第 45 回数学教育論文発表会論文集
論文発表の部

平面幾何における作図の機能

塩崎　李衣
上越教育大学大学院学校教育研究科院生
宮川　健
上越教育大学

要　約

本研究は，教授人間学理論に基づき，日本やフランスの学校数学といった異なる数学における平面図形の作図の機能を分析する際に基準となりうる，研究者の立場からの作図の機能を特定することを目的とする．この目的を達成するため，平面幾何領域における作図の本性と，作図に関わる数学の実践という視点から，作図の機能を検討した．その結果，前者の視点から「図形の構成」と「図形の図的表現」という機能を特定し，後者の視点から「問題としての作図」「図形性質の確認のための作図」，「命題としての作図」，「組織化のための作図」という機能を特定した．

キーワード：作図の機能，教科書，平面幾何，人間学理論

１．はじめに

中学校第１学年の平面図形領域では，角の二等分線・線分の垂直二等分線・垂線などの基本的な作図が扱われる．中学校学習指導要領 (文部科学省, 2008) の図形領域の目標には，「見通しを持って作図したり図形の関係について調べたりして平面図形についての理解を深めるとともに，論理的に考察し表現する能力を培う」とある．学校数学において作図の平面図形領域における指導や学習は，決して軽視できるものではないと読みとれる．しかし，中学校の図形領域における授業の実際は, 作図の取り扱いが少ないように思える．つまり，作図が学習指導要領で述べられているほど，図形学習において重要な機能を果たしていないように見受けられる．

一方，海外に目を向けると，フランスの教科書では前期中等教育の４年間（フランスでは, 日本の中学校に相当する前期中等教育は, 第６学年から第９学年までの４年間）を通し

て作図が多く扱われており（宮川，2010；Malaval et al., 2006-2009 などを参照），フランスの中等教育の図形領域では，作図が重要な機能を果たしているように推察できる．

こうした背景から，筆者は，各国の作図の扱いを明らかにする研究に関心を持った．そして，宮川（2010，2011b）による証明の生態についての研究と同様に，教科書等を手がかりに，わが国とフランスにおける作図の位置付けと機能の分析を始めた（塩崎，2012）．しかし，証明の場合は，その機能が先行研究で多く検討されているが，作図の場合は，その機能を検討したものはほとんどない．そのため，教科書等の分析では，何を機能として特定すべきなのか困難を伴った．つまり，機能を特定するにあたって，基準となる機能がなかったのである．そこで，本稿では，これまでに教科書等や作図そのものを考察してきた過程を振り返りつつ，平面幾何における作図の本性と作図に関わる数学の実践という視点から作図の機能を特定し，整理する．そして，各国における作図の機能を分析する際に基準となりうる枠組みを構築する．

２．研究の焦点と方法

（1）研究の焦点

本研究は，宮川（2010, 2011b）の研究同様，「教授人間学理論」(Chevallard, 2006; Bosch & Gascon, 2006)（以下，ATD と呼ぶ）に依拠している．以下では，作図の機能について基準となりうる枠組みを構築することが，ATD の視点から何を意味するのか明確にする．

ATD では，種々の異なった数学を問題にする．（宮川，2011a）．それは例えば，数学者の数学，技術者の数学，わが国の学校数学，フランスの学校数学などであり，筆者は，特に後ろの二つの数学における作図の機能に関心を持っている．こうした様々な数学を分析するにあたって，それらを横断する何かしらの基準となるような視点が望まれる．実際，そうしたものがあれば，日本やフランスといった当事者の視点ではなく，より研究者の位置付けに近い第三者の視点からの分析が可能となる．

こうした問題意識は，近年，ATD の枠組みでも検討されているものである．Bosch & Gascon (2006) は，教授学的転置 (didactic transposition) の過程における異なった数学，特に数学的知識の発生を分析するにあたって，数学教授学における「基本認識論的モデル (Reference epistemological models)」と呼ばれる概念を提案している．これは，図 1 に示したように，転置の過程で考えられる「学問知」「教えられるべき知」「教えられた知」「学ばれた知」を分析するにあたり，研究者の外的な位置付けを明確にするとともに，これまで数学教授学で進められてきた「認識論的分析」の意味を明確にするものである (ibid., p.

