第 44 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

フランス前期中等学校数学における証明の生態（2）
～国定カリキュラムの分析から～

宮 川 健
上越教育大学

要 約

本研究は，教授の人間学理論にもとづいた，証明の生態についての国際比較研究の一環で，フランスの前期中等学校の場合に学校数学で扱われる証明の生態を形づくる種々の条件と制約を明らかにすることを目的とする．今回は，フランスの国定カリキュラム（プログラム）を「決定レベル」の視点から分析し，特に教科（数学）レベルと領域（幾何）レベルの条件と制約を探った．その結果，教科レベルでは，「数学的思考」「数学的事実の真理」「真の数学的活動」に対する認識において証明が明確に位置付けられていることが証明生息の条件となっていた．領域レベルについては，図形の知覚的認識から図形の性質による認識への移行，幾何領域の知識の再構成を指導目標の一部とすること，さらに作図の扱いと作図活動に対する認識が生息の条件となっていた．

キーワード：教授の人間学理論，知の生態，論証指導，平面図形

１．はじめに

本研究は，証明の生態についての国際比較研究の一環で，フランスの場合に学校数学で扱われる証明の生態を形づくる種々の条件と制約を明らかにすることを目的とする．これにより，学校数学における証明の扱いの異なった可能性と証明指導の異なった意義（なぜ証明を教えるのかなど）を示し，論証指導の改善に関する話題を提供したい．

これまで，教科書の分析により，フランスの学校数学で扱われる証明の生態を分析してきた．その結果，証明と呼ばれるものが，わが国の中学校数学で証明と呼ばれるものと，その形態をはじめとし，役割なども異なることが明らかになった（拙稿, 2010）．例えば，フランスでの証明は，必ずしも一般性の保証を役割とせず，長さが具体的に数値で与えられている図形のなんらかの性質の妥当性を示す際にも証明が求められる．そして，妥当性を示すこと，視覚的な情報に頼らずに妥当性

を示す方法であるということが証明の主たる役割となっていることなどがわかった．

学校数学という生態系に生息する証明の実態を明らかにすることは，証明の生態を探る第一歩である．しかし，証明の生態は，証明にかかわるカリキュラムの構成原理や指導の方針，さらには数学における証明のとらえ方など,種々の外的･内的なものの影響を受け，形づくられている．そのため，たとえ他国の証明の扱いを明らかにし，わが国の証明指導の参考にしようとしても，それをすぐさま別の学校数学に導入できるか否か，つまり別の生態系で生き残れるか否かは不明である．証明の生態を探る上でさらに肝要となるのは，証明がある生態系に生息できるための条件（拠り所）とその証明の生態を形づくる制約を明らかにすることである．

そこで本稿では，拙稿 (2010) で示したような証明の生態を生じさせている条件と制約の解明を試みる．この目的を達するため，今回はわが国の学習指導要領に相当する国定カリキュラム，フランス前期中等学校数学プログラム (programmes) を分析する．

２．研究の理論枠組み

本研究は，Chevallard (1992; 2006) による「教授の人間学理論 (Anthropological theory of the didactic)」（以下「人間学理論」）にもとづく．以下，人間学理論の概要を簡単に述べ，そしてプログラムの分析の視点と方針を与える枠組みについて述べる．

(1) 人間学理論：知の生態

人間学理論では，拙稿 (2010) で述べたように，いかなる知も知的集合体 (institution) なしには存在できないとし，数学の知の性格を生態学と同様に考える．つまり，数学の知はそれを取り巻く知の体系の中に他の数学的対象や概念と互いに役割をもって存在しており，ある数学の知が学校数学の指導内容となるためには，数学の内的な整合性や教育の目標，社会の要求など，様々な制約に従い，指導内容となるための条件を満たさなければならない，と考える．「知の教授学的生態 (écologie didactique des savoirs)」（以下「知の生態」）と呼ばれるものである [1)].

