論　説

関数グラフソフトを用いた教授・学習過程の分析*

―― 教授学的状況理論の視点から ――

宮　川　　健**

要　約

本稿は，関数グラフソフトやグラフ電卓を利用した，一見同様の学習活動が展開されると思われる2つの問いを，教授・学習過程から分析し，それぞれの特質がいかに共通し，いかに異なるか明らかにすることを目的とする．理論枠組みには，フランスの数学教授学の基本理論の1つとなっている「教授学的状況理論」を用いて分析を進めた．その結果，授業展開はどちらも教授学的状況理論における様々な「場」に対応し共通する可能性が高いが，「亜教授学的状況」と「教授学的契約」の視点から2つの問いを用いた教授・学習過程の特質が非常に異なることがわかった．さらに，2つの問いが学習対象とする知識も異なることが明らかになった．

キーワード：フランス数学教授学，教授学的状況理論，教授学的契約，関数グラフソフトGRAPES，グラフ電卓，探究活動

1．はじめに

問1：$y = ax^2 + bx + c$ の係数 a，b，c のひとつの値を変化させたとき，グラフの変化で気づいたことはなんですか？

問2：次は2次関数のグラフです．代数式 $y = ax^2 + bx + c$ の係数をGRAPES[1]を用いて求めましょう（図1）．

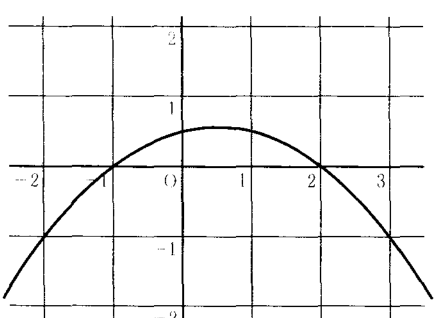

図1：2次関数のグラフ

どちらの問いも，関数グラフソフトやグラフ電卓などのテクノロジーが発展したことによって可能になった問いであり，よく知られた問いである．前者における探究の重要性は，NCTMのStandards（NCTM, 2000, pp.299-300）などでも触れられており，わが国においてもその実践研究が行なわれている（例えば，佐伯ほか編著，1997）．一方後者は，グラフ電卓を用いて様々な絵を描く実践事例が報告されているもの（中込，1996）のシンプルな例である[2]．どちらも，高等学校の2次関数の領域で取り扱うことのできる問いである．それぞれは，一見，同じ操作的な探究活動を可能にし，そこで鍵となる知識（$y = ax^2 + bx + c$ における係数 a，b，c の役割）も同じ様に見える．印象的には，問1の方が生徒の活動を豊かにし，わが国ではよい授業例に取り上げられそうな問題である．しかしながら，本稿で取り上げる「教授学的状況理論」の視点からすると，この2つの問いは非常に異なり，さらに必ずしも問1の方がよい問題とは言えない．

そこで本稿では，関数グラフソフトやグラフ電卓を利用したこの2つの問いを，教授・学習過程

*平成18年12月5日受理、平成18年12月11日決定
**ミシガン大学教育学部

に焦点をあてて分析し，それぞれの特質がいかに共通し，いかに異なるか，具体的に明らかにしたい．このことは，新たな教授法や教育における規範を提起するわけではなく，ある優れた実践事例を紹介するわけでもない．関数グラフソフトやグラフ電卓を利用した際の教授・学習のメカニズムの解明をめざすことの一環として，それぞれの問いを用いた教授・学習過程のメカニズムをより科学的に分析し，その相違を説き明かす．これにより，日常の授業を見直し，改善する上で有益な，新たな視点を与えてくれると期待する．

本稿の分析においては，フランスの数学教授学の基本理論の1つとなっている「教授学的状況理論」を理論枠組みとして採用する．その際，教師と生徒それぞれの認知活動等を分析の対象とするのではなく，2つの問いが提起される授業の状況・場を分析の対象とする．想定する学習者は，2次関数の導入が既習の生徒である．

2．理論枠組み：教授学的状況理論

以下に，まず分析の道具として利用するブルソーによる「教授学的状況理論（Theory of didactical situations）」[3]を示す．

(1) はじめに

Brousseau（1997）の研究は，科学的な視点から数学の教授・学習の現象を捉え，その現象の背景にあるメカニズム・規則性を理論化・モデル化することを試みた．それは，単なる現象の経験的な記述ではなく，その現象を引き起こす要因を探り，モデル化した．このことはしばしば物理現象に対する古典力学の役割に喩えられる．古典力学は，ある物体が放り投げられた際の，その軌道を記述するのではなく，その軌道を生成するメカニズムを理論化した．ブルソーは，数学の教授・学習の現象においても同様のことを試みたのである．したがって，教授学的状況理論は学習の規範を定めた学習理論ではなく，現象のメカニズムを解明するための理論，知識体系である．