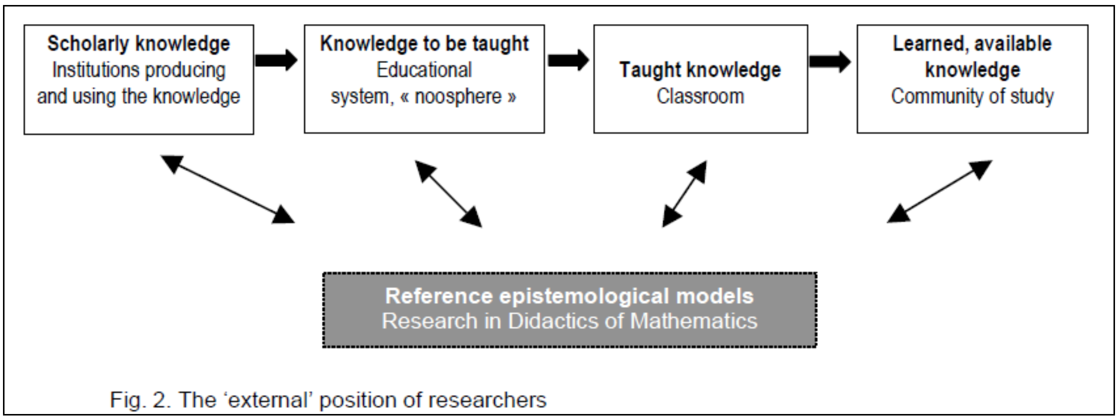

図 1　reference epistemological model

57)．したがって，基本認識論的モデルとは，種々の数学を分析する際に基準（reference）となる，それらから独立した研究者の立場のモデルである．

本研究では，これと同様に，フランスや日本といった異なった数学における作図の機能を分析する際に基準となりうる機能をまず明確にしようと考えたのである．

（2）作図の機能とは

作図の機能といった場合，様々な捉え方があろう．作図が何らかの技能や知識の習得に貢献するといった教育的な機能をはじめ，数学の知識体系の構築に貢献するような数学の内的な機能なども考えられる．本稿では，先に述べた通り，種々の数学から独立した，研究者の立場からの分析の際に基準となりうる作図の機能の枠組み構築を目的としている．そのため，作図の機能といった場合に，作図そのものが持ちうる機能や，作図が数学の実践や知識体系において果たしうる機能を考察する．ここで，数学の実践とは，数学的な問題解決に伴う営み，数学の理論を構築していくような営みなどを指す．したがって，教育的な要素を考慮に入れず，純粋に数学の営みを想定し，そこで作図がいかなる機能を果たしているかを考えるのである．

（3）研究の方法

本稿では，主として，作図の本性という視点と，作図に関わる数学的な実践もしくは営みという視点から，その機能を分析する．前者については，作図とはいかなるものかといった認識論的問いを検討し，後者については，より広く幾何学さらには数学における実践において作図がいかなる位置付けにあるのか検討する．その際，学校数学をはじめ，ユークリッド原論におけるギリシア数学など歴史的なものを含めて，種々の数学を振り返り検討することで作図の機能を特定していく．

３．作図の機能

以下，まず作図の本性から考えられる機能を特定し，次に作図に関わる数学の実践から考えられる作図の機能を特定し，整理する．

（1）作図の本性より

作図は，数学とりわけ幾何学領域における数学的な営みであり，特定の規則に従って特定の道具を用いることにより図を作り出す手続きからなる．この営みを捉えるにあたって，幾何学の抽象的な世界を意味する「幾何学世界」とわれわれが幾何学を実際に紙面上等で扱う際の物質的世界を意味する「現実世界」という言葉を用いる．この区分は，島田(1995) が「数学的活動」を説明する際に用いた「数学世界」と「現実世界」の区分とほぼ同様であり，作図をはじめとする幾何についての数学教育学研究において，しばしば同様なものが用いられる．例えば，Laborde (1998) は，「理論的領域（theoretical domain)」と「空間・図的領域（spatial graphical domain)」の語で，Fischbein (1993) や Mariotti (1997) は figural と conceptual の語で，この二つの世界に関わる幾何学における営みを捉えている．

この幾何学世界と現実世界の視点からすると，作図には二つの機能がある．第一に，作図は，幾何学世界おいて幾何学的対象である図形を，その世界の規則に則って構成するものである．この「図形の構成」という機能は，作図が数学的な営みであることからすれば，本質的な機能である．第二に，作図は，現実世界の紙面上もしくはコンピュータのスクリーン上に図形の図的表現を与えるものである．作図において，「概念的な側面は，道具（作図）を介して，図的に表現される」(Mariotti, 1997) のである．この「図形の図的表現」という機能により，幾何学世界における図形についての様々な情報を，現実世界でわれわれが扱うことが可能となるのである．この機能は，作図に限らず，図形の図的表現をフリーハンドで描く際にも見られるものである．

