第 45 回数学教育論文発表会論文集
課題別分科会の部
数学教育学の成立と発展

認識論と算数・数学の授業
～基本認識論的モデルの視点から～

宮　川　　健
上越教育大学

要　約

本稿の目的は，「数学教育学の成立と発展」について，「認識論」と「授業」という視点から検討することである．そのため，数学教育学研究において必ずしも捉え方が同一ではない「認識論 (epistemology)」の語の意味をまず明確にする．そのうえで，Bosch & Gascon (2006) による「基本認識論的モデル」の概念を援用し，教授人間学理論の範疇で，数学教育学研究における認識論の位置づけ，認識論と算数・数学の授業とのかかわり，さらに研究の方法論について考察する．これらの考察を通じて，数学教育学研究の固有性，今後の更なる発展のための研究課題などについて検討する．

キーワード：教授人間学理論，基本認識論的モデル，算数・数学の授業

１．はじめに
本稿では，課題別分科会のテーマである「数学教育学の成立と発展」について，「認識論」と「授業」という視点から，検討してみたい．具体的には，認識論が数学教育学研究のどこに位置するのか，そして，それが授業といかにかかわりうるのか，考察する．これらの考察を通じて，数学教育学研究の固有性と今後の更なる発展のための研究課題について検討する．

２．「認識論」とは
数学教育学研究において「認識論」という語がしばしば用いられる (例えば, 大谷, 2010, 日野，2010，昨年の論文発表会課題別分科会「数学教育学研究における認識論の展開と課題」など）．この語は，拙稿 (2011a) で触れたように，特にフランスを起源とする数学教授学（以下，数学教授学）では，頻出する語である．しかしながら，その意味するところは，研究によってやや異なる．それは，英語

圏やわが国における epistemology とフランス語圏における épistémologie では，その意味するところが異なるからである．そこで，まず「認識論」の意味を整理する．

(1)　英語圏やわが国における認識論

「認識論 (epistemology)」という語を日本語の哲学事典で引くと，一般に次のような説明が与えられている．

「知識論，知識哲学ともいわれる．知識の起源，構造，方法，妥当性を研究する哲学の一部門」(平凡社哲学事典, 1971, p. 1072)

すなわち，哲学における知識に関わる研究部門が「認識論」である．この説明は，英語の哲学事典でもほぼ同様である．そして，その研究部門で扱われる主たる問いは，*Routledge Encyclopedia of Philosophy* (1998) によれば，以下のようなものである．

- 知識とは何か
- 知識の範囲はいかなるものか
- 知識の起源は何か，いかにして獲得されるのか
- 真の知識は存在するのか (p. 371)

さらに，人間の認識を問題とする問いが扱われることも少なくない．そのため，わが国の数学教育学研究では「認知論」と同水準で議論されることもある (日野, 2010).

(2)　フランス語圏における認識論

一方，「認識論 (épistémologie)」という語をフランス語の哲学事典で引くと，次のような説明が与えられている．

「諸科学の論理的起源，価値，目的とする範囲を決定するために，諸科学の原理，基本概念，理論と結果，さらに科学的方法，科学において用いられる論理的形式と推論様式を，批判的に研究する科学哲学の一領域．（中略）認識論は知識論とは区別すべきである．」 (Nadeau, 1999, p. 209)

認識論は，英語圏では知識論と同義であったが，フランス語圏では知識論とは異なり，科学を問題とするのである．そして，主たる問いは，以下のようなものである．

- 何が科学的研究と他の形態の研究とを区別するのか
- 自然のよりよい理解のために科学はいかなる方法を取るべきか
- 真の科学的説明はいかなる条件を満たすべきか
- 科学的法則や理論の認知的地位はいかなるものか (ibid., p. 209)

これらの問いは，英語圏やわが国では，まさに科学哲学や科学論で扱われる問いである．実際，科学哲学の入門書（例えば，チャルマーズ, 1985; 内井, 1995）には，こうした問いに対するこれまでの検討の成果が見られる．

さらに，日本の哲学事典では，フランス語圏の認識論を「エピステモロジー (épistémologie)」と呼び，次のような解説を与えているものもある．

「科学認識論とも訳される．（中略）現在ではコントあたりを淵源とするフランスの合理主義的，主知主義的，分析的な科学哲学を指すために使用されることが多い．

ただ，英米系の論理実証主義が，形式言語による科学理論の論理的再構成を主眼としたのに対して，伝統的に科学史と深い関係を保つという特徴をもつ」(岩波哲学・思想事典，1998, p. 161)

「エピステモロジーは個人を超える非人格的知識がもちうる存在様態を付随的に明らかにするという意味合いをもつ」（p. 162）

つまりエピステモロジーは科学哲学を意味するが,その方法は英米系のものとは異なる．さらに，後半の引用に見られるように，個人の認識を問題としない．この点からすれば，エピステモロジーは，認知論とは異なり，同水準で議論されるものではないのである．