(2) 学習・教授の前提と亜教授学的な状況

今日わが国の算数・数学教育において，構成主義的な学習の考え方が広く受け入れられているようである．たとえ「構成主義」という言葉が用いられなくとも，子どもが中心となる学習活動が重視され，子どもが自ら学び自ら新たな知識を獲得していくことが推奨されている．この点は，まさに構成主義の考えに基づいていることを示している．教授学的状況理論もこの構成主義の考えに基づいた教授・学習の場面をモデル化した．

これまでピアジェによる構成主義は様々に解釈されてきたが，その原理は非常にシンプルなものである．教授学的状況理論では，次の原理のみを学習の前提として採用する．

「主体は矛盾や困難，不均衡を生成する環境（milieu）に適応しながら学習する」（ibid., p.30）

この構成主義的な前提は，行動主義のそれとは相反し，知識を獲得することは学習者が自らの知識を構成することであると考える（cf. Balacheff, 1990, p.258）．つまり，外から知識が与えられ新たな知識が学習者の既得知識に積み重なると見るのではなく，既得知識を再構築しながら新たな知識が構成されるとする．ピアジェの言葉を用いれば，これまで学習者がもっていたシェーム（scheme）が「環境（milieu）」に適応（同化と調節）しながら，再構造化・再組織化されるとみなすのである（Piaget, 1975）．

学習の前提は，教授学的状況理論において基準となる学習形態を定めたものである．ここで鍵となる概念は「環境（milieu）」（以下，鍵括弧付きの環境は“milieu”を示す）の概念である．ブルソーはこの概念を学習者が何らかの働きかけをすればそれに対し何らかの情報やフィードバックを与えるものとし，「環境」は「知（savoir）もしくはその側面のひとつに固有の環境のみをモデル化する」（Brousseau, 1990, p.312）枠組みであるとする．ここで言う「環境」とは不変なものではない．「環境」は，学習者によって異なり，教授・学習の過程によっても異なり変化するものである．

一方，学習の前提には，教育的な側面，教師の役割が含まれていない．そこでブルソーは上述のような学習を引き起こす際の教師の必要性をあげる．数学教育においては学習者により学習されることが望まれる数学知識が存在する．その知識の獲得には教師の存在が不可欠とし，以下のような

教授の前提を設ける.

「教授意図のない環境（milieu）は，我々が主体に獲得するよう望んでいる知識を主体に引き出させるためには，明らかに不十分である」(Brousseau, 1997, p.30)

これら学習の前提と教授の前提を満たす状況は，以下のように図式化される.

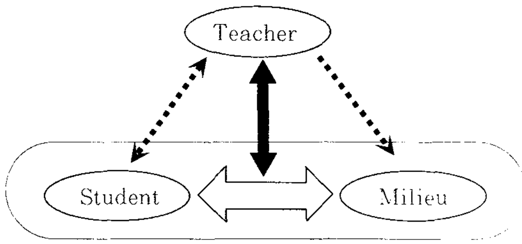

図2：cf. idem., p.56

図2は，学習者が「環境」との相互作用により自ら知識を獲得し，教師による働きかけがおこなわれているものの，学習者にとってはあたかも教師が不在であるかのように自ら学習している状況を示している．このような状況を「亜教授学的状況（adidactical situation）」[4] と呼び（idem., p.30），その際の「環境」を「亜教授学的な環境」と呼ぶ．また，「環境」という語を用いてこの状況を説明すれば，学習者が教師の要求ではなく，「環境」の要求として，対象となる概念との関係を形成し，その関係を改善できるような状況を示す.

(3)　教授・学習における様々な場

教授学的状況理論では，ある数学知識の教授・学習の異なる過程を特徴付けるために，数学の発展の過程を参照し，以下の4つの必要となる「場(situations)」を定めている（idem., pp.3-18).

○活動の場（situation of action）
学習者が与えられた課題を達成するために考え，「環境」に対して働きかける場.「環境」が亜教授学的であることが求められる.

○定式化の場（situation of formulation）
学習者が活動の場において明確ではなかった考えやストラテジー，仮説を定式化する場.

○妥当性判断の場（situation of validation）
学習者が定式化の場において定式化されたものの有効性・妥当性を評価・検証する場.

○制度化の場（situation of institutionalisation）
教師が妥当性判断の場で得られた数学的な概念や定理，定義などを共通の知識として教室内で共有化する場.

また，授業の分析において重要となる要素として「委譲（devolution)」（idem., p.31）の概念がある.「委譲」とは，教師が生徒を亜教授学的状況に入れる過程である.

(4)　教授学的契約

ブルソーは構成主義に基づいた教授・学習の状況をモデル化するにあたって，いくつかの重要な概念を導入している.「教授学的契約（didactical contract)」はそのひとつであり，数学を教授・学習対象とした場における数学概念を介した教師と学習者の関係を示すものである（cf. idem., pp.31-32, 227-249；宮川，2004).

