上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 1-12

数の学習におけるディスコース
ー小学校第 1 学年の学習と数の成立ー

布川　和彦
上越教育大学

１．はじめに

算数や中学校数学において新しく数を学習する際には、量が参照されることが多い。こうした学習の仕方は、学習者の量に関わる経験に基づいて数や計算の学習ができるという利点を持つとともに、田村(1978)に代表されるような、数を量の倍変換と捉える立場とも整合性を持つ。さらに、割合を測定値とする捉え方(文部科学省, 2018, p. 218)にも接続しやすく、m や kg といった単位を適切に捉えた場合には、量の測定とも無理なく接続できる(布川, 2024a)。

しかし、3 本のペン、3 人の子ども、3 個のブロックなどは実際に見ることもでき、またそこから 1 個除くといった操作も可能であるのに対し、数の 3 は見ることも触ることもできないように思われる。その意味において、分数の学習で見られた量と数との関係に関わる問題(布川, 2025)は、自然数の学習でも存在すると考えられ、学習内容に内在する問題から生じる指導上の問題(布川, 印刷中)は、自然数の指導においても無関係ではないと考えられる。

一方で、自然数、特に小学校第 1 学年の最初に学習する 10 までの自然数や、第 1 学年でその後に学ぶ自然数については、概ね良好な理解状況にあるように見える。そうであるならば、この段階の数の学習は、量を利用しながら数やその計算を学習する過程の、一つの雛形を与えるものと考えられ、その過程を詳細に吟味にしておくことにも意味はあろう(布川(2021)。また、分数の学習についてディスコースの観点から考察することを試みる(布川, 2025, 印刷中)場合、自然数の学習からより直接的な示唆を得るためには、第 1 学年での数の学習についても同様にディスコースの観点から考察をしておく必要もある。

そこで本稿は、量のディスコースを参照しながら数のディスコースへの参加を促すという観点から、小学校第 1 学年の自然数の学習について検討することを目的とする。

２．検討の前提

(1) 学習に現れるディスコース

布川 (2025)は小学校第 3 学年の分数の学習を考察するに当たり、次のような３つのディスコースを想定している：(i) 量のディスコース QD (Quantities Discourse); (ii) 数値化された量のディスコース QQD (Quantified Quantities Discourse); (iii) 数のディスコース ND (Number Discourse)[1)]。本稿でもこの想定に沿うことにする。ただし、第３学年の分数の学習では自然数の範囲での ND を前提としていたが、小学校第 1 学年の数と計算の学習では、この ND を構成すること自体を扱うことになる。

なお QD は Resnick (1992)が想定した 4 つの数学的思考のうちの原-量(proto-quantities)の数学に、QQD は量の数学に、ND は数の数学にそれぞれ対応すると考えられる。

また Sfard (2007)が挙げる数の規則に対する、次のような２通りの承認のためのメタ規則(meta-rules)も同様に参照する；(i)「[数の規則

は]具体的なモデルにより満足されていなければならない」；(ii)「[数の規則は]公理と呼ばれる他の対象レベルの規則の所定の集まりと整合しなければならない」(p. 584)。

(2) 量についての経験

田村(1978)は次のような量に関わる公理を挙げている；(1) 2 つの量は等しいか、どちらかが大きいかの何れかが成り立つ；(2)ある量が第一の量より大きく第二の量より小さければ第一の量は第二の量より小さい；(3) 2 つの量をたすことができ、結果も 1 つの量となる；(4) 量の加法では交換法則、結合法則が成り立つ；(5) 量にある量をたすと大きくなる；(6) 小さい方の量にある量をたして大きい量と等しくできる；(7) 量は何等分かにすることができる；(8) 小さい方の量を何個かたしあわせて大きい方の量よりも大きくできる。モノの個数の場合、(7)は考えにくい場合もあるが、基本的にこれらの性質は、日常生活の中で経験してきていると期待できる。

QD ではこれらの公理に基づく操作や推論が遂行される。ただし、面積や体積については「大きい／小さい」と表すが、長さについては「長い／短い」と、個数については「多い／少ない」と表すのが普通であろう。

なお　量自体として「指せるものは存在しない」と考え、「『3 メートル』は『3 メートルのひも』のことではない」(宮下, 2008, p. 68)とすると、同様に、「3 個のブロック」は「3 個」という量自体ではない。しかし学習においては、当該の量を指したり、操作したりする必要から、当該の量を“持つ”と考えられる具体物を用いることになる。そこで、本稿でも、量についてはブロックの個数やテープの長さなどで示すことにする。

さらに Sfard (2000)の「記号表現(signifier)が記号内容(signified)に先立つ」(p. 53)、つまり新たな記号表現は対応する記号内容がなくても導入が可能であり、後になって徐々に記号内容が構築され続けるとする考え方を、本稿でも踏襲する。

３．ディスコースの観点からの 小学校第１学年の数と計算の学習の検討

教科書[2)]では動物や果物、花などの数を話題にできそうなイラストが数ページ続いた後、下の図を提示し、記号表現"3"を導入する。

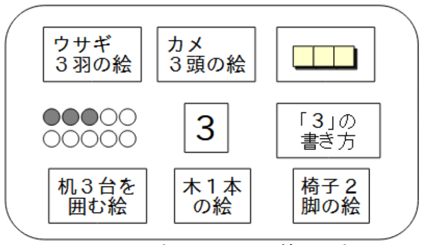

図１：記号表現"3"の導入時の図

ここではウサギ、カメ、ブロック、塗られた丸、机の絵に共通する何かと記号表現"3"を関連付けている。その何かが何かは説明されないので、"3"の記号内容も明確にはされていない。つまり、「記号表現が記号内容に先立つ」(Sfard, 2000, p. 53)ことになる。おそらく、subitizing (Trick & Pylyshyn, 1994)も想定しつつ、その“多さ”を記号内容として児童が把握することを期待していると考えられる。

