学校数学における確率を捉える枠組みの一提案

—数学的モデルとしての確率という視点から—

五十嵐　慶太，宮川　健

要　約

本稿の目的は，数学的モデルとしての確率という視点から学校数学における確率を捉える枠組みを提案することである．この視点は，確率を数学世界のみで捉えるのではなく，現実世界とのかかわりで捉えようとするものである．学校数学における確率の問いでは，さいころやくじといった現実場面が非常に多く想定される．そこでの確率は，その現実場面における不確かな事象を表現する数学的なモデルである．一方，学校数学の確率で扱われる現実は，細かく捉えれば，実際に実験等を行う知覚的・物質的な世界における現実と，“正しいさいころ”などが仮定された仮想的・理想的な世界における現実の 2 種類が考えられる．このような考察から，本稿では，学校数学における確率を「物質世界」「仮想世界」「数学世界」の 3 つの世界で捉える枠組みを提案する．そして，この枠組みを用いて教科書に与えられた例題の解決過程を分析することにより，学校数学における確率の問いに取り組む際に学習者がもちうる確率の困難性を指摘し，この枠組みの可能性を示す.

キーワード：確率　数学的モデル　仮想世界

1．はじめに

確率の学習における困難性は古くから指摘されており，それは今日でも，子どもたちの確率理解の障害となっている．例えば，海外において，Fischbein & Schnarch (1997) は，イスラエルの 5 年生，7 年生，9 年生，11 年生と教師志望の数学専攻の大学生を対象に，確率の問題をいくつかの種類に分類し，確率判断に関する実態調査を行っている．そこでは，例えば「2 つのサイコロを同時に投げたとき，(5, 6)の目と(6, 6)の目とではどちらが出やすいか」という質問に対して，学年が上がるにつれて高い割合で「どちらも同じ」と回答するという結果が報告されている．また，国内でも Fischbein & Schnarch のものを参考にした同様の調査で, 同様の結果が得られている（松浦, 2006）.

一方で，確率の学習における教材開発研究も数多くなされており（池田, 2011），確率学習の困難性の解消に向けた困難性の要因を特定する試みもなされてきている．大滝 (2010) は，大数の法則を小さなサンプルに適用してしまうという困難性について，その要因を 3 つ指摘している．こうした研究が進められている一方で，確率学習の困難性を明確に説明できるような，確率に固有な理論的枠組みの構築についての研究は多くない．確率の枠組みとしては，福間・礒田 (2005) が確率理解の水準を提案しているが，必ずしも確率の困難性の説明や分析のための枠組みではない.

そこで本稿では，数学的モデルとしての確率という視点から学校数学における確率を捉える枠組みを提案したい．学校数学における確率は，さいころや硬貨といった現実場面の問いを通して扱われることが多い．そのため，確率を数学世界のみで捉えるのではなく，現実世界とのかかわりで，現実場面における不確かな事象を表現する数学的

なモデルとして捉えることによって，確率学習の困難性や指導への新たな示唆が得られるのではないかと考えた．枠組みを構築するにあたって，第一に，確率と現実との関連を明確にする．具体的には,学校数学における確率と現実とのつながり，一般の数学における確率の位置付け，数学的モデルとしての確率について考察する．第二に，学校数学の確率で扱われる“現実”の性格について考察する．そして，これらの考察を踏まえ，確率を捉える枠組みを提案する．最後に，この枠組みを用いて教科書に与えられた例題の解決過程を分析することにより，学校数学における確率の問いに取り組む際に学習者がもちうる確率の困難性を指摘し，この枠組みの可能性を示す.

２．確率と現実

以下では，確率と現実との関連を明確にする.

（1） 学校数学における確率と現実

学校数学において確率は，主に中学校第 2 学年と高等学校で扱われる．そこでの扱いの特徴的な点は，よく知られていることだが，中高の他の数学領域と比べると現実の場面が多く想定されている点である．それは 2 つの点から指摘できる.

