幾何領域における証明の存在理由

～フランスと日本の場合～

宮　川　　健

要　約

本研究は，教授人間学理論にもとづいた証明の生態についての国際比較研究の一環で，フランスと日本それぞれの前期中等学校数学の幾何領域における証明の存在理由を，“教えるべき幾何”に焦点を当て，特定することを目的とする．この目的を達するため，これまでの教科書分析等の結果を振り返るとともに，今回新たに加えた教科書や国定カリキュラム等の複数の資料を分析した．その結果，フランスの“教えるべき幾何”が「知覚に頼らない幾何」「組織化された幾何」という性格をもつのに対し，日本の“教えるべき幾何”は「一般性の重視」「準公理的な幾何」という性格をもつことを特定した．そして，これらが各々の国の証明の存在理由となっていることを示すとともに，証明の生態についていかなる帰結をもたらしているか考察した．

キーワード：教授人間学理論，前期中等教育，証明の生態

1．はじめに

筆者はこれまで，教授人間学理論（以下，ATD）の視座より，証明の生態についての国際比較研究を進めてきた．この研究の目的は，平面幾何領域の証明に関する海外のカリキュラムやそこでの扱いを明らかにするのみならず，なぜそのような扱いがされているのか，その扱いを生じさせる仕組みを解明することにある．ATD の言葉で換言すれば，平面幾何領域の証明の生態の別の可能性を示すとともに，その生態を形作る条件と制約を明らかにすることを目的とする．そしてこの研究により，証明に関するカリキュラム開発の際に参考となる基礎資料を得ようとするのである．

これまで，教科書分析により，フランスの学校数学における証明の生息地やそこでの機能といった証明の生態を明らかにするとともに（拙稿，2012b），日仏両国の証明の生態の特徴を浮き彫りにしてきた（拙稿, 2012a）．さらに，フランスの国定カリキュラムの分析を通して，こうした証明の生態を形作る条件と制約を探ってきた（拙稿，2011b）．条件と制約に関しては，これまで，国定カリキュラムより証明に関連する要素を抜き出し，証明の生態に影響を与えているであろうことを指摘するにとどまっている．証明の存在とその生態を生じさせている主たる要素を特定することはまだできていない．そこで本稿では，日仏各々の場合において，“教えるべき幾何” に焦点を当て，幾何のいかなる性格が証明の生息を可能にする存在理由となっているかを明らかにする．

2．分析の準備

以下では，研究枠組みである ATD の視点から本稿の位置付けを示すとともに，分析の焦点と方法，今回の分析に利用した資料について述べる．

(1) 存在理由の分析

教授人間学理論 (ATD) では，数学というものを“社会 (institution)”という視点から捉え，社会によって異なった数学が存在するとする (cf. Chevallard, 1992; 拙稿, 2011a)．この視座から，本研究では，フランスと日本という 2 つの異なった社会におけるそれぞれの学校数学を研究対象とし，そこでの証明の生態とその生態を形作る“条件 (conditions)”と“制約 (constraints)”を検討してきた [1)]．本稿では，さらに，証明の“存在理由”を考察する．「存在理由 (raison d'être)」とは，ATD において明確に定義されている語ではないが，しばしば用いられる．それは，ある数学にある数学的対象や数学のある状態を生じさせている中心的な要素であり，その対象や状態が生じるために社会が備えているはずの主たる条件である [2)]．それは,「なぜ〜を教えるのか」といった問いに対する回答となる．例えば，代数領域において，因数分解の存在理由の一つは方程式の解決であろう．一般に，ATD における存在理由の分析は，ある数学概念が発生するような学習場面(「基本認識論モデル」と呼ばれる）を構築する際に行なわれる．

(2) 分析の焦点

学校数学等，何らかの社会の数学において，その数学のある生態を形作る条件と制約は様々である．証明の場合であれば，論理的な思考力を養うためといった, 証明を指導する教育的な理由から，また数学において命題が真であることを示すためにといった，数学の内的な理由まで，生息のための様々な条件が存在する．

ATD では，ある生態を形作る種々の条件と制約を整理するために，「決定レベル (niveaux de détermination)」と呼ばれる枠組みが提案されている (Chevallard, 2002)．それは，「社会－学校－教育－教科（数学）－領域（幾何）－区域－テーマ－問い」などのように，数学外のものから数学内のものまで様々な条件と制約を分類するものである．拙稿 (2011b) では，決定レベルの中で，数学レベルと幾何レベルの条件と制約をフランスの国定カリキュラムの分析から検討した．