記号表現である数字"3"や数詞「さん」を児童が日常生活を通して既に知っていると仮定する(樺澤と村山, 2024)と、ここでの学習は、それらと量との関係を明確化している。その中で　"3"や「さん」を「三匹」「三個」と意図的に区別して扱うことは、量とは異なる対象として数を扱うことであり、QQD とは異なる ND の対象として数を導入しようとしていると考えられる。

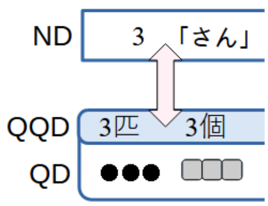

図２：QQD と ND との区別と関連付け

なお上図が提示される前に、イラスト中の特定の動物や花の数だけおはじきを置いたり、○を塗ったりする活動がある。これは、 1 個

に当たる多さによる“測定”(布川, 2021)を意識させる活動とも言える。結果としての測定値に焦点を当てると、数字の記号内容は 1 対 1 対応がつく集合に共通した特性、あるいは 1 対 1 対応に基づく同値類と考えられる。操作としての測定に焦点を当てると、記号内容は倍変換、つまり指さしたりブロックを置いたりする「行為の多さ」(Giusti, 1999, p. 53)ということになる。

同様に"1"、"2"、"4"、"5"が導入された後、モノがいくつか描かれた絵を見て数を表す数字カードを選ぶ活動、数字カードを見てその個数だけブロックを置く活動、モノの絵と同数のブロック、数字、数詞をセットにした資料を作る活動が示されている。

なお上の活動に続けて、1 個から 5 個までのブロックの図とモノの絵とを対応付ける活動も示されている。これはいわゆる半具体物であるブロック(磯野, 2007)を介在させることで、数字の記号内容を明確化する活動とも捉えられるが、また、ブロックをモノの集合の代表的なものとして扱えるようにすることを意図していると考えることもできる。つまり、同値類で言えばブロックをその代表元とすることであり、倍変換で言えばブロックを測定のための標準的な道具とすることである(布川, 2021)。

1 から 5 までの数の学習の最後には、5 本の杭に 1 羽ずつ鳥がとまっていく絵が示される。これは例えば 3 羽を図 1 のように個別に提示するのではなく、1 羽から 5 羽の系列の中に位置付けることになる。3 羽は 2 羽より 1 羽多く、3 羽より 1 羽多くすると 4 羽になるといったことが、示されていると考えることができる。この QQD での系列を ND で考えれば、2→3→4 という数の系列が明確化される。つまり、メタ規則(i)を想起すれば、QQD での量の系列を参照して、ND での数の系列が構成されていると捉えることができる。

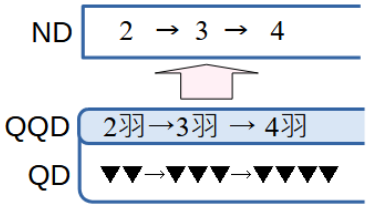

図３：QQD での系列と ND での系列

数詞の列「に・さん・し」が既知の場合、数詞の列と対応する量や数字の系列とが関連付くことにもなろう。

数 1 から 5 が以上のように導入された後、数 6 から 10 までも同様に導入される。さらに、1 羽の鳥が飛び去ったり、2 個の菓子を 1 ずつ食べてなくなったりする絵が示され、数 0 が導入される。1 以上の数がそれぞれ、モノの集合の“多さ”を記号内容とすることを期待されていたことを想起すると、集合もなく“多さ”もない状態を数と関連付けるのは不自然とも言える。2 個→1 個の系列で 0 個を考え、対応して 2→1→0 という数の系列を構成することで、数 0 を導入していることになる。

10 までの数と 0 が導入された後、6 匹と 7 匹等のペアでどちらが「多い」かを判断する活動があり、続けて 2 枚の数字カードでどちらが「大きい」かを判断する活動が示されている。2 つの量の多寡の比較を通して 2 つの数の大小比較が確立されている。

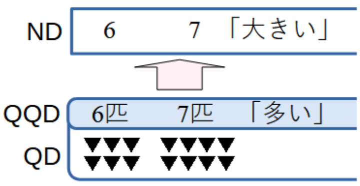

図４：量の比較と数の大小比較

ここではメタ規則(i)を背景に、QD や QQD での量の多さの判断に基づいて「数 6 は数 7 より大きい」といった ND のナラティブが承認されることが期待されている。ND における語彙として「大きい」が導入され、他の数との大小関係に関する性質が数という対象に付与されたことになる。量を参照せずに 2 数の大小比較ができるとすれば、大小比較をするという ND のルーチンも確立されることに

なる。

第 1 単元の最後では、0 から 10 までの数字カードを並べる活動が設定されている。0 個から 10 個までのブロックが順に並んだ図も示されているので、QD や QQD を参照しながら ND での数の系列を総合していることになる。しかし直前で 2 数の大小比較をした結果を適用すると、2 数の大小比較の組み合わせにより 10 までの数全体の系列を ND の内部で構成することも考えられる。