「教授学的契約」とは，ある状況において，学習対象に対してほぼ全てを知っている教師とまったく知らない学習者が存在し，教師が数学のある内容を教えようと考え，学習者が教師の教えようとする内容を学習しようと考えることで自然に生じる関係である．つまり，教師と学習者との相互期待の関係において生じる.

一般に，構成主義的な学習をめざすのであれば，学習者は学習対象となる数学を自ら発見し，その意味を自ら構築することが望まれる．そのため，教師が学習者に発見すべきことを直接伝えてしまえば，構成主義的な学習は成り立たない．しかし一方で，教育である以上，教授すべき対象が教師によって設定されており，学習者が設定された学習目標に到達できるようにする必要がある．ここには，学習者が発見すべきことを直接伝えることはできないが，かと言って学習者が主体的に活動し学習目標から逸脱することもできない，といったある種のジレンマが存在する.

このジレンマにおいて問題となる教授学的契約が生じる．教える者と学ぶ者が存在し，さらに構成主義的な学習をめざせば，学習者が教師の期待しているものを探る活動が生じる．なぜならば，授業において発見すべき内容は，教師が定めるからである．教師の期待を探った結果，問題を解決することにおいて，問題場面の必要性からではな

く，教師の期待に応える必要性から，期待されている方法を用いて期待されている解答を導き出し，さらに得られた結果の妥当性判断が教師に委ねられる．つまり，発見した結果に対し一定の責任が持てるような活動を構成主義的な学習ではめざしているにもかかわらず，結果の妥当性を教師に判断してもらわなければならないのである．これでは，ある数学概念の意味を自ら構築する構成主義的な学習がなされたとは言えない．

このように，学習者と教師という非常に異なる性質をもつ者が存在するために，数学的な活動が行なわれず，用いられた方法や得られた結果の意味が変わってしまう．これが，教授学的契約を問題とする場面である．

しかし一方で，この相互期待が授業で起きないようにすればよいものでもない．相互期待の関係が切れてしまうことにより，学習者が教師の期待するものに取り組まず，何をすればよいかわからなくなったり，自分勝手に学習を進めるようになってしまえば，それは教育から逸脱してしまう．これは「契約の断絶（breaking of the contract）」(Brousseau, 1997, p.32）と呼ばれる現象である．

教授学的契約の概念は，学習活動を評価する際に非常に便利な道具であり，特に構成主義に基づいた学習を成立させるためには，この視点が非常に重要になる．反対に，これを考慮しないと，数学教育学の研究においても，数学教育の実践においても，学習者が与えた解答が教師の期待に沿ったものであった場合に，本当に自らの問題意識の必要性から生じたものかどうか，誤った評価・判断につながりかねない．表面的には構成主義的な学習と見えても，実は教師が主体となり，解答の妥当性が教師の権威によって保証される学習になってしまっていることもある．

(4) 学習対象となる数学知識

前述のような教授・学習の場において，学習対象となる数学知識はいかに位置付けられるべきであろうか．まず，ブルソーは，いかなる数学知識にも，それに意味を与えるひとつもしくは複数の亜教授学的状況が存在する（idem., p.30）ことを前提に置く（「認識論的前提（epistemological hypothesis)」と呼ばれる）．そして，構成主義的な学習が生じ，学習されるべき対象や概念に自ら意味を与えるためには，その概念が活動における必要性から生じなければならないとする．この学習者の活動をブルソーは「ゲーム（game)」という語でモデル化する（idem., pp.47-54）．学習者には教授・学習の過程で取り組むゲーム（課題）があり，そのゲームに勝つために最善の方法・ストラテジーを見つけるための手段として数学知識が表出するのである．実際，活動に必要のない概念には学習者自ら意味を与えることはできない．したがって，教師は，学習されるべき対象・概念を必要とするゲーム，その必要性を学習者自ら感じることのできるゲームを提起する必要がある．

3．分析の準備

本章では，次章以降の分析の準備として，前出の問1と問2が学習対象とする2次関数のグラフにおける係数の役割を確認するとともに，分析の対象を明確にする．本稿での分析は，2つの問いそのものよりも，むしろこれらを用いた際の教授・学習過程を，その対象とする．その際，学習者として2次関数の導入が既習の生徒を想定する．

(1) 係数の役割

問1と問2は，ともに代数式 $y=ax^2+bx+c$ の係数を変化させた際に，グラフの特徴的な変化を学習者が自ら発見し，係数のグラフ表記における役割を把握することを学習対象としている．係数の役割には，グラフの変化を一見するだけで判断できるものから，そうでないものまで様々ある．以下，その一部をあげる．