本稿では，日仏の幾何レベルの条件と制約，とりわけ存在理由について検討する．具体的には，各々の国で教えるべき内容となっている幾何（以下，“教えるべき幾何”）に注目し，その性格を探ることにより，証明の存在理由の解明を試みる．

幾何レベルに注目した理由は，日仏いずれの国においても，証明が幾何領域で中心的に扱われること，そして他の領域（例えば，数と式）では証明の存在理由が異なる可能性が高いことにある．また，数学外のレベルに焦点を当てない理由は，本研究がそもそも証明の必要性が感じられない子どもたちの学習困難性の究明に端を発しており，学校数学で扱われている数学がどれほど証明を必要とするのかといった問いが根本にあるからである．また，数学における証明の複数の異なった生態の可能性を検討するためにも，生態に直接的に影響を与える要素に焦点を当てる必要がある．

“教えるべき幾何”を分析する際に注目するのは，各々の国における幾何の個々の指導内容ではなく，幾何全体の性格である．拙稿 (2012b) で指摘したように，確かに，指導内容の違いは証明で用いられる性質の違いをもたらす（例えば，フランスでは合同や相似が証明に表出しない）．ただ，ここでは幾何の個々の内容ではなく，総体としての幾何の性格を問題とする．

(3) 分析の方法

本稿での中心的な問いは，日仏それぞれの場合に,“教えるべき幾何”とはいかなるものか, いかなる性格が証明の存在理由となっているのか，その性格は証明の生態にいかなる帰結をもたらしているか，である．これらの問いに答えるため，本稿では，これまでの研究成果や今回新たに追加した資料の分析をもとに考察を進める. 具体的には, 教科書や国定カリキュラム等の資料で言及されている幾何の性格の中から，証明の存在理由となっているであろうものを特定し，その根拠を資料の記述から示す．その後，その存在理由が証明の生態についていかなる帰結をもたらしているか考察し，最後に，学校数学において証明が生息するための条件について考察する．

(4) 資料の概要

フランスには，日本同様，国定カリキュラムが存在し，前期中等学校（第 6 学年から第 9 学年）における数学の指導内容がこれに定められている．

教科書検定は存在しないが，大半の教科書が国定カリキュラムに準拠している[3)]．そうした中で，本研究では，以下の資料を収集し，分析する．

1. 教科書
2. 教科書の教師用書
3. 国定カリキュラム
4. 国定カリキュラムの付録

教科書については，Hatier 社の *Triangle* シリーズ (Chapiron et al., 2009, 2010, 2011, 2012) を中心に，必要に応じて Génération 5 社の *Sésamath* シリーズ[4)]を分析した．いずれも現行の国定カリキュラムに準拠したものである．拙稿 (2012b) で分析した Hachette 社の *Phare* シリーズは，一部，前国定カリキュラムにもとづいているため，今回は参考程度に用いた．いずれのシリーズも，前期中等学校 4 学年分の教科書を用意した．

教科書の教師用書 (livre du professeur) については, *Triangle* シリーズのものを用意した．特に，証明指導についての留意点等の記述から証明の存在理由を探る．

国定カリキュラム (programmes) とその付録 (accompagnement) は，フランスの国民教育省 (Ministère de l'Education Nationale, 以下 MEN) が発行しているものである．国定カリキュラムについては，2008 年に公示された現行のもの (MEN, 2008) を中心に，必要に応じて前回のもの (MEN, 1998) を参照した．付録については，数学に特化した現行のものがないため，MEN (1998) にまとめられた前回の付録を用いた．この付録は，日本の指導要領解説のようなものではなく，学習期ごとに指導の留意点をまとめたものである．

一方，日本に関する資料は，フランスの資料に対応するものを用いた．教科書と教科書の教師用指導書，学習指導要領解説である．教科書とその指導書については，現行の『新しい数学シリーズ』（東京書籍）を中心に，必要に応じて他社の教科書を参照した．学習指導要領解説については，現行のもの（文部科学省, 2008）を中心とする．

３．フランスの証明

以下では，まずフランスの前期中等学校数学における証明の概要について述べる．その後，資料の分析結果として得られた，証明の存在理由となっている“教えるべき幾何”の性格を報告するとともに，その帰結としての証明の生態を示す．