人間学理論の枠組みからすれば，本稿は，フランス前期中等学校数学の証明の生態を形づくる条件と制約を，国定カリキュラムの分析を通して明らかにしようとするものである．

(2) 決定レベル

では，証明の生態を生じさせている条件と制約をいかに分析するのか. 人間学理論では，ある生態を生じさせる条件と制約を整理するため,「決定レベル (niveaux de détermination)」と呼ばれる枠組みがしばしば用いられる [2)].

この決定レベルが，今回のフランスの国定カリキュラムを分析する視点を与えてくれる．

上でも述べたように，一般に，ある数学の知の生態を形づくる条件と制約には，様々なものが存在する．国定カリキュラムに見られる指導の原理や学校数学の体系，数学領域の構成の仕方，社会における数学に対する認識などが，それである．こうした様々な条件と制約を分類するため，Chevallard (2002) は，表 1 の「決定レベル」と呼ばれる枠組みを与える. この枠組みは, より包括的なレベル（社会）からより特定のレベル（学習のテーマや問い）までを階層化したもので，各レベルに固有の条件と制約が存在すると考える．表 1 には，各レベルの意味するところと，各レベルにおける条件と制約の概要を示した．教科以下のレベルは，数学の内容に関連するレベルであり，数学の知の構成の仕方 [3)]から特徴づけられたものである．教科より上位のレベルは，教科に特有ではないが，指導の内容や方法に影響を与える条件と制約が分類される．

この決定レベルは，すでに特定した条件と制約を分類できるとともに，新たな分析の際の視点となる．本稿では，フランスの前期中等学校数学の国定カリキュラムを決定レベル

表 1：決定レベル

社会 (society)	社会における教育や学校に対する考えや思想
学校 (school)	教科や教師の役割，学校内の制度（授業時間など）など
教育 (pedagogy)	数学に特化しない一般的な指導方法や指導の原理など
教科 (discipline)	数学に対する認識など数学一般に関するもの
領域 (area)	図形領域, 関数領域など教科の領域に固有なもの
区域 (sector)	中 2「基本的な平面図形と平行線の性質」など，領域内の単元に固有なもの
テーマ (theme)	「平行線や角の性質」など単元内のテーマに固有なもの
問い (question)	「内角の和を求める」などテーマ内の具体的な問いに固有なもの

の視点から分析し，証明の生態に対する条件と制約の解明を試みる．

なお，通常，人間学理論で分析の対象となる数学の知は, ある領域もしくはある区域(単元）で扱われる数学的対象（関数，方程式，三角形など）である．しかし，本稿で問題とする証明は，一般に，一部の領域（数学基礎論など）を除いて数学的対象ではなく，領域横断的に扱われる「付随数学的概念 (notion paramathématique)」(Chevallard, 1991, Ch. 4)である．そのため，証明の生態は，それが扱われる領域（生息地）の性格に大きく影響を受ける．そこで，本稿では，拙稿 (2010) に引き続き平面幾何領域における証明の生態を扱うため, 領域レベル以下は平面幾何に固有な, 証明の生態に影響を与える条件と制約を探る.

３．分析の準備と方法

本研究では，フランスの前期中等学校における数学の国定カリキュラム（プログラム）を分析する．以下，今回の分析に用いるプログラムの概要と分析の方法を述べる．

⑴ 国定カリキュラム：プログラム

フランスは 5-4-3 の学校制度を採っている．日本の中学校に相当する前期中等学校は,「コレージュ (collège)」と呼ばれ，第 6 学年から第 9 学年まで 4 年間の単線型の教育課程である．教育課程の基準には，法的な拘束力をもつプログラムが全国的に定められており，そこには授業時数や教科の指導内容等が規定されている．これは，わが国の学習指導要領に相当するものである．プログラムは，約 10 年ごとに改訂され，コレージュの数学の最新のものは, 2008 年に公示された. 本研究では, 官報 (*Bulletin officiel spécial no 6 du 28 août 2008*) として発行された数学のプログラムを用いた．これには，コレージュ全学年分がまとめられている．