A_1 : a が正であれば，放物線が上（y 軸正の方向）に開く

A_2 : a が大きくなれば開き具合が小さくなる

A_3 : a が0に近づくと開き具合が大きくなる

A_4 : a の変化により頂点が直線運動する

B_1 : b の変化により頂点が放物線運動をする

C_1 : c を動かすとグラフが上下（y 軸方向）に動く

C_2 : グラフは（0, c）を必ず通る

A_4 と B_1 以外は，2次関数のグラフの概形を予想するために有用な基本的性質である．A_4 と B_1 は概形を予想するための性質ではなく，数学の他概念との関連を示した発展的性質である．

(2) 分析の対象

分析の対象を規定するために，我が国における探究型の授業展開の典型を示し，2つの問いをその典型に当てはめる．そしてその教授・学習過程を次章以降で分析する．

① 探究型の授業展開の典型

授業展開の典型を示すことは容易ではないが，本稿では，近年の授業ビデオを用いた研究において示されているわが国の授業の典型を参考にする．Stigler & Hiebert（1999）やShimizu（1999）では，日本の授業展開の典型として次のような段階を同定している．

－問題の提示
－生徒による問題解決
－解決方法についての全体での議論
－教師によるまとめ

生徒の活動が探究型の場合，2番目と3番目の活動において，個人もしくは全体での探究・予想・確認・証明といった活動が含まれるであろう（cf. 佐伯ほか編著，1997）．このことを考慮し，本稿では，探究型の授業展開を次のように捉える．

1．問題提起
2．探究活動
3．発表
4．確認・証明
5．まとめ

第4段階の確認・証明においては，教室全体での議論のみではなく，生徒個人による確認・証明も含む．

② 問1を用いた授業展開

上記の授業展開の段階に問1を用いた場合を当てはめてみると，以下のようになる．ここでは，次章での分析を簡潔にするため係数aの役割に関してのみ課題が提起されたとする．

1．問題提起：「$y = ax^2 + bx + c$ の a の値を変えてできる複数のグラフからわかることを，できるだけたくさん見つけよう」という課題が与えられる．
2．探究活動：生徒はGRAPESを用いて係数 a を変化させ，与えられるグラフの性質を探究する．
3．発表：発見・予想されたことを生徒が示す．例えば，上記の $A_1 \sim A_4$ C_2 など．
4．確認・証明：前段階で得られたもの，頂点の性質の場合であれば，GRAPESの残像機能[5]や予想される直線のグラフを描くことによる確認，さらにその証明．
5．まとめ

このような展開を示す探究型授業の実践研究は数多く推進されてきた．特にここでは佐伯ほか編著（1997，pp.130-138）で扱われていた問題を利用した．授業展開もほぼ同様であることがわかる．

③ 問2を用いた授業展開

同様に，上記の授業展開の段階に問2を用いた場合を当てはめてみると，以下のようになる．

1．問題提起
2．探究活動：生徒は係数 a，b，c のいずれかを変化させ，与えられたグラフが得られるよう試行錯誤する．上で示した例では，グラフが1つのみ与えられているが，通常は複数与えられるであろう．
3．発表：教師は問いの解決方法とその理由を生徒に尋ねる．
4．確認・証明：係数を変化させた際のグラフの特徴の理由の妥当性を探る．
5．まとめ

問2を解くためには，係数 a，b，c を変化させ，与えられたグラフを描画できるよう試行錯誤の探究を繰り返す必要がある．この探究は，グラフ描画における係数のそれぞれの役割の発見を狙いとしている．

4．教授・学習過程の分析

上記のような過程で展開される授業は，教授学的状況理論を援用すれば，いかに捉えることができるだろうか．以下，まず問1と問2に共通する授業展開を「教授・学習における様々な場」の視点から分析し，その後，それぞれの問いを用いた教授・学習過程を「亜教授学的状況」「教授学的契約」「学習対象となる数学知識」それぞれの視点から分析する．

(1) 授業展開

前章では，問1と問2を探究型の授業展開に当てはめてみたが，どちらも同じ過程を経ることが

可能のようである．さらに，これらの段階は教授学的状況理論で示された様々な場に対応する．そもそも，探究型の授業展開に限らず，最初に示した日本の授業展開の典型は，教授学的状況理論の教授・学習過程に非常に類似している．このことは，日本の小学校の授業ビデオを教授学的状況理論から分析した Miyakawa（2006）からも窺われる．そのため，探究型の授業展開においては，理論枠組みで示した様々な場が備えられている．

そこで，すでに明らかかもしれないが，探究型の授業展開と教授学的状況理論における場との対応関係を簡単に確認する．

第1段階の「問題提起」は，問いを生徒に説明する過程であり，教授学的状況理論の言葉を用いれば，ゲームのルールを生徒に示し，生徒はゲームのゴールを把握する過程である．この段階は「委譲」の過程である．第2段階の「探究活動」は，生徒が自らの課題・問題に取り組む「活動の場」である．第3段階の「発表」は，前段階で発見されたものを教室全体に示す過程である．前段階では不明瞭であったことも全体に示すため，定式化する必要がある．この段階は「定式化の場」である．第4段階では，前段階で得られたものが実際どの程度妥当性があるか確認し，証明する．「妥当性判断の場」[6] である．第5段階「まとめ」は，授業で学習した知識を共通のものとする場であるため，「制度化の場」である．

