第 44 回数学教育論文発表会
課題別分科会の部
「授業」の科学的探究：数学教育学におけるその展開と課題

フランス数学教授学の立場から見た「授業」の科学的探究

宮　川　　健
上越教育大学

要　約

本稿では，算数・数学の授業の「科学的」探究とは，いかなる研究課題であり，いかなるアプローチで進められるものか，いかに授業改善へ資することができるか，フランス数学教授学の立場から検討した．具体的には，まず数学教授学の「科学」としての中心的な性格が，その目的及び構築される理論の性質にあることを示し，本分科会のテーマである“「授業」の科学的探究”に内在する 3 つの課題，「理論構築」「授業分析」「授業設計」について検討した．さらに,数学教授学の理論が後者 2 つの課題にいかにかかわることができるか,教授学的状況理論に基づく授業エピソードの分析事例と授業設計の事例（小学校における比例の性質と平行四辺形の性質）を通して，理論の役割を示すとともに，授業実践に対する可能性について述べた．

キーワード： 数学教授学，教授学的状況理論，授業分析，授業設計

1．はじめに

本課題別分科会のテーマは，“「授業」の科学的探究”である．このテーマを検討するにあたり，オーガナイザーより「そもそも授業への科学的アプローチは可能なのか，またもし可能であるとすれば，それはどのようなものか，さらにそのような研究がもたらす知見を授業に資することができるのか」といった問題提起がなされた．ここでまず問題となることは，「科学的探究」もしくは「科学的アプローチ」とは何か，であろう．数学教育学研究において，何をもって「科学」とするか，何を「科学的」と捉えるかは必ずしも明確でない (Sierpinska & Kilpatrick (Eds.), 1998 参照). 今日進められている多くの数学教育学研究は，その目的や方法において，非常に多様である．何らかの理論枠組みや分析ツールが明確に用いられている研究もあれば，そうでない研究もあり，量的な実験データを統計的に処理しているものもあれば，実験データ

を定性的に分析しているものもある．こうした多様な研究において，何を「科学的」とするかは，一概には言えないかもしれない．しかしながら，この問いは，わが国の数学教育学研究の発展において，非常に重要なものであり，数学教育学研究の範疇で十分に検討されるべき事項であると考える．なぜならば「科学」という語の捉え方によって，採用される研究手法や受け入れられる研究の結果が異なるからである．

一方，筆者はこれまで，フランスを起源とする数学教授学（以下，数学教授学）が「科学」としていかなる研究領域であるか考察してきた（拙稿，2009）．数学教授学には独特の「科学」の捉え方がある．そこで本稿では，この数学教授学の立場から，算数・数学の授業の「科学的」探究は，いかなる研究課題であり，いかなるアプローチで進められるものか，いかに授業改善へ資することができるか，検討したい．

２．フランス数学教授学の立場

ここでは，数学教授学の立場から「科学的」の意味を示し，“「授業」の科学的探究”に内在する研究課題を指摘，検討し，それらに対する数学教授学のかかわりについて述べる．

(1) 「科学」としての数学教授学

フランスでは，「数学教授学 (didactique des mathématiques)」と呼ばれる算数・数学の教育を研究対象とする研究領域が 60 年代より発展してきた．数学教授学という研究領域は，創始者のひとりであるブルソーの言葉を借りれば，「人間社会が機能するために有用な数学知識の広がり (diffusion) に固有な条件 (conditions) についての科学」 (Brousseau, 1994) とされる．この数学教授学の目的は，拙稿 (2009) で述べたように，数学知識の広がりの仕組み（メカニズム）を，数学知識の本性に焦点を当てて解明できるような理論体系の構築である．つまり，直接の目的は，数学教育の改善よりも，理論構築である．そして，その理論は一般に以下の性質をもつ．

A. 数学教育という営み（数学知識の広がり）を研究対象として客体化し，教育の実践家（教師や教育課程制定者）の視点ではなく，その営みを外から見る研究者の視点に立って構築される [1)].
B. 価値判断を含まない．「いかに教えるべきか」「何を教えるべきか」ではなく，「いかに数学知識の学習が生じるのか」「なぜ〜が生じるのか」といった問いに対する研究の結果である．
C. 数学教育という営みをありのままに日常言語で記述したものではなく，その背後にある「法則もしくは法則のようなもの」(Chevallard, 1992) を合理的に記述するために作られた，新たな固有の概念や言語からなる．

