

モデル化という視点から見た条件付き確率に関する困難性

－「時間軸の問題」を用いた分析－

五十嵐 慶太

要 約

本稿の目的は、条件付き確率に関する学習者の実際の困難性を、モデル化という視点から明らかにすることである。この目的を達成するため、条件付き確率の困難性についての研究でしばしば取り上げられる「時間軸の問題」を用いて、大学1年生を対象としたインタビュー調査を実施し、この問題をペアで解決する過程をビデオデータとして収集した。五十嵐・宮川 (2013) による、学校数学における確率を「物質世界」「仮想世界」「数学世界」の3つの世界で捉える枠組みを用いてデータを分析した結果、学習者の“確率が物質世界における動作を行った瞬間に決まる”とする考え方、仮想世界における仮定の特定とその妥当性判断、仮想世界における仮定のモデル化、数学世界における数学的モデルの妥当性判断といった、それぞれの世界で異なった困難性が存在することが明らかとなった。

キーワード：「時間軸の問題」 数学的モデル化、条件付き確率

1. はじめに

筆者はモデル化という視点から確率の学習における困難性を研究してきた。それは、我が国の確率指導が現実とのつながりが強いいため、現実の不確かな事象を数学的にモデル化する際に困難性が生じるのではないかと考えたからである。これまで、この視点から、学校数学における確率を、「物質世界」「仮想世界」「数学世界」の3つの世界で捉える理論的枠組みを提案した(五十嵐・宮川, 2013)。そして、この枠組みを用いて、高等学校教科書の例題を分析することにより、仮想世界における仮定の特定と仮定のモデル化という二つの異なる段階で学習者の困難性が生じる可能性を指摘した。本稿では、こういった困難性が、実際の問題の解決においていかに見られるか検討したい。

今回は、確率の困難性についての研究でしばしば取り上げられる「時間軸の問題」を用いて、モデル化という視点から、学習者が実際にいかなる

困難性に直面するのか検討する。「時間軸の問題」を選んだ理由は2つある。第一に、この問題において生じる困難性がまさにモデル化に関するものと思われることである。「時間軸の問題」は、条件付き確率に関する問題であり、この問題に解答する際、条件に応じて考える標本空間が変化し、学習者によって異なる仮定や数学的モデルが用いられることが予想される。そして、正答に至れない、解答に対する明確な根拠を示せない場合には、モデル化において何らかの困難性が生じている、と考えたのである。第二の理由は、条件付き確率は学校数学で扱われる内容であり、「時間軸の問題」における困難性の分析を通して、確率指導への示唆が得られると考えたことである。

そこで本研究では、モデル化という視点から、「時間軸の問題」を解決する過程における条件付き確率に関する学習者の実際の困難性を明らかにすることを目的とする。この目的を達成するため、まず「時間軸の問題」についての先行研究の知見を整理し、いかなる困難性が生じうるか考察する

(第3節). 次に、インタビュー調査により「時間軸の問題」の解決過程に関するデータを収集する(第4節). 最後に、データの分析を通して「時間軸の問題」における困難性を特定する(第5節). 分析においては、上述した確率を3つの世界で捉える枠組みを用いる.

2. 「時間軸の問題」について

「時間軸の問題」は、Falk (1979) が条件付き確率に関する困難性を特定する際に用いた問題である. それは、Fischbein & Schnarch (1997)の調査でも用いられている. 「時間軸の問題」とは以下のような問題である. なお、下記の問題は、松浦 (2006) が Fischbein & Schnarch (1997)のものを翻訳したものであり、子どもの名前のみが変更されている.

「ケイコと、リサは、それぞれ2つの白玉と2つの黒玉が入った箱を受け取りました.

①ケイコは箱から玉を一つ取りだし、それが白であるのを見ました. 玉を箱にもどさずに、2つの目の玉を取り出します. この2つ目の玉も、また、白玉である可能性は、黒である可能性と比べて、小さいでしょうか、等しいでしょうか、それとも大きいでしょうか?

②リサは、箱から玉を取りだし、それを見ずに横に置きました. リサが、2つの目の玉を取り出してみると白でした. 最初の玉が白である可能性は、黒である可能性と比べて、小さいでしょうか、等しいでしょうか、それとも大きいでしょうか?」(松浦, 2006, p.146)

この問題の正答は、問題①、②ともに「小さい」である. 代表的な誤答例は、問題①では「小さい」と答えるものの、問題②において「等しい」と解答するというものである. 問題②では、「2回目の結果が1回目に影響を与えることはない」こと、1回目には白玉黒玉それぞれ2つずつあることから、「等しい」の解答に導く、としばしば指摘される.