(1) 証明の概要

現行の国定カリキュラムでは，「論証の漸進的導入 (Une initiation très progressive à la démonstration)」(MEN, 2008, p. 11) が謳われ，前回のものよりもさらに証明がゆっくりと導入されるようになった．そのためか，前回分析した *Phare* シリーズでは第 6 学年でも「証明」の語が見られたが（拙稿, 2012b, p. 7)，今回の *Triangle* シリーズの第 6 学年の教科書では「証明」の語は見られず，証明についての説明もなかった．

Triangle シリーズの教科書では, 第 7 学年で「証明 (preuve)」の語が「数学的議論 (débat mathématique)」の語とともに導入される. そこでは,「数学的な言明の真偽を決定するためには，特定のルールを用いる」 (Chapiron et al., 2010, p. 144) と記され, そのルールが数学的議論のルールとされる．そして，それに則ったものが証明である．ルールは次の 4 つである (ibid. 以下引用).

1. 数学的言明は真もしくは偽である．
2. 図での確認や測定では幾何学的言明が真であることを証明できない．
3. 言明を確かめるいくつかの例は，その言明が真であることを証明するには不十分である．
4. 言明に合わない例は，その言明が偽であることを証明するのに十分な言明である．この例は反例と呼ばれる．

そして，この「証明」を発展させた形で，第 8 学年で「論証 (démonstration)」の語が導入される (Chapiron et al., 2011, Ch. 8). ここでの「証明」と「論証」の違いは，前者が 1 ステップの演繹的な推論であるのに対し，後者は 1 ステップとは限らない点と，前者は「結論：性質」と記述するのに対し，後者は「所与－性質－結論」の 3 段階で記述する点である．この差異は，拙稿 (2012b) で分析した *Phare* シリーズの教科書における,「正当化」と「証明／論証」の差異にほぼ相当する．また，証明の形態については，*Phare* シリーズのものとほぼ同様であり, 性質は “si … alors ….” （英語の “if … then…” に相当）の形式で記述される．

また，教科書や国定カリキュラムの記述から，様々な証明の存在理由が特定できる．拙稿 (2011b) では，国定カリキュラムの検討により，「数学的思考」や「真の数学的活動」などの数学レベルの条件や「知覚的な認識から性質による認識へ」などの幾何レベルの条件について言及した．これら以外にも,「自ら納得するため，他者を納得させるため」や「なぜ真か理解するため」などの証明の存在理由が，教科書の教師用書や国定カリキュラムに見られた (cf. *Triangle 4e livre du professeur*, 2011, p. 10; MEN, 2008, p. 11).

(2) 幾何の性格

フランスの教科書や国定カリキュラム等の資料を分析することにより,“教えるべき幾何”の性格を検討した. その結果, 証明の存在理由となり，証明の生態に大きく影響を与えている側面として，以下に示す「知覚に頼らない幾何」「組織化された幾何」という性格を特定した．

① 知覚に頼らない幾何

拙稿 (2011b) のフランス国定カリキュラムの分析では，「知覚的な認識から性質による認識へ」(MEN, 2008, p. 10) の移行が, 幾何領域の目標の一つとなっていることに言及した．その意味するところは，教科書の教師用書や国定カリキュラムの付録などに述べられている．付録では,「観察幾何から演繹幾何へ」という表現で，上の認識の移行を説明している (MEN, 1998, p.32)．ここでいう「観察幾何」とは，知覚や測定に頼って図形やその性質を認識する幾何を意味し，「知覚的な認識」に対応する．一方，「演繹幾何」とは，仮定から性質（定義や定理）を用いて図形やその性質を認識する幾何を意味し,「性質による認識」に対応する．小学校では観察幾何が主であったが，前期中等学校では演繹幾何が主となるのである．