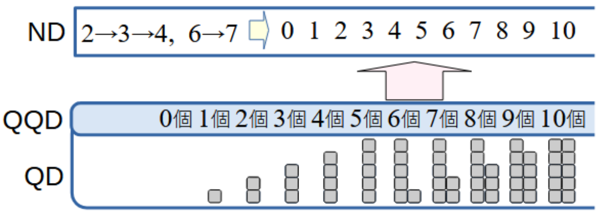

図５：量の系列と数の系列

数の系列という ND の中の対象全体に構造ができることで、QQD の「多さ」を参照せずに、数の大小を ND の中だけで判断することも可能になるとも考えられる。

第 2 単元では、数の分解・合成が扱われる。5 個のボールやブロックを 3 個と 2 個などに分けた絵が示され、それを「5 は 3 と 2」とまとめている。なお、ボールを分けた図では「3 こと 2 こにわかれる」との記述もあるが、ブロックに関しては個数による記述は見られない。ここでもメタ規則(i)を背景に、ボールやブロックに対する QD での操作やその結果を表す QQD のナラティブに基づいて、数に関するナラティブが承認されていると考えられる。

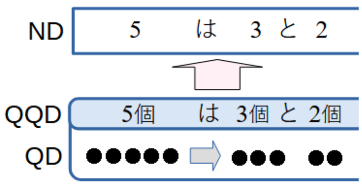

図６：物理的対象への操作と数の分解

これ以前に数 5 には 2 つの数に分解できるという性質や「加法的合成の性質」(Resnick, 1992)が明確には想定されていなかったとすると、今の活動により、2 つの数に分解するという性質が数に付与されたことになる。また数の間には上述の大小の順序関係はあったが、今の活動により、数 5 と数 3 や数 2 との間に、別の関係が生まれ、3 や 2 とそうした関係を持つという性質も数 5 に付与されたことになる(Gravemijer &Bruin-Muurling, 2019)。数 3 もまた 5 や 2 とのある関係を性質として持つことになる。こうした様々な性質を持つようになることは、数 5 や 3 がそれ自身として ND の一つの対象として成立するのを促すと言える(Slavit, 1997)。

さらに 5 を分解する操作に着目すると、数は分解という操作を施すことができる対象として扱われることになる。数 3 と 2 も合成という操作の対象として扱われる。二面性の議論(布川, 2024b)を想起するならば、このように数が対象として操作できるとの感覚は、逆に数を対象として捉えることにつながる可能性がある。

第 3 単元では、上述の数の大きさに基づく数の系列を利用して、前から 3 番目、下から 5 番目などとモノの位置を表す、いわゆる序数が扱われる。

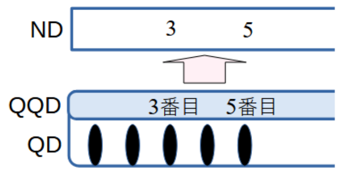

図７：番目の学習

この学習では、多さや大きさから派生した数の系列が、人やモノの位置を表すために用いられている。常に「～番目」という表現であり、数が単独で現れることはない。しかし、後の数直線の学習において、原点からの長さで数を表すことから各目盛りで数を表すことへ、さらに数直線上の各点で数を表すことへと移行すること(布川, 2024b)や、数の系列全体における位置こそが数であるとする立場(Resnik, 1994)を想起するならば、3 番目の個物と数 3 が対応することは、数 3 が多さを形

容する存在から、個物のような名詞的存在へと移行することを、促す可能性も考えられる。

第４単元で加法が学習される。ブロックに対する操作と一緒に、加法の式が示される。金魚を合わせる場面で「なんびきになりますか」と QQD の問いが提示され、またブロックの操作という QD での操作が示唆されるが、結果は「3 と 2 をあわせると 5 になります」や「3+2=5」と ND のナラティブとして記述されている。

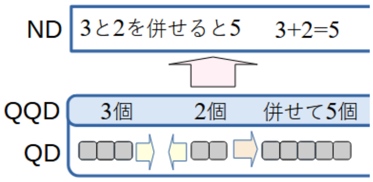

図８：QQD からの加法の規定

数を“たす”とはどのような操作であるかが、ND で定義されるわけではない[3]。最初の 3+2＝5 といった式は、メタ規則(i)を背景に、QD での量の操作とその結果についての QQD での記述に対応するように、ND に導入されたと考えられる。「3+2＝5」という ND のナラティブは QQD に依拠して定式化され、それにより ND における加法が規定され、ND でのルーチンとして導入されることになる。また、数は加法という操作が施される対象にもなるので、これにより数の対象としての捉え方もさらに促進されると考えられる。

なお、既習の「5 は 3 と 2」という分解についてのナラティブから「3 と 2 で 5」と合成のナラティブを派生させ、メタ規則(ii)に沿うことで、それを「3+2＝5」という加法の式で表すこともできるが、この段階ではそうした ND 内部での加法の導入は見られない。

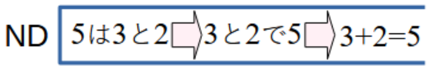

図９：ND 内部での加法の規定

ただし counting-on により加法を行うことは、一方で出発点となる数を対象として捉えることになり、他方で数の系列に関する ND での知識を活用することになる。counting-all がモノの個数をかぞえる QQD での活動であるのに対し、counting-on は上のような意味で ND での推論であると考えることができる。