「時間軸の問題」は、人間が直観的に誤った解答を与えてしまう問題として、確率の困難性や確率理解に関する研究においてしばしば取り上げられてきた. 例えば、Fischbein & Schnarch (1997) は、「時間軸の問題」を調査に用いて、イスラエルの5年生、7年生、9年生、11年生と教師志望の数学

専攻の大学生を対象に、確率判断に関する実態調査を行っている. そこでは、大学生を除き学年が上がるにつれて誤った解答を与える割合が増加するとの結果を得ている. 一方国内においては、松浦 (2006) が同様の調査を実施し、どの学年においても多くとも半数しか正答を与えられなかったとの結果を報告している. また、緒方 (2014) は、教員養成系の大学生 (主に2年次生、計142名、うち数学専攻48名) を対象に同様の調査を実施している. そこでは、数学専攻の学生のおよそ半数が誤った解答を与え、その割合は数学専攻でない学生とほぼ同じであったという結果を得ている.

Fischbein & Schnarch (1997) は、「時間軸の問題」における困難性が人間のもつ思考の傾向に起因すると考える. 彼らは、このような誤りは、人間の“直観に基づいたミスコンセプション(intuitively based misconception)”であると指摘し、その要因を次のように説明している.

「ここでもまた、我々の心的活動に深く根付いている、解答を決定する一般的な原理がある. それは、因果関係の原理である. 前のことが結果を決定する. この原理の強さは、各個人に情報の大切なものを無視させるように導く. ここでは、2回目に取り出した玉が白であることである.」(Fischbein & Schnarch, 1997, p.103)

ここでは、時間的に後のできごとが前のできごとに影響を与えないとする、人間が意思決定をする際に用いる原理が、こうした誤りを引き起こすとする. また、最初にこの問題を取り上げた Falk (1979) は、人間がこの原理を強く拠り所としてしまうのは、人間の確率についての考えによるものと指摘する. それは、「場面の内在的構成要素としての確率」という考えである (Falk, 1979, p.66). すなわち、確率とは場面の中に存在するものであるという考えが、因果関係の原理を適用することを強めるのである.

一方、モデル化という視点からすれば、上述したものとは異なる困難性があるように思える. 条件付き確率の場合、複数回の試行を伴う事象が取り上げられる. その際、モデルとして割り当てうる標本空間は複数あり、採用する標本空間に応じて、確率は変わってくる. このように考えれば、

単に時間的な前後関係だけでなく、適切な標本空間を選択できない、確率を求められないなどといった、モデル化に関する困難性があると考える。

3. 分析のための理論的枠組み

以下では、データの分析の際に用いる枠組みの概要を述べ、その視点からすれば、「時間軸の問題」の解決においていかなるモデルが用いられうるかを示す。なお、枠組みの詳細については、五十嵐・宮川 (2013) を参照のこと。

(1) 確率を三つの世界で捉える枠組み

学校数学における確率が現実とのつながりが強いことは、周知の事実であろう。そのため筆者らは、数学と現実との関わりにおいて、確率を捉えることができるのではないかと考えた。筆者らの提案する枠組みでは、現実をその性格に応じて物質世界と仮想世界に分け、そして数学世界を加えた3つの世界で確率を捉える。

物質世界とは、‘もの’を実際に見たり触ったり、知覚することのできる世界である。仮想世界とは、物質世界とは異なる想像上の世界で、物質世界には存在しない理想的なものや状況が存在する世界である。数学世界とは、数学的対象が存在する世界である。

枠組みの視点からすれば、実物のさいころや、それを用いた実験などは物質世界のものである。したがって、統計的確率は、物質世界における実験や操作によって得られた数学世界の数学的モデルと捉えられる。一方、学校数学などでは、「正しくつくられたさいころ」などと表現され (一松ほか, 2012, p. 160), どの目も同様に確からしく出ることを前提とする。しかし、そのようなさいころは物質世界には存在しないため、それは仮定に基