数学のプログラムは，科学・技術系科目に対する共通の序文, 数学全学年に対する序文, そして各学年の数学の指導内容の詳細から構成されている．表 2 に主な節の題目を抜き出した．

プログラムは，内容と方法が簡潔に示されている日本の学習指導要領とはやや趣が異なり，記述が多い．日本の学習指導要領とその解説の中間程度の分量である [4]．

また，各学年の指導内容は，「データの整理と管理，関数」「数と計算」「幾何」「量と測定」の 4 つの領域に区分され記述されている．そして，各学年の領域ごとに簡単な序文が付されている [5]．

⑵ 分析の方法

本研究では，プログラムを分析することにより証明の生態に関わる条件と制約の解明を試みる．次節以降の分析では，プログラムにおける記述から，証明の生態に影響を与えると考えられる文言を抜き出す．これは主に証明や妥当性の判断について触れている部分である. そして, それがいずれのレベルの条件・制約となっているか検討するとともに，証明の生態のいかなる側面を形づくっているか明確にする．また，国定カリキュラムという資料の特性上，条件と制約の多くが，教科レベ

表 2　フランス前期中等学校の数学プログラムの構成

共通の序文 I. コレージュで獲得される科学と技術の文化 1. 世界の単一性と多様性 2. 世界を感じとる 3. 世界を表現する 4. 数学的に考える II. 知識と技能の共通基礎* 1. 数学 2. 観察・実験科学と技術 III. 研究の手続き 実施の指針 1. 研究手続きの様々な側面 2. 研究手順の骨組み	IV. ICT の位置づけ V. 収束テーマ** VI. 外国語資料の利用 **数学の序文** 1. 目的と目標 1.1 一般教養科目としての数学 1.2 数学的な道具 1.3 表現の科目としての数学 1.4 数学と技術史 2. 共通基礎 3. 内容の構成 4. 学習と指導の構成	4.1 問題解決を中心に 4.2 生徒の既有知識の考慮 4.3 一貫性保持の重要性 4.4 暗記と知的反射神経の必要性 4.5 論証への非常に段階的な入門 4.6 数学と言語 4.7 色々な種類の文書 4.8 生徒の個人学習 4.9 評価 4.10 育成する能力と活動 **第 6 学年** **第 7 学年** **第 8 学年** **第 9 学年**

* 「共通基礎」とは，すべての生徒が義務教育修了時に習得していなければならない知識と技能を具体的に定めたものである．

** 「収束テーマ」とは，科学と技術系のすべての教科を通して現代社会に対する大局的かつ首尾一貫した見方を獲得することを目的とする．テーマは，「世界に対する科学的まなざしにおける統計的考え方の重要性」「持続可能な開発」「エネルギー」「気象学・気候学」「健康」「安全」の 6 つである．

ル，領域レベルであることが想定される．そのため，今回は主にこの 2 つのレベルを中心に検討し,特筆すべきものがある場合にのみ,他のレベルを検討する．

4．プログラムの分析：条件と制約

プログラムの分析により，証明の生態に影響を与える様々な要素を抽出することができたが，紙面の都合上，教科レベル及び領域レベルの条件と制約の中から中心的なものをそれぞれ 3 つずつ報告するにとどめる．

(1) 教科（数学）レベル

プログラムの序文ではところどころに数学の思考や活動に対する認識が示されており，それらが証明を生息させる条件となっていた．

①　数学的思考

共通の序文の「I.4 数学的に考える」では，数学的思考の重要性に触れ，義務教育において，その基礎を獲得することが必須であるとしている．また，この「数学的思考は，堅固な知識にもとづき，そして問題解決の方法と証明の様式（演繹的推論と特有な論証）にもとづく」(MEN, 2008, p. 2) とする．つまり，ここでは，「数学的思考」を指導内容の一つとしていること，そして「数学的思考」が部分的に演繹的推論などを含む証明の様式にもとづくという認識が，前期中等学校数学に証明を生息させるための教科レベルの条件となっていることがわかる．

