

## 実践研究

# テクノロジーによる関数関係理解の改善に関する一考察\*

—事象のグラフ化におけるミスコンセプションに焦点をあてて—

宮 川 健\*\*

### 要 約

本研究の目的は関数指導にテクノロジーを導入することによって、関数関係の理解にどのように効果があるか考察することである。その効果を知るため、関数関係を見いだす際に表出するミスコンセプションの解消に焦点をあてる。まず、そのミスコンセプションの存在を調査した。次に、その解消方法としてCBL, CDA<sup>1)</sup>の距離測定器を用いた授業を行い、どのような効果があるかを明らかにした。その結果、高等学校でも多くのミスコンセプションが存在することがわかり、その原因として運動の視覚的イメージ<sup>2)</sup>をグラフにそのまま投影してしまっていることが認められた。そして、CBLやCDAによって事象(運動)のグラフ化を扱うことは、事象における変数的見方を明確にし、生徒の事象のグラフ化に際してのミスコンセプションの解消に効果があることがわかった。

キーワード: 関数関係 事象 グラフ化 ミスコンセプション 距離センサー

## 1. はじめに

学校数学において関数教材のしめる割合は大きい。その一方で、関数の理解が十分でない生徒が多く、事象を数学的に処理することができず、事象とグラフとの関数関係の理解に困難をきたしている生徒が多いことが指摘されている<sup>7)</sup>。現在の関数指導は $y = ax \rightarrow y = ax + b \rightarrow y = ax^2 \rightarrow y = ax^2 + bx + c$ という式表現の拡張順序に従って系統立てられている。その結果、事象は関数を指導するための事例として取り上げられ、その拡張の中で事象を数学的に処理することを指導しようとしていることが、その困難の背景として指摘できる。

この現状に対し、近年グラフ電卓等のテクノロジーを利用した関数指導の改善が研究され、指導システムの再編も含めた提案がなされている<sup>12) 14)</sup>。本研究では関数関係の把握が困難な際に表出するミスコンセプションに焦点をあて、その存在を明

確にする。そして、テクノロジー(本研究ではCBL, CDA)を利用することによって、関数関係の理解がどのように改善されるかを考察する。

本研究で、ミスコンセプションに焦点をあてた意図は次のことからである。通常の学校数学の場ではミスコンセプションが起こっていても、生徒が自分自身でそれらに気づくことは少なく、他者(教師)の指摘による解消が求められる。しかし、テクノロジー(本研究ではCBL, CDA)を用いれば他者が指摘するまでもなく、生徒が自分自身でそれらに気づき、適切に概念を獲得することができるという可能性に期待するからである。

## 2. 本研究の背景

### (1) 関数関係の理解が困難な問題

関数関係の理解が困難であることを示す事例として、ここでは観覧車の問題を取り上げる。

#### 【問題】

観覧車に乗った人の運動をグラフにするとどのようなになりますか。もっとも適切なものを選びなさい。(Dyke, F. Vによる<sup>3)</sup>)

\* 原稿受付 平成9年1月20日, 採用決定 平成9年10月30日  
\*\* 筑波大学大学院教育研究科

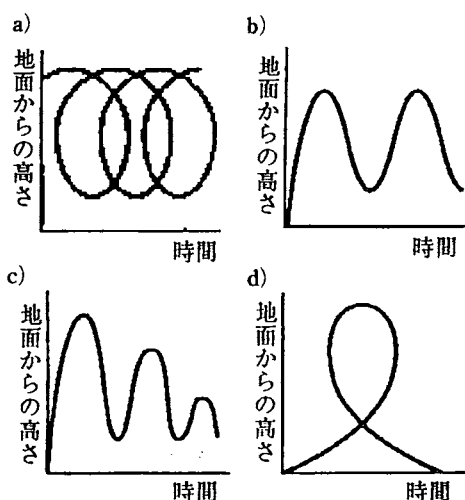


図-1

Dyke はこの問題で a), d) のグラフを選ぶ生徒がいることを指摘している<sup>3)</sup>。教師から見れば、明らかに誤りである解答を生徒が選んでいる。そこには生徒なりの考えがある。ここでは、このような生徒の考えをミスコンセプションと捉え、その解消を検討する。