づき理想化された世界である仮想世界のものと捉えられる。したがって、数学的確率は、仮想世界における仮定をモデル化した結果、数学世界における標本空間とそこでの根元事象が等確率というモデルに基づいて得られた数学世界の数学的モデルと捉えられる。また数学世界は、確率や標本空間といった数学的対象や数学的概念が存在する世界である。

(2) 「時間軸の問題」におけるモデル

次に、「時間軸の問題」の解決において、いかなるモデルが用いられうるか、上の枠組みの視点から検討する。

問題①の解決では「2つの白玉と2つの黒玉がある」「1回目に白玉を取り出す」という状況を数学的にモデル化する。ここでは、玉の大きさや形、誰が取り出すかといった物質世界の文脈は全て排除され、理想的な状況が想定されている。したがって、これらは仮想世界の状況を表す、仮想世界における仮定と捉えられる。問題①では、こうした仮想世界の仮定に基づき、2回目の箱の状況は標本空間 $\Omega = \{\text{白}, \text{黒}_1, \text{黒}_2\}$ でモデル化される。そして、その根元事象を等確率とし、 $P(\text{白}) = 1/3$, $P(\text{黒}_1 \cup \text{黒}_2) = 2/3$ という数学的モデルを得れば、これらの確率より白を取り出す確率が「小さい」という正答に至るであろう。

問題②におけるモデル化はやや複雑である。1回目を引いているが、その結果を見ていない、しかし2回目の結果は白だった。このことをいかにモデル化できるだろうか。典型的な誤答例では、時間的なものを考え、1回目を引く状況をモデル化するものであろう。2回目の結果は考慮せず、1回目の状況を標本空間 $\Omega = \{\text{白}_1, \text{白}_2, \text{黒}_1, \text{黒}_2\}$ と数学的にモデル化し、その根元事象を等確率とし、 $P(\text{白}_1 \cup \text{白}_2) = P(\text{黒}_1 \cup \text{黒}_2) = 1/2$ という数学的モデル (以後、典型的誤答モデルと呼ぶ) を得る。この場合は誤答となる。一方、正答を得るためには、「2回目に取り出された玉が白であった」という仮定を含めてモデル化しなければならない。モデル化の方法はいくつかあると考えられるが、典型的な正答を与える場合は、まず樹形図等を用いて、2回の試行を標本空間 $\Omega_1 = \{\text{白}_1 \text{白}_2, \text{白}_2 \text{白}_1, \text{白}_1 \text{黒}_2, \text{白}_2 \text{黒}_1, \text{黒}_1 \text{白}_1, \text{黒}_1 \text{黒}_2\}$

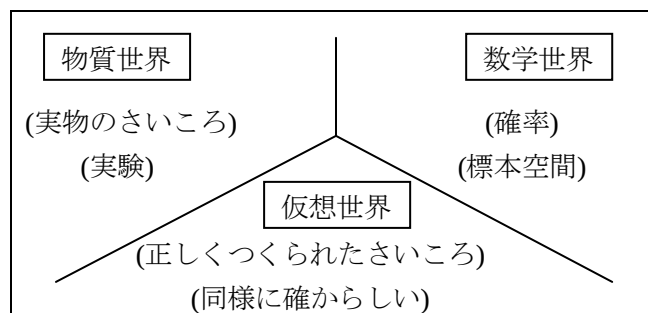


図1: 確率を3つの世界で捉える枠組み

${}_2$ 、黒₂白₁、黒₂白₂、黒₁黒₂、黒₂黒₁」でモデル化する。さらに、この標本空間から、新たに2回目に白玉を取り出す場合の標本空間 $\Omega_2=\{\text{白}_1\text{白}_2, \text{白}_2\text{白}_1, \text{黒}_1\text{白}_1, \text{黒}_1\text{白}_2, \text{黒}_2\text{白}_1, \text{黒}_2\text{白}_2\}$ を考える。そして Ω_2 の根元事象を等確率とし、 $P(\text{白}_1\text{白}_2 \cup \text{白}_2\text{白}_1)=1/3$, $P(\text{黒}_1\text{白}_1 \cup \text{黒}_1\text{白}_2 \cup \text{黒}_2\text{白}_1 \cup \text{黒}_2\text{白}_2)=2/3$ という数学的モデルを得れば、これらの確率より1回目に白を取り出す確率が「小さい」という正答に至るであろう。