こうした幾何の性格は日本でも同様だが，特徴的なのは，知覚や測定に頼らないという側面が強調され，知覚や測定に頼らない認識の手段として証明が導入される点である．つまり,「知覚に頼らない幾何」という性格が証明の存在理由となっている．例えば，上で触れた数学的議論の 2 番目のルールはその表れであり，このルールは第 8 学年の「論証」の導入で再度言及されている (Chapiron et al., 2011, p. 147). さらに, 今回参照した *Sésamath* シリーズでは，証明が知覚に頼らない手段であることが *Triangle* シリーズ以上に強調されていた．第 8 学年では,「推論のための道具」という証明導入のための章があり，その中の「幻想に気をつけて」という表題の節には，視覚的判断がどれほど不確かなものかを感得させる活動が 2 ページにわたり提案されている (*Sésamath 4e*, pp. 218-219). それぞれの活動は,「見えるものを疑わなければならない」「存在しないものを疑わなければならない」「証拠を疑わなければならない」などの表題の下，カニッツァの三角形やティチェナー錯視など，幾何学的な錯視を題材にしたものであった. そして，2 ページの最後の活動では，証明の存在理由そのものを問う「なぜ証明するのか？」という表題が与えられ，正方形を分割して長方形を作ると面積が増える例（図 2）が与えられていた．

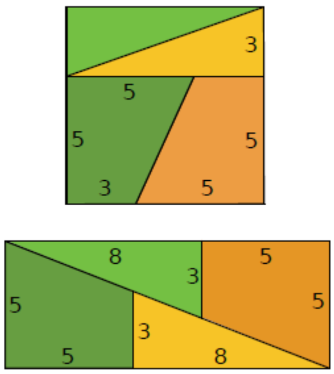

図 2　なぜ証明するのか？ (*Sésamath* 4^e, p. 219)

以上のように，フランス前期中等学校で教えるべき幾何は「知覚に頼らない」という性格をもち，知覚に頼らずに図形やその性質を認識するための証明が必要となっている [5].

② 組織化された幾何

先行研究で指摘されているように，証明には，ある図形性質や幾何学的対象を他の性質や対象と結びつける機能がある (cf. Bell, 1976; de Villiers, 1990)．フランスの教科書では，証明によって性質や対象間の様々な相互関係を有機的に構築することが，意識的になされていた．

今回参照したフランスの教科書（*Triangle* シリーズ，*Sésamath* シリーズ）では，証明が求められる中心的な性質とその証明の際に用いられる性質が巻末にまとめられていた．例えば，第 8 学年の

教科書 *Triangle 4e* では，証明の対象となる主な性質として, 次の 3 つがあげられている（Chapiron et al., 2011, p. 304).

1. 二直線が平行であること.
2. 二直線が垂直であること.
3. 点がある線分の中点であること.

教科書の問いでは，これら以外にも，平行四辺形や長方形であることなどを証明する問いも見られる．ただ，それらの証明の過程で，上の 3 つのうちのいずれかの性質が証明される．さらに，上の 3 つの各性質に対し, 証明に利用される性質（根拠となる事柄）の一覧が与えられている．平行に対して 6 つ，垂直に対して 8 つ，中点に対して 4 つの性質が見られる．例えば，平行の場合は次の 6 つである（ibid. p. 304).

a) 3 つ目の直線に平行な 2 直線の性質
b) 3 つ目の直線に垂直な 2 直線の性質
c) 平行四辺形，長方形，ひし形，正方形の対辺の性質
d) 三角形の 2 辺の中点を通る直線の性質
e) 点対称の性質
f) 錯角，同位角の性質

ここでは，場面に応じて一つの性質を異なった性質を用いて証明すること，証明できるようになることが想定されているのである．このことは，*Sésamath* シリーズでも明確である．証明の導入のための「推論のための道具」の章では，一つの性質を証明する複数の性質を見出す課題「同じ結論に対して様々な性質」(*Sésamath 4e*, p. 227) が与えられている．

したがって，一つの性質を複数の性質で証明することにより，対象や性質間の相互関係を構築しているといえよう．そしてそれにより，フランスで教えるべき幾何が構築されている．逆の見方をすれば，対象や性質間の相互関係が構築された幾何（ここでは「組織化された幾何」と呼ぶ）が指導内容となっているからこそ，証明が必要となっているのである．つまり,「組織化された幾何」という性格が証明の存在理由となっている．

ここで構築される幾何は，体系という視点から見ると特徴的である．なぜならば，教科書を見る限り，それは何らかの最少の図形性質から作り上げられた公理的な幾何ではないからである. 実際, 教科書から基本性質が何かを特定することは難しい [6]．証明は第 7 学年で導入されるが，証明では学習時点までに扱われた証明されていない性質も利用できる．例えば，第 6 学年で経験的に認められた性質である．そして，その後新たに導入される性質も必ずしも証明されるとは限らない．このことから，フランスで“教えるべき幾何”は，公理的な幾何というよりも，むしろ，証明の有無とは関係なしに，様々な性質が存在し，それらが証明によって結びつけられて出来上がったネットワーク状の幾何である [7]．そのため，ここでは“組織化された幾何”と呼んだ．

