロジェクトを対象とする。本プロジェクトでは，中学校数学科の授業支援および昼休み学習会への参加を通して，生徒の学習状況を把握し，支援の在り方を検討してきた。

通常授業においては，教室内を巡回し，生徒の思考過程やつまずきの様子を観察するとともに，必要に応じて個別に学習支援を行った。

実習を通して，生徒がどのような点でつまずき，どのように理解を形成していくのかを継続的に観察することができた。１年目は主に動的ツールを活用した支援の可能性を探る実践を行い，２年目は生徒の理解の様相をより詳細に捉えることを重視した実践へと発展させた。

本研究では，これら２年間の実践を比較しながら，動的ツールの活用の在り方について検討する。

３. １年目の実践

１年目の実践では，授業観察・支援で生徒が困難に感じている内容を把握し，学習課題に生かした。また，GeoGebra を用いて生徒

が問題場面のイメージを持つことを目指した支援を行った。

（１）合同な図形の証明

合同な図形の証明の単元では，生徒が図形の性質を文章や図だけから理解することに難しさを感じている様子が見られた。

そのため，生徒が点を動かしながら辺の長さや角度の関係を確認できる GeoGebra 教材を作成した。点を操作することで合同関係が維持される様子を示し，「条件が揃えば必ず合同になる」という性質を視覚的に確認できるようにした。（図１）

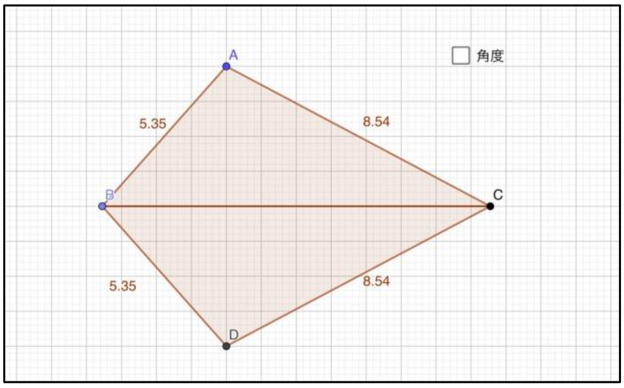

図１　合同な図形を示した GeoGebra 教材

教材を用いることで，図形の特殊な状態を確認する機会を提供し，生徒が図形の性質を捉えることにつながったと考えられる。この場面では，モニターに映して提示するだけでなく，生徒自身が点を操作できる形で教材を用いた。実際に点を動かしながら，「どの位置でも辺の長さが等しい」「角の大きさが変わらない」と確認する姿が見られた。動いている様子を見るだけでなく，自ら操作することで，条件と結果の関係を主体的に確かめる経験になったと考えられる。

これらの生徒の反応から，ICT は単に一斉提示の道具として用いるだけでなく，生徒一人一人の理解段階に応じて活用できる可能性をもっていると考えられる。例えば，理解に不安がある生徒が個別に操作しながら確認することもできるし，特別な位置関係や場合を自ら試しながら考察を深めることもできる。常に「分からないときに使う補助」として提示するのではなく，理解が進んでいる生徒にとっても，新たな気付きや一般化につながる場面で活用することも可能であろう。

このように，ツールそのものだけでなく，「どのように提示するのか」「誰にどのような場面で操作させるのか」という設計が重要であり，提示方法の在り方についても今後さらに検討する必要があると考える。

（２）平行な直線とグラフ

$y=-2x-3$ のグラフと平行で，点(３,－２)を通る直線の式を求め，グラフをかきましょう。

授業観察・支援の中で，生徒が問題文から直線のイメージを持つことに困難を示す様子が見られた。一方で，傾きと切片が与えられた問題では解答できる生徒も存在したことから，平行な直線の概念理解にズレがある可能性が考えられた。そこで GeoGebra 教材を作成し，条件を満たしたまま直線が動く様子を提示した（図２）。昼休み学習会では，モニターに教材を映し続け，生徒が直線の変化を観察できる環境を設定した。

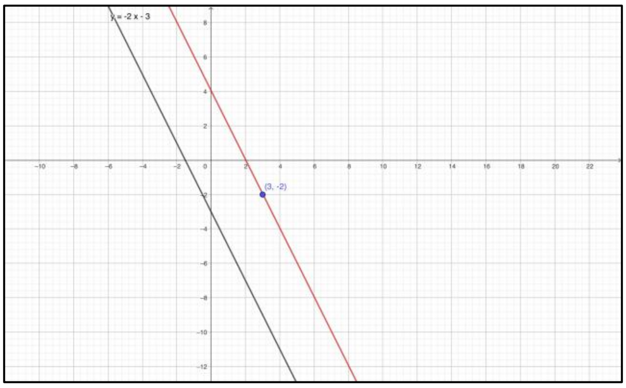

図２　平行な直線を示した GeoGebra 教材

教材の提示により，平行な直線は傾きが同じであるという関係を理解し，問題を言い換えて取り組む様子も見られた。

しかし，多くの生徒は教材を観察することにとどまり，教材の提示が支援として十分に機能しない場面も見られた。このことから，動的ツールを用いること自体が目的となり，生徒がどのように問題に向き合い，どこでつまずいてい