以上のように，作図という営みには，その

本性から，二つの機能を同時に果たしていると考える．

「図形の構成」の機能は，学校数学等において，作図の問題や活動があれば，多くの場合，暗黙裏に果たされている機能であろう．「図形の図的表現」の機能については，日本およびフランスの教科書の分析過程で，いずれの国でも，その機能を利用した問題や活動がしばしば見られた．ここでは，日本の場合の例を一つ示す．

日本の中学校の数学教科書（岡本他，2012, 啓林館）では，第２学年４章「図形の調べ方」２節にたこ形を作図する問題が見られた．この問いは，コンパスと定規を用いてたこ型四角形を作図し，作図したものから等しい角を直観的に見つけ，さらになぜ等しいと言えるかを考えさせる問いである.ここでの作図は，図形を構成するとともに，図形の図的表現を与え，生徒らが図的表現から図形性質（対角が等しい)を発見することが意図されている．

（2）数学の実践より

次に，数学の実践より，作図の機能を考察する．一般に，数学の実践とは，問題を見つけ解決すること，様々な数学的対象を関連付けて体系化すること，数学の理論を構築することなど，すべて記述することは難しいが，そうした一連の営みを意味するとする．こうした営みにおける作図の位置付けもしくは関連を考察すれば，作図は，以下に示す四つの機能を持つと考えられる．

① 問題としての作図

数学の実践において，もっとも根本的な要素は問題であろう．何かしらの数学的な問題を解決するために，様々な数学がつくられてきた．問題なくして数学はなかったと言っても過言ではないであろう．そうした問題の一つとして，作図というものが長い間，存在（生息）してきた．例えば，ギリシアの三大作図問題の角の三等分線（与えられた角を三等分する）は，礒田（2009）による「ユークリッド原論以前から作図法が研究され，近代になって定木とコンパスで作図不可能であることが代数的に証明されるまで研究された」の記述のように，長い間，数学における問題であった．そして，作図の問題は，代数学の発展に大きく寄与してきた．したがって，図形を構成する営みである作図は，数学の実践において根本的な要素である数学的な問題という機能を持つといえよう．

この「問題としての作図」という機能は，数学に関わる者からすれば，ある意味，当たり前の機能であろう．学校数学においても，多くの場合，作図は問題として与えられている．それは，作図といった場合に，フランスの前期中等学校数学の第６，７学年では，必ずしもコンパスと定規を用いたもののみに限らない点を除けば，日本でもフランスでも同様である．実際，フランスの第８学年の教科書 (Malavel, et al. 2009)では，直角三角形を作図する活動で次のような目盛付き定規や分度器を用いたものも作図としている．

「目盛のついた定規とコンパスを用意し，AB=2 ㎝，BC=6 ㎝で∠A が 90°の直角三角形を作図しなさい」(p. 211)

② 図形性質の確認のための作図

一般に，いくつかの図形性質を用いてある図形が作図可能であることは，それらの性質がその図形を得るための十分条件であることを意味する．例えば，２組の対辺が等しいという性質を用いて四角形を作図すれば，平行四辺形が作図でき，２組の対辺の性質は，平行四辺形を得るための十分条件となっている．もし，１組の対辺が等しいという性質のみを用いて四角形を作図すれば，それは必ずしも平行四辺形にはならず，その性質が平行四辺形になるための必要条件でしかないことがわかる．したがって，作図（できるかどうか）によって，図形の性質が十分条件であるかどうかを確認することが可能となるのである．つまり，「図形性質の確認」という作図の機

能をここに特定できる．もちろん，作図された図形（例えば，平行四辺形）が実際にその図形であることの判断には本来証明が必要となるため，この確認は作図が与えた図形の図的表現から直観的になされることになる．

「図形性質の確認」の機能は，日仏の学校数学にも見られるものである．ここでは，フランスの例を紹介しよう．フランス前期中等学校数学の教科書第７学年 (Malaval et al, 2006) では，８章「平行四辺形，四角形」に平行四辺形を作図する次のような問題がある．

「OA=3 ㎝,OB=2 ㎝,∠AOB＝140° の対角線の交点をOとする平行四辺形ABCD作図しなさい．」(p. 152)

ここでの作図は，測定を含む広い意味での作図だが，この問いでは，コンパスと定規を用いて，対角線の交点がそれぞれの中点で交わるということを用いて平行四辺形を作図する．ここでは，平行四辺形になるための十分条件が必要となるとともに，これらの性質を用いればそれぞれの図形が得られることを確認していると捉えられる．

③ **命題としての作図**

古典的な幾何学体系はユークリッド原論にまとめられており，それは今日の学校数学で扱われる初等幾何学にも強く影響を与えている．この原論に示された幾何学体系に作図が見られる．作図は，例えば命題１「線分の上に等辺三角形をつくること」などのように，一つの命題の形で与えられている．そして，こうした命題は，体系の一部として，他の命題の証明に用いられる．つまり，命題としてある作図が可能であることが一度示されれば，その作図は定理のように次の命題の証明に利用されるのである．したがって，ここには，「命題としての作図」という機能を特定できる．作図が図形を構成するものであるため，特定の構成の仕方が定理になっていると捉えることもできよう．