②　数学的事実の真理

共通の序文の共通基礎についての「II.1 数学」では，証明の役割についての次のような記述が見られる．

「*数学的事実の真理*の確認をいくつかの例だけにとどめることはできなく，推論によって確立される証明の役割は本質的なものである．数学教育は，権威的な理由ではなく合理的に確立されたこの真理を自ら発見する喜びを味わうこと，そしてこの真理を尊重することへ導く」(MEN, 2008, p. 2)

この記述から，数学的事実の真理を確認するという証明の役割についての認識が特定できる．そして，前期中等学校数学では，この真理にかかわることを指導目標とするため，証明が扱われている．換言すれば，真理にかかわることを指導目標としていること，そし

て真理が証明によってもたらされるという認識が，教科レベルで証明が生息するための条件となっている．また，引用文の「いくつかの例だけにとどめることはできなく」の文言から，帰納的推論ではなく，演繹的推論により一般的な命題の真理が確認されると読み取ることができるが，プログラムでは「帰納」の語や一般性について特に強調されているわけではなかった．

③　真の数学的活動，科学的手続き

数学の序文の「1.1 一般教養の科目としての数学」では，一般教養として「科学的手続きの実践」が大事であり，特に数学の場合には，問題解決を中心とする「真の数学的活動に気づく」ことを目標の一つにしている (MEN, 2008, p. 9)．この「真の数学的活動 (véritable activité mathématique)」とは，以下の過程からなる．

> 「問題を見いだし定式化．例での実験により結果を推測．論拠を構築．検討している問題に応じた結果の適切性の評価により得られた結果を検討．研究を伝達．解決したことのまとめ」(MEN, 2008, p. 9)[6)]

この活動において，論拠の構築，つまり推測が正しいか否かを考える，その妥当性判断が含まれている．これは，証明が生息する拠り所（条件）の一つである．実際，真の数学的活動に気づくことが目標となっているから，そして真の数学的活動に論拠の構築が含まれるからこそ，証明を扱わないわけにはいかないのである．

(2) 領域（幾何）レベル

プログラムでは，数学の序文と幾何領域の指導内容の記述において，平面幾何領域の構成や領域に対する認識が見られ，そのいくつかは学校数学における証明の必要性にかかわるもの，つまり領域レベルの証明生息の条件となるものであった．

①　図形の知覚的認識から性質による認識へ

数学の序文の「3. 内容の構成」の「幾何」では，「図形やその構成の知覚的な特定（見た目の認識）からそれらの性質による特徴づけへ移行すること（図から図形への移行）」(MEN, 2008, p. 10)が目標の一つであると述べられている．同様の記述は，第 6 学年の指導内容にも見られる (ibid., p. 16)．これらの記述は，幾何領域における図と図形に対する認識をも表わしている．図があくまでも数学的対象の表現でしかないため，性質を用いて図形を特定しなければならない．そしてその際，演繹的推論や証明が必要となるのである．したがって，図と図形に対する認識，その移行が指導内容とされていることが，領域レベルで証明が生息するための条件の一つとなっている．この条件は，拙稿 (2010) の教科書分析で特定した，「視覚的判断に頼らず妥当性を示す」という証明の役割とも結びつく．

②　知識の再構成，構造化・階層化

幾何領域の目標として，小学校以来の既得知識を再構成し，構造化・階層化することが，指導内容の項目にあげられている (MEN, 2008, p. 16, p.33)．特に第 6 学年，第 7 学年では，それぞれ線対称，点対称によって，それがなされるとする．例えば，第 7 学年の平面図形の解説には，「点対称における学習が，生徒が知らなければならない平行四辺形を特徴づける性質を正当化する」 (ibid., p.23) とある．つまり，ここでの知識の再構成は，証明によってなされるのである．このことから，知識の再構成や構造化・階層化という幾何領域の指導目標が，証明を必要とし，証明が生息するための条件となっていることがわかる．