筆者は，数学教授学の目的及び構築される理論の性質が，この研究領域の「科学」としての中心的な性格であると考える．この性格は，研究方法についてのものではなく，むしろ研究領域の成果についてのものである．一般に，ある研究領域が「科学」であるかを判断する際には，その研究方法の性格が問われることが多い．客観性や厳密性，再現性などを伴う科学的方法を用いて理論や知見の妥当性を示しているか否かである．しかし科学的方法にも種々のものがあり，いずれを「科学的」とするかは多くの議論があるところである（本分科会の清水氏，関口氏の論文を参照）．数学教授学においても，研究の方法論がこれまで議論され，「教授工学 (didactic engineering)」と呼ばれる方法論も構築されてきた (cf. Artigue, 1984; 1992; 拙稿, 2009, pp. 58-59)．しかしながら，筆者は，数学教授学の「科学」としての第一の性格が，目的及び構築される理論の性質にあると考える．なぜなら，多くの自然科学がそうであるように，ある研究領域は理論なしには「科学」にはな

りえないからであり，そこでの理論は価値判断を含まず研究の対象をその仕組み（メカニズム）という視点から記述するものであるからである．

そこで本稿では，数学教授学の研究方法よりもむしろその理論という視点から，“「授業」の科学的探究”について検討する．

(2) 「授業」の科学的探究

“「授業」の科学的探究”という表現，特に「探究」の語は，やや曖昧である．そこでまず，本課題別分科会のテーマである“「授業」の科学的探究”とは，いかなる研究課題であるか,その意味するところを整理しよう．

“「授業」の科学的探究”には，具体的には,探究の目的もしくは成果の種類に応じて，少なくとも3つの研究課題が考えられる．第一の課題は，算数・数学の授業が一般にいかになされるものか，その仕組みや構造を明らかにできるような授業についての理論体系の構築を目的とするものである．この研究課題を本稿では「理論構築」と呼ぼう．授業についての理論構築はまさに，ミクロな視点[2)]から数学教授学の研究課題となるものであり，次節で事例として取り上げる教授学的状況理論は，この研究課題の成果である．

第二の課題は，ある特定の授業において，いかなる学習がいかに生じているか，科学的な理論を用いた授業の性質の説明を目的とするものである．これは，第一の課題と類似しているが，理論ではなく説明を探究の成果とする点で異なる．この課題を本稿では「授業分析」と呼ぶ．

第三の課題は，理論や科学的な知見に基づいて授業を設計することである．ここでは新たな授業が探究の成果となる．この課題を本稿では「授業設計」と呼ぶことにする．

これら3つの課題は，必ずしも明確に区分されるものではなく，相互に強く関連しあうものである．それは，理論構築を目的とする数学教授学の立場からも同様である．数学教授学では，理論の妥当性や有効性を測り，理論をさらに発展させるためにも，第二の課題である授業分析が必要となり，様々な分析事例の蓄積が重要になる．さらに，理論で示唆されることの妥当性判断には，第三の課題である授業設計が必要となる.この授業設計は，Artigue (1992, 1994) が「研究のための工学 (engineering for research)」と呼ぶものである．そして設計された授業は教授実験を通して新たなデータを提供し，第二の課題である授業分析に導く．このように，数学教授学の立場からすれば，第二と第三の課題は，いずれも第一の課題である理論構築という目的のために取り組まれ，さらにそれぞれは相互に深く結びついているものである．

一方，数学教授学の理論構築という目的からやや離れて，より実際的な目的から，数学教授学の理論や知見を用いた授業分析や授業設計を行なうことも可能である．例えばそれは，授業において学習者がいかなる数学知識・技能をいかに獲得しているか，診断もしくは評価を目的とした授業分析や，実践における‘よりよい’授業の開発を目的とした授業設計である.この授業設計は, Artigue (1992; 1994) が「開発のための工学 (engineering for production)」と呼ぶものであり，こうした実際的な目的においても，数学教授学の理論はツールとして有用であり，授業の改善において重要な役割を果たしうると考える.そこで,次節では，実際的な目的の授業分析と授業設計における数学教授学の立場からのアプローチの可能性を，具体例を交えて検討する．