このように、「時間軸の問題」の場合の数学的モデルは、標本空間と事象に割り当てられた確率からなる。ただ、モデルは複数あり、正答を与えるためには、仮想世界における仮定の特定と、その仮定を正しくモデル化する必要がある。一方、数学世界以外のモデルを考えることもできる。例えば、問題②において図2のように問題文の状況を絵にすることがある。この絵は、物質世界もしくは仮想世界で想定された問題文の状況を表すモデルと捉えられる。このモデルは数学的モデルではなく、何かしらを表現したものであるということから仮想世界のモデルといえる。したがって、モデルには、数学世界の数学的モデルのみならず、仮想世界のものも存在するのである。

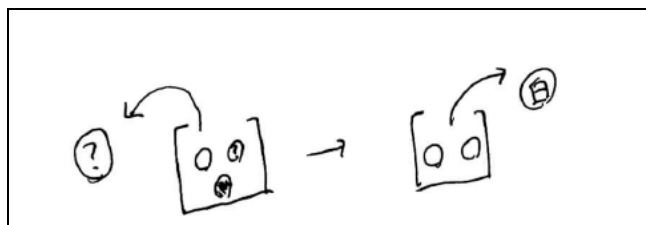


図2：調査対象者が描いた問題場面のモデル

4. 調査の方法とデータの概要

(1) 調査問題

「時間軸の問題」の解決に関するデータを収集するためにインタビュー調査で用いた問題は、以下の通りである。なお Fischbein & Schnarch (1997) の用いた「時間軸の問題」に一題追加した。

「一郎君と二郎君と三郎君は、それぞれ、2つの白玉と2つの黒玉が入った箱を受け取ります。

(1)一郎君は、自分の箱から玉を一つ取り出し、それが白玉であることを確認します。2つ目に取り出す玉が白玉である可能性は、黒玉である可

能性より、小さいですか、同じですか、それとも大きいですか。

(2)二郎君は、自分の箱から玉を一つ取り出し、それを見ずに横に置きます。そして、2つ目の玉を取り出し、それが白玉であることを見ます。このとき、1つ目に取り出した玉が、白玉である可能性は、黒玉である可能性より、小さいですか、同じですか、それとも大きいですか。

(3)三郎君は、自分の箱から玉を一つ取り出し、それを見ずに横に置きます。そして、2つ目の玉を取り出して、それも見ずに横に置きます。そして、3つ目の玉を取り出し、その玉が白玉であることを確認しました。このとき、1つ目に取り出した玉が、白玉である可能性は、黒玉である可能性より、小さいですか、同じですか、それとも大きいですか。」

問題 (1) では、「玉を箱にもどさずに、2つの目の玉を取り出します。」という文が抜け、(3)では「白玉であることを確認しました。」と過去形になっているが、これは筆者の誤植であった。ただ、調査はインタビュー形式で実施し、問題に関する質問には適宜回答していたこと、文章の違いに疑問をもつ学生はいなかったことから、問題解決に支障はなかったと考える。また、問題 (2), (3) では調査の途中で「このとき」という文言を追加した。これは、調査を進めるにあたり、考えるべき確率が分からない学生が見られたため、それがより明確となるように追加したものである。新たに追加した問題 (3) は、1回目2回目は玉を見ずに横に置き、3個目の玉が白であったときに、1個目の玉の色の可能性を問う条件付き確率の問題である。正答は「小さい」となる。問題 (3) では、1回目2回目に白が連続して出ないことを考慮することが問題 (1), (2) と異なる点であり、前の問題と異なった思考がなされると予想される。こうした異なった思考におけるモデル化の仕方の分析をすることで、「時間軸の問題」における困難性に迫ることができると考えた。

(2) 調査の方法

調査は、筆者が所属する大学の学部1年生を対象とした。高校生ではなく大学生を対象としているものの、学部1年生の履修科目に確率に関する

ものは扱われていないこと、高校卒業から時間が経っていないことから、高校生の問題解決過程のデータとさほど違いがないと考えた。

調査はインタビュー形式である。二人の学生がペアで「時間軸の問題」に取り組み、自らの解答とその理由を説明し合う活動をビデオ撮影し、映像とワークシートをデータとして収集した。調査の手順は次の通りである。まず、「時間軸の問題 (1)」を配布し、その問いに対し直観的な解答を記入してもらう。その後、その解答が正しいとする根拠を考え、それを用紙に記述する。そして互いに自らの考えを発表し、解答と根拠について議論する。十分な議論が済んだ後、問題用紙を回収する。同様の手順を「時間軸の問題 (2), (3)」についても行う。話し合いの過程では、調査対象者の考えや主張を明確にするため、議論を活発にするため、調査者が質問を投げかける。議論の途中で、調査対象者は自らの解答を変更しても構わない。時間は 30 分程度を想定した。