## (2) ミスコンセプションの捉え方

ミスコンセプションに関しては多くの先行研究を見出せるが、多くは「教師から見れば正しくないが、子どもには正しいと信じるにたる根拠のある考え」といった意味で用いられる。その性格には次のようなものがある。

- ・ミスコンセプションは既知の知識を過度に一般化した結果である<sup>4) 5) 9) 10)</sup>。

これは、図-1の問題では観覧車の運動の視覚的イメージ(運動の様子)をグラフへと一般化してしまい、a), d) を選択することである。同じようなミスコンセプションが存在することが多数指摘されている<sup>2) 3) 4)</sup>。

過度の一般化がなされる背景として、生徒のいままでの数学学習において視覚的なものに頼ってきたことが多かったことが指摘できる。特に、グラフの場合、既習のグラフが運動の視覚的イメージと一致するものがある。例えば、中1のケーブルカーの問題場面や中3の放物線である。特に放物線は運動の視覚的イメージを表す名前である。次の問題はグラフ表現が運動の視覚的イメージと

一致する例である。

## 【問題】

投げ上げたボールの時間と高さの関係のグラフはどのようになりますか。

横軸を時間としても、水平距離としても、ともに放物線のグラフが描けてしまい、ボールの運動の視覚的イメージをグラフに投影しても正答になる。生徒に運動の視覚的イメージをグラフに投影してもよいと思わせる事例は多いのである。このことからミスコンセプションの次の性格が認められる。

- ・生徒の1つの考えは状況に応じてはミスコンセプションとして現れ、別の状況では正答として現れる<sup>5) 11)</sup>。

以上のことをふまえ、本稿で扱う事象のグラフ化におけるミスコンセプションを図式化すれば、図-2のようになる。

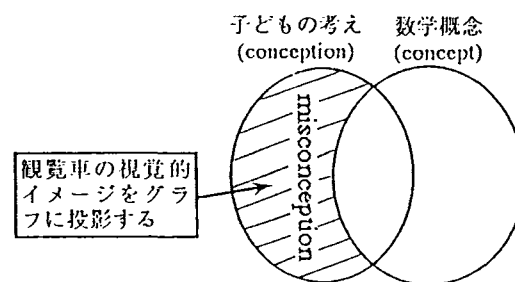


図-2

本研究では、このミスコンセプションを解消できたとは、グラフ表現に運動の視覚的イメージを投影せずに、グラフを時間と位置の関係(時間は戻らないということ)として捉えることができるようになることとする。観覧車の問題でいえば、a), c), d) を選んだ生徒が b) を選ぶようになることである。

## (3) CBL, CDA と Motion Detector

Motion DetectorはCBL, CDAの距離センサーである。これを用いて図-3に示すように音波で前面にある障害物との距離を測定し、瞬時にグラフ電卓もしくは数式処理電卓にデータを転送し、電卓でグラフ化する。CBL, CDAを用いると、事象を扱う際に従来必要とした表を媒介にしないで、事象とグラフを直接に結びつけることができ

る (図-4).

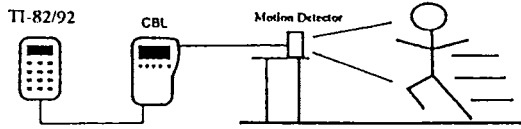


図-3

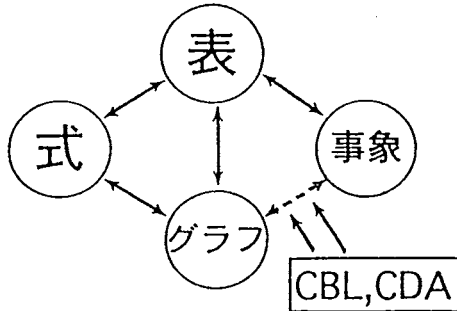


図-4

また, Motion Detector は前面にある障害物しか感知しないために, 運動の変数的な見方を育成する. つまり, 左右に運動してもデータはとれない. 例えば, Motion Detector の前で前後運動をすれば, 図-5 のようなグラフができる.