(3) 授業分析と授業設計における理論

具体例を交えた検討を始める前に，数学教授学の理論の性格から，授業分析と授業設計における理論の位置づけを整理しておく．理論が数学教授学の根幹であるとすれば，理論の位置づけを示すことは，これらの課題に対する数学教授学のかかわりを示すことである．

授業という営みは，非常に複雑である．そ

れは，様々な要素の影響のもとに作り上げられ，一つの授業においても様々な側面をもつ．例えば，数学の学習内容，教材，教師の経験や指導の仕方，子どもの授業へのかかわり方，などによって異なった授業となる．また実際の授業においては，子どもの活動，教師の発問・板書，子どもの回答など，様々な側面が観察できる．こうした複雑な営みの中で，授業分析では，何をいかに分析するのか．授業設計では，何をいかに考慮に入れるべきか．

数学教授学の立場からこれらの問いに回答するにあたって，授業分析によって授業の性質を特定する際，また授業を設計する際の視点を明確にしておこう．数学教授学では，「事実 (fact)」と「現象 (phenomenon)」を区別する．これは，数学教育学研究でしばしば「現実の世界」と「数学の世界」が区別される（例えば，島田，1995, p.15）のと同様に，「現実世界」と「数学教授学世界」を区別するようなものである．「事実」は現実世界の経験的に認められる出来事やものを意味し，「現象」は理論やモデルによって認められる事実の背後に存在するものを指す (cf. Chevallard, 1989; Chevallard & Jullien, 1990; Margolinas, 1998)．この立場からすれば，授業において経験的，日常的な視点から観察可能なものが，現実世界の「事実」である．数学教授学の立場からの授業分析では，この「事実」を観察するが，授業において‘見えるもの’，つまり取り上げられる「事実」は，観察可能な「事実」の一部のみである．それは，理論によって意味付けが可能なもの，理論によって「現象」の一部になりうると認められるもののみで，理論によって意味付けされないものは無視される．それは例えば，古典力学という理論を通して，リンゴが落ちるという「事実」を‘見れば’，リンゴの色は理論によって意味付けされないため無視されることと同様である．このように，理論はメガネのような役割を果たし，理論を通すことによって，‘見えるもの’，意味のあるものが限定されるのである．

また，数学教授学の理論を通して‘見えるもの’は，数学知識の広がり（教授や学習の過程）に直接かかわるものである．数学教授学の理論は，拙稿 (2009) で述べたように，数学知識の本性を深く考慮しており，数学知識の状態や変化などについての「現象」の特定を可能にする．この点は，言語学や社会学等の理論を用いる分析とは大きく異なる点である．しかしながら，数学学習にかかわる授業の側面が多様であるため，一つの理論を通して‘見えるもの’は限られている．それゆえ，数学教授学では様々な理論がこれまで構築され，現在も構築されている．別の理論を用いれば，‘見えるもの’は異なり，今後新たな理論が出てくれば，‘見えるもの’はさらに増えるのである．

以上のことから，授業分析で何を分析するのかという問いへの回答は，理論を通して‘見えるもの’を分析する，である [3)]．

一方，授業設計については，ある理論のモデルにもとづき設計を進めることになる．先に述べたように，数学教授学の理論は価値判断を伴わないため，授業設計において，目標となる数学知識の“望ましい”学習過程を理論やモデルの中に規定する必要がある [4)]．そして，それが実際の授業で表出するように，授業を設計するのである．この際，‘設計できるもの’は，理論やモデルに対応しうる「事実」についてのもののみである．これは，授業分析で‘見えるもの’が限定されたことと同様に，授業設計でも‘設計できるもの’は限定されているのである．従って数学教授学の理論が考慮に入れない部分については，経験や感覚にもとづいて実際的な視点から設計するしかない．これは，飛行機やロケットの開発において，自然科学の理論が設計の仕方のすべてを教えてくれないのと同様である．

３．教授学的状況理論を用いた事例

次に，授業分析と授業設計という研究課題に対するアプローチを，具体的な理論と事例を用いて示し，それらが授業改善へいかに資することができるか検討しよう．その理論には，Brousseau (1997) による教授学的状況理論を用いる．また，ここでは，数学教授学の理論構築という目的ではなく，より実際的な目的に基づく授業分析と授業設計とする[5)].