第一に，教科書等で扱われる確率の導入や問いにおいて，さいころを投げるといった現実のものや操作が扱われる点である．例えば，学校図書の『中学校数学 2』で，確率の導入の際に，カードやさいころ，王冠などが取り上げられている（一松信ほか, 2012）．このことは，導入のみならず，確率の問いについても同様である．中学校の教科書では，現実のものが想定されていない問いの方が珍しいであろう．このように，確率の導入や問いにおける現実場面の扱いは，あたかも小学校算数の文章題のようであり，そこでは通常数学で扱われる数学的な概念とは別の日常生活の概念が用いられる.

第二に特徴的な点は，中学校第 2 学年で導入される確率は，その概念自体が現実場面との関連で定義される点である．例えば，先ほどの学校図書の教科書では，確率を次のように定義している.

「多数回の実験の結果，あることがらの起こる相対度数が一定の値に近づくとき，その数値でことがらの起こりやすさを表すことができる.
このように，あることがらの起こりやすさの程度を表す数を，そのことがらの起こる確率という.」(学校図書, 2012, p.159)

ここでは，実験という現実のものや操作を前提にして，確率が定義される．したがって，学校数学における確率は，問いなどの場面で現実が想定されるのみならず，確率の概念自体が現実のものとの関連で定義されるのである．この点も，小学校算数に類似した点である.

（2）数学における確率

上で示したように，学校数学における確率は，現実とのつながりが強い．その一方で，現代数学では，確率は数学世界の数学的対象であり，現実世界とのつながりは必ずしも問題にされない．実際，次の公理を満たす集合関数 P は全て確率である（標本空間が有限の初等的確率の場合）.

「(P．1)　　$P(A) \geq 0$
(P．2)(加法性)　　$P(A+B)=P(A)+P(B)$
(P．3)　　$P(\Omega)=1$　　」
（伊藤清, 2009, p.4）

ここでは，Ωを標本空間，Ω の部分集合全体の集合を$\mathcal{F}$とすると，$A, B \in \mathcal{F}$であり，$A \cap B=\varnothing$ のとき$A \cup B=A+B$と表記している．現代数学では,現実の結果と対応するか否かは別として，上の公理を満たしているものを確率と呼びその性質を探究する．例えば，さいころを 1 回投げて 1 の目が出る事象を A，1 以外の目が出る事象を B としたときに $P(A)=3/4$，$P(B)=1/4$ となるような P を設定することもできる.

（3）数学的モデルとしての確率

数学における確率が現実との対応を問題としないものの，社会において，確率は現実の様々な事象を分析したり表現したりするのに利用される.身近なところでいえば，天気予報の降水確率である．降水確率 50%とあれば，これは今と同じ気象図だった過去のデータにおいて，どの程度雨が降ったかという統計的確率を表している(逆瀬川浩孝,2004)．その他，保険の料金設定等に確率が用いられていることもよく知られている．このように，確率は社会において様々な分野で利用され，そこでの確率は，現実場面の不確かな事象の数学

的モデルとなっている．

数学的モデルとしての確率という視点からすると，降水確率 50%では，その数値がモデルであるともいえるが，一般的には，不確かな事象が確率空間（$\Omega, \mathcal{F}, P$）でモデル化される．例えば，硬貨を 1 回投げるという事象があったとすると，この事象は次のような確率空間$(\Omega, \mathcal{F}, P)$でモデル化できる．硬貨を投げたとき表が出ればω_1，裏が出ればω_2とし，標本空間 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$とする．また Ω の部分集合全体の集まり$\mathcal{F}$を$\mathcal{F}=\{\emptyset, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}, \Omega\}$とする．そして，$\mathcal{F}$を定義域とする集合関数 P を，$P(\{\omega_1\})=P(\{\omega_2\})=1/2$となるように定義すると，これらは硬貨を 1 回投げる事象の数学的モデルとなっている．さらに硬貨を 2 回投げる場合であれば，標本空間Ω_2はさきほどの標本空間の直積を取ったもの，つまり$\Omega_2=\Omega\times\Omega=\{(\omega_1\omega_1),(\omega_1\omega_2),(\omega_2\omega_1),(\omega_2\omega_2)\}$とし，上とほぼ同様に確率モデルを作ることができる．