るのかを十分に把握できていなかった可能性があると考えられる。

（３）１年目の考察

１年目の実践では，生徒が問題場面のイメージを持つことを支援の中心とし，動的ツールを活用した教材を作成した。例えば，平行な直線の単元においては，傾きと切片が指定された問題では多くの生徒が解答できていたことから,「平行であることは傾きが等しいと言い換えるだけである」と捉えていた。しかし，実際に何が分からないのかを尋ねても具体的な応答は少なく，問題をどのように認識すればよいのかが曖昧な様子が見られた。

そこで「平行な直線とはどのような直線か」と問いかけると，手振りで示したり図に描いたりする生徒はいたものの,「傾き」という語はほとんど出てこなかった。すなわち，視覚的な平行のイメージは有している一方で，それを式の構造と結び付けて理解する段階には至っていない可能性が示唆された。このような実態を踏まえ，条件を満たしたまま直線が動く様子を示す教材を作成し提示したが，多くの生徒はそれを観察するにとどまり，思考が停滞した場面においても積極的にツールを参照する様子は限定的であった。

このことから，動的ツールは提示するだけでは思考支援として十分に機能するとは限らず，生徒のつまずきの構造をより丁寧に把握し，そのつまずきに応答する設計がなされて初めて有効に働く可能性があると考えられる。１年目の実践は，生徒の理解の様子を一定程度把握した上で教材を作成したものの，そのつまずきがどの段階で生じているのかを十分に整理しきれなかった点に課題があったといえる。

４．２年目の実践と生徒のつまずきの特徴

実践を通して見られた生徒のつまずきの特徴を整理する。１年目の実践では，動的ツールを用いてイメージを持たせることを支援の中心としていたが，生徒によって問題解決の手順や思考方法に差があることが明らかになった。２年目の実践では，生徒の理解の特徴をより詳細に把握することを重視し，学習支援を行った。

（１）問題の目的理解

生徒の中には，問題が何を求めているのかを把握できず，解答の方針が曖昧なまま問題に取り組む様子が見られた。特に，答えの形式を意識できないことが思考開始の遅れにつながる場合があった。

例えば，直線と x 軸との交点を求める問題において，x 軸上の点は y＝0 となる点であるという理解が曖昧なまま，y に 0 を代入する発想に至らず手が止まる生徒が見られた。また，方程式の学習場面では，生徒は最終的に「x＝□」の形に整理するという目的を意識しやすい一方で，文字式の学習場面では式をどのように整理すればよいのかという目的が曖昧になり,解答に困難を示す生徒が存在した。このことから，式操作の技能だけでなく，操作の目的を理解することが重要であると考えられる。

さらに，問題の終着点を具体的にイメージできるかどうかは，思考の出発点に大きく影響していると考える。答えの形式や求める対象が明確な場合には手が動きやすい一方で，「何をもって解決とするのか」が曖昧な場合には，既習内容をどのように活用すればよいのか判断できず，思考が停滞する様子が見られた。このことから，学習支援においては，解答に至る過程だけでなく,「何を目指しているのか」という見通しをもたせる働きかけが重要であると考えられる。

（２）操作手続きの意味理解

式の変形や計算処理において，形式的な操作に頼り，その意味を意識できないまま解答を進める生徒が存在した。

文字式と方程式の比較課題では，式の形を揃えて問題を提示した（図３）。

【文字式】

$2x \times 10$

$6x - 7 - 4x + 11$

$\frac{x+3}{2} + \frac{x-3}{5}$

【方程式】

$2x = 10$

$6x - 7 = 4x + 11$

$\frac{x+3}{2} = \frac{x-3}{5}$

図３　文字式と方程式の比較問題

文字式の問題では，方程式における「分母を払う」という操作意識との混同が見られた。具体的には，両辺に 10 を掛けるなどの操作が行われる様子が見られ，計算結果が 7x+9 となる誤りも確認された（図４）。