(1) 理論の概要：教授・学習過程のモデル化

教授学的状況理論は，前節の 3 つの“「授業」の科学的探究”の課題からすれば，理論構築を目的に構築されたもので，この理論は，教授・学習の過程を，そこでの数学知識の状態に焦点を当ててモデル化した結果である．以下に，本稿で用いる「学習者とミリュー（環境）との相互作用」と「教授学的契約」についてのみ簡単に紹介する．詳細については，拙稿 (2009) 等を参照のこと．

①　学習者とミリューとの相互作用

教授学的状況理論では，学習者が「矛盾や困難，不均衡を生成するミリューに適応しながら学習する (Brousseau, 1997, p.30)」とし，学習が学習者とミリューとの相互作用によって成立するとする（図 1）．つまり，ミリューに対する学習者の様々な働きかけ (action) に対し，ミリューが様々な情報 (information) を返す．そして，ミリューからのフィードバックにより，学習者が当初もっていた考えやストラテジーを修正することによって学習が起きるとする．この際，学習される数学知識は，与えられた問題を解決するための手段（ストラテジー）として，その必要性・有用性に応じて表出する．

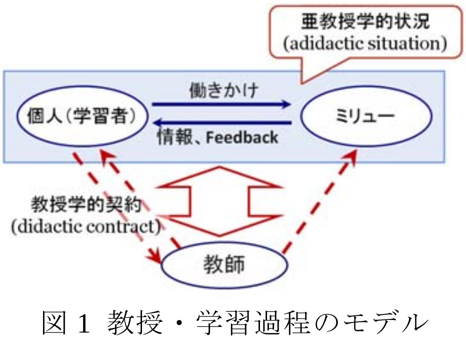

図 1 教授・学習過程のモデル

②　教授学的契約

教授学的状況理論では，発生する数学知識に大きな影響を与える教師と学習者間の暗黙裡のルールを「教授学的契約」という概念でモデル化する．これは，指導内容についてすべてを知っている教師と知らない学習者という，大きく異なる性質をもつプレイヤーが授業に存在し，相互に異なる期待（教えよう，学ぼう）をもつために生じるルールである．この概念を考慮に入れることにより，学習者が，問題の解決の必要性から，ミリューと相互作用を行なった結果として発生した‘真’の数学知識と，教師の期待を探った結果（つまり教授学的契約に従った結果）として発生した数学知識とを見分けることが可能になる．

(2) 授業分析

では，「学習者とミリューとの相互作用」と「教授学的契約」という視点から，いかなる授業分析ができるか示そう．まず，小学校 6 年生の比例単元における局所的なエピソードを紹介する．このエピソードは，比例単元に限らず算数・数学の授業でしばしば見られる教師と子どもとのやり取りを筆者が作ったものである．なお，実際の授業のより包括的な授業分析については，Miyakawa & Winsløw (2009), Miyakawa (printing) などを参照していただきたい．

①　エピソード

小学校 6 年生の比例単元のある授業で，図 2 の針金の長さと重さに関する表が与えられたとしよう．ここでの教師の期待は，子どもたちが自ら比例の様々な性質に気づくことである．そこで，教師は児童に図 2 のプロトコルのように問いかけ，個人追究ののち，教師と児童とのやり取りが始まった．なお，このプロトコルは，簡易化されたものであり，実際の授業ではさらに細かなやり取りも見られるであろう．