３．学校数学の確率で扱われる現実世界

上では，学校数学における確率の特徴的な点として，現実とのつながりが強いことを述べた．ここでは，確率で扱われる現実がいかなるものかを考察する．学校数学の確率において，筆者は現実や現実場面といっても，その性格を考えると，実際には場合に応じて異なった 2 つの現実・現実場面が想定されているように感じる．それは，一つは，「物質的・知覚的な現実世界」であり，もう一つは，仮定に基づいた「仮想的・理想的な現実世界」である．

「物質的・知覚的な現実世界」とは，想像上の世界ではなく，さいころなどの「もの」が実際にあり，目で見たり手でさわったりできる，物質を知覚できる世界である．例えば，中学校第 2 学年では，さいころを振り，それぞれの目がどれくらい出るのか確かめる実験を行う．これは，実際に実験を行ったり，手でさいころを持って投げたりすることから，物質的・知覚的な現実世界のものと捉えることができる．

一方，「仮定に基づいた仮想的・理想的な現実世界」とは，上で示した物質的・知覚的な世界とは異なり，現実場面が想定された仮想的な世界である．例えば，教科書における確率の問題で与えられた現実場面がそれに相当する．教科書の問題では，「正しくつくられたさいころ」などと表記され（一松ほか,2012, p. 160），どの目が出ることも同様に確からしいことを前提とする．しかし，物質的・知覚的な現実世界において，それぞれの目が出る確率が等しいさいころは存在しない．すなわち，ここでの現実場面は，物質的・知覚的な世界における現実場面とは異なり，仮定に基づき理想化された世界における現実場面である．

この仮定に基づき理想化された世界における現実場面という視点から，教科書における確率の問題を見ると，様々なことが仮定されていることが分かる．例えば，さいころはそれぞれの目が$1/6$の確率で出ると仮定され，硬貨は裏表がそれぞれ$1/2$の確率で出ると仮定される．さらに，ものや状況についても様々なことが仮定される．さいころはゆがみがなく重さが均一であること．床は十分に固く，さいころがよく跳ねランダム性が確保されていることなどである．このように，教科書における確率の問題で与えられた現実場面は，あらゆる意味で理想的なのである．

さらに，仮定に基づき理想化された世界において，上記のような暗黙裡の仮定は，指導と学習という視点からすると，ある種の教授学的契約（宮川，2011 を参照）をなしている．教授学的契約とは，教師と生徒の間に存在する，生徒が行動する際に従う，多くの場合暗黙のルールのことである．例えば，次のような，「2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目の和が 5 になる確率を求めよ」(数研出版, 2012, p. 48) といった問題において，さいころが，どのようなさいころかは何も規定されていない．そのため，かなりゆがんださいころでも構わないわけだが，教科書や授業においては，そのさいころは正しく作られ，各目が同様に確からしく出るさいころである，ということが暗黙の前提となっている．したがって，ここには，教師と生徒の間に暗黙のルール（教授学的契約）が存在する．さらにいえば，教科書における確率の問題で与えられた現実場面はあらゆる意味で理想的であると述べたが，これは，このような状況を想定しなければならないという暗黙のルールでもあ

る．実際，これらのルールに従わなければ正しい答えは得られない．以上のように，教科書における確率の問題で与えられた現実場面は，教授学的契約を含んだ契約世界と捉えることもできる．

４．枠組みの提案

これまでの確率と現実の関連，学校数学における現実場面の考察を基に，数学的モデルとしての確率という視点から確率を捉える枠組みを提案する. また, 枠組みの特徴をはっきりとさせるため, 関連する枠組みとの差異を考察する．

