第２回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

中等教育を一貫する論証指導を捉える枠組みの提案

A Theoretical Framework for Curriculum Development: from the Perspective of Teaching Mathematical Proof throughout Secondary Schools

宮川健　溝口達也
上越教育大学　鳥取大学

要　約

本稿では，中学校と高等学校からなる中等教育全体を通して論証を指導するカリキュラムの開発に当たって拠り所となる理論的枠組みを提案する．それは，中等教育の各段階において，論証に関していかなる内容をいかに扱うべきか，数学的な内容とともにその質的な深まりについて示唆を与えるものである．枠組みの構築においては，「数学における定理」を「言明」,「証明」,「理論」の 3 つの要素のシステムとして捉える Mariotti et al. (1997) のアイデアを採用し，長期的な展望における論証指導が，学習段階に応じてこれら各要素の‘質’を発展させると考えた．そこで，各要素の中身を検討することにより，論証指導において指導対象となる数学的な内容を特定するとともに，その質的な深まりを示す水準を設定し，枠組みを提案した．

キーワード：カリキュラム開発，論証，証明，中等教育

１．はじめに

わが国の数学教育における論証指導のあり方は，これまで主に中学校図形領域において議論されてきた．学習指導要領の図形領域の目標における「論証」の語の扱いには，時代に応じて変化がみられるものの，根本的な問題は不変のようである．今日においても全国学力・学習状況調査等を通して，論証の意義の理解が不十分であることが繰り返し指摘されている．高等学校への進学率がほぼ 100%に届く今日，中学校のみならず高等学校も含め，中等教育全体を通して論証を指導するという立場から，カリキュラムを抜本的に問い直す必要があるのではないだろうか．こうした問題意識から，研究プロジェクト「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究」(研究代表:岩崎秀樹)が進められてきた．

本稿では，この研究プロジェクトの一環で，中学校と高等学校を一貫した論証指導カリキ

ュラムの開発を進める上で拠り所となる理論的枠組みを提案したい．この枠組みは，中等教育の各段階において，論証に関していかなる内容をいかにいつどこで扱うべきか，数学的な内容とともにその質的な深まりについて示唆を与えるものである．なお，本稿の目的は枠組みの提案にとどまる．この枠組みに基づいたカリキュラム開発の試みについては，真野・國宗 (2014) を参照のこと．

以下では，枠組みの基本的なアイデアを示したのち(2 節)，枠組みの詳細を示す(3 節)．さらに，枠組みに関わる今後の課題について論じ，本稿を終える（4 節)．

２．数学における定理

本稿で提案する枠組みの基本的なアイデアは，証明を単体で捉えるのではなく，それを包括する 3 つの要素の結合体もしくはシステムとして捉えることにある．これは，論証指導の研究において，Mariotti et al. (1997) により提案された「数学における定理 (theorem)」の捉え方を援用したものである．3 つの要素とは，「言明 (statement)」，「証明 (proof)」，「理論 (theory)」であり，これらは常にセットで存在し，「定理」が構成されていると考えるのである．

一般的な数学においてこのことを考えれば，確かに，命題などの数学的な主張（言明）があり，それが真であるあることを示す証明の妥当性は特定の理論によって保証される．換言すれば，事前に受け入れられた特定の理論，そしてそこでの推論規則等があるからこそ，

図 1：言明，証明，理論の関係

証明が妥当なもの，有効なものとなり，言明が定理として認められるのである．このことを一つの言明についてではなく，複数のものを想定して図式化すると，図 1 のようになるであろう．ある特定の理論を背景に，様々な言明が証明とともに存在し，それぞれが定理を構成しているのである．

筆者らは，これらの 3 要素が論証指導のキーワードとなり，中等教育全体を通した論証指導カリキュラムを検討する際の視点となると考えた．その理由は 2 つある．一つは，本研究プロジェクトにおいて，これらの 3 要素がしばしば議論で取り上げられたことである．実際，平林 (1991) や杉山 (1986) などを参考に，主たる研究対象である「証明」と「論証」という概念を整理する過程で，論証と体系，命題や命題群との関わりが示唆された（真野他，2014 参照)．さらに本研究プロジェクトでは，Freudenthal (1971, 1973) による「局所的組織化」の考えをキーワードに体系や理論の性格を議論してきた．こうした中で，これらの諸々の概念を包括して捉えるために 3 要素が適切と判断したのである．