(3) データの概要

調査では、9 ペア計 18 名のデータを収集した。18 名の学生のうち数学コース希望の学生が 9 名である。本研究では、学習者の思考の傾向を統計的に示すことを目的としないが、全体の結果は表 1 (括弧内は数学コース希望者の内数) のとおりである。問題 (1) では、すべての学生が正答を与えた。問題 (2) においては、およそ半数が誤った解答を与えている。問題 (2) において「同じ」とした根拠は、「2 回目の結果は 1 回目に影響を与えない」「1 回目の時点では確率 $1/2$ 」といったものが多かった。問題 (3) では問題 (2) と比べ、正答率が上がっている。ここでは、樹形図を描いたり確率の計算をしたりして正答に至っている場合が多く見られた。「同じ」とする根拠は、問題 (2) と同様のものに加え、「2 回目の結果のみが 3 回目の結果に影響する」といったものが見られた。

表 1: 調査対象者の解答 (括弧内は数学コース希望)

	小さい	同じ	大きい
(1)	18 (9)人	0 人	0 人
(2)	8 (4)人	10 (5)人	0 人
(3)	14 (6)人	4 (3)人	0 人

5. データの分析

調査では様々な考え方が見られたが、ここでは 3 つの異なった困難性が見られた 3 人の学生の思考を取り上げる。特に問題 (2), (3) におけるそれぞれの学生の思考と困難性の要因に注目する。

(1) 学生 α の思考

学生 α は、数学コース希望の学生である。 α は問題 (2), (3) いずれも「同じ」と解答した。問題 (2) の根拠は次のようであった。

58 α 1 つ目に取り出すときは白 2 個黒 2 個ちゃんあるわけだから、そのときの確率ってのは、2 つ目の玉を取り出したときのことを考慮する必要はないから、そのまま $1/2$ じゃねえかなというふうですね。

2 回目の試行を考慮する必要はないとし、1 回目の状況だけを考え、第 3 節 (2) の典型的誤答モデルにより「同じ」という解答に至っている。

問題 (3) では、1 回目 2 回目に白が連続して出ないという条件を気にしつつも、「同じ」と解答した。以下は、そのときの α の発言である。

94 α 3 回目となると 2 回目 1 回目に白玉が出てしまったら、3 回目に白玉が出ることはなくなっちゃうんですね。そこに、その引っかかりちゃって。考え方は変わらないとは思うんですけどさっきと。結局 1 回目は同じわけですから。

ここでも、問題 (2) のように 1 回目の状況だけを考えて「同じ」という解答に至っている。その後、 α は仮想世界における仮定を考えた。具体的には、3 回目に白玉が取り出されたのは偶然であるか、確定したことであるかである。しかし、いずれの場合においても、1 回目の状況だけを考えて「同じ」という解答に至っている。以下はそのときの α の発言である。

103 α 3 回目に白が出るのが確定した上での確率、パラドックスになっている気がするな。でも 1 回目のときは $1/2$ だと思うのですが。白玉であったのは偶然でしょ。

174 α 3 回目はとりあえず白が出る、白が出るとしよう。でも 1 回目引くときに同じ数ある。 $1/2$ だろ。いやでも確かに 3 回目に白が出るかもしれないよ。だけど、それで変わるのはこの数値(2 回目の確率)であって、ここ(1 回目の確率)は変わらないだろ。

[174] の発言は、3 回目に白が出るように 2 回目を取り出されるということであり、例えば 1 回目

に白を取り出した場合、2 回目に白を取り出す確率は 0 となる。

α は問題 (2), (3) いずれの場合も、同じ数学的モデルを考え、「同じ」という誤った解答を与えた。これは、 α の“事象が起きた時点で確率が決まっている”とする考えに起因する。 α は“そのときの確率”という言葉を頻繁に使用しており、確率が状況に固有のものといった考えが随所で見られる。このことから α は、確率が物質世界において何か取り出すといった動作を行った瞬間に決まり、その状況及び動作に内在するものと考えているといえよう。このような確率についての考えは、Falk (1979) の指摘する「場面の内在的構成要素としての確率」という考えそのものである。一方、確率は考える標本空間によって変化する。「時間軸の問題」では、第 3 節 (2) で示したように、試行全体を標本空間とすることもあり、条件に基づき全体の一部を標本空間とすることもある。したがって、 α の困難性は、確率が物質世界もしくは仮想世界の場面に内在しているという考えのために、採用する標本空間によって確率が変わりうるものであるといった認識がないことにあるといえよう。