針金の長さと重さ

長さ(m)	1	2	3	4	5	6	7	8
重さ(g)	20	40	60	80	100	120	140	160

教師：今日は，針金の長さと重さの関係を示したこの表を調べ，気づいたことをできるだけ沢山あげましょう．

〔個人追究（5 分間）：児童たちは，表で与えられた数字を調べ，数の特徴や数どうしの関係を見つける〕

教師：では，聞いていきましょう．どういうことに気づきましたか？では，A さん．

児童 A：重さの数字が全部 10 の倍数です．

教師：そうですね．他に気づいたことはありますか？

児童 B：長さが 1 ずつ増えています．

教師：そうですね．長さが 1 増えると重さはどうなっていますか？

児童 B：重さは 20 ずつ増えています．

教師：ほんとですね．長さが 1 m 増えると重さはいつも 20 g 増えています．これは発見です．B さん以外にこの規則に気づいた人はいますか？

〔以下，略〕

図 2：表は学校図書『みんなと学ぶ小学校算数 6 年下』（2010, p.40）から

② ミリューとの相互作用の視点から

このやり取りを教授学的状況理論の視点から分析しよう．まず，学習者とミリューとの相互作用という視点からの分析である．

最初に教師が発問した時点で，児童にとってのミリューは，与えられた表と何かを見つけるという課題である. 個人追究で, 児童は，このミリューと相互作用を行なっている．つまり，児童は，ミリューに対し，数字を調べたり，差を調べたりといった働きかけを行ない，ミリューは児童に情報を与える．その情報は，例えば，「20 倍」や「差が 20」，さらに上のプロトコルの児童の発言にも見られる「重さが 10 の倍数」「長さが 1 ずつ増える」などである．そして，これらの情報がここで気づいたものとなる．一方，ここではミリューからのフィードバックは見られない．児童を実際に見ているわけではないが，このことは，教授学的状況理論の視点からすれば，ほぼ断言できる．その理由は，第一に，児童がミリューに働きかける際に，何らかの予想や期待を明確には持たないからである．フィードバックは，自らの予想や期待に反する情報が生じたときにのみ生じる．第二に，児童がたとえ何らかの予想をもったとしても，このミリュー（課題を含む）ではその予想に反する情報を与えることができないからである．例えば，「重さは常に 10 の倍数である」と予想しても，それを覆す情報は図 2 の表などのミリューからは生じえない. こうしたことは，そもそも課題が「表から気づいたことを見つける」というものであり, 表で言えることは，たとえ算数に関係しないことであっても，すべて正しいからである（もちろん，教師が期待しているもの, していないものはあるが).

以上のことから，個人追究の時間には，ミリューとの相互作用は起きているものの，矛盾や困難，不均衡を生じさせるフィードバックが生じておらず，教授学的状況理論の意味での学習は生じていないと言える．さらに，教授学的状況理論では，課題や問題を解決する手段として，その必要性から数学知識が発生するとするが，「気づいたことをあげる」という課題では, 指導内容が, 手段ではなく，見つける対象となっている．そのため，得られた情報の中でいずれが数学的に意味のあるものか，学習者がミリューとの相互作用のみで自ら気づくことはできないのである．

③ 教授学的契約の視点から

個人追究のあと，教師と児童とのやり取りが見られる．この中で特に児童 B の回答は，ミリューとの相互作用のみで生じたものではない．むしろ，教師の期待を探って回答している，つまり教授学的契約の影響を大きく受けていると言える．もちろん，個人追究の際には，ミリューとの相互作用で情報を得ただろう．しかし，得た情報の中で，何を教師への回答とするか，何が重要なのかは，ミリューとの相互作用ではなく，教師の反応から導

いていると言える．なぜならば，先にも述べたように，どの情報が重要であるかは，ミリューとの相互作用では知りえないからである．さらに，児童 B の「長さが 1 ずつ増えている」という最初の回答に対し，教師は「長さが 1 増えると重さはどうなっていますか？」と聞き返している．つまり，この教師の発問によって，児童 B は，最初の回答が教師の求めているものとして十分ではないこと，重さの変化も大事であることを知り，重さについて回答している．児童は，最初から教師の期待している回答を与えれば，「重さはどうなっているか」などと聞かれることがないことを知っているのである．

さらに，教師による児童の回答の扱いは，クラス全体の児童に対しても，教師の期待を探る際の手掛かりを与えている．児童 A の回答に対し，教師は「他に気づいたことはありますか？」と述べた．この際，多くの児童は，「あ，スルーした．正しくないんだ」と認識したであろう．もし正しい回答であれば，そう簡単にスルーされないことを児童たちは知っているのである．

このように書くと，非常にうがった見方をしているように感じられるかもしれないが，教授学的契約の視点からすれば，それは言えることである．また，学習者が教授学的契約の影響を受けた回答を与えるかどうかは，ミリューの性格に大きく依存する．実際，今回あげた事例では，得られた情報の中からいずれが数学的に意味のあるものか判断する必要性を生じさせないミリューであるからこそ，上のような児童の回答が見られるのである．

