上越数学教育研究，第 41 号，上越教育大学数学教室，2026 年，pp. 13-26

人間形成と数学教育

―高校数学における統計的考え方の展開―

高　橋　　等
上越教育大学

以下は，2025 年 8 月 19 日にホテルニューオ―タニ長岡で開催された令和 7 年度第 48 回新潟県私学教育研修会における講演原稿となる。主催者から，令和 7 年度から共通テスト数学 IA において統計が必答問題となるに当たって，高校教員の参考となる内容としてほしいとの要望があり，当面取り掛かっていた科研費研究の理論部分を前半に据え，次に確率論と統計学との係わりを歴史的に論じ，教材研究の参考となるように論を構成した。その原稿を上越数学教育研究第 41 号に投稿するに当たって，後に得た知見を加えることも考慮したものの，講演内容をできる限りそのままに公表した方がよいと思案し，多少の誤字の修正の他は手を加えていない。作成した原稿では本文を丁寧体で記述しており，常体に変更もしない。

はじめに

只今ご紹介に預かりました髙橋等と申します。出身は秋田県で，上越教育大学にまいりましたのが 1997 年の 2 月ですから，かれこれ 28 年余りを新潟県で過ごしてきたことになります。本日の演題を，人間形成と数学教育―高校数学における統計的考え方の展開―と致しましたのは，以前から教育実践の目標の第一義が人間形成であることを，学術的側面から学校現場の先生方と一緒に考えたいと思っていたところに，今回の講演依頼がまいりまして，それも大学入学共通テストで必答問題となりました統計の話題を取り上げてほしいということでしたので，折角ですから人間形成という視点から統計教材を考えてみることにしたわけです。

教育の目的及び理念

平成 30 年に告示された高等学校学習指導要領の 2 ページ目に教育基本法が掲載されています。目次の次のページへの記載ですから，この法律は我が国の学校教育の教育課程における第一の方針ということになります。小学校も中学校も学習指導要領の冒頭には，この法律が掲載されておりまして，学習指導要領に関心の強い先生方には周知のことと思います。

教育基本法の前文，及び，第一章を，抜粋しますと次になります。

教育基本法

我々日本国民は，たゆまぬ努力によって築いてきた民主的で文化的な国家を更に発展させるとともに，世界の平和と人類の福祉の向上に貢献することを願うものである。

我々は，この理想を実現するため，個人の尊厳を重んじ，真理と正義を希求し，公共の精神を尊び，豊かな人間性と創造性を備えた人間の育成を期するとともに，伝統を継承し，新しい文化の創造を目指す教育を推進する。

ここに，我々は，日本国憲法の精神にのっとり，我が国の未来を切り拓く教育の基本を確立し，その振興を図るため，この法律を制定する。

第一章　教育の目的及び理念

（教育の目的）
第一条　教育は、人格の完成を目指し、平和で民主的な国家及び社会の形成者として必要な資質を備えた心身ともに健康な国民の育成を期して行われなければならない。
（教育の目標）
第二条　教育は，その目的を実現するため，学問の自由を尊重しつつ，次に掲げる目標を達成するよう行われるものとする。
一　幅広い知識と教養を身に付け，真理を求める態度を養い，豊かな情操と道徳心を培うとともに，健やかな身体を養うこと。
二　個人の価値を尊重して，その能力を伸ばし，創造性を培い，自主及び自律の精神を養うとともに，職業及び生活との関連を重視し，勤労を重んずる態度を養うこと。
三　正義と責任，男女の平等，自他の敬愛と協力を重んずるとともに，公共の精神に基づき，主体的に社会の形成に参画し，その発展に寄与する態度を養うこと。
四　生命を尊び，自然を大切にし，環境の保全に寄与する態度を養うこと。
五　伝統と文化を尊重し，それらをはぐくんできた我が国と郷土を愛するとともに，他国を尊重し，国際社会の平和と発展に寄与する態度を養うこと。（文部科学省，2018，p.2）

この第一条と第二条を読みますと，教科の内容に対応する知識や教養と共に，真理を求める態度や豊かな情操と道徳心といった情意面と，健やかな身体を養うという体育的な面が併記されております。その他の教育の目標の条文と合わせて，教育の目的で掲げる人格の完成とは教科の内容のみでなく，情意面や健康，更には様々な価値観が得られてこそ成ると言ってよいでしょう。勿論，この解釈はやや理想的なところがあって，実際には教科の内容を得ることは，子どもたちにとって至極大切なことです。ただ，例えば数学の授業では知識技能や考え方を得ることのみが目標となるのではなく，数学を好き，面白いと思う情意や，場合によっては道徳性を培うことが並列的に目標となるということなのです。学習指導要領の目標における三つの柱，「知識及び技能」，「思考力，判断力，表現力等」，「学びに向かう力，人間性等」は，よくこの第一条と第二条を反映しています。昨今では，「学びに向かう力，人間性等」は益々重要視されています。

ササラ型とタコツボ型

ここで何故に，最初に教育の目的及び理念を話題にしたかと言いますと理由があります。その理由を話す前に我が国の社会や思想について少し考えてみます。我が国の学問，特に教育学を含めた文系の学問に係ることですけれども，近隣の専門分野でもどうも意思の疎通がうまくいかない，コミュニケーションがうまくとれないということがよくあります。最近では少々改善されているのかも知れませんが，こうした状況は明治以降ずっと続いているようです。その状況の根底にあるものを日本の思想や文化を考察することによって明らかにした方に丸山真男（1914 年〈大正 3 年〉－ 1996 年〈平成 8 年〉）がいます。丸山先生は 1900 年代中頃から後半にかけて活躍した著名な政治学者ですので，ご存じの皆さんも多いでしょう。ササラ型とタコツボ型とは主にヨーロッパの文化や思想と日本のそれとを対比するために丸山先生が用いた語ですけれども，ヨーロッパには社会や思想において共通の土台というか理念があって，その土台を基に様々な専門が分化しており，丁度，竹の先の方だけを幾つかに割ったササラ型の状態になっています。他方で日本は明治期に細分化された専門分野そのものを，その基になる土台や理念なしに輸入したものですから，各々の専門分野がタコツボの中に入るタコツボ型になっており，タコツボ間で意思の疎通がうまくいかないという状態になっているようなのです。丸山先生はその主な理由を明治期の学問輸入の仕方にあると見ているよ