二つ目の理由は，中等教育全体という長期的な展望から，論証に関わる内容の漸進的な扱いを，この 3 つの要素でうまく捉えられると考えたことにある．すなわち，長期的な展望における論証指導が，学習段階に応じてこれら各要素の‘質’を発展させ，最終的には，より数学的な証明に至ることをめざすと考えた．実際，言明の種類やその表記の方法，証明の種類やその妥当性，背景となる理論の大きさやその厳密性は，学習段階により異なる．そして，中等数学教育の一貫性を考慮に入れた論証指導のカリキュラム開発においては，これらの各要素の中身を検討することにより，長期的な論証指導の過程において考慮されるべき内容とその順序が明確化されると考えたのである．

３．論証指導を捉える枠組み

以上のことから，本稿では，「数学における定理」のアイデアを基に，中等教育全体を通した論証指導カリキュラムの開発に資する枠組みの構築を試みる．具体的には，定理を構成する「言明」，「証明」，「理論」それぞれの中身を検討することにより，各要素の内容を特定するとともに，長期的な展望から各要素の質的な深まりを示す水準を提案する．各要素の内容については，論証に関わって中等教育で扱われる指導内容をやや広い視点から検討した．

(1)　「言明」について

①　言明の内容

中等教育の数学においては，いかなる言明が指導内容として扱われるであろうか. 以下，論理学的な視点 (cf. 前原, 2005, pp.1-8) を援用し，4 種類の命題[1] を提案したい．これらが中等教育で扱われる主たる言明と考える．

a. 単称命題 (singular proposition)
b. 全称命題 (universal proposition)
c. 存在（特称）命題 (existential proposition)
d. その他（一意性を含む存在命題，否定命題など）

ここで「a. 単称命題」とは，単称判断を伴う特定の対象についての命題であり，「(長さなどが既に決定された）あるΔABC の内角の和が 180° である」というような命題のことである．「b. 全称命題」とは，全称判断を伴う命題であり，「どんな三角形においても，内角の和は 180° である」といったようなものである．$\forall x\, P(x)$ などとも記述される．「c. 存在（特称）命題」とは「内角の和が 180° の三角形が存在する」などのように，存在性についての主張であり，$\exists x\ P(x)$ などと記述される．「d. その他」は，a, b, c と独立したものではないが，一意性など a, b, c で触れられていない性質を伴う命題を想定している．

ここでは 4 種類の言明をあげた．中等教育における論証指導でこれらをどの程度明示的に扱うのか，どの順序で扱うか，などの指導・学習の漸進性についてはここではなく，次の水準で論じる．

②　言明に関わる水準

上では言明の内容として異なった種類の命題を示した．それらは，全称性や存在性，一意性など，言明に伴う命題の性質によって区分されたものである．中等教育段階さらには小学校段階も含めて, 言明の変化を捉えれば, そこには学習段階に応じた質的な深まりが少なくとも 2 つ存在すると考える．

一つは<u>言明の対象</u>である．これは，ある学習段階で扱われている言明が，現実世界の対象についての言明なのか，数学世界の対象についての言明なのか，といった視点を取り入れたものである．小学校では紙に書かれた現実世界もしくは物質世界の‘もの’が考察の対象である場合が多く，実測等を用いてその対象の性質を考察する．ところが，学習段階が上がるに応じて，考察の対象は，徐々に数学世界の数学的対象についての言明に移っていく. ここには, 言明に関する質的な深まり・変化が存在する．そこで，言明の対象に以下の 2 つの水準を提案したい.

i.　現実世界の対象（‘もの’）
ii.　数学世界の対象（数学的対象）

もう一つの質的な深まりは，<u>言明の定式化</u>である．言明は様々な方法で表現される．日常言語などの言葉をはじめ，より形式的に数学的な言葉や記号，さらには図や操作で何らかの主張（言明）を表現することも可能である．中等教育という長期的な展望に立った論証指導では，図的なものから日常言語，数学的な言語へと定式化が進むと考えられる．そこで，言明の定式化について，以下の 3 つの水準を設定する．