第５単元で減法についても同様に扱われる。数の分解・合成から「5 は 3 と 2」なので 2 を除くと 3 になるとして、ND の内部で減法を考えることもできるが、加法と同様、そのような減法の導入はされず、メタ規則(i)に沿った形での導入となっている。

ただし加法や減法の学習で現れる計算練習において、ブロック等を用いずに計算することを想定する場合には、加法や減法が ND 内部のルーチンとして確立されていることが前提となる。

第７単元ではまず 20 までの数が扱われ、最後に 20 より大きい数として 33 までの数が現れている。"13"と"15"が動物の匹数、木の実の個数を表す記号表現として導入されるが、その際「10 と 3」「10 と 5」であることがまず確認され、その後「13 びき」「15 こ」という QQD の語彙が導入される。つまり 13 や 15 は最初から、既習の数を合成することにより ND の中で構成され、それを 10 匹や 10 個を越える多さを表すために利用するという立場であるように見える。

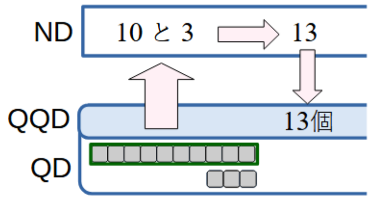

図 10：10 と 3 から 13

その後、11 から 20 までの数の「10 といくつ」という形の合成・分解が扱われるが、ブロックは 13 の場合だけ示され、それ以外は数だけで考える形になっている。２位数としての構造を意識化することが目指されると同時に、新たな数を既習の数と関係づけることで、新たな数も ND の対象として捉えることにつながると考えられる。

続けて 20 までの数の数直線が提示される。

数直線は ND の視覚的媒介物と考えられるが、ここでは、区間に沿って動物が跳ぶという設定になっており、跳んだ跡が円弧で示される。

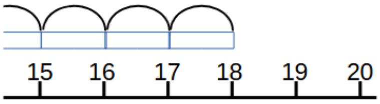

図 11：数直線の右端部分

したがって、図 11 の 18 を跳んだ回数や円弧の個数として QQD で解釈もできる。他方で「どこまですすみましたか」と問うて、跳んだ結果の最終位置に学習者の注意を向けており、数直線の位置が数を表すとの ND での解釈を促してもいる。実際、数直線を見て気づくこととして「右にある数の方が大きい」ことを示唆しており、大小比較の問いも数直線での位置関係に基づいて判断することが期待されているように見える。つまり ND での視覚的媒介物の scanning の仕方(Sfard, 2008, p. 134)を扱っている。さらに数字カードによる数の系列の穴埋めも行われ、数の系列の中での個々の数の位置に重点が移っている。ここでの学習では、数が多さを表すものから、特定の位置を占める個体としての対象へと、捉え方が変わっている。

数が系列の中の位置として捉えられることで、「12 より 3 大きい数」や「18 より 4 小さい数」等を考える ND のルーチンや、それについてのナラティブを扱うこともできるようになっている。こうしたナラティブは数 15 や 14 に新たな性質を与え、これらの数を対象として捉えることを促すと考えられる。

簡単な加法と減法も扱われるので、11 から 20 までの数も加法や減法という数の操作を施す対象として位置付けられる。その際、まず上述の数の合成・分解により和や差が求まる場合が扱われる。つまり、ここでの加法と減法は、メタ規則(ii)に沿って、ND のナラティブに基づいて承認されることが期待されていることになる。その後、12+3 や 15–2 で答えが求まる文章題も扱われるが、その際も、12 を 10 と 2 に分解してそこに 3 をたすとする考えが示される。12+3＝(10+2)+3＝10+(2+3)と結合法則により既習の場合に帰着させ、ND での承認が想定されている。ただし結合法則自身は QD の操作や QQD でのナラティブに基づき前提されることになろう。

単元の最後で 20 より大きい数が扱われる際には、20 と 3 で 23 といった数の構成に加えて、「10 が 3 こ」や「10 が 3 ことばらが 2 こ」といった表現も見られる。10 はブロック 10 個などのまとまりを指すものの、「10 このまとまりが 3 こ」ではなく「10 が 3 こ」と表現されることで、数 10 がブロックなどのモノと同じように、個数をかぞえることができる対象として扱われている。10 の個数を考えられるようになることで、ND の中で 20 以上の数を構成することが可能になっている。

第 10 単元では 7+3+4 や 10–3–2 といった 3 項の計算が扱われる。加法や減法は本来 2 項演算であるので、3 項の計算は結合法則を用いて規定する必要があるが、ここではメタ規則(i)を背景に、QD において量の増減を続けて行う操作との対応で、3 項の計算も当然できるものとして想定されている。

第 11 単元では、繰り上がりのあるたし算が扱われる。その際、9 個のブロックは 10 個入りのケースに入れた状態で示され、10 個は 9 個と 1 個という QQD のナラティブが示唆される。ただし観察した結果は「4 を 1 と 3 にわける」「9 に 1 をたす」などと ND での記述としてまとめられている。