うです。私が考えますに，どうも日本人の身の守り方, そうした社会の創り方も理由にあるでしょう。これは広くは地政学にも係わることですので，ここでは深く追究しません。何れにしても, このササラ型に対するタコツボ型というのは我が国の様々な状態に当てはまることになります。

教育実践におけるタコツボ型の打破

我が国が明治期に細分化された専門分野を輸入したと申しましたけれども, 学校の教科や科目は, そうした専門分野と大まかには対応しています。学術的な研究分野の衰勢はあるものの, 大学の教科・科目と, 厳密にではなくとも，高校の教科・科目や中学校の教科・科目，小学校の教科・科目とを結び付けることは容易に出来ます。小学校ではやや例外的であるものの，高校や中学校では教科や科目毎に担当教員も違いますし, 最近の教科横断的な扱いは別にして各々の教科・科目を積極的に繋げることはしていないことを考慮すれば, どうも高校や中学校の教科・科目は一種のタコツボを形成しているようです。各学校の教科・科目の共通となる部分は, 学校の教育目標や方針など様々にはあるのですけれども, 各教科や科目を派生させた共通の文化的土台, 即ち理念や哲学を見出すことは難しいのかも知れません。

ヨーロッパでは古代ギリシャ時代から進展してきた哲学, 哲学から派生した今日の専門分化していく知識の元となった教養を出発点として，共通の文化的土台を形成しています。勿論, ヨーロッパの各国や地域では特徴的な文化や哲学はありますけれども, それぞれが無関係ではなく関連しています。ヨーロッパではそうした文化的土台を基に学校での教科や科目に対応した専門分野も発展してきています。フランスではサロンがあって, 違う専門領域の研究者や教育者が互いに専門的なことを話したとしてもコミュニケーションができています。我が国でもそうしたコミュニケーションは多少はできますけれども, そのコミュニケーションをする場としてのサロン的な仕組みは発展していない，作ろうとしないのです。

このことで何も我が国の教育は駄目でヨーロッパのものはよいということを話そうというのではありません。寧ろ，教育実践という点では世界のどの国よりも我が国の教育はうまくいっているのです。ただし，そのうまくいっているというのは我が国が地政学的に海に囲まれていて, ヨーロッパに比べて同質的な集団を形成していることから，あ，うんの呼吸が通ずる, 右に倣えが当たり前ということと無関係ではないかも知れません。ただし，うまくいっているというのは相対的な見方で, 今日的な多様性の時代には，あ，うんの呼吸が通じない場合も多く現れていることでしょう。この多様性の時代, 全日制の高校を避ける子どもの人数も増加してきています。多様性を生き抜くために, 我が国の文化圏での各教科や科目を派生させ支える共通の文化的土台を創ること, 更にその土台を意識することは, 必要なこととなります。学校教育におけるタコツボ型の打破と, ササラ型文化の創造ということが必要です。

学校教育におけるササラ型文化の形成と教育基本法

教科や科目の教育を巡るタコツボ型の打破とササラ型文化の形成のために，あ，うんの呼吸とは何か, どういう内容と仕組みをもっているかを分析し, 明らかにすることは一つの方法です。ところで，この，あ，うんの呼吸がいつ頃形成されたかは, 我が国の文化をよほど掘り下げていかないとわからないでしょう。何れにしても島国であることと何らかの関連はあるでしょう。申しました通りに，あ，うんの呼吸が身を守る術であったり, 文化的同質性に依存するだけのものであるならば，それを分析し，明らかにしたところで, 教育界を今より発展させることは難しいかも知れません。現状維持ということになってしまいそうです。必要なのは,

あ，うんの呼吸であったとしても，それが学校の各教科や科目と連なる文化的土台であって，しかも我々がその土台を意識することなのです。

少し，立ち返って考えてみましょう。何故に教育するかということです。子ども達に各教科や科目の内容を理解させることのみが教育というのであれば，教育実践の成果は教科や科目の内容が分かったか分からなかったかという点でしか評価することができません。それだけでは各教科や科目と繋がり，下支えする教育文化の必要性は明瞭になりません。先に述べました教育基本法の前文，及び第一章と第二章の内容を振り返りますと，教育の目的は人間形成です。各々の教科や科目の教育は，教科や科目の内容を扱うことのみならず，第一には人間形成でなければならないということです。この人間形成というのが，実は，各教科や科目の教育の土台となる共通文化となります。無理矢理に，各教科や科目と連なる文化的土台を創るとすれば，そこに教育基本法を入れ込むことはできましょう。もっとも，この法律を形だけ入れ込んでも，殆ど無意味です。学校に携わる方々が共通理解として人間形成を行っていることを意識することが必要です。ここで，各教科や科目であっても人間形成を行っていることなど当然ではないか，との意見がございましょう。しかしながら，人間形成を行っていると自ら信じ込んでも，教科や科目の内容を理解させることによってのみそれを意識しているのであれば十分ではありません。殊更に，各教科や科目における「学びに向かう力，人間性等」，更には各教科や科目で共通な「学びに向かう力，人間性等」を育てることに力点を置くことが必要となります。子ども達に「学びに向かう力，人間性等」があるからこそ，専門分化した各教科や科目の内容を学習することができるのです。