(3) 帰結としての証明の生態

以上,“教えるべき幾何”という視点から,「知覚に頼らない幾何」「組織化された幾何」という 2 つの性格を特定し，それらが証明の存在理由と考えた．次に，これらの性格が強調された結果，いかなる証明の生態が形作られるかを示したい．

① 証明の際の図

「知覚に頼らない幾何」という性格は，まず，証明が求められる問題に与えられる図に影響を与える．この点は，第 8 学年の *Triangle 4e* の教師用書で明確に指摘されている．知覚的な認識にもとづく幾何では，物質的な図そのものが幾何学的対象とみなされる．ところが，知覚的な認識が許されない幾何では，図は抽象世界の幾何学的対象の表現でしかなく，幾何学的対象そのものとはみなされない．それゆえ，この図の性格の変化が指導の対象となるのである（p. 11).

この性格の結果，拙稿（2012b, p. 10）で指摘したように，フランスの教科書では，角度が実測と大きく異なる図や手書きの図が用いられることが少なくない．このことは今回参照した教科書でも同様であった．例えば，図 3 は平行四辺形 STOP が長方形であることの論証を求めた問いである．

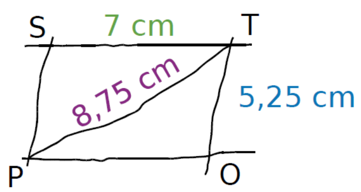

図 3 長方形であることの論証（*Sésamath* 4^e, p. 146)

これは，知覚に頼らないで演繹的に推論することが求められた結果である．

② 証明される性質，されない性質

フランスの“教えるべき幾何”においては,「知覚に頼らない幾何」が強調されるものの，日本のように命題の一般性は強調されず，全称命題を証明することが証明の存在理由とはなっていない．そのため，全称命題に限らず，長さや角の大きさが決まっている特定の図形についての性質（単称命題）が真であることの説明も「証明 (preuve)」もしくは「論証 (démonstration)」と呼ばれる．図 3 に示した問題は長さと角の大きさが決定した図形についてだが,「論証」が求められていた．こうした，論証の対象に単称命題が含まれることは，一般性が強調されない帰結であろう．

その一方で，フランスの教科書では，知覚的に認識されてきたすべての定理の真偽を疑い，一から証明しなおすわけではない．*Triangle* シリーズの教科書では,「証明」の語が第 7 学年で導入されるため，第 6 学年で扱われる図形性質の大半が証明を求められていない．第 7 学年で扱われる定理についても，証明されるものもあるが，証明されないものも少なくない．こうした証明されない性質は，教師がそれを認めることをはっきりと述べることにより (MEN, 2008, p. 11), その後の証明で利用されるのである．

証明されない性質があること，それを他の証明で用いることは,「知覚に頼らない幾何」という性格に矛盾するようにも思える．しかし, それは「組織化された幾何」という性格の帰結と考える．実際,「組織化された幾何」では，基本性質が明確に定まっておらず，他の証明に利用される性質をすべて証明する必要はない．証明によって性質間の相互関係を構築すればそれで十分なのである．

４．日本の証明

次に，日本の中学校数学における証明の存在理由を分析する。日本のものはよく知られているため簡潔に述べる．

(1) 証明の概要

日本の中学校数学における証明は，よく知られているとおりである．ここでは，学習指導要領解説（文部科学省, 2008）の記述に見られる証明の機能もしくは存在理由を示すにとどめる．以下は，数学レベル，幾何レベルの代表的なものである．

1. 一般的に成り立つことを明らかにする (p. 23)
2. 知識を関連付け，さらに体系化する (p. 29)
3. 自分が納得し，他人を説得する (p. 41)
4. 図形の性質を確かめる (p. 95)
5. 論理的に体系付け，組み立てていく (p. 117)

(2) 幾何の性格

幾何の性格という視点から，証明の存在理由となり，証明の生態に大きく影響を与えている側面を 2 つ特定した．それは，以下に示す「一般性の重視」と「準公理的な幾何」である．

① 一般性の重視

日本の中学校における“教えるべき幾何”の特徴の一つは，一般性をもつ全称命題が中心的に扱われる点である．このことは，証明が扱われる際に顕著である. そして, 一般性を重視することが, 証明の存在理由の一つとなっている．この存在理由は,「証明の必要性」(cf. 文部科学省，2008）や「論証の意義」(cf. 国宗，1987）としてしばしば言及される．例えば,「証明は，命題が例外なしに成り立つことを明らかにする方法であること」（文部科学省，2008, p. 96）との記述があり，全称命題が真であることを示す手段として証明が必要となっている. さらに, 帰納と演繹との対比から, 帰納的な説明ではできない，全称命題が真であることを示すことが、演繹的な説明（証明）によりできるといった説明もなされている (ibid. p. 96).