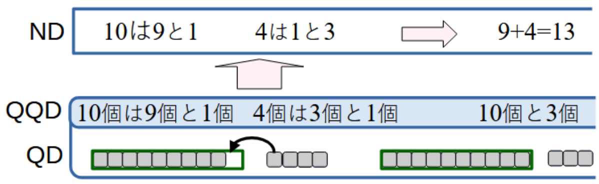

図 12：繰り上がりのあるたし算

さらに操作の結果はいわゆるサクランボ図にまとめられる。これは数字という ND の記号表現だけで構成されるので、数の分解・合成に基づく計算方法を表す、算数独自の ND

の視覚的媒介物と考えることができる。

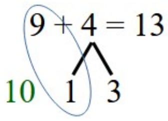

図 13：サクランボ図

つまり、繰り上がりのあるたし算の計算方法は、QD での操作や QQD での推論により補助されつつも、数の分解・合成という既習の ND のナラティブに基づいて承認され、ND でのルーチンとして確立することが期待されていると見ることができる。

逆に言えば、サクランボ図の各数字は、ブロックとケースとは異なり、それ自体では合成・分解の方法を示唆しないので、その数字が表す数の性質に関する ND のナラティブに基づいて操作を進めるしかないことになる。

その後、たし算の書かれたカードを規則的に配列したり、そこからきまりを見つける活動が扱われるが、数式どうしの関係を考察するという点で、演算の数学(Resnick, 1992)に関わるものであり、ND において演算自体を対象とする活動とも考えられる。

第 12 単元では繰り下がりのあるひき算が学習されるが、第 11 単元と同様の進め方となっている。

第 15 単元では 100 までの数が学習される。導入ではブロックの個数をかぞえるという QQD での活動が行われる。その際に 10 個のまとまりが強調されるが、その結果は単純に個数に関する QQD でのナラティブではなく、「10 が 3 こ」という ND でのナラティブと「ばらが 4 こ」という QQD でのナラティブが混在した表現となっている。「1 が 4 こ」という表現は最初は用いられない。

さらに位を表す枠という ND の視覚的媒介物が導入され、10 個のまとまりが 3 つある QD の図と「十の位」の"3"を対応させ、ばらのブロック 4 個と「一の位」の"4"を対応させている。ここで「十の位」「一の位」という用語が ND の語彙に追加され、「十の位」が 10 の個数を表すとされる。「一の位」はこの時点では「ばら」の個数を表すとしているが少し後では 1 の個数を表すとして扱われる。これにより数 1 も個数をかぞえる操作の対象となり、3 や 8 といった数は数 1 の集まりとしても捉えられることになる。

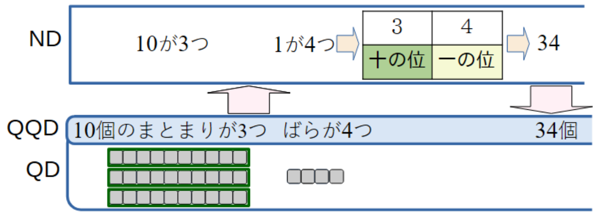

図 14：２位数の構成

第 17 単元では、少し複雑な場面における演算決定が扱われる。例えば「10 人並んでいる時、左から 4 番目の人の右側には何人いるか」「リンゴが 6 個あり、みかんはリンゴより 4 個多い時、ミカンは何個か」といった場面が文により提示される。これについて図 15 のような図をかき、図を見ながら式と答えを書くことが求められている。

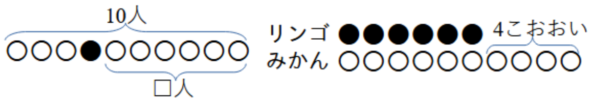

図 15：場面を表す図

ここでは、QD の操作と図を参照した QQD での推論を行うことで、既習の ND の演算を適用することが目指されている。したがって ND の対象レベルの新たなナラティブの生成というよりも、本単元で現れるような複雑な場面でも既習の演算が利用可能であると学習することで、ND の知識の適用の可能性を理解することが目指されていると考えられる。

４．ND の対象としての数の成立

(1) 数の成立

第 1 単元では図 1 のようにモノの集合の絵という QD の視覚的媒介物を、「三個」などの QQD の語彙を経由しながら、助数詞を伴わない ND の語彙である"3"や「さん」が導入

される。いくつかの集合に共通の何かを数 3 が反映していることは伺えるが、この時点では、数 3 に当たる"3"の記号内容は明確ではなく、前述の通り「記号表現が記号内容に先立つ」(Sfard, 2000, p. 53)状態と考えられる。ND の対象があることが宣言されたに過ぎない。

しかし図 3 のように、モノを 1 つずつ増やしていきながら多さの系列を作り、メタ規則(i)を背景に、それと並行して数の系列を考えることで、数 2 の次、数 4 の前という性質が数 3 に付与される。さらに図 4 のように、モノの集合の多さと並行して数の大きさを考えることで、数 1 や数 2 よりも大きいという性質や、数 4 や数 5 よりは小さいという性質が数 3 に付与される。ND の対象である数の間に大小関係という関係が導入され、数は大小比較の対象となる。10 までの数の集合ではあるが、全順序集合という構造が導入されたとも言えよう。図 5 のような提示は、この構造を明確化したものとも考えられる。