主体的学習ということ

そこで，何をもって人間形成と言うのか，そもそも人間とは何かということが論点となります。人間とは何かについては，様々な哲学や宗教において，それぞれの人間観があります。では，世界中で，少なくとも我が国において，どのような人間観の元に人間形成をすればよいのでしょうか。我が国において共通の土台とすべき人間観とはどのようなものでしょう。共通の土台と言うからには，学校教育に携わる方々に様々な考えがあったとしても殆どの方が一応は頷けるものである筈です。共通の土台としての教育基本法や学習指導要領の中の文言を探すことも一つの手で，しかも教育実践において十分に浸透した文言であれば非常によい，他方で「学びに向かう力，人間性等」のように文言としての大きな器だけがあって中身がつかめないものでは困ります。

主体性はどうでしょうか。主体的・対話的で深い学びなどとよく言われます。主体性もつかみどころがなく，先生方においてはそれぞれの主体性のイメージをお持ちの文言ではあります。しかしながら，「学びに向かう力，人間性等」のようにどうとでもとれるものではありません。

主体性とは，そもそもが哲学用語，実存主義哲学のキーワードです。実存主義哲学以前にも主体性という語は用いられたことがあったかも知れませんが，思想における主要な語として用いられたのは実存主義哲学においてです。実存主義哲学は，第二次世界大戦後に世界を席巻しましたから，その際に我が国の学習指導要領にも，主体的学習という語が取り入れられたものと強く推察できます。推察というのは，当時，誰がこの語を持ち出して，学習指導要領に入れ込んだかがどうにも調べ尽くせないでいるからではあります。

ヨーロッパにおいては，哲学の主題とは人間とは何か，どういうものかでした。人間の存在，人間とはどういう存在なのかを問うのです。古代ギリシャのソクラテスもそうでした。ヨーロッパでは長らく，人間は神に拵えられたものと

見做されていました。デカルトやライプニッチは数学者であり哲学者ですけれども，彼らも神に拵えられた人間には原型，即ち普遍性に伴う本質があって，人間の存在はその原型乃至本質を反映していると考えているようです。こうした本質主義はプラトンもとっており，更にカントからヘーゲルに至るまで人間に本質があるという立場の哲学が展開されます。その本質は先ず以て理性であり，理性こそが人間の精神の主要な部分ということになります。実は，こうした人間観は数学をはじめ各教科や科目の内容を第一に考える教育には非常に都合がよく，理性に訴えて内容を教えさえすればよいという教育観を生み出すことにもなります。

特に，ヘーゲル哲学は強力で，理性主義であり，彼の抽象的一般的存在としてのみ人間を見做す人間観は，一時，ヨーロッパ哲学の主流となりますけれども，そのヘーゲル哲学を否定，克服していくのが実存主義哲学ということになります。実存は本質に先立つ，というのはサルトルによる有名な言葉です。本質とは，述べました通り，精神が主に理性からなり，定義によって与えられ普遍的であるものの没個性的なものです。その一方で，実存とは，このとき，このところに，現実的具体的に存在する個々の人間で，現実存在(existence)ということになります。実存においては，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいきます。実存には個別性と主体性が含まれており，実存であるための基が主体性です。人間の本質が個別性と主体性を除き去って，人間を一般化し対象化するところに成り立つのに対して，人間の実存は，本質の枠を打ち破り，めいめいが独自な仕方で自己を形作っていくことになります(松浪，1962)。

ですから，主体的学習，主体的学びとは，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいく，独自な仕方で自己を形作っていく学習ということであり，我々が教育の土台として共通して持ち得る人間観は，まさに子ども達は学ぶことを通して実存となる一人びとりであるということになります。個別最適な学びを連想なさる方々がいらしゃるかも知れません。

実存は個別性と主体性を基にしますけれども，実存は決して殻をまとった存在ではありません。サルトルは，他者の実存はいわば私の実存の条件でさえもあると言い，実存と実存との交流を積極的に論じています。交流はあっても各々が実存でありますけれども，教育実践で重要視される共感とか他者理解，対話的な学びなどが，それらが実存であることを確固たるものとしていきます。何れにしましても，主体的・対話的で深い学びは，授業で何となく学習し，何となく皆と同意したでは成立しないし，同意即ち見かけ上の学習内容の共有があったとしても，学習内容が実存に取り込まれることによってのみ真の学力となります。

ここまでお話ししたことにより，よく言われる自主性と主体性には明確な違いがあることがわかります。自主性，自発性もそうですれけれども，単に自ら行うという水準ではない厳しさを主体性はもつことになります。

数学授業における主体的学習

それでは，数学授業における主体的学習，主体的学びとはどのようなものになるのでしょう。教師のもつ数学観と授業形態とを対応させた研究があり(湊&濱田，1994)，その研究では数学が完全な存在で人間界の外にあるというプラトン的数学観が講義型，やはりプラトン的数学観が教師が真理を握っており教師と子どもの相互作用によってその真理に近づけさせる問答型，数学的存在は人間に対して外在するのではなく数学的知識を人間が創るのだという内在的数学観が自力解決・討論型の授業に対応しているとします。

しかし，実際には，小中学校では兎も角，高等学校では扱う教育内容の多さ，更には外部試験や大学入試等への対策として，殆どの授業が

講義型や教師主導の問答型の授業にならざるを得ないでしょう。勿論，小集団学習を取り込んだ授業を行っている先生方もおります。講義型の授業で主体的学習を保証するにはどうしたらよいしょうか。講義型や問答型で主体的学習を保証するには，一つには個性を認める，ということがあります。こうした個性を認めるというのは，教師が授業で教えたことを子どもが同じく理解するのではなく，各自の適性によって理解の状態が異なるということを認めること，数学の好き嫌いが様々であることを認めることを含みます。

