第３回春期研究大会論文集
創成型課題研究の部

中等教育を一貫する論証指導の視点からみた一般性の扱いについて

～文字式を用いた代数的な証明の場合～

Teaching mathematical proof throughout secondary schools:
the generality in algebraic proof

宮川健　　　國宗進
上越教育大学　　静岡大学

要　約

筆者らは，中学校と高等学校からなる中等教育全体を通した論証指導カリキュラムの開発研究を進めている．この研究の一環で，本稿では，子どもたちの理解の困難性がしばしば指摘されている命題及び証明がもつ‘一般性’に焦点を当て，中等教育を一貫した論証指導におけるその漸進的な扱いについて検討した．具体的には，述語論理を範疇に入れた自然演繹の形式的証明により，2 偶数の和が偶数になることの代数的な証明の論理的な構造を抽出し，この証明における一般性の性質，及び証明が一般性を保証する仕組みとして注目すべき点（偶数を表す記号の導入の仕方，生成的な例，変数の従属関係）を明確にした．そして，それらを扱うには限量詞の利用が本質的であり，限量詞の定式化という視点から論証指導の漸進性を検討すべきことを指摘した．

キーワード：限量詞，記号論理，カリキュラム開発

１．はじめに

(1) 背景と目的

筆者らは，研究プロジェクト「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導カリキュラムの開発研究」(研究代表：岩崎秀樹）を推進している．このプロジェクトは，中学校のみならず高等学校も含め中等教育全体のカリキュラムを抜本的に問い直し，中等教育全体を見通した新たな論証指導カリキュラムの開発を目的とする．これまで，カリキュラム開発の際に拠り所となる理論的枠組みを提案してきた（宮川ほか, 2015）.

提案した枠組みにおいては, Mariotti らのアイデア (Mariotti, et al., 1997) を援用し，論証や証明を「言明」「証明」「理論」の三つの構成要素から捉える．そして，各々の要素の内容と質が中等教育を通して漸進的に深化していくと考え，これまで，各要素の内容と水準を提案してきた．カリキュラム開発を進めるためには，各要素の中等教育における漸進性

をさらに詳細に具体的に明らかにする必要がある．そこで本稿では，‘一般性’に焦点を当て, 中等教育を一貫した論証指導の視点から, それをいかに漸進的に扱うことができるのか検討したい．本稿で一般性に焦点を当てた理由は，一般性がわが国の数学教育で重要視されているものの（文部科学省, 2008, p. 96），生徒らに十分理解されていないこと（国宗，1987; 文部科学省, 2010, pp. 224-225 など），記号論理の視点からすれば，一般性は命題の成り立つ範囲や成り立つものの量（量化）に関わり, その扱いが必ずしも容易ではないこと, などにある．

(2) 方法

一般性の扱われ方は領域に応じて異なるため，本稿では，文字式を用いた代数的な証明の場合を検討する．ただし，代数的な証明にも背理法や数学的帰納法など種々の証明があり，各々の一般性とのかかわりは異なる．そこで本稿では，最も基礎的と思われる整数に関する直接証明に焦点を当て，2 つの偶数の和は偶数であるという性質（以下,「2 偶数の和」と呼ぶ）に対する証明を取り上げる．

中等教育における一般性の漸進的扱いの可能性を検討するにあたって，まず，記号論理の視点から，2 偶数の和の証明と一般性とのかかわりを明らかにする（3 節）．ここでは, 証明の論理的構造を抽出しモデル化するツールとして記号論理の自然演繹を採用し，一般性の性質ならびに証明が一般性を保証する仕組みを明らかにする．その際，先に触れた枠組みの三要素（言明・証明・理論）に注目する．そして，この検討結果をもとに，中等教育を一貫する論証指導における一般性の漸進的な扱いについて考察するとともに（4 節)，論証指導カリキュラムの開発に向けた課題について述べる（5 節)．