$$\frac{x+3}{2} + \frac{x-3}{5}$$

$$= \frac{5x+15}{10} + \frac{2x-6}{10}$$

$$= 5x + 15 + 2x - 6$$
$$= 5x + 2x + 15 - 6$$
$$= 7x + 9$$

図４　誤答例

このことから，計算処理は形式的に理解しているものの，操作の目的理解が不十分である可能性が示唆された。

これらの誤りは，単なる計算技能の不足というよりも，「同じ形にそろえる」「両側に同じ操作をする」といった手続き的な知識が強く残っていることによるものと考えられる。実際の支援場面では，「なぜ 10 を掛けたのか」と問い返すと，明確に説明できない生徒も見られた。これは，操作の意味が言語化されないまま手続きだけが定着している状態を示していると考えられる。したがって，式変形の場面では，計算結果だけでなく，その操作の根拠を問い直す活動を取り入れることが必要である。

（３）理解段階の差

生徒によって理解の違いや理解の仕方の違いが存在することも確認された。既習知識を形式的に処理できる生徒がいる一方で，イメージを補助としながら理解を整理する生徒も存在した。このことから，同一の内容であっても，生徒が依拠している理解の枠組みには差があることがうかがえた。

例えば，1 次関数でx軸との交点を求める場面では，問題文から直線のイメージを持つことが困難な生徒が見られた。一方で，傾きと切片が与えられた問題では解答できる生徒も存在したことから，平行な直線の概念理解にズレがある可能性が示唆された。すなわち，視覚的な理解と代数的な操作とが必ずしも統合されていない状況が存在していたと考えられる。

このような実態を踏まえると，動的ツールの活用においても，単に直線が条件を満たしたまま動く様子を提示するだけでは不十分であり，イメージと式の関係に意識を向けさせる設計が求められる。実際に GeoGebra 教材を提示した場面では，直線が条件を満たしたまま動く様子を観察するにとどまり，教材の提示が思考支援として十分に機能しない場合も見られた。このことは，動的ツールの提示だけでは生徒の理解を支援することが難しい場面があることを示唆している。

（４）つまずき分析のまとめ

以上のことから，生徒のつまずきには理解の段階や特徴が存在することが明らかとなった。特に，問題の目的理解，操作手続きの意味理解，理解段階の差が生徒の学習過程に影響を与えている可能性が示唆された。

生徒は，既習知識を形式的に処理できる場合がある一方で，その操作がどのような意味をもつのかを十分に理解できない場合も見られた。問題解決においては，技能の習得だけでなく，操作の目的や数学的関係性を意識することが重要であると考えられる。

また，生徒の理解様相は一様ではなく，イメージを補助としながら理解を整理する生徒

も存在した。これらのことから，生徒のつまずきを丁寧に把握し，理解の特徴に応じて支援を検討することが学習支援の質を高める上で重要であると考えられる。

特に，誤答は単なる誤りとして処理するのではなく，生徒の理解状態を示す重要な手がかりとして捉える視点が必要である。誤答の背景にある思考過程を推測し，どの段階で認識のずれが生じているのかを整理することが，適切な支援につながると考えられる。

５. 生徒の理解特徴と動的ツール活用

本研究では，２年間の実践を通して生徒のつまずきの特徴を分析した。その結果，問題の目的理解，操作手続きの意味理解，理解段階の差が，学習過程に影響を与えている可能性が示唆された。本章では，これらの分析を踏まえ，動的ツールを活用する際の視点について整理する。

（１）動的ツールの位置付け

動的ツールは，図形や数量の変化を視覚的に示すことができるという特性をもつ。しかし，本研究の実践を通して明らかになったのは，動的ツールを提示するだけでは，必ずしも生徒の思考が深まるとは限らないという点である。実際に，GeoGebra 教材を提示した場面では，直線の変化を観察する様子は見られたものの，その観察が必ずしも概念理解の深化に結び付いていない場合も確認された。

このことから，動的ツールは単なる視覚的提示の手段ではなく，生徒の思考を支えるための手段として位置付ける必要があると考えられる。

（２）理解特徴を踏まえた活用の視点

整理した生徒のつまずきの特徴を踏まえると，動的ツールの活用にあたっては，次のような視点が重要であると考えられる。

まず，問題の目的理解を支える設計である。生徒が何を求める問題であるのかを明確に意識できるよう，どの点に着目すべきか，不変な関係は何かを明示する必要がある。動的な変化を示す際にも，単に動きを見せるのではなく，「何が変わるのか・変わらないのか」という目的に焦点を当てることが重要である。例えば，直線の問題では，傾きが一定であることを強調しながら切片だけが変化する様子を示すなど，目的に限定した提示が有効であると考えられる。すべてを同時に示すのではなく，数学的に意味のある変化に焦点化することで，生徒の思考を方向付けることができる可能性がある。