(2) 問1の教授・学習過程の分析

① 亜教授学的状況の視点から

問1の第2段階「探究活動」では，教師は介入せず，生徒が自ら取り組む．「係数を変化させ，グラフからわかることを見つける」というゲームが生徒に与えられている．ゴールがグラフの変化や規則性を発見することであるため，どのような発見であっても本来は構わない．様々な性質が発見されるであろう．ここでは，生徒の行為に対してGRAPES等からなる「環境」がグラフを視覚的に与える．では，この場は亜教授学的状況になるだろうか．その条件には「環境」が生徒の行為へフィードバックを与えることがある．フィードバックは学習者自らの予想と得られた結果の隔たりによって生じる．したがって，亜教授学的状況になるためには「環境」が生徒の予想に反する結果を与えなければならない．

係数aを変化させた場合に，複数の放物線からA_1, A_2, A_3, A_4の性質のいずれかを予想した場合を考える．生徒の次の行為は係数aの値が異なる別の放物線を描くことであろう．ある代数式を入力し新たに放物線を得る．その際，新たな放物線は予想との隔たりを生じさせるであろうか．答えは否である．なぜならばA_1, A_2, A_3, A_4いずれの性質もこのゲームにおいては正しい性質であり，係数aを変化させた場合にすべての放物線に当てはまる性質だからである．A_1, A_2, A_3, A_4以外の性質を予想することも可能だが，得られた性質が複数のグラフの関係を描写することによって得られるため，その多くがこのゲームにおいては正しい性質となる[7]．したがって，新たなグラフは予想を確認するための情報とはなるが，フィードバックにはなりにくい．換言すれば，この場は亜教授学的状況にはなりにくい．

一方，第4段階で想定される確認の活動を生徒自らおこなった場合は，「環境」からフィードバックが得られる可能性はある．つまり亜教授学的状況になる可能性があるのである．例えば，A_4の放物線の頂点の変化に関する性質において，明確にある特定の直線を予想し確認する場合である．そこで$y = -3x+1$のグラフを描いた場合（正解は$y = -2x+1$），生徒は得られた直線が放物線の頂点を通らないことを視覚的に把握できるであろう．この場合，予想された直線と実際に描かれた直線との隔たりが，「環境」からのフィードバックとして生徒に与えられる．これは亜教授学的状況である．しかしながら，この活動は問1で表出する可能性は十分あるが，むしろ問2の所与のグラフの代数式を求める活動に近い．

以上のように，問1の教授・学習の過程においては，「環境」が情報を与えるが，生徒の行為へのフィードバックは必ずしも与えないため，亜教授学的状況にはなりにくいことがわかる．

② 教授学的契約の視点から

教授学的契約の視点から，問1を用いた教授・学習過程はいかに分析できるであろうか．第2段階において「環境」が亜教授学的でない場合，教

授学的契約に関する問題が生じる．問1において教師が期待するのは，当然ながら数学的に意味のある性質であろう．しかし「数学的に意味のある性質」に対する知識がなければ，発見した性質が期待されているものかどうか判断できない．さらにグラフの変化には様々な性質があり，数学的に表現されるとは限らない．例えば，「a を動かしたらグラフがすごく変化しました」とある生徒が答えたとすれば，これはゲームの趣旨からすれば間違いではないが，期待された性質ではない．ここでは，「どのような性質を発見すべきか」という問いにおいて，生徒と教師間の教授学的契約が問題となる．つまり，生徒はいかなるグラフの変化をも教師が期待しているとは考えず，教師が期待するグラフの変化や規則性を探すことが発生する．

第3段階の「定式化の場」において，前出の例のように数学的な性質が見られない回答に対しては，それが教師の求めるゴールではないため，教師からの働きかけが不可欠になる．例えば，「“すごく”じゃわからないからもう少し正確に言うと？」や「数学的に言うと？」，さらには「他には何が言えますか？」など，生徒の行為に対するものである．この働きかけは，「どのような性質を発見すべきか」という問いにおいて教師と生徒の間に契約の断絶があり，教師が生徒にネゴシエーションしていると捉えられる．つまり，教師は発表された様々な性質を取捨選択し，目標とする性質に生徒が焦点を当てることができるように導いている．

しかし，教授学的契約の視点からすれば，これらの教師の働きかけは，「数学的に意味のある性質」という生徒が自ら発見すべき（構成主義の視点からすれば）ことがらにおいて，教師が「それは数学的ではない」と働きかけていると捉えられる．教師がある数学知識を生徒に学習してもらおうと期待していれば，その期待に応じて重要視される性質とそうでないものが存在することは自然である．しかしながら，生徒にとっては，その取捨選択は必ずしも明確ではない．なぜならば，その性質の必要性・重要性が，生徒自身の活動の中から出てきたものではないからである．つまり，その重要性は教師による選択という権威によってもたらされているのである．