（１）学校数学における確率を捉える枠組み

上では確率を現実と数学的モデルという視点から捉え，学校数学における現実には 2 種類あるということを指摘してきた．これらのことを踏まえれば, 学校数学における確率は次の 3 つの世界で捉えられる．それは,「物質世界 (Physical world)」「仮想世界 (Hypothetical world)」「数学世界 (Mathematical world)」の 3 つの世界である．

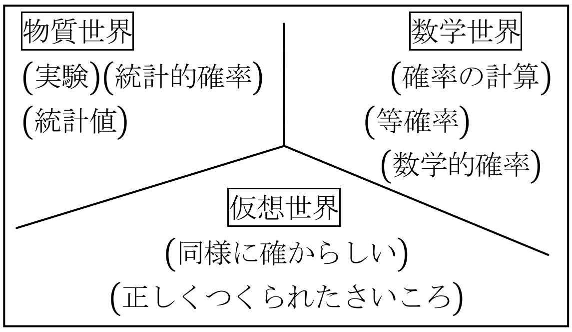

図 1

物質世界とは，人間が目で見たり触ったりして実際にものを知覚できる世界であり，仮想世界とは, 先ほど述べたように，正しいさいころが存在するような仮想的・理想的な世界である．数学世界とは, 数学的対象が存在する抽象的な世界である．

（２）本枠組みから見た学校数学における確率

学校数学において，物質世界は，さいころを投げるといった実験や 1000 回行ったデータ等に見ることができる．実験で使われるさいころは物質世界に存在するものであり，その結果は，そのものを投げた結果であるから，物質世界での操作から得られたものである．つまり，統計的確率は物質世界で実際のものを投げるという操作の結果, 得られたものと捉えることができる．

一方で，教科書等で扱われる確率の問いは，同様に確からしいことなどの仮定が前提となっているため，仮想世界のものである．物質世界において，それぞれの目が出る確率が等しいさいころは存在しないにもかかわらず，教科書等ではそのようなさいころがあることを前提とする. そのため, 教科書等で扱われる確率の現実場面は，物質世界の現実場面とは異なる仮想的・理想的な世界における現実場面である．また，確率の計算や確率空間といった数学的対象やその操作などは数学世界のものである．

本枠組みの視点からすると，学校数学における確率にかかわる言葉や営みが明確になる. 例えば, 中学校第 2 学年では，仮想世界で与えられた確率の問題を，物質世界に戻して実験し，仮想世界のことについて予想する．だが，通常高等学校などでは，物質世界には戻らず，仮想世界と数学世界とのつながりだけで確率を捉える．さらに，中学校・高等学校では「同様に確からしい」という言葉で確率が導入されるが，それは仮想世界において同様に確からしいのであって，数学世界においてそれに対応するものは「等確率」という言葉になる．つまり，中学校・高等学校での，確率の定義の仕方は，仮想世界のものから数学世界のものを定義していると捉えることができる．

また，この 3 つの世界は，確率と同様な量である長さで考えると理解しやすい．あるエンピツが物質世界にあったとすると，その長さは正確に求めることができない．物質世界では，測定の結果は常に近似値でしかなく，正確な値が存在しないからである. 一方で, 算数の文章題では,「3 cm のエンピツがありました」などといった仮定がされることがある．物質世界に 3 cm ちょうどのエンピツが存在しないわけだから，この場合は，物質世界で近似値が 3 cm のエンピツ，もしくは仮想世界で 3 cm と仮定されたエンピツを意味していると二通りの解釈が可能である．通常の解釈は, 後者ではないだろうか．一方，数学世界では，すべてが仮定にもとづいて議論が進められるため, エンピツというものは存在せず，長さが 3，もしくはある単位の 3 つ分の大きさの長さの線分が仮