図 6 のように数の合成・分解が学習されると、数は分解と合成という ND の操作の対象にもなる。またその結果として、数 3 に 1 と 2、あるいは 2 と 1 に分解できるという性質や、数 2 と合成されると数 5 になるという性質が付与される。これはまた数 3 と 2、5 の間のある関係が、ND の対象レベルのナラティブとして承認されたということでもある。ただし ND の既に承認されたナラティブだけではこの関係を正当化することはできないので、メタ規則(i)に則り、QQD のナラティブに基づいて、それと並行した関係が成り立つと想定しているのだと考えられる。

図 8 の加法の成立は数が加法という操作の対象となることを意味し、数が ND の対象として確立することも促進すると期待できる。また数の間の関係に関わる ND のナラティブが、生成されているとも言える。

図 10 のように 10 より大きい数を学習する際には、10 と 3 の合成であることが数 13 の基本的な意味となっており、ND 内部で新たな数が構成されている。数の大小比較も、数直線や数の系列での位置関係から判断が求められており、ND の中での推論が想定されているように見える。つまり、ある程度の ND の確立がこの時点では求められている。また、学習に現れる数は合成・分解の対象となったり、特に数 10 と 1 は個数をかぞえる操作の対象となったりすることから、逆に ND の対象としての確立も進むことが考えられる。

なお ND の中での新たな数の構成では、ある数の個数を数で表すという、再帰的な操作が含まれる点には注意する必要があろう。

100 までの数の学習でも、QD の視覚的媒介物であるブロックの個数をかぞえるという QQD の活動を行いながらも、結果は数 10 や 1 の個数という ND のナラティブとして記述される。さらに数 10 と 1 の個数をそれぞれ記入する ND の視覚的媒介物が導入され、それぞれの位の数字を並べることで、新たな数が導入されている(図 14)。数 10 と 1 の個数に基づいて数が構成されており、ここでも ND の内部で新たな対象が構成されたことになる。

数と計算の学習においては、10 を 1 つの対象と捉えることと、10 を 10 個の 1 からなる対象と捉えることとの間を柔軟に行き来できることが必要となる(Cobb & Wheatley, 1988)。これは上で見てきたように、一方では大きい数という新たな ND の対象を既存の数から構成するために必要となる数の捉え方であると同時に、それにより数 10 や数 1 をかぞえる対象とし、ND の対象としてより確かなものにするための機会にもなっていると考えられる。

以上のように、0 から 10 までの数は、ある多さに関わる数として導入されるものの、それぞれがどのような数であるかが明示的に説明されることはない。しかし学習の中で大小関係や合成・分解、加法・減法を通して他の数と関係付けられることで、それぞれの数はそうした関係に相当する性質を付与されるこ

ととなり、様々な性質を有する対象として徐々に確立していくこと(Slavit, 1997)が目指されていると考えられる。また後で 11 以上の数を構成する際に合成の操作の対象となったり、個数をかぞえる対象となったりすることは、10 までの数が ND の対象として確立されることをさらに促すものと考えられる。

これに対して 11 以上の数は、既に確立された 10 までの数を合成することで構成されるので、どのような数であるのかは ND 内において明確である。このように構成された上で、10 個を越える多さを表現するために QQD の語彙の中でこれらの数は用いられる。

ただいずれにしろ、「数の関係網 (network of number relationships)」を構成することが数を対象として捉えることの本質であるとの指摘(Gravemeijer & Bruin-Muurling, 2019)を踏まえると、数どうしの関係が豊かになることが、ND の対象としての数の学習にとって本質的に重要な活動であると言えよう。

(2) 演算の成立

数の合成・分解(図 6)は演算自体ではないが、数を他の 2 数と関連づけるという意味では、演算と同様の関係を扱っている。メタ規則(ii)に従うならば、このナラティブを参照して ND 内部で加法や減法を規定することもできる(図 9)。またくり上がりやくり下がりのルーチンでは数の分解・合成のナラティブが用いられ、ND 内部でのルーチンの確立を可能にしていると言えよう(図 13)。

加法や減法の最初の学習では、図 8 のように、QD の視覚的媒介物の操作、QQD の問いが提示され、メタ規則(i)に従って ND の操作である加法と減法が導入される。なお加法に関わり QD の場面として合併と増加が扱われるので、両者に共通する数量関係が加法を規定していると思われるが、それが何かは明確にはされない。また単元の途中の計算問題では、図やブロックを用いて和を求めることが想定されているかどうかにより、ND のルーチンとしての加法の遂行か、ルーチンの確立を目指す活動かが異なってくる。後者では、3+2⇒ 3 個と 2 個の合併⇒5 個⇒5 と QQD や QD を経由した推論を 3+2⇒5 とショートカットできるようになることで、ND のルーチンや数に対する操作としての加法が確立されることに、重点があると考えられる。つまり QD や QQD と並行した数に対する操作として ND で規定された演算が、ND 内部のルーチンとなること自体が目指されることになる。

これに対し第 7 単元で 10 より大きい数を学習する際に現れる加法と減法については、10 といくつといった数の分解・合成に基づいて考えられており、ND 内部で計算の仕方が考案されたり、正当化されたりすることが期待されている。ND の承認されたナラティブを用いて ND 内部で新たなルーチンの確立が目指されている。

くり上がりのあるたし算では QD の操作の支援を受けるが、その結果は ND のナラティブとして記述され(図 12)、またサクランボ図(図 13)に見られるように、ND の承認されたナラティブである数の合成・分解を参照することも同時に期待されている。つまり QD や QQD の助けを借りながらも、ND のナラティブに基づいて、くり上がりを伴う加法のルーチンを確立することが目指されていると考えられる。またこの場合も、現れる数は分解・合成の操作の対象となることで、ND の対象としての確立も進むことが考えられる。