② 準公理的な幾何

日本の“教えるべき幾何”についてのもう一つの特徴的な点は，その体系であろう．日本の中学校数学で構築される幾何体系は，フランスのものとは異なり，ユークリッドの原論に見られる幾何学体系に類似した, おおよそ公理的な体系 (以下,「準公理的な幾何」と呼ぶ）である．それは，簡易化されてはいるが，少数の認められた性質（公理）を基礎に，そこから導かれる性質をひとつひとつ演繹的に証明することによって，一つの幾何を作り上げている．

中学校第 2 学年では，平行線の性質や三角形の

合同条件などを経験的に認め，それらを公理のように前提とし，そこから新たな性質を演繹的に導く．そして証明された性質は，また別の証明で用いられる．「根拠となることがら」として証明で利用できる性質は，基本的に，第 2 学年の平明図形領域の最初の方で認められたものと，学習の時点でそれまでに証明されたものとである．

このように，日本では，簡易化されてはいるが，より厳密な基盤にもとづいた準公理的な幾何を構築することが目指されており，この幾何を構築するために証明が必要となる．

(3) 帰結としての証明の生態

“教えるべき幾何”という視点からすると，上述の「一般性の重視」「準公理的な幾何」が日本の証明の存在理由となっており，証明の生態に大きく影響を与えていると考える．これらの存在理由は，以下の証明の生態をその帰結としてもたらす．

まず，日本の教科書では，単称命題が真であることの説明を「証明」とは呼ばない．「証明」の語は全称命題が真であることの説明に限定される．実際，東京書籍の第 2 学年の教科書（藤井ほか, 2012）において，「証明せよ」とする問いにおいて，長さや角の大きさが決定された図形を扱うものは一つもなかった．

また，少数の基本性質を基礎に体系を構築することが目指されるため，小学校や中学校第 1 学年で学習した，“教えるべき幾何”を構成する基本的な図形性質（二等辺三角形の底角，平行四辺形の性質など）は，たとえ明らかと思われる性質であっても新たに証明される．そして，証明されて初めて，他の証明等に利用することができる．証明に利用できる性質は，基本的に，証明が導入された時点で認められたもの，それ以前に証明されたもののみである．これらの証明される性質，証明に利用される性質についての証明の生態は，フランスのそれと大きく異なるところである．

5．おわりに

本稿は，日仏各々の場合に，“教えるべき幾何”に焦点を当て，証明を生息させる存在理由となっている幾何の性格を明らかにすることを目的とした．教科書や国定カリキュラム等の複数の資料を分析した結果，フランスの場合は「知覚に頼らない幾何」と「組織化された幾何」が，日本の場合は「一般性の重視」「準公理的な幾何」が，それぞれの国において証明の存在理由となる“教えるべき幾何”の性格であるとの結論に至った．そして，こうした異なった幾何の性格が，何をいかに証明するのかといった異なった証明の生態を形作っていることを指摘した．例えばそれは，フランスで単称命題が真であることの説明が「論証」と呼ばれるのに対し，日本では「説明」と呼ばれること，フランスでは証明されない性質が少なくないのに対し，日本では明らかと思われる性質であっても証明が求められること，などである．

これらの結果から示唆されることは，まず，日本の中学校数学の証明指導において，「証明の意味」や「論証の意義」として強調される一般性（cf. 国宗, 1987; 文部科学省, 2008）が必ずしも証明生息のための必要条件ではないこと [8]，さらに，準公理的な幾何も必要条件ではないことである．実際，これらの条件を備えない幾何が存在し，そこに証明が生息していた．すなわち，日本のものとは別の，これらの条件を備えない証明の生きる場所（生息地）と生き方（生態）が存在するのである．今回それは，「知覚に頼らない幾何」，「組織化された幾何」という幾何であった．