(2) 学生 β の思考

学生 β は、数学コース希望ではない学生である。 β は、問題 (2), (3) では「小さい」と「同じ」と解答するが、どちらが正しい解答か明確な根拠を示すことができなかった。

β は、問題 (2) において、はじめ第 3 節 (2) の典型的誤答モデルを用いて「同じ」と解答した。その後、図 3 のような、そのときの状況を表した樹形図を用いて、2 回目に白が取り出される確率を考える。その結果、2 回目に白を取り出す確率が高い方がよいとして、1 回目に白玉が取り出された可能性は「小さい」とした。ここでは、1 回

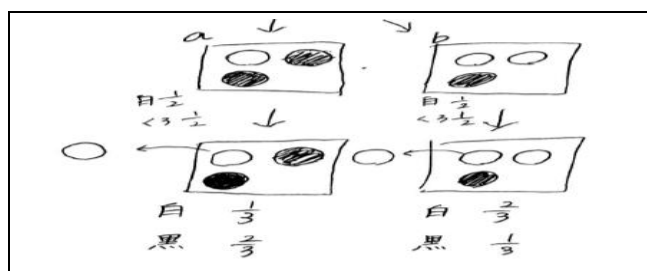


図 3: β が描いた絵で表した樹形図

目に取り出す玉の色で場合分けし、数学世界でそれぞれの数学的モデルを考えている。つまり、1 回目に白玉を取り出した場合の二回目の取り出しを標本空間 $\Omega_1 = \{\text{白}, \text{黒}_1, \text{黒}_2\}$ でモデル化し、その根元事象を等確率とし、 $P(\text{白})=1/3$, $P(\text{黒}_1 \cup \text{黒}_2)=2/3$ という数学的モデルを得る。同様に、1 回目に黒玉を取り出した場合は、標本空間 $\Omega_2 = \{\text{白}_1, \text{白}_2, \text{黒}\}$, $P(\text{白}_1 \cup \text{白}_2)=2/3$, $P(\text{黒})=1/3$ とする。そして、 $P(\text{白})=1/3 < P(\text{白}_1 \cup \text{白}_2)=2/3$ となることから、「小さい」という解答に至ったのである(以後、「場合分けモデル」と呼ぶ)。この解答では、2 回目に白を取り出す確率と、1 回目に白を取り出す確率との関係を議論しておらず、直観的な考えが含まれている。一方で、 β は次のように発言する。

- 61 β なんかも 2 回目のときに白が多い方がいいと思ったけど、別にこっち (1 回目に白を取り出す場合) に (2 回目取り出す際に) 白がないわけじゃないからって思って。だから 1 回目に取り出されたのが白でも 2 回目もまた白っていう場合がいっぱいあるから、場合分けとか考えると、最初は別に同じなのかなって。
- 62 I 場合分けですか。1 回目白で 2 回目白、1 回目白で 2 回目黒とかってことですか？
- 63 β はい。(うなずく)
- 64 I そう考えると…
- 65 β 1 回目が 1/2 だから両方とも、だから結局は同じなのかな。

ここでは、2 回の試行全体の標本空間 $\Omega = \{\text{白白}, \text{白黒}, \text{黒白}, \text{黒黒}\}$ を考え、問題の状況を場合分けしている。しかし、[65] にあるように第 3 節 (2) 典型的誤答モデルから「同じ」という解答に至った。その後は、先の標本空間に対して、 $P(\text{白白})=P(\text{黒黒})=1/6$, $P(\text{白黒})=P(\text{黒白})=1/3$ を計算によって求め、 $P(\text{白白}) < P(\text{黒白})$ となることから解答を「小さい」としたが、どちらが正しいのか明確な説明はできなかった。

問題 (3) においても同様の傾向が見られた。 β は、まず問題 (2) と同様に、箱と玉の絵を用いた樹形図を与えた。そして、3 回目に白を取り出すときは、黒黒白か黒白白か白黒白のみであるとし、それぞれの確率を積事象の確率を適用して $1/6$ と計算した。その結果、3 通り全てが同じ確率であり、そのうち 2 通りが 1 回目に黒が取り出されていることから、解答を「小さい」とした。ここで