次に，操作の意味理解を支える工夫である。誤答分析から，生徒は，傾きを求めるための式変形や，直線を条件に合わせて動かす操作自体は行うことができても，その操作が「何を明らかにするためのものなのか」という目的を十分に意識できていない場合があることが示唆された。したがって，動的ツールを活用する際には，操作の結果だけでなく，「なぜその操作が必要なのか」を言語化する場面を設定することが求められる。例えば、平行と傾きの関係を言い換えられない生徒に対しては，直線を動的に操作させ，不変な関係に着目させる提示が有効であると考えられる。一方の直線を固定し，他方をドラッグしても傾きの値が変化しない様子を観察させることで，「傾きが等しいこと」が平行の条件であることを視覚的に確認させることができる。このように，「何を確かめているのか」を意識させることが，概念理解の支援につながると考えられる。

最後に，理解段階の差を踏まえた提示方法の検討である。既習知識を形式的に処理できる生徒と，イメージを補助として理解を整理する生徒では，支援の在り方が異なる可能性がある。動的ツールは特にイメージ補助型の生徒に有効である一方で，形式的処理が可能な生徒に対しては，関係性の一般化を促す問いかけが重要となる。

さらに，本実践で見られた誤りは，既習知識の転移の在り方とも関係していると考えら

れる。生徒は過去に成功した手続きを新しい課題にも適用しようとするが，その転移が適切に機能する場合と，過剰適用となる場合がある。文字式において両辺に同じ数を掛ける誤りは，方程式学習での成功経験が無自覚に適用された例と捉えることができる。このような観点からも，動的ツールは単なる視覚的補助ではなく，概念の違いや構造の違いを明確に比較させるための媒介として活用することが重要である。

以上のことから，動的ツールは一律に提示すればよいものではなく，学習内容や生徒のつまずきの性質に応じて，提示方法を検討する必要があると考えられる。不変な関係に着目させたい場面と，条件の成立を体験的に確かめさせたい場面とでは，支援の在り方は異なる。動的ツールの活用は，「使うかどうか」ではなく，「どの場面で，どのような目的で，どのように提示するか」という設計の問題として捉えることが重要である。

（３）今後の課題

本研究は限られた実践事例に基づく分析であり，すべての学習場面に一般化できるものではない。今後は，より多様な学習内容や学年において実践を重ね，動的ツールの活用がどのような場面で有効に機能するのかを検討する必要がある。

また，生徒の理解の様子を，より丁寧に見取るための工夫も必要である。動的ツールの活用と併せて，生徒の発言や記述の分析を通して理解の過程を捉えていくことが求められる。そのためには，生徒の思考過程に応じた支援の在り方を，継続的に検討していくことが必要である。

６. おわりに

本研究では，学校支援プロジェクトの授業支援や昼休み学習会での実践を通して，生徒の理解の様子を捉えながら，動的ツールの活用の在り方について検討してきた。

誤答分析からは，問題の目的理解の曖昧さや，操作の意味理解の不十分さが，つまずきにつながっている様子が見られた。例えば，文字式の処理において，方程式の「分母を払う」という考えと混同し，両方の項に同じ数を掛ける生徒が多く見られた。このことは，計算手続きの形式的な理解にとどまり，その操作の意味が十分に整理されていない可能性を示している。

こうした実態を踏まえると，動的ツールは単に変化を視覚的に示すためのものではなく，生徒が「何に着目し，どのように考えているのか」を捉え，その理解を支えるための手段として活用することが重要であると考えられる。

今後は，生徒の理解の様子をより丁寧に見取るための工夫も必要である。動的ツールの活用と併せて，生徒の発言や記述をもとに理解の過程を捉え，その都度支援を見直していくことが課題である。

本研究を通して，動的ツールは数学学習の「答えを示す道具」ではなく，生徒の思考に寄り添い，理解を支える存在になると考えられる。今後も，生徒の理解の実態に目を向けながら，よりよい活用の在り方を探っていきたい。また，一斉提示と個別操作の在り方を整理し，学習内容や生徒の理解段階に応じて使い分ける視点が必要であると考える。例えば，新しい概念導入時には全体で共有し，理解を深める段階では個別に操作させるなど，段階的な活用も考えられる。ICT の特性を最大限に生かすためには，「使うかどうか」ではなく，「どの場面で，どのように使うか」をより具体的に検討していく必要がある。

７. 引用文献・参考文献

1）文部科学省(2018)． 中学校学習指導要領（平成 29 年告示）解説総則編.