教師が外在的数学観をもつ場合は，実際，子どもの個性などというものは殆ど念頭にないかも知れません。例えば，同じく教えているのだから解らない子どもがおかしい，更には悪い，などと言うのだとすれば，教師は全くに一人びとりの子どもの個性を認めていないことになります。子どもの適性は各々で異なるのだから，学習の速い子もいれば遅い子もいる，理解できる子もいれば理解が追いつかない子もいるのです。それを認めないことは，子どもの主体性を認めていない。子どもの主体性を保証するような授業をしていないということになります。

個性は主体性の特長の一つです。先生方が子どもの個性を認めることは，子ども達が自分のことを先生方が気にかけてくれているという意識，信頼感をもたらします。私は長らく暗黙知(Polanyi, 1958, 1966)の研究をしておりますけれども，暗黙知の範疇に入るものにヒドゥンカリキュラム，所謂隠れたカリキュラムがあります。明示された意図したカリキュラムの他に，主に先生方が潜在的に発したメッセージが子ども達に伝搬していくものですけれども，子ども達のもつ信頼感というのもヒドゥンカリキュラムの教育効果の一つでしょう。

主体的学習と数学教材

多くの先生方がそう思っているように，単元や教材によって子どもの活動の仕方が異なる場合があります。平成 30 年に告示された高等学校学習指導要領理数編で示されている所謂ぐるぐるの図がありますけれども，この図は数学の世界と現実の世界との各々のサイクルになっています。主体的学習は全ての単元で保証されなければならないのですけれども，取り分け活用の文脈では数学の世界の問題と共に現実の世界の問題の解決が，主体的学習を促すものとして重視されているようです。実際，共通テストにおいても，日常の問題と称する現実の問題が必ず出題されています。統計の問題や確率の問題は，もともと現実の世界を反映するので，主体的学習を促すのにうってつけです。ただし，統計の問題は他の数学の問題と比較して，少々異質なところがあることに先生方もお気付きのことでしょう。

高校数学の統計の内容には，他の領域が演繹的推論を明示しているのに対して，経験的で，帰納的な面持ちがあります。統計は古代国家が人口統計に用いるなど，古くからあり，後に，数学的には確率論によって統計学の理論が支えられるのですけれども，高校では確率論の扱いは十分ではありません。特に数 I では十分でなく，数 B で確率変数や確率分布などがようやく登場します。更に，数 B の確率論で提示される公式は証明が付与される場合が多くはなく，背景にある解析学的な証明が高校生にとっては難しい場合が多いのです。何れにしても，高校の統計は実学的で，主にはデータに対して，理論を適用することによって問題を解くことが多いのです。演繹的推論に力点を置く先生方には，高校の統計の内容がどこか掴み所のないように見えるかも知れません。

統計学の歴史

確率論，統計学の源流と 17 世紀の発展

高校の統計の数学的位置付けを考えるために，統計学の歴史の概略をご紹介します。既にご存じの先生方も多いかと思います。統計学に相当するドイツ語 Statisik は 17 世紀になっ

て用いられた語で，この語が一般的に使用されるのが 18 世紀ですので，現代の統計学の基礎ができてきたのが，その頃ということになります。他方で，国家行政という点から，統計調査は既に古代国家によって行われていました。それらの統計調査は，人口調査，経済事情の調査，兵役能力に係る調査，租税負担力に係る調査といったものです。紀元前 3000 年頃には，古代エジプトではピラミッドの建設のための統計調査が行われています。古代ローマでは，紀元前 500 年頃にダリウスが全数調査を行って人民簿を作成しています。このように国家と統計は密接な関連をもち，国家の繁栄にとって統計は不可欠のものとなっています。

16 世紀から 17 世紀にかけて近代国家が出現し，人民の経済活動が盛んになりますと，国家がその把握のために行政統計と呼ばれるものを用い出します。特に，経済政策における条件ともなる人口数の把握，各種産業間の関連の把握のために統計を用い，その後の統計学の発展のための基盤を造ることになります。この頃，統計学の発展はドイツとイギリスに，更に確率論の芽生えがフランスに見られます。ドイツでは，ドイツ大学派統計学の創始者であるコンリング（1606～1681）が出現します。実は，コンリングは数学者ではなく，法学者で哲学者，医者でもあるのですれれども，国情論という著作を出版し，この書籍が統計学の基礎の一つとなっています。国情論ではアリストテレスの考えを基に，国家行動という目的因に対して，質量因を土地と人民，形相因を制度と行政，動力因を財政と兵役として，国家目的と各要因との関連を扱っています。

イギリスでは政治算術が登場し，統計学を発展させます。小間物商人グラント（1620～1674）は，1625 年にロンドン市における出生，死亡，婚姻，移民といった人口動態現象を比較して，人口の発展状況に関する法則性に係る論文を発表します。クラントの友人である財政学者ペティ（1623～1687）は，1679 年に，政治算術，という呼称を創案し，人口や経済に関して推算した数字を利用してイギリスと諸外国との国力を比較します。更に，キング（1648～1712）はイギリスの人口の将来予測を行っています。

フランスでは，この頃，古典的確率論が発生します。パスカル（1623～1662）は，数学者であり，哲学者，神学者，物理学者ですけれども，19 歳の時，メレから投げかけられた賭についての問題「１つのサイコロで６の目を出すのに４回まで試行する場合と，２つのサイコロで２つとも６の目を出すのに 24 回試行する場合とを考えてみると，前者では有利なのに後者では不利になる。これはなぜか。」を契機として，確率論の発想に至ることになります。更に，パスカルとフェルマー（1607～1665）との往復書簡により，古典的確率論の基礎が誕生していくことになります。