i.　図，操作，ジェスチャー
ii.　日常言語，言葉
iii.　数学的な言語，記号

これは，すべての言明が i, ii, iii と順番に

定式化されることを表しているわけではない．特に，最初の水準「i. 図，操作，ジェスチャー」は，扱う言明や性質に応じて大きく異なる．水準 ii, iii では定式化されるが，それ以前の水準では定式化されないもの，もしくはうまく定式化できないものも存在する．例えば，三角形の内角の和についての全称命題を考える．水準 i では，三角形の図を描いて指をさすなどして「ここところとここを足すと 180 度」などと，水準 ii の日常言語を少々含みながら，図と操作，ジェスチャーによって言明が定式化されよう．ところがこの際，全称性は定式化されない．全称性は水準 i では定式化しにくく，通常は水準 ii で，「どんな三角形の内角の和も 180° である」などと，「どんな」や「任意の」といった言葉で定式化される[2]. そして水準 iii では, 全称記号 (∀) などを用いて定式化されることになる．

以上が言明に関わる水準である．

(2)　「証明」について

①　証明の内容

一般の数学における証明には，異なった方法もしくは種類がある．それは学校数学，とりわけ中等教育においても同様であり，異なった種類の証明が指導内容となっている．それは大きく分けて以下の 3 つである．

a. 直接証明

b. 間接証明（背理法，対偶法など）

c. 数学的帰納法

これらはよく知られたものであり，各々を説明する必要はないであろう．通常，間接証明には直接証明も用いられるため，後者の後に前者を指導するなど，指導・学習の順序を考えることも可能である. しかし本研究では, 内容を順序付けて配列することによりカリキュラムを開発するわけではなく，質的な深まりという視点から指導･学習の順序を論じる．

②　証明に関わる水準

上で示したような異なった証明には，いかなる質的な深まりがあろうか．以下では，2 つの深まりを提案したい[3].

一つは<u>証明の妥当性</u>である．証明の主たる機能は命題が真であることを示すことである．ただ，与えられた証明がどの程度妥当なものであり，命題が真であることをどの程度示せているかについては，常に議論される．この点からすると，証明の妥当性には質的な深まりが存在する．そして，それは中等教育を一貫する論証指導においても，証明の漸進的な扱いを構想する際の視点の一つとなると考える．そこで，妥当性の異なる説明や証明を大きく次の 3 つの水準に分けることを提案する．

i.　説明（帰納的なものなど）

ii.　数学的証明

iii.　論証（形式的証明）

「i. 説明」は，数学的には必ずしも正しくはないが, 帰納的な推論や abductive な推論など蓋然的な推論を用いた説明を想定している．また，「ii. 数学的証明」と「iii. 論証」の区別は，平林 (1991) による「証明」と「論証」の構文論的区別に相当する[4]. すなわち，「論証」は，論理学の立場から形式的に定義される証明であり,「数学的証明」は，論証を略記し簡略化した証明である．この後者は，数学者のコミュニティで一般的に受け入れられる証明である[5].

ここでは，論証（形式的証明）を妥当性の水準の一つとしたが，中等教育において，どこまで形式的証明を扱うべきかについては検討が必要である．また，i から ii への移行にはやや飛躍がある．この移行をより詳細に捉えるのであれば，以下のような下位水準を設ける必要があろう．

1. 素朴な経験主義 (naïve empiricism)
2. 決定実験 (crucial experiment)
3. 生成的な例 (generic example)
4. 思考実験 (thought experiment)

詳細は割愛するが，これらは Balacheff (1987, 1997) によるものであり，数学的証明に至る以前の段階を特徴付けるものである．

もう一つの質的な深まりは，証明の定式化である．言明の場合と同様，証明自体も図を用いた証明をはじめ，日常の言葉を用いた証明，数学の記号を用いた証明など，様々な形に定式化されうる．そして，それぞれでは厳密さも異なる．そこで，言明の場合とまったく同様に，次の 3 つの水準を提案したい．

i. 図，操作，ジェスチャー

ii. 日常言語，言葉

iii. 数学的な言語，記号

水準 i は，おはじきを用いて「偶数足す偶数が偶数である」ことを示す場合のように，何かしらの道具や図を用いた操作的な説明の際の定式化である．これは，中等教育で目標とされる証明の定式化の段階というよりも，その前段階を特徴付けるものである．水準 ii と iii は，言明の定式化と同様である．