教授・学習のすべての段階を通して，問1は教授学的契約の問題が生じやすいと判断できる．生徒が「どのような性質を発見すべきか」という問いにおいて，確固たる回答をすでに持っており，生徒にとって活動の目的が明確であれば，教授学的契約に関わる問題は比較的生じないであろう．反対に，生徒が何に焦点を当てればよいのかわからない状況であれば，それはまさに教授学的契約が断絶している状態である．

③　数学知識の視点から

問1を用いた活動において，生徒はいかなる数学知識が必要となるであろう．問1がオープンな問いであるため，「活動の場」では，第3章(1)で示した性質の中では，A_1 から A_3 そして C_2 と係数 a に関わることであれば，すべて発見される可能性がある．その際，それぞれの性質にはヒエラルキーは存在しない．しかし，上記の「数学的な性質」という基準が導入されれば，重視される性質とそうでない性質が出現する．つまり「数学的な性質」に関する知識がここでは必要になるのである．一方，いかなる性質に数学的な意味があるのか，その問題意識を学習者が持つことは容易ではない．そのためには，ある数学的な性質に意味を与える状況を学習者に提供する必要がある．

第4段階の確認においは，焦点が当てられる性質によって必要となる知識が異なる．A_4 の頂点の性質を直線を描いて確認する場合，1次関数のグラフを代数式から求めるための知識が必要となる．さらに，証明が求められれば，代数的に証明する過程で代数計算の知識が必要となる．問1では頂点の性質のみでなく接線に関わること（佐伯ほか編著，1997，pp.40-44）などにも発展でき，その際に利用される知識は，また異なったものとなる．

(3)　問2の教授・学習過程の分析

①　亜教授学的状況の視点から

問2の第2段階「活動の場」では，生徒はゲームに勝つ（一致するグラフを求める）ために係数を変化させる．この際，係数の変化の手続きにおいて，適切な手続きは，GRAPESが与えるグラフから判断できる．例えば，係数 a に正の大きな値

を与えれば，グラフがy軸方向に開き適切でないと生徒自身で気づくことができる．与えられたグラフに完全に一致する代数式を求めることがゴールであるため，一致していなければ与えた係数の数値が求めるものでないことに生徒は自ら気づくことができる[8]．この場は，生徒の行為に応じて教師ではなく「環境」が生徒へフィードバックを与えており，亜教授学的状況であると言える．

(2) 教授学的契約の視点から

教授学的契約の視点からこの過程を分析すると，特に「活動の場」はゲームのルールを理解していれば亜教授学的になることから，生徒が自ら取り組み考える場となっており，教授学的契約の問題は生じにくい．実際，「活動の場」における探究には，与えられたグラフを描画するといった明確な目的（ゲームに勝つこと）があり，この目的自体は教師によって与えられたものだが，係数の変化によるグラフの特性を認識する必要性は，この問いから自然に生じてくる．つまり，新たな数学知識の獲得と利用が，ゲームに勝つために求められ，教師に求められているのではない．

一方，教授・学習の過程における「定式化の場」「妥当性判断の場」「制度化の場」を引き起こすためには，教師の介入が不可欠であり，そのような場を教師はうまく構築する必要がある．「活動の場」では，問いを解決するため係数を変化させたが，試行錯誤の中で必ずしもどのように各係数を変化させたか明確に認識しているわけではない．「定式化の場」では，与えられたグラフに対して常にもっとも容易に解答を与えることができるように自らの手段・ストラテジーを定式化する必要がある．この場が欠如すれば，ゲームに勝つことのみの活動となってしまい，数学知識は暗黙裡に利用されるが，必ずしも獲得されない．

(3) 数学知識の視点から

問2における教授・学習において，生徒にとってはいかなる数学知識が必要となるであろうか．問2のゲームのゴールは与えられたグラフに一致するグラフを与えることであった．そのため，このゴールに達するために有用なグラフの変化のみが必要となる．第3章(1)で示した変化に伴うグラフの性質においては，主に基本的性質（A_1，A_2，A_3）が必要となる．発展的性質（A_4やB_1）は必ずしも必要ではない．

また，求められたグラフをピンポイントで描くこと，つまりより最適な手段の発見を追求すると，利便性から2次関数の一般形に対して新たな意味を与えることへ発展できる．実際，（−1，0）と（2，0）を通る放物線を求める問2において，$y=ax^2+bx+c$の形は必ずしも便利ではない．問2の場合，$y=a(x-b)(x-c)$が非常に便利であるため，問いに与えられた一般式と比較した上でそれぞれの式に新たな意味を与えることができる．