18 世紀の確率論，統計学の発展

18 世紀になると，確率論と統計学が更なる発展を遂げます。統計学においては，オランダの財務官僚ケルセボーム（1690～1771）が自ら作成した生命表を示しながら終身年金現在価額と地域・都市の人口の総数・構成を推計し，人口統計を大きく発展させます。ケルセボームは更に，素朴な大数の法則に類する考えを「一見不規則，偶然と見えるものはすべて我々の無知によるもの，つまり，そのような現象に関する種々の原因が錯綜していて，その規則性を洞察できないでいる状態に過ぎない。結局多数の事柄が観測されさえすれば，我々の目を逃れていた規則性が発見できるようになる。」と述べています。フランスのド・パルシュ（1703～1768）も 1764 年に，人間の寿命の確からしさに関する論文を提出し，平均余命に対する理論付けを行っています。プロシャの牧師ジュスミルヒ（1707～1767）は，全市民の健康状態を調査し，大量観察から規則性を見出しました。これにより衛生統計学が発展します。ジュスミルヒは，人口統計に係る調査も行い，社会現象のような

場合でも大数の法則に類するものが成り立つことに言及し, 統計学を一般の場合にも適用できる科学として位置付けます。

確率論においては, フーリエ(1768～1830)の無限級数の考えを, ヤコブ・ベルヌーイ(1654～1705)が確率論に応用します。この 18 世紀に辿り着いた無限という概念は解析学を飛躍的に発展させ, 現在でもフーリエ解析などと呼ばれたりしますけれども, 同時に確率論も大きな発展を遂げます。ベルヌーイは, それ以前は素朴な言及に留まっていた大数の法則を命題として提示します。即ち「或る試行で都合のよい場合の数を a, 都合の悪い場合の数を b とする。このような試行を相当の回数繰り返すならば, 都合のよい結果が起こる回数の全試行回数に対する比が, (a－1)/(a＋b) と (a＋1) /(a＋b) の間に入るケースがこの範囲外に出現するケースより何倍も確からしくなる。」という命題を示します。これは数学的に規定される確率の値と経験的に得られる確率の値との関連性を指摘したものです。この大数の法則により, 統計的方法が社会現象の様々な問題に対して有効であることを示したことになり, 統計学に対して, 確率論が数学的基礎を与えたことにもなります。また, フランスからイギリスに逃れたド・モアブル(1667～1754)はパスカルの確率論を発展させ, 更に大数の法則を精緻化します。更に, イギリスの牧師トーマス・ベイズ(1701～1761)はベイズの定理で有名です。ベイズは, 繰り返し観測される事象について, 結果から原因を推論する方式を構築しますけれども, これはフランシス・ベーコン(1561～1626)の帰納論理に数学的基礎を与えたものです。よく中学校数学の確率で屋台のくじ引きに並ぶ場面で当たりくじを引く確率を考える問題がありますけれども, ベイズ理論を用いれば異なる問題になったりします。先にくじを引いた人の結果を知るか否かが論点となります。

18 世紀の確率論を集大成したのがフランスのピエール = シモン・ラプラス(1749～1827)となります。もっともラプラスの仕事は 19 世紀にまたがったものとなります。ラプラスはベルヌーイの大数の法則の拡張により, 中心極限定理の特殊な場合に証明を与えています。更に 1812 年にラプラスは, 確率の解析的理論, という著述を発表し, 確率の概念の定義を行っています。その定義は, 「事象の確率とは, すべての起こり得る場合の数に対する都合のよい場合の数の比であって, このときすべての場合は同程度に起こり得るものでなければならない。種々の場合, 同程度に起こり得るかどうかの評価が偶然の解析上最も微妙な点の一つである。」というものです。実はこの定義には特に今日の確率論と統計学との結び付きにも係わる重大な曖昧さが含まれています。第一に, 同程度に起こり得るということは保証されるか, 第二に, すべての起こり得る場合が, 有限でなく無限の場合についてどうするかです。第三に, 都合のよい場合が, 社会現象などの場合に定義できるかというものです。この三点により, 数学的確率と実験的確率との違いも明確化されますので, 先に述べました通り, 演繹的推論を行うことを数学と見做す方々にとっては, 統計学に違和感を覚えるということにもなります。何れにしても, この三点を解決することにより, 確率論と統計学は更に発展することになります。

19 世紀の確率論, 統計学の発展

19 世紀には産業革命が起こりますけれども, 同時に科学技術が飛躍的に進歩し, それまでと全く異なった産業構造や社会構造が生じます。そうした中で, イギリスのトマス・ロバート・マルサス(1766～1834)は, 労働者の貧困の原因を自然法則によるものであることを統計的に実証しようとし, 1978 年に出版した, 人口論において, 人口は幾何級数的に増加するのに対して食料は算術級数的にしか増加しないという仮説を提示します。更に, 広汎な社会現象に確率論や統計学を適用し, 社会物理学を創案し

た数学者にベルギーのランベール・アドルフ・ジャック・ケトレー(1796～1874)がいます。ケトレーは,人間を肉体的にのみでなく,精神的・道徳的面からも観測し，平均人，という者が社会的集団の重心的位置にあるとしました。その上で,自然科学の場合と同様に社会科学の中にも普遍的合法則性があるとし,その探究のための補助的方法の提供に統計学があるとします。ケトレーは人口増加の法則を物理現象の法則からの類推により,人口増加速度に比例した抵抗が働くと考えました。後に，ピエール＝フランソワ・フェルフルスト(1804～1849)が，ケトレーの考えを,現人口数の２乗に比例した抵抗が働くと修正し,人口増加曲線となるロジステック曲線を生み出します。更に，ケトレーの後継者の一人であるドイツのエルンスト・エンゲル(1821)はザクセン王国の統計局長となり,統計学は人間共同体の体系的叙述に資すべき実体学でなければならないと考え,労働者の福祉の測定に関する統計的研究を行います。エンゲルの法則は今日的にも有名です。その後，アドルフ・ワグナー(1835～1917)が，国民総生産の増大に伴い国費の支出が増加するというワグナーの法則を提出しますけれども,ワグナーは自然科学であれ社会科学であれ法則の発見にのみ学問の進歩があるとし,法則の発見を可能にするのが統計的方法であると述べました。他方で,ヴィルヘルム・レキシス(1837～1914)は,各法則性の安定度を問題とし,観測対象の分散に着目しています。