③　授業分析のまとめ

以上，簡単にだが，「ミリューとの相互作用」と「教授学的契約」の視点から一つのエピソードを分析し，いかなる学習が生じているか示した．ここでは，観察可能なものの一部である，分析において注目される「事実」（‘見えるもの’）を，教授学的状況理論から示唆される教授•学習の仕組みに当てはめ，この特定の授業における教授・学習過程をモデル化している．つまり，自然科学等でもしばしば見られる現実事象のモデル化である．数学教授学の立場からすれば，こうした授業分析が，科学的理論を分析ツールとして用いた‘「授業」の科学的探究’の一つと考える．

(3) 授業設計

次に，教授学的状況理論を用いていかに授業が設計できるか示したい．もっとも本稿で取り上げた概念は，教授学的状況理論のほんの一部でしかなく，これらのみを拠り所に授業全体を設計すると，到底，科学的な知見にもとづいた授業設計とは言えないであろう．そこで，今回は，学習の対象が問題解決の手段として生じるような状況の設計にとどめる．一般的な言葉で言えば，教授学的状況理論にもとづいた教材作成である．

教授学的状況理論では，いかなる数学知識においても，その知識が必要となり，ミリューとの相互作用のみで発生する条件を備えた「基本状況 (fundamental situation)」が存在するという前提を置く (Brousseau, 1997, p. 30). そのため，教授学的状況理論にもとづいた授業設計は，基本的にこの基本状況をもとになされる．ここでは，2 つの事例を示そう．一つは，3 節(1)で示した授業分析の結果をもとに，その授業に基本状況を導入することにより修正を加えたものである．もう一つは，小学校の算数における図形(平行四辺形の性質)の場合の基本状況の例である．

①　比例の性質

先程の分析からすれば，子どもが教師の期待を探るのではなく（つまり教授学的契約に従って行動するのではなく），ミリューとの相互作用によって新たな数学知識（ここでは比例の性質）を用い，顕在化することが適切と判断したとする．つまり，ここには授業設計者による授業に対する価値判断が含まれる．実際的な目的をもつ授業設計では，このよう

な価値判断から授業が設計される．

ここでは，まず比例の性質（定数倍，一定の増加など）が生じるような基本状況を考えればよい．よくある例だが，図 2 の表が与えられているとき 20 m や 152 m の場合などの重さを求める問題は，比例の性質の基本状況になりうる．なぜならば，これらの重さを求めるためには，実際の針金がない限り，与えられた情報から規則性を見つけ，それを適用しなければならないからである [6]．

教授学的状況理論から示唆される基本状況を考慮に入れれば，授業では，教師の発問が「調べてみよう」ではなく，「20 m の針金の重さは何 g でしょう？」となる．この問いにより，重さを求めるために，長さと重さの関係や数値の変化に注目する必要が生じる．おそらく，「9 m では，180 g, 10 m では 200 g ・・・」と 1 m 増えれば常に 20 g 増えるという性質を用いる子ども，長さの 20 倍が重さになっていると気づき， 20 (g) × 20 (m) とする子ども，などが出てくるであろう．

ここでは，教師の期待を探って比例の性質が表出しているのではなく，20 m の重さを求めるという目的を達するための手段として変化の規則が必要となり比例の性質が表出している．その際，情報の取捨選択がなされ，針金の重さを求めるために必要でない情報は注目されない．学習者とミリューとの相互作用の視点からすれば，子どもがミリューの一部である表を調べ，問題の解決に必要な比例の性質を発見し，20 m の場合に適用するといった，ミリューとの相互作用が生じている．これは，明らかに前出のエピソードでの相互作用の仕方とは異なる．さらにこの場合，教授学的契約の影響も少ない．なぜなら重要なのは問題を解決してくれる手段であり，教師の期待を探らずとも，ミリューとの相互作用から判断できるからである．