は、3つのパターンに注目しているものの、3回の試行全体の標本空間 $\Omega=\{\text{黒黒白, 黒白白, 黒白黒, 白黒白, 白黒黒}\}$ に対して、 $P(\text{黒黒白})=P(\text{黒白白})=P(\text{白黒白})=1/6$ としていていると考えられる。その一方で、 β は次のようにも指摘する。

149 β 3つ目が黒であるときも単純にあって、黒であるときも白であるときも、たぶん同じ確率だから、そう考えると1回目引くのは同じかな。でもこの問題の白であったことを確認したっていうのが条件的にあるから、そしたら白の方が小さいのかなっていうふうに。この問題限定なのか、黒になるっていうとこまで考えるべきなのか、そこがちょっと分からないですね。

ここでは、 α においても見られた、3回目の白が偶然か確定かという仮想世界の仮定を考えている。そして、偶然とするならば、3回の試行全体の標本空間に対し $P(\text{黒黒白} \cup \text{黒白白} \cup \text{白黒白}) = P(\text{黒白黒} \cup \text{白白黒} \cup \text{白黒黒})$ となるため、「同じ」と指摘する。また、確定とするならば、これまでの議論から「小さい」とする。しかしながら、問題 (3) においてもどちらが正しいかの明確な説明には至らなかった。

このように、 β は様々な数学的モデルを考えてもなお、「小さい」と「同じ」どちらが正しいか明確な説明ができなかった。このことは、仮想世界における仮定の妥当性判断の困難さに起因する。

「時間軸の問題」では、何の確率を求めればよいかは明確に記述されていない。つまり、1回目の時点での確率を考えるか、試行全体を見て1回目の確率を考えるか、その判断は学習者にゆだねられる。そして一般に、こういった暗黙の仮定は、数学世界で確率を計算したり、仮想世界で考えたりしてもその妥当性は判断できない。なぜならば、確率における暗黙の仮定は、演繹的に導かれるのではなく経験的・習慣的に導かれるものだからである(五十嵐・宮川, 2013)。この場合、物質世界で実験を行うことでその妥当性を判断しうが、箱や玉といった道具がなければ不可能である。したがって、 β の困難性は、条件付き確率に関する仮定について、物質世界でその妥当性を判断する手段がなかったこと、どちらが採用されるべきか経験的に知らなかったことにあるといえる。

(3) γ の思考

学生 γ は数学コース希望ではない学生である。 γ は、問題 (2) では「同じ」と解答し、問題 (3) では「小さい」と解答した。ただ、問題 (3) については解答に納得した様子ではなかった。

問題 (2) では、典型的誤答モデルから「同じ」と解答した。一方で、 γ は場合分けモデルから2回目に白を取り出す確率を求めている。 γ は2つの異なる数学的モデルを考えてもなお、解答を「同じ」とした根拠を次のように述べた。

46 γ まあ、ただ1つ目が白だった場合は2つ目に1/3で白取っただけで、黒の場合は2/3で取っただけなんで、やっぱり最初の1個目がどうだったかって聞いてるとなると、やっぱり同じなんじゃないかなって思いました。

さらに、このことについて γ は次のよう述べる。

53 γ たぶん数字でこういうの考えて解くんならまあ、こっち(「小さい」)の方が正しいかもしれないけど。
56 γ でもなんか実際にやったらまあ、そういう…、そういう感じ。
59 I あー、実際にやったら同じ?
60 γ やったら。
63 I 計算上は、えーと、小さい。
64 γ 小さいと思います。
65 I でも実際は1/2となってるってことですか?
66 γ はい。ははは。

ここでは、数学世界での計算の値と、物質世界での実験で得られる結果が異なると指摘する。その後、こういったことは議論されず、典型的誤答モデルから「同じ」という解答に至った。

問題 (3) では、2つ目に黒が出ると仮定し、図4のように3回の試行における確率をそれぞれ計算した。その結果、黒が2連続で取り出される確率に注目して次のように答えた。