更に，この頃，自然科学の発展に対しても統計的方法が適用されます。進化論で有名なイギリスのチャールズ・ロバート・ダーウィン(1809～1882)の従兄弟であるフランシス・ゴルトン(1822～1911)は,天才と遺伝との相関関係を提示します。実は，進化論を起源とするゴルトンの生物統計学は生物学を神による決定論的な対象から,真に科学的な対象に転換させたとも言えます。更に，相関関係に係るゴルトンの考えは，カール・ピアソン(1857～1936)によって大きく発展します。今日の，線形回帰，相関とピアソンの積率相関係数の開発者としても有名ですし，χ^2 検定も開発しましたし，ピアソン型分布曲線と呼ばれる分布の類型化も行いました。標準偏差，モードという概念もピアソンが導入しました。

イギリスのジェームズ・クラーク・マクスウェル(1831～1879)は現代物理学の中心の一つとなる統計力学を創始します。マクスウェルは,気体の圧力は気体分子が壁面に衝突することにより生ずるという仮説をたて,気体を集合概念として捉え確率的にみて安定した関係を要求し，分子運動の理論を展開します。更に，オーストリアのルートヴィッヒ・エードゥアルト・ボルツマン(1844～1906)が，マクスウェルの理論を発展させ,無秩序の状態の度合いを示すエントロピーという概念を導入します。

18 世紀は，数学においても，非ユークリッド幾何学,集合論などが登場した頃ですけれども，ドイツの著名な数学者ヨハン・カール・フリードリヒ・ガウス(1777～1855)が誤差論を提出します。ガウスはゲッティゲン大学卒業後,天文台長の職に就いていましたけれども,天体観測を通して誤差論を展開しました。ガウスは,誤差には避けることのできない偶然誤差があるものの，偶然誤差にも法則性があるとして,その特徴付けをしました。ガウスは偶然誤差が,①誤差の生じ方が正負同程度に起こる(対称性),②絶対値の大きな誤差ほど生じにくい(単調性)，③何回か測定した値の算術平均が真の値の最も確からしい測定値である(平均の最尤性)，の三条件を満たすときに，偶然誤差の分布が正規分布になることを解析学的に証明しました。正規分布は今日でも統計学で広く用いられている分布です。

20 世紀の確率論，統計学の発展

20 世紀は二度の世界大戦があった世紀で,それまでのヨーロッパにおける価値観の転換期でもありました。哲学においては，ヨーロッ

パで長らく展開されていたイマヌエル・カント（1724～1804）からゲオルク・ヴィルヘルム・フリードリヒ・ヘーゲル（1770～1831）に至る理性中心の人間観に対抗する実存主義哲学が誕生します。ヘーゲル哲学は数学を行うことを支えるのに便利な哲学ですけれども，先にも述べました通り，数学教育には実存主義の考えが支えとなります。統計学においても，ゴールトンやピアソンによる大標本を対象としたものから，イギリスのロナルド・エイルマー・フィッシャー（1890～1962）を中心とした小標本理論が展開されます。実は，大標本を嗜好するのはプラトン主義的な場合が多く，全数調査でなければならないと考えるのは更にその傾向が強いのです。全数調査というのは現実離れしていますし，小中学校の全国学力状況調査においても全数調査を原則にしていますけれども，実際にはそうなってはおりません。学力調査の全数調査というのは，授業実践へのフィードバックをするには，なるべく対象学年の全小中学生に調査した方がよいということであって，学力調査としては小標本調査で十分なのです。学力調査のやり方に対しては，特に統計学者やテスト理論の研究者から疑問の声が寄せられる場合もあります。

フィッシャーの実験計画法は今日でも統計調査のバイブルになっていますけれども，その開発の契機となったのはウィリアム・シーリー・ゴセット（1876～1937）によるｔ分布の発見です。ゴセットは，正規分布の標本から計算される分散がピアソンの提示した分布に対応することと，標本平均と分散との相関係数が殆ど０になることを実験によって確かめてから，標本平均と標準偏差の比の分布を決めています。この分布がｔ分布ということになります。フィッシャーは，ピアソンによる大標本でなければ適用できないような方法論は，実際上のデータの利用においては極めて不適切なものであると論破しています。フィッシャーは，更に，データからの適切な情報を抽出するのに仮説的母集団の概念を導入し，データはすべて母集団からの標本であると見做しました。彼は標本に基づき母集団の傾向を伺い知ることが統計的知識であるとしました。今日でも，統計学はこの考えに基づいています。

小標本理論は，統計調査自体にも全数調査から標本調査へと変革をもたらしました。ロシア生まれのイェジ・ネイマン（1894～1981）や，アメリカのウィリアム・エドワーズ・デミング（1900～1993），ウィリアム・ゲメル・コクラン（1909～1980）などにより，標本を小さくしかも精度の高い標本を得る方法を研究する「標本調査論」が展開されます。今日では，こうした統計的方法は，生物学，医学，経済学，社会学，教育学など，幅広い分野で用いられることになります。