(3) 「理論」について

① 理論の内容

「理論」は，言明と証明の背景となるものであった．中等教育において扱われる理論にはどのような種類があるだろうか. ここでは，理論の質的な深まりではなく，指導内容となる異なった種類の理論をあげる．それは次の 2 つに大別されると考える．

a. 通常の理論（代数（数，方程式），幾何，解析，確率，etc.）

b. メタ理論（論理学的な推論規則等）

証明が論理学ではなく一般的な数学の領域でなされるとすると, 証明を進める背景には，まず代数や幾何, 解析などの「a. 通常の理論」が存在する．実際，中等教育の図形領域の証明であれば幾何の理論，数領域の証明であれば数の理論があり，理論で認められた性質や規則にもとづいて証明が進められる．

一方，証明の理論的な背景となるものは，「a. 通常の理論」のみではない. 多くの場合，暗黙裡ではあるが，「b. メタ理論」と呼ばれるものが背景となっている. それは, 例えば, 直接証明であれば modus ponens をはじめとする推論規則，背理法を用いた証明の場合であれば排中律や二重否定の除去の推論規則など，数学領域の内容に特化しない論理学的な推論規則から構成される理論である[6].

② 理論に関わる水準

理論にはいかなる質的な深まりがあるだろうか．その主たるものは，本研究のキーワードとなっている Freudenthal (1971, 1973) による「局所的組織化」が示唆する理論の性格ではないだろうか．この語は，体系の基盤（公理系）と数学的対象間のつながりに関わって提起された語である．すなわち，局所的組織化は公理系を基盤として数学の理論（体系）を構築していくのではなく，直観的に明らかと思われる性質は認め，それらをもとに直観的に明らかではない性質を証明することにより，数学的対象間の局所的なつながりを構築していく活動である．この活動の結果として構築される理論は，数学の一般的な公理的な理論と異なったものとなる．このことは，体系の基盤と数学的対象間のつながりという側面（ここでは「体系性」と呼ぶ）の‘質’に応じて異なった理論が存在すること示唆する．そこで，この体系性を視点に，以下のように‘質’の異なった理論の 3 つの水準を設定する[7].

i. 現実世界の論理

ii. 局所的理論

iii. （準）公理的理論

「現実世界の論理」とは，主に小学校において，ある性質が正しいことを示す際に背景となる理論のことである．現実世界で得られた情報や現実世界の論理をもとにある性質を認める場合が，この理論を背景としている場合に相当する．例えば，紙面上に描かれた三角形の図において，各辺の長さを定規で測定し，各辺がおよそ同じ長さであったため，その三角形を正三角形と主張する場合である．この場合は，実測という現実世界の論理を用いて，つまりそれを理論的な背景として図形

表 1：言明・証明・理論の内容と水準

	言　明	証　明	理　論
内容	a. 単称命題 b. 全称命題 c. 存在（特称）命題 d. その他	a. 直接証明 b. 間接証明 c. 数学的帰納法	a. 通常の理論 b. メタ理論
水準	**言明の対象** i. 現実世界の対象 ii. 数学世界の対象 **言明の定式化** i. 図，操作，ジェスチャー ii. 日常言語，言葉 iii. 数学的な言語，記号	**証明の妥当性** i. 説明（帰納的なものなど） ii. 数学的証明 iii. 論証（形式的証明） **証明の定式化** i. 図，操作，ジェスチャー ii. 日常言語，言葉 iii. 数学的な言語，記号	**体系性** i. 現実世界の論理 ii. 局所的理論 iii. （準）公理的理論

の性質を主張していると捉える．

「局所的理論」と「(準) 公理的理論」は，Freudenthal (1971, 1973) による局所的組織化と大局的組織化，そして Hanna & Jahnke (2002) の組織化の解釈（“小さな理論”と“大きな理論”）を参考にしたものである．「局所的理論」とは，局所的組織化の活動において背景（基盤）となる理論であり，それによって構築される体系のことである．その理論は数学的には必ずしも厳密ではない．理論のある部分は現実世界の論理で直観的に，ある部分は演繹的に導かれるのである．そして結果的には，小さな理論もしくは複数の体系が作られることになる．