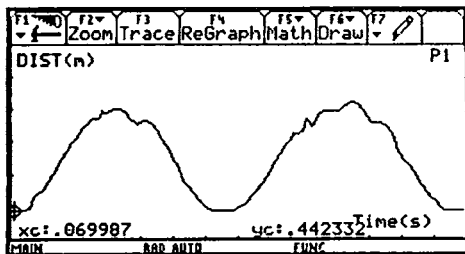


図-5

#### (4) ミスコンセプション解消の方法

前述のミスコンセプションを解消するには時間に伴って運動するということと, 独立変数, 従属変数が十分に把握される必要があると考える. 従来の指導では, 事象 → 表 → グラフといった形で実際に観覧車の高さのデータをとって, 表を介してグラフを書くことによってこのミスコンセプションを解消しようとしてきた. 本研究ではこのミスコンセプションを表出する問題を直接指導することなく, CBL, CDA を用いて, 別の事象を取り上げて, 事象の変数的な見方ができるようにす

ることによって, 関数関係をより明確に把握できるようにする. そして, その結果このミスコンセプションを解消できるようにする. つまり, 図-4 の点線を明確に把握できるようにするテクノロジーを用い, 関数関係を明確に捉える変数的な見方の育成によって, ミスコンセプションの解消をはかるのである.

### 3. 事前調査

観覧車の問題を中位レベルの高校の1年生と2年生に解いてもらった.

#### (1) 事前調査の結果

結果は以下のものであった.

高1 (39人)

- a. 0人    b. 21人    c. 1人    d. 17人  
0%      54%      3%      44%

高2 (23人)

- a. 2人    b. 8人    c. 1人    d. 12人  
9%      35%      4%      52%

#### (2) 事前調査の分析

事前調査の結果, 関数は中学1年から継続的に扱われているにもかかわらず, 高等学校においても d) を選んでいる生徒が1年生, 2年生ともに多く, 2年生では半数の生徒が d) を選んでいる.

d) を選んだ抽出生徒の a), b), c), d) に対する考えは次のようにまとめられる.

- a) ・三回転もしているからおかしい.  
・何度も重なっているからおかしい.  
・縦軸の上から始まっているからおかしい.
- b) ・地面からの高さが一定なので候補に入れる.  
・凹凸が二回だからおかしい.  
・地面に戻ってきていないからおかしい.
- c) ・回転するごとに地面からの高さが低くなっているからおかしい.
- d) ・通常, 観覧車は一回転で, グラフも一回転になっているので正しいのでは.  
・地面から出発し地面に戻ってきているので正しいのでは.

これらのことから, 生徒は縦軸として地面からの高さは意識している. これは生徒の高さの視覚的イメージがそのままグラフの縦軸と一致しているためである. しかし, 横軸に時間に伴った高さ

の変化のみを抽出できていない。したがって、生徒は事象の変数的な見方（観覧車の問題の場合では時間に伴った高さのみを変数として考え、左右に変化する変数は考えないということ）ができず、左右も含めた視覚的イメージをグラフに投影するという過度の一般化を行い、観覧車のように一回転している d) を選択したとみることができる。

#### 4. CBL, CDA を用いたミスコンセプションの解消

##### (1) 授業内容

CBL を用いてミスコンセプションを解消できるかという課題に対し、関数一般を導入する展開で授業を行った。事前調査を行った高校の 1 年生 39 人、2 年生 23 人に 2 時間連続の授業を行い、事後に事前と同じ調査を行った。

目標は、CBL の Motion Detector を用いて運動の変数的な見方をできるようにすることと、事象（物の運動）とグラフを直接結びつけて考えられるようにすることである。

##### 【準備】

TI 社の CBL システム、Motion Detector、数式処理電卓 TI-92、TI-92 ビュースクリーン、プログラム bounce（内容を変更して「HIKER」のようにして用いた）、OHP