確率論においては，19 世紀の停滞から脱し，1932 年にロシアのアンドレイ・ニコラエヴィッチ・コルモゴロフ（1903～1987）が，確率論の基礎概念，という論文において，確率を測度として捉えることにより集合論の公理系を導入して，測度論的確率論，を展開します。測度論的確率論は，フィッシャーなどによる小標本理論に数学的な理論的根拠を与えることになります。

コルモゴロフの確率論は，ダーヴィット・ヒルベルト（1862～1943）が 1900 年にパリで開催された国際数学者会議において提示したヒルベルトの 23 の問題の一つである，確率論の基礎を確立せよ，に応えたものです。コルモゴロフは，確率を数学の閉じた世界で定式化しました。例えば，実際のサイコロを用いるのではなく，数学の世界で理想化されたサイコロを仮定するのです。このことにより，確率につきまとう現実世界を一端切り離し，数学の世界のみで確率を論ずることができるようになります。この現実世界と確率との間を埋めるのが統計学で，即ち，確率論で現実世界を理想化し，数学世界で構成したモデルが適切かどうかを問うのが統計学ということになります。理想化した

数学モデルのサイコロが適切かどうかを, 実際にサイコロを何度も投げたデータから判断するということになります。大数の法則にも関連することです。

このように, 確率論, 統計学の発展を見てみますと, 確率論と統計学はほぼ独立的に誕生し, その発展において確率論が統計学を支える理論を提供しながら互いに影響を与えたことがわかります。確率論は現実世界との関係に難題を抱えていたところ, コルモゴロフによって確率モデルの概念が展開され, 確率モデルの研究がなされることにより, 確率論と統計学との関連性が密になったと言えます。

確率論と統計学とを扱った数学入門書

ここで, 確率論と統計学とを扱った数学入門書の目次を紹介します。こちらは資料１の方を御覧下さい。やや手当たり次第に, 皆本晃弥. (2015). スッキリわかる確率統計―定理の詳しい証明つき―. 近代科学社. をとりあげます。スッキリなどという書籍なので, 中身が軟派なものかとの印象をもたれる方もいるかと存じますが, 大学生の教科書にしてもよいものです。★は皆本先生が付けた高校数学を多く含む内容ですので, 高校の先生方が参考にするには便利な書籍かと存じます。

目次

4.4　二項分布と正規分布の関係　★
4.5　正規分布とMAD＊
4.6　多次元正規分布＊

第５章　確率分布とモーメント母関数
5.1　歪度と尖度＊
5.1.1　歪度
5.1.2　尖度
5.2　モーメントとモーメント母関数
5.3　幾何分布とポアソン分布＊
5.3.1　幾何分布＊
5.3.2　ポアソン分布
5.4　確率分布の再生性
5.5　同時確率変数のモーメント母関数と多項分布＊

第６章　標本分布
6.1　母集団と標本　★
6.2　標本平均と標本分散　★
6.3　ガンマ関数・ベータ関数＊
6.4　χ^2分布
6.5　t分布
6.6　F分布

第７章　推定
7.1　推定の概要
7.2　推定量とその性質
7.3　モーメント法と最尤法による点推定
7.3.1　モーメント法
7.3.2　最尤推定量
7.4　区間推定
7.4.1　母平均μの区間推定（σ^2が既知）　★
7.4.2　母平均のμの区間推定（σ^2が未知）
7.4.3　母分散σ^2の推定
7.4.4　母比率の区間推定　★

第８章　検定
8.1　検定の考え方
8.2　平均の検定
8.2.1　平均の検定(分散が既知の場合)
8.2.2　平均の検定(分散が未知の場合)
8.3　等平均の検定
8.3.1　分散が既知の場合
8.3.2　分散は等しいが未知の場合
8.3.3　分散が未知の場合＊
8.3.4　２母集団の標本に対応がある場合
8.4　分散の検定
8.5　等分散の検定
8.6　母比率に関する検定
8.6.1　母比率の検定
8.6.2　母比率の差の検定
8.7　適合度の検定＊
8.8　独立性の検定＊

共通テスト数学ＩＡの統計の特徴

ここで，高校の統計に少し踏み込んで，共通テスト数学ＩＡの問題を取り上げてみます。配布しております資料２を御覧下さい。昨年度の問題ですので，既に分析済みの先生方も多いかと存じます。2．３分時間をとりますので，少し取り組んでみてください。第２問の［２］は通常，統計の問題からなります。昨年度は，47都道府県の外国人宿泊者数と日本人宿泊者数の動向を題材にした問題と，キャンペーンを題材とした簡単な仮説検定の問題の出題となっています。

宿泊者数の問題に限らず，統計の問題はリード文の文章量が多く，必要な情報を捉えることが必要です。解決に関係ない情報は当面，読み飛ばしてもよいでしょう。数ＩＡの統計の問題では，官公庁などで公表されているデータを使うことが多いのも特徴です。

（１）の（ｉ）では散布図を示し．データの読みを求めています。散布図の縦横の縮尺が違いますけれども，これは統計学での慣習で，正方形の図として示すのが通常だからです。ａ，ｂ ともに正で，ａの二つの点のうち一つは図の右端の方にあり，こうした点を見逃さないことが必要です。ｂでは，図の破線がｙ＝10ｘとなっていることを読み取れればよいことになります。

（ⅱ）では表になっているデータの読みが必要となります。外れ値の計算ができれば，解決可能です。外れ値の求め方はリード文の冒頭に示されています。

（２）は分散と共分散に係る問題です。分散を求める式，共分散を求める式，相関係数を求める式が解っていれば，計算によって解決できます。基本的な公式や，式変形のやり方を身に付けておくことが必要です。更に，相関関係の強さを散布図から読み取れるようにしておくことも必要です。