一方，「(準) 公理的理論」は，ユークリッドの幾何学体系のように，特定の公理系をもとに，そこから演繹的に導かれたもののみで構成される理論を意味する．つまり，Freudenthal による大局的組織化の際に背景となる理論，それによって構築される体系のことである．なお，「準 (quasi-)」をつけた理由は，中等教育段階では領域によって十分に公理的な体系を扱えないからである．

(4)　枠組みのまとめ

以上，Mariotti らの提起する「言明」，「証明」，「理論」の 3 つの要素の内容とその‘質’の深まりを検討してきた．その結果をまとめると表 1 のようになる．これが，今回提案する中等教育を一貫する論証指導カリキュラムの開発に資する理論的枠組みである．

また，理論における 3 つの水準を考慮に入れて図 1 を構成しなおすと，中等教育さらには初等教育も含めた長期的な展望からの論証指導は図 2 のように下から上へ漸進的に進むものと捉えることができる．学習段階が進むにつれ，「言明」，「証明」，「理論」の各要素の質が徐々に発展していくのである．そして，中学校では局所的理論を中心とした論証指導が行なわれ，高等学校では（準）公理的理論へと移行していくのである．

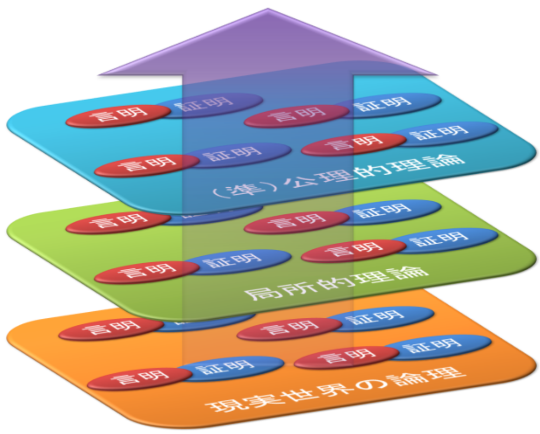

図 2：理論的枠組みのイメージ図

４．枠組みの今後の展望と課題

本稿で提案した枠組みは，先述のように，研究プロジェクト「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究」の一環として構築されたものである．このプロジェクトの表題には,「数学的活動に基づく」とあるが，今回の枠組みではそれは考慮されていない．そこで以下では，数学的活動に基づいたカリキュラム開発という視点から，枠組みの今後の展望と課題を検討し，本稿を終えたい．

本研究プロジェクトが想定している「数学的活動」は，学習指導要領において述べられている数学的活動を含むとしても，必ずしもこれと概念の一致を見るものではない．カリキュラム開発という視点から，数学的活動を指導・学習の方法概念（評価も含めて）として規定すれば，そこにはいくつかのカテゴリーが存在するように思われる．それは,「１授業時間において設定される数学的活動」,「単元を通して培う数学的活動」,「カリキュラムを貫く基軸としての数学的活動」である．

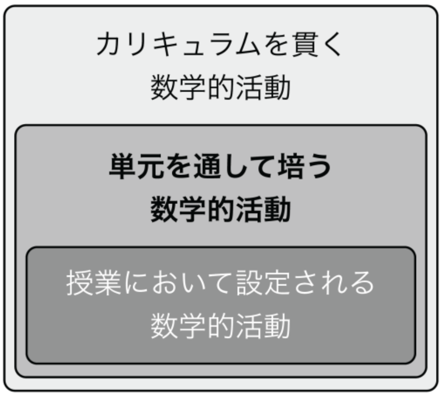

図 3：数学的活動のカテゴリー

ここで，第 3 のカリキュラム全体を通した数学的活動が，本研究プロジェクトの第一のキー概念である「局所的組織化」としての「論証」であると捉えることが可能であるならば，カリキュラム開発において検討すべきは，各授業における数学的活動ではなく，単元を通した数学的活動に他ならないであろう．そのため，本研究プロジェクトでは，単元を通した数学的活動のネットワークとしてカリキュラムを構成し，それにより「内容論」を提示することになる（真野・國宗, 2014 参照）．したがって, ここから自動的に発生する課題は，これらのネットワークが，「言明」,「証明」,「理論」の理論的枠組みによっていかに記述されるかということである．

このとき，単に「言明」や「証明」の水準としてこれらを語るのでは，水準設定の根拠として乏しい．ここに「理論」が効いてくるように思われる．それゆえに,「理論」，特に「局所的理論」の水準をより詳細にする必要があるのではないか，という課題が実践的にも要請されることになるであろう．