5．まとめと議論

本章では，前章で得られた分析結果をまとめるとともに，そこから派生する議論をいくつか示す．

(1) 様々な場の視点から

今回の分析において，問1と問2の両者を探究活動の典型に当てはめ，教授学的状況理論を用いて分析を進めた．しかし，問1のようなオープンな問題の場合，問題の解決過程は，学習者による問題発見や問題作り，定式化された問題の解決までをひとまとまりと考える場合も多い（清水, 1998）．その場合，探究の中から出てきた課題に明確な目標を設定し，解決を試みることになる．例えば，問1において係数aを変化させたとき，放物線の頂点が直線を描くことは，学習者は変化するグラフを見ることによって視覚的に発見できるであろう．そこで，数学の視点から本当に直線になることを確かめるには，代数的に頂点の軌跡を求める必要がある．つまり，頂点の軌跡の代数式を求める課題を提起できる．オープンな問題場面から良定義の問題へ移行しているのである．

この教授・学習過程を教授学的状況理論の視点から見ると，最初の探究の過程は課題を学習者が自らの問題として取り組むための導入と捉えることもできる．数学的な性質を自ら発見することによって，発見されたものを個人の脈絡のうちに位置づけているのである．つまり，この探究は委譲の過程と捉えられ，その後さらに代数的に頂点の軌跡を求める活動の場があると考えられる．

(2) 亜教授学的状況の視点から

「活動の場」は，問1では亜教授学的状況になりにくいのに対し，問2では亜教授学的状況になりやすいことがわかった．そのため，問1は教授学的契約に関わる問題が起き易かった．教授学的状況理論の視点からすれば，学習の場において大きな特質が異なることを示している．

(3) 教授学的契約の視点から

教授学的契約の視点から問1と問2の分析結果を見ると，問1は問2と比べて教授学的契約の問題が起きやすい．これは，問1の活動の目的が曖昧になりやすいことに起因する．問1はオープンな問題であるが，授業で扱われる生徒にとってのゲームのゴールがオープンな場合に，教授学的契約の問題が起きやすい．オープンな活動を提案してみたものの，学習者が「なにをすればいいの？」と活動に取り掛かれない反応をよく見かける．しかしながら，オープンな問題が常に契約の問題を引き起こすとは限らない．例えば，オープンエンドアプローチの有名な石の散らばりの問題（島田, 1977/1995; Baker & Shimada, 1997; など）では，教授学的契約の視点からすれば，契約の断絶が生じにくい．なぜならば，石の散らばりを測るといった活動（ゲーム）には明確な目的があり，そこで必要となる知識（面積，円，距離，など）は，学習者が自らの目的を達成するために必要となり生じるものであり，教師の期待や要求から生じるものではないからである．

学習者が自ら意味を構成していく構成主義の視点からすると，教授学的契約は非常に重要な視点である．構成主義的な学習においては，活動に目的があり，その目的を達成するために必要となるものに意味が生じる．つまり，目的に対して必要性が生じる．そして，その必要性があるからこそ用いた概念・道具に意味が構築されるのである．生徒が何に焦点を当てればよいのかわからない状況，教授学的契約が問題となる状況は，目的が不明確であることを示しており，構成主義的な学習にはなりえない．

(4) 数学知識の視点から

問1と問2で必要となる数学知識，もしくは教授・学習の対象とする知識を比較すると，非常に異なることがわかる．

問1においては，第3章(1)で示した性質すべてが表出する可能性があり，さらに示されていないものも表出する可能性がある．また，問1において頂点の性質などに焦点をあてるためには，「数学的に意味のある性質」に関する知識が必要になる．そして，証明が求められれば，代数計算の知識も必要になる．一方，問2においては，(A_1, A_2, A_3) などの基本的性質を用いることが必要である一方，A_5 や B_1 などの発展的性質は必ずしも必要ではない．さらに「数学的に意味のある性質」に関する知識は全く必要ない．また，それぞれの問いからの発展についても，問1では頂点の変化や接線に焦点を当てやすいのに対し，問2では2次関数を代数表記で表す形式に焦点を当てやすい．

必要とされる数学知識の視点からすると，今回取り上げた2つの問いは，対象とする生徒の既習事項が異なると言える．問1は，高等学校のある程度高度な数学の知識を身につけた生徒に適しており，問2は2次関数の導入段階に適した問いであろう．

6．おわりに

本稿では，一見すると共通の数学知識の獲得・利用を対象としていると思われる2つの問いを分析した．理論枠組みとして教授学的状況理論を援用し，教授・学習過程を分析した．その結果，複数の視点から2つの問いの特質が非常に異なることがわかった．さらに，2つの問いが学習の対象とする知識も異なることが明らかになった．

分析では，教師と学習者それぞれを分析したわけではなく，数学知識の獲得を引き起こすであろう問題を教授・学習過程の脈絡の中で分析した．このことは，ある教授・学習の現象を引き起こす要因が，教師もしくは学習者の個人に固有のものではなく，数学・教師・学習者の3者に固有なものであることを示している．これは，まさにフランス数学教授学が研究の基本としている考えである．