##### 【1 時限目（事象からグラフへのアプローチ）】

CBL の機能を把握できるように、自分自身の運動や物の運動など様々な運動をグラフ化した。そして、どのような動きがどのようなグラフになるか予想できるようにし、Motion Detector が何を感じているか把握できるようにした。このことによって運動の変数的な見方ができるようにした。例えば、スキップする場合には上下変動するグラフが得られると考える生徒もいた。しかし、CBL は Motion Detector からの距離のみを自動測定しグラフに表示するために、Motion Detector からの距離のみが変数であることに気づいた。

また、CBL が時間に伴ってグラフを表示することで、時間に伴った位置の変化を把握できるようにした。つまり、表示されるグラフがどれも一対一対応のグラフであり、図-1 の a), d) のような重なるグラフができないことに気づけるよう

にした。実際、生徒の反応に「時間は戻らない（グラフは右に進む）」などミスコンセプションの反例となるような発言もあった。

##### 【2 時限目（グラフから事象へのアプローチ）】

1 時限目とは逆に、こちらで複数のグラフを提示し、そのようなグラフを CBL で得るためにはどのような動きをすればよいか話し合った。その後、Motion Detector の前で実際に動いて、どのような運動が求めるグラフになるかを検証した。また、うまくグラフができなかったときは、なぜ提示されているグラフのようにならないか話し合った。このことによって、事象とグラフを直接結びつけて考え、グラフ表現と実際の運動を対応づけられるようにした。また、グラフ上の時間に伴った位置の変化を自分で動いて確認できるようにした。

例えば、図-6 のグラフを示した。動いた結果、図-7 のようなグラフしかできなかった。生徒はなぜ図-6 のようなグラフができないのか話し合い、急に曲がっているところが急に速度が上がっていることに気づいた。そして、グラフが曲がっているところを急に速度を上げて動こうとしたが、容易にできないことに気づいた。

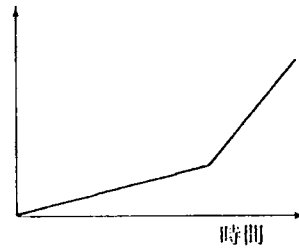


図-6

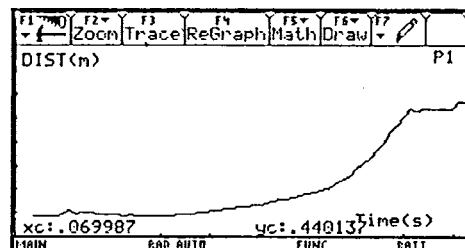


図-7

なお、以上の2時間の授業を通して観覧車の場面は扱わなかった

## (2) 事後調査の結果

事後調査の結果は次に示すようであった。

高1 (39人)

a. 0人    b. 33人    c. 0人    d. 6人  
0%        85%        0%        15%

高2 (23人)

a. 2人    b. 15人    c. 0人    d. 6人  
9%        65%        0%        26%

## 5. 考 察

事後調査の結果、正答者は1年生では54%から85%に、2年生では35%から65%に増加した。また、d)を選んだ生徒は1年生では44%から15%に、2年生では52%から26%に減少した。全体で約25%の生徒がd)からb)に考えを変えた。直接観覧車を取り上げていないにもかかわらず、考えを変えた理由として、授業で扱われた次のことが指摘できる。

- ・ CBLで運動をグラフ化すると時間に伴って右に進むグラフしか表示しなかった。「時間は戻らない」という生徒の発言もあった。
- ・ 事象において変数的な見方ができるようになった。つまり、左右に運動してもデータは取れなく、Motion Detectorからの距離のみが変数であるという見方ができるようになった。
- ・ 自分の運動が自動的に測定され、グラフになり、その運動を分析したことで、事象(運動)とグラフを直接結びつけて考えるようになった。
- ・ こちらで提示したグラフ上の時間に伴った位置の変化を自分で運動してそうなるかどうかを確認したことで、グラフから事象における運動を想起できるようになった。

d)からb)に変わった生徒は今までは事象の変数的な見方ができておらず、関数関係を明確に把握できなかった。しかし、CBL, CDAを用いた授業を行ったことによって、変数的な見方を根拠にして考えることができるようになった。その結果、ミスコンセプションを表出させる観覧車の問題を扱うことなく、この問題に対してはグラフに