(3)　本稿における認識論

本稿では，フランス語圏のそれに近い立場で「認識論」の語を用いる．したがって，「認識論」を「数学とは何か」「数学はいかに創

造されるか，発展するか」といった問いを主に扱う研究領域とする．これらの問いは，フランス語圏の認識論においてのみでではなく，英語圏の科学哲学や数理哲学においても扱われるため，「フランス語圏に近い」とした．

３．認識論と算数・数学の授業

算数・数学の授業は，数学教育学において中心的な研究対象である．認識論は，それにいかにかかわるのであろうか．このことを検討するにあたって，数学教育の営みと研究者による認識論的な考察との関係を明確にする「基本認識論的モデル」の概念を援用する．この概念を用いて，数学教育学研究における認識論の位置づけを明確にし，それから授業とのかかわりを論じたい．

(1)　基本認識論的モデル

数学教育の実際的な営みは，教室で算数や数学を教えるというものから，教科書を執筆する，学習指導要領やその解説を執筆する，学校数学で扱う指導内容を決定するというものまで，様々である．こうした営みは，すべて数学教授学の研究対象である．教授人間学理論 (以下，ATD) の視座からすれば，種々の異なった数学が存在し，ある数学概念もしくは数学的対象が, それぞれの数学において，いかなるものか，いかにして創造されるものか，といった認識論的性格[1] が問われ，分析される（拙稿, 2011a）．この分析においてしばしば問題となるのは，何を基準に各々の数学を分析するのか，ということである．学問知の認識論的性格を整理し，その視点から学校数学を分析するという方法もあろう．しかし，数学教授学においては，学問知も分析の対象であり，数学教授学の研究者は数学者ではなく，教授学的転置の当事者でもない．したがって，各々の数学の認識論的性格の分析には，何らかの基準が必要になる．

そこで，Bosch らは，ATD の範疇で，「基本認識論的モデル (reference epistemological models)」という概念を提案した (Bosch & Gascon, 2006; Bosch, 2012)．これは，教授学的転置 (didactic transposition) の過程における種々の数学とその発生の分析にあたって，研究者による認識論的な考察の位置づけを明確にするとともに，分析の手法を示唆するものである. 具体的には, 転置の過程における種々の数学（「学問知」「教えられるべき知」「教えられた知」「学ばれた知」）に対して，外部に基本認識論的モデルというものを置く（図 1）．このモデルは，数学教授学の研究者が作り上げる理論的構成物であり，それを基準に種々の数学の認識論的性格を分析するのである．

基本認識論的モデルとして想定されているものは，ある特定の数学概念に固有な認識論的性格についてのモデルである．例えば，Bosch らは代数の場合にその発生の仕方を示したモデルを提案している (cf. Bosch, 2012). 無論，幾何や図形についてはまた異なった基本認識論的モデルが存在する．

このモデルは，これまで数学教授学で進め

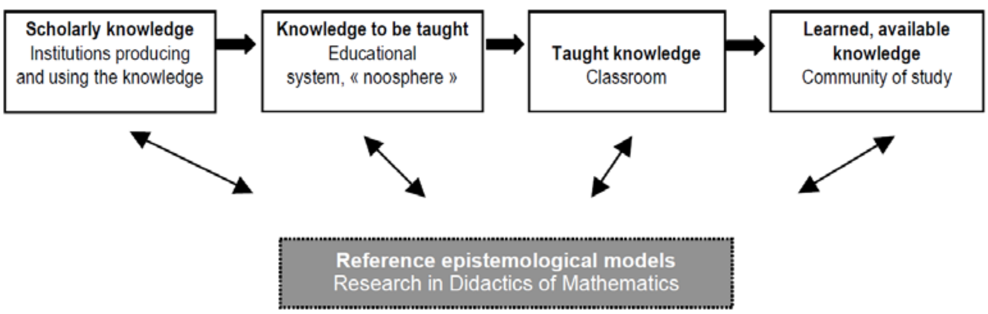

図 1　研究者の外的位置づけを示す基本認識論的モデル (Bosch & Gascon, 2006, p. 57)

られてきた「認識論的分析」の意味を明確にするものである (ibid., p.57). 数学教授学では，研究の初期段階で「認識論的分析」の名の下，そこで扱う数学概念の認識論的性格が検討されることが多い．この検討が基本認識論的モデルという理論的構成物を作る作業に相当する．したがって，数学教育学，特に数学教授学においては，研究対象である数学教育の様々な営みを分析する道具の構築というところに，認識論が位置しているのである．