定され議論されることになる．このように各々の世界に応じて，異なったものが存在しているのである．

(3)本枠組みと数学的モデル化との関連

問題の解決過程を現実世界と数学世界に分けて捉えることは，数学的モデル化の視点からしばしばなされていることである．今日，数学的モデル化に関する研究は数多く行われ，そこでは，現実世界と数学世界という大きな枠組みだけでなく，さらに細かく問題の解決過程を捉える試みがなされている．中には，本稿で提案する仮想的なものをも考慮に入れている枠組みも少なくない．こうした他の枠組みとわれわれのものとの関連を以下で検討する．

Blum & Leiss (2007)のモデリングサイクルは，問題解決過程を詳細に区分している．そこでは，数学的モデルを構成する前に，3 つの段階が現実場面に想定されている．1 つ目は real situation の段階であり，この段階で問題が与えられる．2 つ目は，situation model が構成された段階である．この段階は，問題における設定や，この問題で何が問われているかなど real situation において与えられた問題が理解された段階である．3 つ目は real model を構成する段階である．この段階では，与えられた問題を単純化・理想化し，様々な仮定を設定する．例えば，硬貨を投げてその確率を求める問題であれば，硬貨が歪みなく正しく作られていると理想化し,「どちらの面が出るのも同様に確からしい」などとする．われわれの枠組みの視点からすれば, これらの区分の real model は単純化・理想化していることから仮想世界において与えられたモデルと捉えられる．一方，real situation や situation model は物質世界で与えられる場合もあれば，教科書で与えられた問題のように仮想世界において与えられる場合もあると考えられる．したがって，Blum & Leiss のモデリングサイクルには，われわれの考える 3 つの世界が垣間見られるものの，彼らが解決過程の順序を考慮に入れているためわれわれのものと異なった枠組みとなっている．

一方，わが国の先行研究に，島田氏による数学的活動についての研究がある（島田, 1977）．この研究では，数学的モデル化という語は用いられていないが，現実の世界と数学の世界という枠組みで，数学的モデル化と同様に数学的活動を捉えようとしている．この島田氏の枠組みでは，現実の世界として仮想的なものをも考慮に入れている．それは,「現実についてのことばに抽象的な理論での意味を付した疑似数学モデル」(島田,1977,p.17)と呼ばれるもので，数学の理論を反映したモデルである．例えば,「正しくつくられたさいころ」という語は，公理的確率における確率 1/6 という意味を付した疑似数学モデルと考える．疑似数学モデルは，われわれの枠組みからすると，仮想世界のモデルといえよう．したがって，島田氏の枠組みにおいても，われわれの考える 3 つの世界が垣間見られる．ただし，島田氏の枠組みでは，数学的活動を捉えるという目的のもと，あくまでもモデルというレベルで仮想的なものを反映しており，さらに疑似数学モデルは数学の理論を反映したモデルを捉えるものであった．一方，われわれの枠組みでは，学校数学における確率の困難性を捉えるという目的のもと，世界のレベルで仮想的なものを設定し，さらに Blum & Leiss のモデリングサイクルで生じる物質世界から理想化･単純化した，必ずしも数学の理論を反映していないモデルをも含む世界を考える．つまり，仮想的なものをより前面に取り上げ，その視点から問題解決過程などを捉える枠組みといえよう．

５．本枠組みを用いた問題の分析事例

本枠組みの視点からすると，数学的モデルと現実という対比から，確率の学習における様々な困難性が見えてくる．そこで本節では，数研出版の『改訂版 数学 A』で扱われている確率の例題とその解答を事例として取り上げ，本枠組みの視点から子どもたちがもち得る困難性を考察する．その際，問題における仮定と問題を解決するために用いられる数学的モデルに焦点をあてる．数学的モデルのみならず，仮定に焦点をあてた理由は，本枠組みの視点からすると，仮定といったとき，仮想世界における仮定と数学世界における仮定では，その性格が違うからである．

(1)教科書における確率の例題

数研出版の『改訂版 数学 A』には，くじや玉を取り出すといった問いが多く，例題を見て分かる通り，仮想世界において問題が与えられている．その中から本稿では，次の例題を考察する．