第 10 単元の 3 項の演算は、個々の計算の部分では ND のルーチンが利用されるであろうが、3 項の演算を考えることができること自体は QD の操作に依拠しており、2 つの考え方がそれぞれの役割を果たしている。

第 17 単元(図 15)は図の上で QD や QQD での推論を行うことで、既習の ND の演算の適用可能性を広げる学習であり、演算に関して ND での対象レベルのナラティブは新たに生成はされない。したがって、ND 内の数に対

する操作としての演算は、くり上がりのある加法とくり下がりのある減法の学習の時点で、完了されるものと考えられる。

くり上がりのない加法やくり下がりのない減法はブロックの個数をかぞえるといった QQD の操作やその結果を記述するという形で演算が規定されるが、10 をこえる数の計算やくり上がり、くり下がりを伴う計算への拡張では、その前までに確立が期待される ND のルーチンや数の分解・合成という ND のナラティブを組み合わせることで、計算の仕方の構成が目指されていることがわかる。

(3) 基数と序数

数は 4(1)で見たように、モノの集合のある特性－おそらく“多さ”－を表現するために導入された後、数どうしの関係に関わる性質を付与されたり、分解・合成や演算の対象とされたりすることを通して、ND の対象として確立されていくと考えられる。ただ、その途中で、図 7 に見られるような、モノの位置を表す数の利用が扱われる。

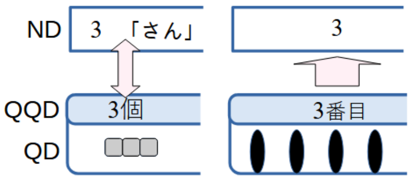

図 16：基数としての 3 と序数としての 3

数が ND の対象として確立された後で、それを位置を表すためにも援用する、つまり基数を数の基本的な性格とし、序数をそこから派生した用法と考えることもできる [4]。しかし図 11 のような数直線を学習する際には、「どこまで」進んだかを問うたり、「みぎにあるかずのほうが」とキャラクターに発言させたりしており、数は数直線の位置により表されるようにも見える。その後、数直線が数の学習において重要な役割を果たすことを想起すると、位置としての数も、数の重要な性格だと考えられる。

これら二つの性格は、区別されるとともに、どちらが数の性格として優勢であるかは自明ではない(Resnik, 1994)。実際、序数の方は後者関数を基本とするペアノ流の数の構成と類似しているが、基数の方はそれまでの数を要素として包摂しながら数を構成するノイマンの構成方法に類似しているように見える。

数が ND の対象として確立していない時点で基数と序数という異なる性格が扱われた場合、それぞれの数の基本的な性格が曖昧になることも考えられる(布川(印刷中)参照)。また数の分解・合成や演算の場合も、4(2)で見たようにモノの集合に対する操作を参照しながら、基数の性格を基にして構成されていくが、そうした演算と序数としての数との関連は曖昧なままになる可能性もある。

例えば、基数を基本として「5 は 2 と 3」という分解や「2＋3＝5」という加法についての ND のナラティブを構成し、承認してきている。第 17 単元の「左から 4 番目の人の右側には何人いるか」の場合には、図をかいて考えることで、4 番目という序数的用法を 4 人という基数的用法に変換して考えることはできる。しかし、数直線の学習で現れた「12 より 3 大きい数」を求めることを 12＋3＝15 という加法と関連付けるとすれば、数直線の 12 の位置から 3 番目の目盛りを見いだす操作が、加法のイメージにつながる可能性もある。つまり数直線上での「2＋3＝5」の一つの説明として、2 の位置から 3 番目の位置にあるのは 5 だとするものである [5]。

自然数の加法について、こうした位置の移動に基づく説明も利用するのであれば、序数と加法の関係も無視できないものとなる。またいずれにしろ、数直線を用いる際には、数を表すのが区間の長さなのか直線上の位置なのかの問題が生じる。自然数の範囲では区間の長さは区間の個数であり、位置は順序に当たるとすれば、初期の学習で ND の対象である数について、基数としての性格と序数としての性格をどう扱うのかは、その後の数直線という ND の視覚的媒介物の用い方にも関わ

ることであり、検討される必要のある問題と考えられる。

6．おわりに

小学校第１学年で数を学習し始める時点で、モノの個数をかぞえることのできる児童も多いであろう。他方でそれぞれの数自体が考察の対象となることは、少ないかもしれない。その中で、第３節で見てきたように、数字や数詞という記号表現が導入され、そしてその記号内容が徐々に豊かになる、という形で、ND の対象としての数が成立していっていると考えられる。数字の記号内容は直接説明されるわけではないが、数どうしの関係や関連付けを通して各数に性質が付与されたり、分解・合成や演算などの操作の対象とされたりする中で、量とは独立した ND の対象として確立されることが目指されていた。ただし初期の段階では QD や QQD を参照し、メタ規則(i)を背景に持ちながらの確立であった。

しかし 10 を越える数では、最初から既に確立された数、つまり ND の対象を組み合わせることにより、ND の内部で新たな数が構成されていた。演算も既に確立された演算という ND のルーチンや数の分解・合成という ND のナラティブに基づいて構成されていた。この時点では ND が、メタ規則(ii)に従い、自律的にも成長することが期待されていると考えることができる。逆に言えば、この学習の際には、児童にとっても ND がある程度確立されていることが求められることになる。