(2) 算数・数学の授業とのかかわり

さて，基本認識論的モデルは実際の授業といかにかかわることができるのであろうか．筆者は，昨年度の論文発表会課題別分科会の「授業の科学的探究」で，授業についての科学的な理論を用いた研究に，授業分析と授業設計の 2 種類があると述べた (拙稿，2011b). そして理論が，授業分析では子どもの学習の診断のための道具となること，授業設計では設計の拠り所となることを示した．基本認識論的モデルの視点からすれば，ここではいずれの場合にも，理論にもとづきある数学概念の発生の仕方が規定されており，それが授業分析や授業設計を行なう際に参照されている．つまり，そこでは基本認識論的モデルが作られ，用いられているといえよう．例えば，拙稿 (2011b) では，比例の性質（例えば，1 増えると常に一定増える，y が x の定数倍，など）が教授学的状況理論 (以下，TDS) の意味で発生する条件の一つとして，非常に局所的な場合ではあるが，ある x の値が与えられた際に y の値を求める場面をあげた．これは，TDS に基づいて，比例性質の発生の仕方を示した一つの局所的な基本認識論的モデルと捉えることができる．この理論的モデルは，授業設計の際に拠り所となるとともに，授業分析においても分析の視点となるのである．

なお，基本認識論的モデルは，授業設計等における規範的なモデルではなく，あくまでその際に参照 (reference) されるモデルである．ある数学概念がある条件（多くの場合複雑な）のもと発生するというモデルがあったとして，それと一致する授業は望ましいかもしれない．しかし，それが現実の算数・数学の授業で実現可能か否かは別の研究課題である．実際の授業は，社会的な要求，教育の目標，学校の方針，数学の内的な整合性など，様々なレベルの条件と制約のもとに成立している．そうした条件と制約を考慮せず，しかも教育という文脈からも独立して作り出された，認識論的性格についてのモデルは，到底規範的な理論にはなりえないのである．

以上のように，ある特定の数学概念がいかなるものか，いかに創造されるかといった認識論的性格を備えた基本認識論的モデルは，授業分析や授業設計において参照されるものである．ここに認識論と算数・数学の授業とのつながりがある．

４．基本認識論的モデルの構築

前節では，基本認識論的モデルの概念を用いて，数学教育学研究における認識論の位置づけを示した．では，基本認識論的モデルはいかにして構築されるのであろうか．ここでは，その方法論について考察してみたい．

まず，「理論」と「モデル」という 2 つの語を整理しよう．一般には（科学的には），「理論」はあるものをその仕組み（メカニズム）のレベルで説明する体系的な知識を意味し，「モデル」は理論をある特定の場合に具現化したものである[2]．Schoenfeld (1998) の例を用いれば，図 2 のような図は太陽系のモ

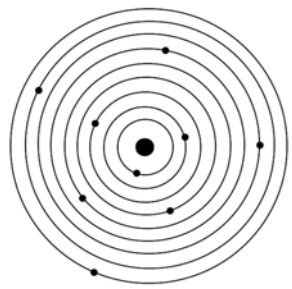

図 2 太陽系のモデル (Schoenfeld, 1998)

デルを示しており，このモデルの仕組みは，万有引力の理論によって説明される．

このように理論とモデルを捉えると，基本認識論的モデルとは，何らかの理論の範疇で構築される，ある数学概念の認識論的性格についてのモデルである．実際，Bosch らの代数についての基本認識論的モデルは，ATD の範疇で構築されており，特に局所的プラクセオロジー，域的プラクセオロジー[3]，そしてそれらをつなぐ系列によって定式化されている (Bosch, 2012)．しかしながら，太陽系のモデルが理論のみから導かれたのではないことと同様に，基本認識論的モデルも理論のみから構築されるものではない．実際，Bosch らは，数学者コミュニティ，教育システム，教室の実験データから基本認識論的モデルが構想されると述べている (Bosch & Gascon, 2006, p. 57)．つまり，基本認識論的モデルの構築は，理論と，実際の数学や数学教育の営みから得られるデータとの往還によってなされるのである．

このことは, 理論に TDS を採用した場合を考えるとわかりやすい．用いられる理論が異なれば，基本認識論的モデルの定式化は異なる．TDS の場合であれば，基本認識論的モデルには，ある特定の概念が必要となり，ミリューとの相互作用のみでそれが発生する条件を備えた「基本状況 (fundamental situation)」に，それは相当するであろう (拙稿, 2011b 参照)．そして，基本状況の特定もしくは構築の方法論は，上で述べた理論と実験データ（特に，研究のための教授工学で得たデータ）との往還による．例えば，Brousseau et al. (2002) で示された確率と統計の基本状況は，発展途中の TDS という理論と教室での実験データ，数学者コミュニティにおける数学を検討することによって作り上げられたものである．