③　作図の扱い，作図活動

プログラムの指導内容における幾何領域の記述では，すべての学年で作図技術とその背後にある推論の習得が指導目標の一部とされていた．さらに，第 7 学年以降は，作図に用いた手続きを正当化することが求められている．例えば，第 7 学年の平面図形の解説には，「通常の四辺形に関する知識が作図問題では

求められ，その知識が四辺形の作図で用いた手続きの正当化を可能にする」(ibid., p.23) とあり，作図問題を重要視していることと，作図問題が正当化と併せて扱われることがわかる．証明の生態に対する条件と制約の視点からすれば, この幾何領域における作図の扱い, さらに作図活動が正当化を含むという作図活動に対する認識が，証明が生息するための領域レベルの条件となっていると言えよう．

５．おわりに

本稿では，人間学理論の決定レベルの視点からプログラム（国定カリキュラム）を分析することにより，フランス前期中等学校数学に証明を生息させている条件と制約を探った．紙面の都合上，教科レベルと領域レベルでそれぞれ 3 つの条件のみを示したが，教科レベルでは，数学的思考や数学的活動（もしくは問題解決）で証明にかかわる活動が明確に位置付けられ強調されていること，領域レベルでは，前期中等学校での図形の認識や作図の扱いが証明を生息させる条件となっていることがわかった．この他，数学における証明に対する認識をはじめとし，言語活動にかかわるもの，演繹的推論の段階的な導入など，拙稿 (2010) で示したような証明の生態を形づくる条件と制約が見られたが，これらについては別の機会に譲りたい．

註

1) ここで「知 (savoir)」とは，数学の理論面を中心とする公的な知識を意味する．人間学理論では，のちに知を一般化し，知識や技能を含めた総体（プラクセオロジーと呼ばれる）を扱い，その生態を研究対象とする (Chevallard, 1999, 2002).
2) 「決定レベル」は，プラクセオロジーの生態を生じさせる条件と制約の分類のために導入された．プラクセオロジーの生態には，この決定レベルの他に，数学構成と教授構成との「相互決定 (co-détermination)」と呼ばれるメカニズムが存在するが，本稿では扱わない．
3) 正確には，プラクセオロジーの種類（点的 (ponctuelle), 局所的 (locale), 域的 (régionale), 大局的 (globale)）により特徴づけられたものである (Chevallard, 2002).
4) 前期中等学校数学プログラムに用いられている語は，約 26,000 語であった．日本の中学校学習指導要領数学では約 7,000 字, 解説では約 140,000 字であった（文部科学省，2008）.
5) フランスの学校数学については，拙稿 (2009) などを参照のこと．
6) より詳細なものが, 共通の序文の III 節に「研究の手続き」として与えられているが，ここでは紙面の都合上，数学の場合の簡略化されたものをあげた．

参考文献

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics. In R. Douady & A. Mercier (Eds.) *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 131-168). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1994). Les processus de transposition didactique et leur théorisation. In *La transposition didactique à l'épreuve* (pp. 135-180). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 19, No. 2, 221-266.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude. 3. Écologie et régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.) *Actes de la 11e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proc. of CERME 4* (pp. 22-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull Editions.

MEN (2008). Programmes du collège : programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin Officiel Spécial*, No 6, 28 août 2008.

宮川健 (2009). フランス．『理数教科書に関する国際比較調査結果報告』 (pp. 125-136). 国立教育政策研究所.

宮川健 (2010). フランス前期中等教育における証明の生態～平面幾何領域における教科書分析から～．『第 43 回数学教育論文発表会論文集（第 1 巻）』(pp. 295-300), 宮崎大学.

文部科学省 (2008). 中学校学習指導要領解説数学編．教育出版.

付記：本研究は，科研費 (22330245, 23730826) の助成を受けて推進された．