「命題としての作図」の機能は，暗黙裏だが，日本の学校数学にも見られる．例えば，教科書を参照すると，第１学年の「基本の作図」では，角の二等分線の作図を学習し，第２学年では，二等辺三角形の底角が等しいことを証明する．この証明では，二等辺三角形の頂角に角の二等分線を引き，二つの三角形の合同を示す．つまり，第１学年で角の二等分線の作図を学習しているため，証明に用いることができ，それが定理のように利用されているのである．

④ **組織化のための作図**

一般に，図形は複数の方法で作図できることが多い．「図形性質の確認」のところで触れた平行四辺形の場合では，複数の十分条件があり，いずれを用いても作図できる（もちろん, 所与の条件, 作図道具の条件によるが)．こうしたことは，作図が幾何学的対象である図形とその異なった性質に相互関係を構築していると捉えることができる．つまり，作図を媒介することにより，様々な図形性質や幾何学的対象が組織化されるのである．

この「組織化」の機能は，特にフランスの教科書を分析している際にしばしば見られたものである．例えば，ひし形の作図は，第６学年と第７学年で扱われていた (Malaval, et al., 2006-2009)．第６学年では，四つの辺の長さが等しい性質を用いて作図する活動が与えられ，第７学年では，二本の対角線が中点で垂直に交わるという性質を用いて，再びひし形を作図する活動が与えられている．作図の問題は同じだが作図の方法と利用する性質が異なるのである．つまりここでは，作図によって，ひし形と，４辺相等および対角線が中点で垂直に交わるという二つの性質が学年を跨いで結び付けられているのである．

４．終わりに

本研究は，フランスや日本の学校数学といった異なった数学における作図の機能を分析する際に基準となりうる，平面幾何における

作図の機能を考察し特定することを目的とした．この目的を達するため，作図の本性と作図に関わる数学の実践の視点から考察を進めた．その結果，次の六つの機能を特定した．

・図形の構成	・図形性質の確認
・図形の図的表現	・問題としての作図
・命題としての作図	・組織化のための作図

今後は, これらの作図の機能を基準として，再度日本とフランスの教科書等に見られる作図の機能を分析していく．しかしながら，注意しなければならないのは，今回特定した機能が作図の機能をすべて網羅しているか否かである．Bosch (2012) によれば，基本認識論的モデルはアプリオリな仮説であり，常にその妥当性を問い，発展させなければならない (ibid., p. 430) とする．作図の機能においても，同様に，今後の教科書等の分析の過程で常にその妥当性・適切性について検討する必要があろう．

参考・引用文献

礒田正美（2009）．「曲線の事典」．共立出版．

塩崎李衣 (2012). 「中学校数学における作図の位置付けと機能」．上越数学教育研究第 26 号，159-168.

島田茂 (1995). 「算数・数学科のオープンエンドアプローチ　授業改善への新しい提案」．東洋館出版社

中村幸四郎 (1996) .「ユークリッド原論」．共立出版

文部科学省 (2008). 中学校学習指導要領解説．数学編．教育出版.

宮川健 (2010). 「フランス前期中等教育における証明の生態～平面幾何領域における教科書分析から～」. 第 43 回数学教育論文発表会論文集，295-300.

宮川健 (2011a).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格 ～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～」，日本数学教育学会誌『数学教育学論究』， Vol. 94, 12-24.

宮川健 (2011b).「フランス前期中等学校数学における証明の生態(2)～国定カリキュラムの分析から～」. 第 44 回数学教育論文発表会論文集，801-806.

Bosch, M. & Gascon, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, No. 58, 51-65.

Chevallard Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In M. Bosch (Ed.) *Proc. of the CERME 4* (pp. 22-30). Barcelona: Universitat Ramon Llull.

Fischbein　E.(1993). The Theory of Fig-ural Concepts, Educational studies in Mathematics, 24, 139-162.

Laborde, C. (1998). Relationships between the spatial and theoretical in geometry: The role of computer dynamic representations in problem solving. *Information and communication technologies in school mathematics* (pp. 183 - 194). London : Chapman Hall.

Malaval, J. et al. (2006-2009) .*Transmath*, 6^{e}- 3^{e}. France: Nathan.

Mariotti (1997). *Justifying and Proving in Geometry: the mediation of a microworld* http://www-didactique.imag.fr/preuve/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html Last Access: 21/Feb/2012.