111 γ え、なんか黒をそうやって2連続で引くっていうのを考えたら、これ別に小さい、ていうか黒2連続で引く確率が確率的にはあれだなって思っ。 (中略)。

ここでは、黒黒が確率的に出にくいことを指摘する。その後、起こり得る全ての場合を描きだし、3回目白の場合に1回目黒を取り出す場合が多いことから「小さい」という解答に至ったものの、黒が2連続で取り出されることについてうまく説明できず次のように述べる。

169 γ そしたら1個目が黒2つ白1つになったので、あでもちょっとこいつ(黒黒)…

171 γ 黒黒が連続っていうのはあるんですけど、答え出せっていわれたらこうなるかなって。

つまり、ここでは $\Omega_1=\{\text{黒黒白, 黒白白, 黒白黒, 白黒白, 白白黒, 白黒黒}\}$ から標本空間 $\Omega_2=\{\text{黒黒白, 黒白白, 白黒白}\}$ を考えたが、 Ω_2 の根元事象に対し確率 P をうまく定められなかったのである。その後の問題解決においても、 γ はこのことに関する明確な説明ができなかった。

γ には、問題 (2)、(3) において異なる 2 つの困難性が見られる。 γ は問題 (2) で 2 つの数学的モデルを考えたものの「同じ」という誤った解答に至った。これは、2 つの数学的モデルの妥当性判断ができなかったためである。確率における数学的モデルの妥当性は、仮定の妥当性判断と同様、物質世界での実験結果により判断される。そのため、玉や箱といった道具がなかった γ は、自らの誤った直観的な解答を修正できなかったのである。一方、問題 (3) では、仮定のモデル化に問題がある。 γ は「3 回目は白玉」という仮定を、図 4 右下にあるように、「3 回目に白を取り出す確率は 1」とモデル化している。このようにモデル化すると、それぞれの確率は、積事象の確率を適用すれば、 $P(\text{黒黒白})=1/6$, $P(\text{黒白白})=P(\text{白黒白})=1/3$ となり、全確率が 1 とならず、それぞれが等確率ともならない。こうしたことが、確率を求められず、黒黒が連続して出ることについて明確に説明ができなかった要因であろう。そして、このことは、仮定の妥当性判断ができないことに根本的な要因があるといえる。したがって、 γ には β と同様の困難性が見られる。加えて、 γ の困難性には、条件付き確率に関する数学的モデルについて、その妥当性を物質世界で判断する手段がなかったこと、正答を与える数学的モデルと、それを構築するためのモデル化の仕方を経験的に知らなかったこともあるといえよう。

2回目まで 黒だった。		
	黒	白
1回目	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
2回目	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
3回目	X	1.

図 4: γ が求めた、2 回目に黒が出ることを仮定した際のそれぞれの試行における確率

6. おわりに

本稿では、「時間軸の問題」をモデル化という視点から分析した結果、「時間軸の問題」の解決の際には、Falk (1979) の指摘する学習者の“確率が物質世界における動作に内在している”とする考え、仮定の妥当性判断、仮定のモデル化、数学的モデルの妥当性判断が困難性となっていることが明らかになった。また、学習者は、これらの要因をいくつか同時にもち合わせていることもわかった。一方、確率指導について、分析の結果からいかなる示唆が得られるであろうか。これまでの考察からすると、学校で確率指導にあたる教師が、“不確かな事象の数学的モデルとしての確率”という視点をもつことは重要である。教師にとってこういった視点は、学習者の確率の困難性を見つけたり、その克服を試みたりする際に役に立つであろう。今後は、学習者にとってこのような視点が、確率の困難性の克服のどのような一助となるか検討していきたい。

引用・参考文献

- Falk, R (1979). Revision of probability and the time axis, *Proceedings of the Third International Conference for Psychology of Mathematics Education*, 3, 64-66
- Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions, *Journal for Research in Mathematics Education*, 28, 97-105.
- 松浦武人 (2006). 「児童の確率判断の実態に関する縦断的・横断的研究」. 全国数学教育学会誌. 第 12 巻, pp.141-151.
- 緒方友美 (2014). 「確率学習における形式的・アルゴリズム的・直観的要素の相互作用に関する一考察」. 第 40 回全国数学教育学会研究発表会資料.
- 五十嵐慶太, 宮川健 (2013). 「学校数学における確率を捉える枠組みの一提案—数学的モデルとしての確率という視点から—」. 日本数学教育学会誌. 第 95 巻. pp.17-24
- 一松信ほか. (2012). 中学校数学 2. 学校図書.