無論，基本認識論的モデルは絶対的なものではない．「基本モデルは研究者コミュニティによって継続的に発展されるとともに，事実によって検証される必要がある」 (Bosch & Gascon, 2006, p. 57) のである．ここで「事実によって検証」とは，数学教育の営みについての実験データと照らし合わせることによる検証を意味し，それによりモデルをさらに発展させることができる．

５．数学教育学の成立と発展

以上，基本認識論的モデルを視点として，数学教育学研究における認識論の位置づけ，認識論と算数・数学の授業とのかかわり，さらに研究の方法論について検討してきた．こうした検討結果から，「数学教育学の成立と発展」という本分科会のテーマについて考察し，本稿を終えたい．

数学教育学の成立の要件の一つに, 教育学, 心理学，数学などの隣接領域との明確な区別化があるだろう．本稿での認識論と授業とのかかわりについての考察からすれば，数学の認識論的性格の検討というものは，数学の認識論を除いて隣接領域には見られない数学教育学の固有性を示すものである．さらに，基本認識論的モデルが数学教育の様々な営みから得られる実験データとの往還によって作り上げられるという点において，数学の認識論とも区別される[4]．今日，こうした隣接領域とのより明確な区別化が容易になったことは, 数学教育学の学としての成立の証と見てよいのではないだろうか.

また，基本認識論的モデルという視点は，数学教育学の成立においてしばしば議論される理論と実践の関係（岩崎・中野, 2005）の捉え方についても, 一つの提案とみなされる．本稿の検討からすれば，理論と実践との往還は，理論と実際の数学教育の営みから得られるデータとの往還と捉えられ，この関係を基本認識論的モデルが媒介していると捉えられる．そして，それが数学教育学の研究方法論の特徴を示しているのである．

最後に，今後の数学教育学の発展について

簡単に述べたい．基本認識論的モデルの視点からすれば，当然のことながら，「基本認識論的モデルの構築と発展」が今後の中心的な研究課題となる．そして，このモデルが，理論と実験データとの往還から得られることからすれば，モデルを作り出す理論の構築と発展も不可欠である．しかし，理論と基本認識論的モデルの構築のみでは十分ではない．先にも触れたが，それが実際の授業で実現可能か否かは，数学教育学の大きな研究課題である．つまり，ある基本認識論的モデルが，ある国のある学校段階においてどれだけ生存可能なのか，そのモデルを実現するための条件は何か, 実現を妨げる制約は何か, といった，ATD の言葉で「生態学的分析」と呼ばれるものが必要となる．単に，ある数学概念がこのように生じるため，こうした授業が良い，と主張するだけでは，学としての数学教育学の発展には不十分なのである．

註

[1] 本稿では，ある特定の数学概念がいかなるものか, いかに発生するのかといった，その概念の性格を「認識論的性格」と呼ぶ．

[2] 「理論」と「モデル」についての詳細な検討は, Schoenfeld (1998) を参照のこと．

[3] ATD の概念については，Chevallard (2006), 拙稿 (2011a) 等を参照のこと．

[4] このため，Brousseau (1997) は，自らの研究領域を「実験的認識論」と呼んだのであろう．

参考・引用文献

岩崎秀樹，中野俊幸（2006）．「学としての数学教育研究の展開」．数学教育学論究．Vol. 85, 3-21.

内井惣七 (1995). 「科学哲学入門―科学の方法・科学の目的」，世界思想社.

大谷実 (2010).「認識論等に基づく授業づくり」，日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』 (pp. 182-194), 東洋館出版社.

チャルマーズ (1985). 「科学論の展開―科学と呼ばれているのは何なのか？」（高田紀代志・佐野正博訳），恒星社厚生閣.

日野圭子 (2010).「認知・認識論」，日本数学教育学会編『数学教育学研究ハンドブック』 (pp. 294-309), 東洋館出版社.

宮川健 (2011a).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格」，数学教育学論究，Vol. 94, 12-24.

宮川健 (2011b).「フランス数学教授学の立場から見た「授業」の科学的探究」．第 44 回数学教育論文発表会論文集（第 1 巻），pp. 51-60.

Bosch, M. (2012). Doing research within the anthropological theory of the didactic: the case of school algebra. *Pre-proceedings of ICME-12*, (pp. 421-439), Seoul.

Bosch, M. & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin, No. 58*, 51-65.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht: Kluwer.

Brousseau, G., Brousseau, N., & Warfield, V. (2002). An experiment on the teaching of statistics and probability. *Journal of Mathematical Behavior, 20*, 363-411.

Chevallard Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proc. of CERME 4* (pp. 22-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Nadeau, R. (1999). *Vocabulaire technique et analytique de l'épistémologie*. Paris: PUF.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4 (1), 1-94.

付記：本研究は，JSPS 科研費 23730826 の助成を受けたものである．