一方で，学問知としての数学では，いかなる領域でも証明が求められ，その生息地は幾何に限らない．学校数学においても，文字式の証明など，証明の生息地は他にも存在する．今回検討した存在理由は幾何の内的な存在理由であったため，領域が異なれば，また異なった存在理由があろう．実際，数と式領域における証明の存在理由が“数体系”にあるとは思えない．さらに，より大局的に複数の領域を捉えれば，証明が他の領域ではなく，幾何に多く生息する数学的な理由もあろう．こうした存在理由の検討は今後の課題としたい．

註

1) ATD の用語や生態学的アプローチについては，拙稿（2011b, 2012b）等を参照．
2) http://www.ardm.eu/contenu/yves-chevallard-english を参照（最終アクセス：2013/07/16）．

3) フランスの教育制度と算数・数学教科書については，拙稿 (2012c) に詳しい.

4) *Sésamath* シリーズは，インターネット上の数学教師集団が執筆している教科書であり，学校現場で今日広く利用されている．教科書は http://www.sesamath.net/ （最終アクセス：2013/07/16）からダウンロード可.

5) 日本でも，教科書によっては，知覚に頼らずに言明が真であることを示すという証明の有用性に触れているものもある（例えば，啓林館 『未来へ広がる中学校 2』, 2012, pp. 82-83）．しかし，学習指導要領解説等を見る限り，フランスほど強調されていない.

6) 前回分析した *Phare* シリーズでは，第 6 学年でも証明が少し扱われたことから，第 6 学年の線対称，第 7 学年の点対称，それぞれの性質が基本性質のように考えられた（拙稿, 2012b）．しかし，今回の新たな国定カリキュラムでは，第 6 学年で証明が扱われなくなったため，公理的な性格がより見えなくなった.

7) ここでの“組織化された幾何”は，明らかと思われるものを認め，公理的な幾何を目指さないことから，Freudenthal の言葉を借りれば，「局所的組織化」(1971, p. 430) された幾何といえよう.

8) さらに，一般性の認識によってはじめて，図を表現でしかないと捉えることが可能となるとの主張もあるが（村上, 1992），フランスの学校数学は一般性に頼らずにこのことを行なっている.

引用・参考文献

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations, *Educational Studies in Mathematics* 7, 23–40.

Chapiron, G. et al. (2009, 2010, 2011, 2012). *Mathématiques 6e, 5e, 4e, 3e, Collection Triangle*. Paris: Hatier.

Chevallard, Y. (1992). Fundamental concepts in didactics, In R. Douady et al. (Eds.), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 131-168), Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3, Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.) *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp.41-56), Grenoble : La Pensée Sauvage.

De Villiers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics, *Pythagoras*, 24, 17-24.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics,* 3 (3/4), 413-435.

藤井斉亮ほか (2012).『新しい数学 2』. 東京書籍.

国宗進 (1987).「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」. 数学教育学論究, Vol. 47/48, 3-23.

MEN (1998). *Mathématiques Programmes et Accompagnement*. Paris: CNDP.

MEN (2008). Programmes du collège : programmes de l'enseignement de mathématiques. *Bulletin Officiel Spécial*, No 6, 28 août 2008.

宮川健 (2011a).「フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格」. 数学教育学論究, Vol. 94, 37-68.

宮川健 (2011b).「フランス前期中等学校数学における証明の生態(2)」. 第 44 回数学教育論文発表会論文集，第 2 巻, pp. 801-806.

Miyakawa, T. (2012a). Proof in geometry: a comparative analysis of French and Japanese textbooks. In Tai-Yih Tso (Ed.), *Proc. of the 36th Conference of IGPME* (Vol.3, pp. 225-232), Taipei, Taiwan: PME.

宮川健 (2012b).「フランス前期中等学校平面幾何領域における証明の生態」. 日本数学教育学会誌数学教育, Vol.94, No.9, 2-11.

宮川健 (2012c).「V. フランス」. 初等中等学校の算数・数学教科書に関する国際比較調査 調査結果報告書 (pp. 176-215), 教科書研究センター.

村上一三 (1992).「平面図形の図形表記の一般性認識について」. 第 25 回数学教育論文発表会論文集, pp. 31-36.

文部科学省 (2008).『中学校学習指導要領解説数学編』. 教育出版.

付記：本研究は，科研費 (22330245, 23730826) の助成を受けて推進された.