また，比例学習の初期段階で，子どもたちが自ら関係を見つけ問題を解決するのは，やや難しいとの指摘もあるかもしれない．しかし，教授学的状況理論では，子どもたちの既有知識を総動員し，試行錯誤を繰り返し，仲間と相談したりするなどの問題解決の過程を通して学習が生じる．そうした過程を通すからこそ，最終的に成功に導いた方法（数学知識）が他の既有知識と関連をもち，既有知識が再構成され，新たな知識の有用性と有効性が認識されると考える．そして教師は，こうした過程が教授学的契約の影響をできるだけ受けずに子どもたちに生じるように授業を調整する必要がある．

②　平行四辺形の性質

比例の例は，わが国の実践でもよく見られるものであろう．そこで，基本状況の例をもう一つあげる．小学校第 4 学年で扱う平行四辺形の性質の一つ「向かい合った辺の長さが等しい」を指導対象としたものである．この基本状況は単純なものだが，わが国ではあまり見られない．

教授学的状況理論を用いて授業を設計すると，次のような基本状況が考えられる．図 3 のような破れた平行四辺形において，もとの平行四辺形の周囲の長さを求める問題である．この問題は，破れた所の辺を延長できないことを前提とする．教授学的状況理論の立場の学習では，数学知識は何らかの問題を解決する最適な手段として表出する．そのため，この問題は，「向かい合った辺の長さが等しい」という性質が問題を解決するための手段となり，その手段を見つけるために平行四辺形を調べる活動が生じることを想定したものである．問題の場面設定は，小学校なので，日常の話で，もう少し脚色してもよいであろう．

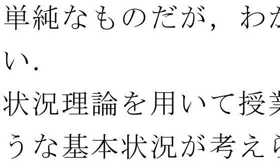

図 3　破れた平行四辺形の周囲の長さは？

具体的には，次のような流れの子どもの活

動が想定され，それをもとに授業を設計することになる．完全な平行四辺形であれば，すべての辺の長さを測ればよいが，破れているために,別の方法を探る必要がある.しかし，ここでは平行四辺形の性質を知らないことを想定しているため，与えられた図のみで問題を解決できない．そのため，平行四辺形について一般に言える性質が何かないか，定規やコンパスを用いて他の破れていない平行四辺形を調べる活動に至る．調べる活動では平行四辺形の様々な性質を探ることになるが，最終的には，その中でも当初の問題を解決できる性質（向かい合った辺の長さの性質）が特別な意味をもつことになる．その意味とは，この性質の有用性であり,他の性質との関係，平行四辺形の周囲の長さとの関係などである．

教授学的状況理論の言葉を用いれば，学習者は，まず図３の図を主とするミリューと相互作用する．しかしそこから向かい合う辺の性質は発生しない．そこで，ミリューに他の複数の平行四辺形を含め，それらを調べるというそのミリューとの相互作用の結果，この性質が発生すると考える．ここで，大きな問題は，他の平行四辺形をいかに学習者のミリューへ組み込むかであろう．通常，小学校では，「与えられたものは問題を解決するのに十分である」という教授学的契約が存在していることが多い.この契約の影響が強ければ,児童が新たな平行四辺形を自らミリューへ組み込むことはないであろう．その場合，授業において，破れた平行四辺形の問題を扱う前の段階で，複数の平行四辺形が板書されるような活動を行なうように授業を設計し，複数の平行四辺形がミリューに組み込まれやすくするなどの工夫が必要になる．

③　授業設計のまとめ

以上は教授学的状況理論を参照した授業設計の一部である.特に基本状況に焦点を当て，学習者がある問題を解決する手段として目標となる数学知識が表出するような授業設計がいかに進められるか示した．ここでは，「基本状況」というモデルが，ある特定の数学知識の場合に適用され，それをもとに授業が設計されている．その際，基本状況を具体的な問題として実現したのち，理論の視点から生じる活動を導き出し，それに応じて授業を設計していく．ここでの理論は，学習者の活動を予見するためのツールともなっている．

また，今回の設計は教材レベルの大まかなものであったが，指導案レベルの詳細な設計は，さらに理論の他概念を参照しながらなされる．特に，教授学的状況理論では，問題解決の手段として暗黙裡に数学知識を用いただけでは，その学習が成立したとは言えない．数学知識は，学習者とミリューとの相互作用により更に定式化されその妥当性が判断される必要がある．本稿で扱わなかったそうした過程の授業設計は，教師の役割にかかわる問題・状況の委譲や，定式化の場，妥当性判断の場などの概念の視点からなされる．