「15 本のくじの中に当たりくじが 5 本ある．この中から 2 本のくじを同時に引くとき，少なくとも 1 本が当たる確率を求めよ．」（数研出版, 2012, p. 56）

これは，余事象の確率についての例題であり，教科書で与えられている解答は次の通りである．

「「2本のうち少なくとも1本が当たるという事象は，「2 本ともはずれる」という事象 A の余事象$\bar{A}$である．2本ともはずれる確率P(A)はP(A) = ${}_{10}C_2$ / ${}_{15}C_2$ = 3 / 7 ゆえに，少なくとも 1 本が当たる確率は P($\bar{A}$) = 1－P(A) = 1－3 / 7= 4 / 7 」（数研出版, 2012, p. 56）

（2）仮想世界における仮定

問題文に見られる仮定は,「15 本のくじがあり，そのうち当たりくじが 5 本ある」「くじを同時に 2 本引く」である．さらに，明記されていない暗黙の仮定もある．例えば，教科書では求める数学的確率の分母を ${}_{15}C_2$ としていることから,「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」と仮定していることがわかる．また，教科書では「組み合わせ」を用いて解答しているが，${}_{15}C_2$ となるためには,「15 本のくじをそれぞれ区別する」という仮定をおいているはずである．この例題は仮想世界における問いであるから，そこで仮定されるこれらの仮定も仮想世界におけるものである．仮想世界における仮定を整理すると次のようになる．

<table>
<tr><td rowspan="2">仮想世界の仮定</td><td>明示</td><td>・15 本のくじがあり，そのうち当たりくじが 5 本ある．
・くじを同時に 2 本引く．</td></tr>
<tr><td>暗黙</td><td>・15 本のくじそれぞれを区別する．
・くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい．</td></tr>
</table>

このように，学校数学における確率の問題は，仮想世界における仮定を明示的・暗黙的にいくつかを前提としている．

これら仮想世界における仮定は，数学世界における仮定とは性格が異なる．数学世界の問題では，問題の解決に必要な性質は問題文に明記されている仮定から演繹的に導かれる．例えば，図形領域において，正弦定理を用いる例題に次のような問題があった．

「△ABC において, a = 10, B = 60°, C = 75°のとき，b を求めよ．」(数研出版, 2011, p.128)

このとき△ABC は，数学世界の数学的対象が想定されている．紙面上にかかれた物質世界の三角形が想定されているわけではない．したがって，これは仮想世界の問いでも物質世界の問いでもなく，数学世界における問いである．そして，この例題における仮定は「△ABC が存在する」や「a = 10，B = 60°，C = 75°」である．問題の解決には，「三角形の内角の和は180°」という性質を用いて A の角度を求め正弦定理を適用する．ここでは，問題文に明示されていない性質（内角の和）が用いられる．この点は，明示されていない仮想世界の仮定を考える確率の問題と同様である．しかし，数学世界の問題では，問題解決に必要な性質は，基本的に，問題文に明示されている仮定から演繹的に導かれる．上記の例題では,「△ABC がある」という仮定から「三角形の内角の和は180°」という性質が導かれる．この点は，仮想世界の暗黙の仮定と大きく異なる点である．実際,「15 本のくじがあり，そのうち当たりくじが 5 本ある」「くじを同時に 2 本引く」という明示された仮定から,「15 本のくじそれぞれを区別する」「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」という暗黙の仮定は必ずしも導かれない．

さらに，この暗黙の仮定を導くことは容易ではない．上記のような明示された仮定と暗黙の仮定とのつながりを考えるために，物質世界に戻って実験することも可能であろう．コインの裏表がそれぞれ同様に確からしく出ることは，実験によりおおよそ捉えることができる．こうしたことは単純な事象であれば可能かもしれないが，事象が少し複雑になるとそう容易ではない．上の 15 本のくじの場合，何回の実験を行えば,「15 本のくじそれぞれを区別する」という仮定を見出すことができるだろうか．そして，その仮定を前提に，次に「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞ

れ同様に確からしい」という仮定をも見出さなければならないのである．このように考えると，確率の問題を解く際には，こうした仮定が存在することを経験的・習慣的に知っている必要がある．

以上のように，教科書における確率の問題を解決する際には，仮想世界における仮定を特定する必要がある．そしてその仮定は，確率の問題が数学世界ではなく仮想世界における現実場面で与えられるため，演繹的にではなく習慣的に導かれるのである．

（3）仮定のモデル化

一般的なモデル化の過程では，問題文に明示されている仮定や暗黙の仮定を明確にし，それらをモデル化し数学的モデルを作る．その過程において，確率の問題では，確率という数学的モデルを作ることになる．ここでは，仮想世界の仮定から確率という数学的モデルがどのように作られるか，その過程を考察する．

先述のように，仮想世界における仮定には，問題文に明示されている仮定と暗黙の仮定がある．暗黙の仮定は問題文中に明記されていないがゆえに, その設定の仕方は人によって異なるであろう．さらに数学的モデルは仮定に基づいて構築されるため，設定する仮定に応じて構築されるモデルは異なる．先のくじの例題において，教科書では，「15 本のくじそれぞれを区別する」「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」という暗黙の仮定に基づいて, 「組み合わせ」を用いて確率 P という数学的モデルを構築した．

一方，「それぞれのくじが 1 本取り出されるのは同様に確からしい」という暗黙の仮定を基に，数学的モデルを構築することもできる．その際の解決方法は，積事象の確率を使って解くことになろう．例えば，以下の通りである．

「(少なくとも 1 本当たりが出る確率) ＝1－ (2 本ともはずれの確率) だから，2 本ともはずれの確率は $10/15 \times 9/14 = 3/7$ よって少なくとも 1 本当たりが出る確率は $1 - 3/7 = 4/7$」

このとき使われている仮想世界における仮定は，問題文に明示されている仮定と「15 本もしくは 14 本のくじが同様に確からしく取り出される」という仮定である．したがって，使用される仮定が異なるため，別の数学的モデルが採用されていることが分かる．

上の事例は，教科書で使われている仮定と数学的モデルとが異なる場合であっても，正しく解答が得られる事例であった．一方で，教科書で使われている仮定や数学的モデルと異なるものを用いるとき，得られる答えが教科書と異なる場合もある．例えば，問題文に明示されている仮定と「15 本のくじそれぞれを区別しない」「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」という暗黙の仮定に基づいて問題を解決した場合を考えよう. 5 本の当たりくじをそれぞれ a, 10 本のはずれくじをそれぞれ b とすると, 当たる組み合わせは標本空間 $\Omega = \{(a,a), (a,b), (b,b)\}$ でモデル化できる．ここで「くじを 2 本引いたときの組み合わせがそれぞれ同様に確からしい」という暗黙の仮定をモデルに反映させると，それぞれが起こる確率が 1/3 となり，したがって，少なくとも 1 本が当たる確率は 2/3 となる．ここでは,「15 本のくじそれぞれを区別しない」という仮定を置いたことによって，得られる数学的モデルとその結果が教科書のものと異なることが分かる．この事例はやや特殊な事例のように思えるが，よく知られた他の事例としては，ベルトランのパラドックスがある（逆瀬川, 2004）．これは，何を同様に確からしいとするかによって確率の値が変わる，つまり仮定によって確率の値が変わるということを示した事例の 1 つである．

（4）本枠組みから見える困難性

上で示したように，正しく問題を解決するためには，期待された解答が出るような仮定と数学的モデルを選択する必要がある．しかし，これまでの考察からすると，仮定が常に明示的に与えられているわけではなかったり，設定した仮定を正しく数学的にモデル化しなければならなかったりと，問題の解決が必ずしも容易ではないことがわかる．特に, 教科書における確率の問題の解決において，仮定を明確にする際の困難性，設定した仮定に基づいて数学的モデルを構成する際の困難性，という 2 つの困難性が指摘できる．