以上のような学習が行われるためには、QD や QQD と ND を包摂した数の学習のためのディスコースを想定し、その中で ND の構成の仕方に関するメタ規則を教師が意識をする必要がある(布川, 印刷中)。メタ規則(i)を背景に持つ学習では、QD の操作や QQD のナラティブから ND のナラティブを意識的に構成し、それを ND の対象の性質として明確化することで、ND の対象の確立を図ることになる。他方でメタ規則(ii)を背景にする学習では、必要とされる程度の ND が児童に確立されているかに注意するとともに、ND 内部で新たな対象を確立するという、少し進んだ思考を行っているとの自覚も求められよう。

こうした学習を効果的にするためには、背景にあるメタ規則を学習者と共有することも考えられる。小学校低学年の児童とこうしたメタ規則を共有する可能性についても、今後考えていく必要がある。

註および引用・参考文献

1) 本来であれば Discourse on Quantities から DQ などとすべきであろうが、本稿では各ディスコースを明確にするため Q や QQ、N を前に出し、QD、QQD、ND と呼んでおく。
2) 本稿では令和 6 年度版の学校図書の教科書を参照している。
3) 量に依らずに加法を定義することは、例えば仲田(2021), p. 50 を参照。ちなみに減法は加法の逆として定義される(p. 66) 。
4) 自然数の数学的な構成の場合、例えばまず序数として自然数を構成し、その後、モノの集合の多さを序数の集合を用いて「測る」とする考え方もある(仲田(2021), p. 37 参照)。「いち、に、さん、…」という数詞の系列を序数としての自然数の集合と考えれば、第 1 学年の導入で個数等をかぞえながら学習することは、むしろこの考え方に近いとも考えられる。
5) もう一つの説明としては図 11 の区間の個数に着目し、数は数直線の位置ではなく区間の個数で表されるとする説明である。

Cobb, P. & Wheatley, G. (1988). Children's initial understandings of ten. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *10* (3), 1-28.

Giusti, E. (1999). 数はどこから来たのか：数学の対象の本性に関する仮説 (斎藤憲訳). 共立出版. (原著は 1999 年)

Gravemeijer, K., & Bruin-Muurling, G. (2019).

Fostering process-object transitions and a deeper understanding in the domain of number. *Quadrante*, *28* (2), 6-31.

磯野和美 (2007). 半具体物の操作から数の操作への移行におけるプライベートスピーチに関する研究：小学校第 1 学年「くりあがりのある足し算」を事例として. 日本数学教育学会第 40 回数学教育論文発表会論文集, 397–402.

樺澤茉宝, 村山敏夫 (2024). STEAM 教育プログラム開発に向けた幼児期における数唱・計数能力の経年推移の評価. 日本 STEM 教育学会第 7 回年次大会予稿集, 5-8. https://www.j-stem.jp/wp/wp-content/uploads/2024/09/A-2.pdf (2026 年 2 月 12 日アクセス)

宮下英明 (2008).「わり算」「割合」の概念整理. 日本数学教育学会誌, 90 (4), 67-70. https://doi.org/10.32296/jjsme.90.4_67

文部科学省 (2018). 小学校学習指導要領解説(平成 29 年告示)算数編. 日本文教出版.

仲田研登 (2021). 算数科のための基礎代数：代数構造と順序構造の入門. 岡山大学出版会.

布川和彦 (2021). 量から数への移行の観点からの自然数と分数の学習の比較. 上越教育大学研究紀要, *40* (2), 361-372. http://hdl.handle.net/10513/00008350 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2024a). 算数科における数と計算および数量関係の学習内容の整理. 上越教育大学教職大学院研究紀要, *11*, 195-205. http://hdl.handle.net/10513/0002000148 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2024b). 小学校算数科における二面性の問題. 上越教育大学研究紀要, 44, 125-135. http://hdl.handle.net/10513/0002000277 (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (2025). 分数の学習におけるディスコース：テンプレート駆動を視点とした小学校第 3 学年の学習の考察. 上越数学教育研究, *40*, 1-14. https://www.juen.ac.jp/math/journal2/files/vol40/25Nunokawa.pdf (2026 年 2 月 12 日アクセス)

布川和彦 (印刷中). 分数の学習におけるディスコース：授業における量と数の錯綜. 上越教育大学研究紀要, *46*.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to Operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. In G. Leinhardt, R. T. Putnam, & R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373–429). Lawrence Erlbaum Associates.

Resnik, M.D. (1994). Numbers as Structures and as Positions in Structures. In D. Jamieson (Eds.), *Language, Mind, and Art* (pp. 55-67). Springer.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being: Or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. In P. Cobb, E. Yackel, & K. McClain (Eds.), *Symbolising and communicating in mathematics classrooms: Perspectives on discourse, tools and instructional design* (pp. 37-98). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *Journal of the Learning Sciences*, *16* (4), 567–615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. New York, NY: Cambridge University Press.

Slavitt, D. (1997). An alternative route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

田村二郎 (1978). 量と数の理論. 日本評論社.

Trick, L. M. & Pylyshyn, Z. W. (1994). Why are small and large numbers enumerated differently? A limited-capacity preattentive stage in vision. *Psychological Review*, *101* (1), 80-102. https://doi.org/10.1037/0033-295X.101.1.80