（３）は仮説検定の問題ですけれども，文章量が多いです。仮説検定の考え方を理解していれば，解決できる問題です。

概観してみますと，数ⅠＡの統計の問題では，用語や公式の意味をきちんと理解しているか，式変形や計算が簡潔にできるか，を問うているようにも見えます。他方で，数ⅠＡの統計の問題に限っては，官公庁などで公表されているデータを題材にしていますので，現実のデータを分析し，その傾向を把握するという現実場面の解決を扱っていることになります。もし，高校の授業で現実場面の解決を扱うことができれば，子ども達の主体的学習を促すことがやりやすくなるかも知れません。

現実場面について

ここで，現実場面というのは，我々の直面している現実であって，世の中の出来事を指す場合が常識的に考えられるものですけれども，数学者などにとっては直面している数学の問題が現実となります。その様に考えますと，子ども達にとっても，直面している数学の問題が現実であったりもしますので，その辺りの解釈は微妙なものとなります。

このことについてもう少しお話ししますと，対象が現実世界となるかどうかというのは，触知可能かどうかということになります。現実の世界などの日常は，我々にとって思考の対象となっていますので，明らかに触知可能な世界です。数学などの抽象概念は，子ども達にとってはなかなか触知可能な世界になりませんので，数学を教材化して，触知可能なものに翻案して学校教育では扱います。他方で，数学者には数学そのものといった抽象概念が触知可能であり，現実の世界とも言え，研究対象となるのです。この触知可能の度合いは，子ども達にとっては，通常，数学の世界よりも現実の世界の方が大きいのです。幼年期から大人になるにつれて，この触知可能な世界が具体的な世界から抽象的，形式的な世界にまで広がっていくのです。

結語

これまで，人間形成と数学教育ということで主体性，主体的学習の促進，更には主体的学習を実現するための高校数学の統計について，お話ししてきましたけれども，統計教材に限らず，現実の場面を数学とした殆どの場面で，子ども達，一人びとりがかけがえのない自分の存在を意識しながら，その存在のしかたを自分で選んでいく，独自な仕方で自己を形作っていく学習を実現していくことが，教育上の目標となります。数学教材を巡る主体的学習，これは教育実践においては子ども達の意欲と密接に係わりますけれども，それを如何に保証し，促していくかが，我々数学教師の課題ともなります。

高校の統計教材は，現実的事象を分析する統計学とその数学的土台となる確率変数や確率分布により構成されていますけれども，主立った方向は現実事象の分析を行う統計的考え方の育成となります。統計的考え方は，今申しましたとおりに，現実事象の解決ですので，確率論をはじめ他の数学諸分野の数学的な世界を数学的方法によって探究するという方向とは，異なる方向による探究を要求していることになります。応用数学的と言えばそうですし，数学的モデリングに近いのです。数学的モデリングは現実的事象を説明するための数学的モデルを提出しますけれども，統計の場合は，あくまで現実の分析，例えば，統計の検定にあたっ

ては仮説を棄却するかどうかによる現実の分析が要求されていることになります。

嘗て,統計学は数学でないなどと言う数学教育学者もおりましたけれども,その背景には応用数学的なものは数学とは認めないという非常に古い数学観があります。例えば日本数学会は，分科会として，統計数学や応用数学を設けていますし,一層広い数学観のもとで数学を捉えています。何処にあっても，統計学は数学ではないという見方は通用しません。ただし，今申しました通りに,事象に対する探究の方向が統計教材と他の数学教材では異なることになります。先に取り上げましたぐるぐるの図の現実の世界のサイクルに統計的考え方が入ることになります。

探究の方向が異なるということは,学習する子ども達の側に立てば，数学とは何か，という点で,戸惑うことになるかも知れません。凡そ,数学の世界で完結していた多くの領域に対して，現実の世界の解決，現実事象の分析を主たる活動とする統計教材は,異質の感を抱かせるものともなり得るからです。もしかしたら，データの分析の単元の冒頭の授業で,それまでの単元とは探究の方向が異なることを子ども達に説明することが必要かも知れません。この点は,実際に高校生を教育している先生方の実感に基づく方針にお任せすることになります。何れにしても，統計教材は，子ども達が現実事象を分析する過程において主体的学習を展開するために極めて有用なものとなります。

これまで，先生方におかれましては，分かりきったような話を長々と話してしまいました。これで今回の話は一旦終了となります。ご清聴有り難うございました。

註

この稿の理論部分は,日本学術振興会科学研究費助成事業（科研費）基盤研究（C)（課題番号：24K06379）の助成を受けたものである。

文献

釜江哲朗.（2005). 確率・統計の基礎，放送大学教育振興会.

松浪信三郎.（1962). 実存主義. 岩波.

皆本晃弥.(2015).スッキリわかる確率統計―定理の詳しい証明つき―.近代科学社.

湊三郎&濱田真.(1994).プラトン的数学観は子供の主体的学習を保証するか―数学観と数学カリキュラム論との接点の存在―. 日本数学教育学会誌，76(３)，2-8.

文部科学省.(2019).高等学校学習指導要領(平成30年告示). 東山書房.

文部科学省.(2019).高等学校学習指導要領(平成30年告示)解説数学編理数編.学校図書.

Polanyi, M. (1958). Personal knowledge: Towards a post-critical philosophy. Chicago: The University Chicago press.

Polanyi, M. (1966). The tacit dimension. Gloucester: Peter Smith Pub.

Ray, Olivier. 池畑奈央子監訳.（2020). 統計の歴史. 原書房.

Sartre, Jean-Paul. 伊吹武彦他訳.（1996). 実存主義とは何か. 人文書院.

杉田敦(編).（2010). 丸山真男セレクション. 平凡社.

多尾清子.(1991). 偉大な統計学者，ナイチンゲール―衛生統計学に示した業績を見る. 看護教育，32(2)，1116-122.