註

[1] 「定理」を「言明」,「証明」,「理論」のシステムと捉える Mariotti et al. (1997) の視点からすると,「言明」として「命題」を取り上げることは奇妙に思えるかもしれない.「命題」が一般に「定理」と同水準で議論されるからである. ただ一般的に「命題」そのものにはその真偽や証明を含めないことから，ここでは Mariotti らの「定理」と同じ意味ではなく，一般的な意味で，真偽が定まる主張を「命題」とする．

[2] 現在の中学校教科書では,「三角形の内角の和は 180°である」(例えば, 東京書籍『新しい数学 2』, p. 99）などと,「どんな」や「任意の」など，全称性を定式化せずに全称命題が記述されることが多い．存在命題についても同様であり，中学校第 2 学年で扱われる反例は存在命題と捉えられるが，そこでの存在性も暗黙裡である．これらのことは，高等学校数学においてもほぼ同様であり，大学数学で急に全称性や存在性などの命題の性質が量化記号を用いて定式化される．本研究プロジェクトの中等教育を一貫する論証指導という長期的な視点から

すれば，量化記号は用いないにしても，命題の性質を漸進的により明確に意識させ言葉で記述することが必要であろう．

[5] Balacheff (1987, 1997) は，学校数学における証明を「定式化」，「知識の本姓」，「妥当性」の 3 つの視点から特徴付けている．本稿で提案する枠組みでは,「証明に関わる水準」として「定式化」と「妥当性」を取り入れている．

[4] 本稿でこの区別を採用した理由の一つは，意味論的区別の際の視点である「体系」が「理論」の範疇のものであるため，「証明」で考慮に入れる必要がないことにある．

[5] 本稿の「数学的証明」と「論証」の区分は，Reid & Knipping (2010) にみられる，Balacheff (1987) による "preuve" と "démonstration" の区別とはやや異なる．この後者が「数学的証明」に相当する．

[6] 間接証明の際の「メタ理論」については，Antonini & Mariotti (2008) が詳しい．

[7] この 3 つの水準は，枠組み構築の視点は異なるものの，国宗 (1987) による「論証の意義」の理解についての発達段階の 3 つの段階と整合するものである．

参考文献

Antonini, S. & Mariotti, M.A. (2008). Indirect Proof: what is specific to this way of proving?, *ZDM*, 40(3), pp. 341-344.

Balacheff N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics,* 18(2). pp. 147-176.

バラシェフ, N. (1997). 「数学的証明の学習の改善:実践を改善するための理論的枠組み」, 数学教育学論究, 67/68, 52-62.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. *Educational Studies in Mathematics*, 3, pp. 413-435.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht: Reidel.

藤井斉亮ほか (2012). 新しい数学 2．東京書籍．

Hanna, G. & Jahnke, H. N. (2002). Another approach to proof: arguments from physics. *ZDM*, 31(1), pp. 1-8.

平林一榮 (1991).「図形の指導内容の概観と問題点の考察」, 能田伸彦・福森信夫(編) 新・中学校数学指導実例講座第 3 巻図形 (pp. 3-34). 金子書房.

国宗進 (1987).「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」. 数学教育学論究, Vol. 47/48, pp. 3-23.

Mariotti M. A., Bartolini M, Boero P., Ferri F. & Garuti R. (1997) Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In Pehkonen, E. (Ed.) *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp.180-195), Lathi, Finland.

前原昭二 (2005). 記号論理入門［新装版］. 日本評論社.

Reid, D. A. & Knipping, C. (2010). *Proof in mathematics education.* Rotterdam: Sense Publishers.

真野祐輔・國宗進 (2014). 「理論的枠組みに基づく「単元を通した数学的活動」の構想：単元「数列」における論証指導の系列と課題」, 日本数学教育学会第 2 回春期研究大会論文集.

真野祐輔・宮川健・岩崎秀樹・國宗進・溝口達也・石井英真・阿部好貴 (2014). 「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究」. 全国数学教育学会第 39 回研究発表会発表資料.

杉山吉茂 (1986). 公理的方法に基づく算数・数学の学習指導. 東洋館出版社.

付記：本研究は, 科学研究費補助金(24330245)の助成を受けて推進された.