視覚的イメージを投影すべきではないと考えるようになり、このミスコンセプションを解消できたと考える。

本研究では運動の視覚的イメージをグラフに投影するミスコンセプションが高校生にも多数存在することがわかった。従来の指導であれば、このミスコンセプションを解消するために、事象→表→グラフのように表を媒介にし、実際に観覧車の高さのデータを直接取り上げる。しかし、本研究ではCBL, CDAを用いることで、関数関係をより明確に把握できるようにして、観覧車の問題を扱うことなくミスコンセプションの解消に効果をあげた。このことからCBL, CDAは関数関係の理解に効果のあるテクノロジーであると言える。

## 謝 辞

筑波大学附属坂戸高校坂本康之先生、同高青木猛正先生には授業の実施に協力を頂きました。筑波東中学校小林力先生、筑波大学附属中学校大根田裕先生にはコメントを頂くことができました。これらの方々には厚く感謝の意を申し上げます。

## 注

- 注1) 本研究は、文部省科学研究費(No. 70212967/代表者 磯田正美)による研究の一環として行われた。
- 注2) CBLはTexas Instruments社, CDAはCASIO社の商標である。
- 注3) 本稿で「視覚的イメージ」とは運動の実際の様子・映像といった意味のみで扱う。
- 注4) 本研究で対象にしたミスコンセプションはテクノロジーを用いることによって解消に効果があったが、このことによって新たなミスコンセプションが生じる余地があることにも注意しておかなければならない<sup>6)</sup>。

## 参 考 文 献

- 1) Clement, J., "Algebra word problem solution: thought processes underlying a common misconception" *Journal of Research in Mathematics Education*, vol. 13, No. 1, 1982, pp. 16-30
- 2) Clement, J., "The Concept of Variation and Misconceptions in Cartesian Graphing" *Forcus on Learning Probrems in Mathematics*, vol. 11, No. 2, 1989, pp. 77-87

- 3) Dyke, F. V., "Relating to Graphs in Introductory Algebra" *Mathematics Teacher*, vol. 87, No. 6, 1994, pp. 427-432, 438-439
- 4) Leinhardt, G., Zaslavsky, O., Stein, M. K., "Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching" *Review of Educational Research*, vol. 60, No. 1, 1990, pp. 1-64
- 5) Neshier, P., "Toward an Instructional Theory: the Role of Student's Misconception" *For the Learning of Mathematics*, vol. 7, No. 3, 1987, pp. 33-40
- 6) Tall, D., "Different Cognitive Obstacles in a Technological Paradigms" *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*, Research Agenda for mathematics education NCTM, 1989, pp. 87-92
- 7) 磯田正美, 志木 廣, 山中和人, 「関数の活用の仕方と表現技能の発達に関する調査研究」日本数学教育学会誌 数学教育, 第 72 巻, 第 1 号, 1990, pp. 48-63
- 8) 磯田正美, 「関数を調べる活動の復権」筑波大学数学教育研究室 学校数学におけるテクノロジーの活用法の開発に関する研究, 1995, pp. 34-43
- 9) 磯田正美, 多様な考えを生み練り合う問題解決授業, 明治図書, 1996, pp. 7-35
- 10) 杉山吉茂, 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導, 東洋館出版社, 1986
- 11) 原田耕平, 「学校数学における子どもミスコンセプションの同定と克服」日本数学教育学会誌 数学教育学論究 第 73 巻, vol. 55, 1991, pp. 3-15
- 12) 「テクノロジーを用いた実験・観察アプローチ」明治図書 教育科学 数学教育, 1996, No. 458-469
- 13) 真鍋達貴, 「分数及びその計算手続きの意味の理解に関する認知科学的研究 (1)-(6)」高知大学教育学部研究報告, 1991-1995, Series 1, No. 43, 44, 46, 47, 49, 50
- 14) 森本 明, 「グラフ電卓の利用可能性について」筑波大学数学教育研究室 学校数学におけるテクノロジーの活用法の開発に関する研究, 1995, pp. 50-55