４．おわりに

本稿では，フランス数学教授学の立場からの「科学的」の意味を示し，その立場から分科会のテーマである“「授業」の科学的探究”の課題と展望を探った．数学教授学研究自体は理論構築を目的とし，必ずしも授業改善に直接資することを目的とはしない．しかしながら，数学知識の広がりに焦点を当てた数学教授学の理論を用いた「科学的」な授業分析や授業設計は，授業実践へ多くの示唆を与えるものである．本稿では，このことを，教授学的状況理論を用いた授業の分析・設計の事例をあげて示したつもりである．簡単にまとめれば，授業分析おいては，授業でいかに数学知識が発生しているかを見るうえで，教授学的状況理論がその診断のツールとなっていた．さらに，授業設計では，基本状況を始めとした教授学的状況理論の視点が，想定される子どもの活動を予見し，教材を見分け，教

師の発問を導き出すためのツールとなっていたのである．ただ，注意が必要なのは，設計された授業がよりよい授業と即断はできないことである．実際の授業は，学習指導要領や学校，教科，多様な子どもたちなど，授業の内外の非常に多くの制約から成り立っている．こうした多くの制約を考慮せずに価値判断は下せないのである．また，理論には有効範囲があり，ある特定の理論が扱うのは算数・数学の授業の特定の側面についてである．本稿で紹介した理論（の一部）は，ミクロな視点から数学知識の発生を特徴づけるものであった．よりマクロな視点から授業を捉えるためには，また別の理論が必要となるのである．

註

1) バラシェフの「精神分析医が自分自身の精神分析医にはなれないのと同様に，教師研究者にはなれない」 (Sierpinska & Kilpatrick, 1998, p. 537) という発言がこの立場を表している．
2) 数学教授学において「ミクロな視点」とは，教師や学習者といった個人のレベルでの数学教育の営み（知識の広がり）を捉える視点である．一方「マクロな視点」とは，国定カリキュラムや教育政策など，国レベルや学校レベルでの数学教育の営みを捉える視点である (cf. Laborde, 2007).
3) ただし，授業分析が理論構築を目的とする場合には理論によって意味付けされない「事実」にも注意がしばしば払われる．それは理論の有効範囲や妥当性の検証に必要となる．
4) ただし，授業設計が研究を目的とする（研究のための工学）場合は，仮説の検証が目標となるため，この限りではない．
5) 理論構築のための授業設計と授業分析については，Artigue (1992) 等を参照のこと．
6) この基本状況では，与えられた問題を解決するには複数の性質が利用可能である．ある特定の性質のみを指導目標とする場合は，その性質に固有の基本状況が必要になる．

参考文献

Artigue, M. (1984). *Contribution à l'étude de la reproductibilité des situations didactiques.* Thèse d'Etat (première partie), Univ. Paris 7.

Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41-65). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, et al. (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 27-39), Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G. (1994). Perspectives pour la didactique des mathématiques. In M. Artigue, et al. (Eds.) *Vingt ans de Didactique des mathématiques en France* (pp. 51-66). La Pensée Sauvage : Grenoble.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y. (1989). On didactic transposition theory: some introductory notes. In *Proceedings of International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (pp. 51-62), Bratislava.

Chevallard, Y. & Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège : première partie. *Petit x*, no.27, 41-76.

Laborde, C. (2007). Towards theoretical foundations of mathematics education. *ZDM*, 39 (1-2), 137-144.

Margolinas C. (1998). Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 351-356). Dordrecht: Kluwer.

Miyakawa T. (printing). What is a "good lesson" in Japan? In I. Maitree, et al. (Eds.) *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education*. Singapore: World Scientific Publishing.

Miyakawa T. & Winsløw C. (2009). Didactical designs for students' proportional reasoning: An "open approach" lesson and a "fundamental situation". *Educational Studies in Mathematics*, 72(2), 199-218.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Dordrecht: Kluwer.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Dordrecht: Kluwer.

島田茂 (1995).『新訂 算数・数学科のオープンエンドアプローチ』，東洋館出版社.

宮川健 (2009).フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格,『数学教育学論究』, Vol. 94, 37-68.

付記：本研究は，科研費 (23730826) の助成を受けて推進された．