仮定を明確にする際，教科書における確率の問題では，暗黙の仮定は問題文に明示されている仮

定から必ずしも演繹的に導かれない．さらに，同じ場面設定であっても，暗黙の仮定の設定の仕方は複数あり，必ずしも一通りに決まらない．くじの例題では，「15 本のくじをそれぞれ区別する」という仮定があってもなくても正しい解答を導くことができ，くじを区別するかどうかは，数学的に決まっているわけではない．このように，問題文に明示されている仮定と暗黙の仮定とのつながりが，数学的なものではなく，経験的・習慣的なものに依拠しているために，生徒たちにとって，何を仮定すればよいのかということは難しい．また，物質世界に戻っての実験などにより，仮想世界で設定した仮定の妥当性を判断することも不可能ではないが，実験から仮定を導くことが必ずしも容易ではなく，妥当性の判断も容易ではないであろう．妥当性を判断できなければ，何が正しい仮定であるか見出すことは困難である．

また，仮定の妥当性のみならず，数学的モデルの妥当性の判断も大きな問題である．数学的モデルとその結果の妥当性は，通常，現実の問題との対応で判断される．確率の場合は，物質世界に戻って実験し，統計的確率を求めることによってその妥当性を判断可能ではある．実際，授業では，実物を使った実験などやっているであろう．しかし，確率の問題に取り組むたびに，実験を行うことは不可能であり，さらに，当たり前のことであるが，物質世界に戻らず，仮想世界に戻ったとしても，その妥当性を判断することはできないのである．したがって，数学的モデルの妥当性を判断できないことは多くの場合に学習者の困難性の要因の一つとなるであろう．

５．おわりに

本稿では，数学的モデルとしての確率という視点から，「物質世界」「仮想世界」「数学世界」という 3 つの世界からなる枠組みを提案し，学校数学における確率の扱いやその困難性を捉えることを試みた．困難性については，この枠組みを用いた高等学校教科書に見られる例題の分析により，仮想世界における仮定の特定と仮定のモデル化という 2 つの異なる段階それぞれに学習者の困難性が生じる可能性を指摘できた．これらのことは，今後，中学校・高等学校の生徒たちを対象にした，確率の困難性に焦点を当てた実験データを収集し，検証していく必要がある．それにより，本稿で提案した枠組みの有効性や妥当性をさらに検証していきたい．

引用・参考文献

Blum, W., Leiss, D. (2007). How do students' and teachers deal with modelling problems? *Mathematical Modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp.222-231), Chichester: Horwood.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Reseach in Mathematics Education*. Vol. 28, 97-105.

福間政也・礒田正美．(2003).「確率分野における学習過程の水準に関する研究」．第 36 回数学教育論文発表会論文集．pp.229-234.

一松信ほか．(2012). 中学校数学 2．学校図書.

池田文男．(2011). 「§11 確率・統計」．数学教育学研究ハンドブック (pp.158-164)．東洋館出版社.

伊藤清．(2009)．確率論．岩波書店.

川中宣明ほか (2011). 改訂版 数学 I．数研出版.

松浦武人. (2006). 「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」．全国数学教育学会誌．第 12 巻, pp.141-151.

宮川健 (2009). 「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格－わが国における「学」としての数学教育研究をめざして－」．日本数学教育学会誌．数学教育学論究　第 91 巻, pp.37-68.

大滝孝治 (2010).「確率領域におけるミスコンセプションに関する一考察：確率概念の多義性からみた克服の障害」．第 43 回数学教育論文発表会論文集．第 2 巻．pp.657-662.

逆瀬川浩孝(2004)．理工基礎 確率とその応用．サイエンス社.

島田茂(1980/1977)．算数・数学科のオープンエンドアプローチ．みずうみ書房.

坪井俊ほか (2012). 改訂版 数学 A. 数研出版.