謝辞

本稿のテーマは，イスラエル・ワイズマン研究所アブラハム・アルカビ（Abraham Arcavi）教授，筑波大学礒田正美助教授とGRAPESの利用について議論している際に生じ，両先生から多くの示唆をいただきました．また，本稿の草稿段階では，筑波大学青山和裕研究員に貴重なご意見をいただきました．ここに謝意を表します．

本研究は平成17～18年度科学研究費補助金（若手研究（B），課題番号：17700585）の補助を受けて進められました．

脚注

[1] GRAPESは大阪教育大学附属高等学校池田校舎の友田勝久教諭が開発したフリーの関数グラフソフトである．筆者はその英語化に携わった．参照：
http://okumedia.cc.osaka-kyoiku.ac.jp/~tomodak/grapes/

[2] 日常における放物線等の画像をGRAPESの背景に貼り，その代数式を求める実践もしばしば見られる．

[3] 本稿では“situation”の訳を「状況」としたが，「状況」はひとつのある広い状態として捉えられるため，必ずしも適切な訳ではない．ブルソーの理論では，“didactical situations”と教授における複数の場もしくは場面をモデル化しているため，原田（1998）で用いられている「場」の方が適切かもしれない．そこで，理論名の訳語として「教授学的状況理論」を用い，教授学習の段階における個々の“situation”に対しては「場」を用いる．訳語については，今後さらに検討したい．

[4] “adidactical”の訳を「亜教授学的」とした．多くの場合，「亜」は「準ずる」「2番目の」といった意味を持つが，“adidactical”の“a”は必ずしもこの意味ではない．「亜教授学的状況」は，「教授学的状況」の一部として存在し，学習者にとっては教授意図があたかも存在しないかのように思える状態を指す．宮川（2002, pp.65-66）では，「無意識の教授学的状況」と訳したが，ひとつの専門用語として導入するため，この訳を用いないことにした．これは，英語・仏語においても同様の問題が存在し専門用語として導入されていることに起因する．英語・仏語では接頭語の“a”は否定的な意味合いで「非」「無」を意味するが，教授の意図がないわけではない（cf. Brousseau, 1997, p.73）．そのため，新たな専門用語として“adidactical”を用い，“a”の後にハイフンを入れていない（Brousseau, 1998, p.58）．

[5] GRAPESでは，パラメータを含む代数式において，パラメータを変化させた場合，元のグラフの「跡」を残すことができる．

[6]「確認（verification）」と証明などの「正当化（justification）」は，両者とも「妥当性判断（validation）」と捉える（cf. Margolinas, 1993）．

[7]「頂点が円を描く」など正しくない性質を予想することも可能だが，あまり現実味がない．

[8] 実践に際してのコメントだが，生徒に係数の数値とグラフの関係に注目させるためにはGRAPESのパラメータ機能を用いず，代数式を直接入力させたほうがよいであろう．なぜならば，GRAPESのパラメータの値は矢印をクリックすることにより増減でき，必ずしも係数の値に注目する必要がないからである．

参考文献

Balacheff, N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 258-272.

Becker, J-P. & Shimada, S. (1997). *The Open-Ended Approach : A New Proposal for Teaching Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situation in mathematics : Didactique des mathématiques 1970-1990*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

NCTM (2000). *Principle and Standards for School Mathematics.* Reston, VA : NCTM.

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : La Pansée Sauvage.

Miyakawa, T. (2006). A study of "good" mathematics teaching in Japan. In *Proceedings of the APEC International Symposium on Innovation and Good Practice for Teaching and Learning Mathematics through Lesson Study,* 14-17 June, Khon Kaen, Thailand. (printing)

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris : PUF.

Shimizu, Y. (1999). Aspects of mathematics teacher education in Japan: focusing on teachers' roles. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 2, 107-116.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *Teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York: Free Press.

佐伯昭彦，礒田正美，清水克彦（編著）(1997).『テクノロジーを活用した新しい数学教育』. 明治図書出版.

島田茂（1977／1995).『算数・数学科のオープンエンドアプローチ』. みずうみ書房.（新訂版は1995年東洋館出版社より）

清水克彦（1998).「数学教育におけるオープンな問題の概念の再検討」. 筑波数学教育研究. 第17号, pp.69-76.

中込雄治（1996).「グラフ電卓を活用した創作活動が数学の学習に及ぼす効果」. 第29回数学教育論文発表会論文集. pp.535-540.

原田耕平（1998).「代数の学習における生徒のミスコンセプションの克服のための教授法の枠組み」. 筑波数学教育研究. 第17号, pp.127-133.

宮川健（2002).「教授学的状況理論にもとづくコンセプションモデルに関する一考察」. 筑波数学教育研究. 第21号, pp.63-72.

宮川健（2004).「フランス算数教育研究から見た『自ら考え，自ら学ぶ』こと」. 新しい算数研究. No.402, 7月号, pp.38-40.