２．本研究の焦点

ここでは，3 節での証明の検討の準備として，本研究の焦点を概説するとともに，先行研究等から指摘される課題について述べる．

(1) 2 偶数の和の証明

現在の多くの中学校教科書で，偶数や奇数にかかわる証明が扱われている．それは必ずしも 2 偶数の和ではなく，2 奇数の和や偶数と奇数の和のこともあるが，証明自体は本質的には同様である．図 1 は教科書にみられた 2 奇数の和の証明である（岡本和夫ほか, 2012, p. 25)．この種の代数的な証明は，中学校「数と式」領域の第 2, 3 学年，高等学校数学 A「整数の性質」領域で主に扱われる．

> 2 つの整数がともに奇数のとき，m, n を整数とすると，これらは,
>
> $2m + 1, \quad 2n + 1$
>
> と表される．このとき，2 数の和は,
>
> $$(2m + 1) + (2n + 1) = 2m + 2n + 2$$
> $$= 2\,(m + n + 1)$$
>
> $m + n + 1$ は整数だから，これは偶数である．
> つまり，2 つの奇数の和は偶数である．

図１　中学校教科書にみられる証明

(2) 一般性とその理解

証明に関わって一般性といった場合，二種類のものが考えられる[1]．それは，命題のもつ一般性と証明のもつ一般性である. 前者は, 命題が一般の場合に成り立つという全称命題の性質に関するものであり，後者は，証明により命題の一般性を示すことができるという方法に関するものある．学校数学では，この後者の理解の不十分さがしばしば指摘されている（国宗，1987; 文部科学省, 2010, pp. 224-225 など)．それは，図形領域に限らず代数領域でも同様である（熊倉, 1997)．外国の例では，代数的な証明において，子どもたちがいくつかの例でのみ確認した素朴な経験主義的な証明 (cf. バラシェフ, 1997) では不十分であることを認識しているものの，文字式を用いた証明では十分納得できないことが報告されている (Healy & Hoyles, 2000)．文字を用いればなぜ一般性を示せるのか，十分に理解さ

れていないと考えられる．

(3) 限量詞

一般性を伴う言明やその証明の定式化には，対象とするものの範囲を示す語がしばしば用いられる．それは，「すべての～」や「どんな～」など，‘限量詞 (quantifier)’（もしくは量化詞）と呼ばれる語である．平林氏によれば，限量詞とは「変数 (variable) と定数 (constant) の区別にあずかる語，さらには変数の各種の束縛 (bounding) 関係を表記する語」(平林, 1964, p. 48) とされる．特に，変数においては，「普遍的束縛 (universal bounding)」と「存在的束縛 (existential bounding)」といった束縛の仕方[2] に応じて異なった限量詞があり，それらは大学以降の数学では，$\forall$と$\exists$という記号で定式化される[3]．前者は，「どんな～でも」「任意の～に対し」などと，後者は「～が存在する」「ある～に対し」などと読まれる．

筆者は，この限量詞の扱いが一般性の扱いに大きく影響を与えると考える．実際，限量詞を用いなければ，言明の対象とする範囲を伝えることはできない．さらに，大学以降の数学では，命題をより厳密により正確に表現し，証明の構造をより正確に伝えるために，限量詞を定式化・記号化する．すなわち，言明の一般性のみならず，一般性を保証する証明の構造をより明確にするためにも，限量詞を用いることが本質的と考えられるのである．

数学教育学研究における限量詞に関する研究は，大学生を対象としたものが主で，中等教育段階のものは少ない．例えば，全称記号と存在記号の両者を伴う二種類の命題 (AE and EA statements) の区別の困難性 (Dubinsky & Yiparaki, 2000)，それらの命題における変数の従属関係の把握の困難性 (Durand-Guerrier & Arsac, 2005) などが指摘されている．こうした課題は中等教育段階における数学教育とは無縁のようだが，今回取り上げる 2 偶数の和の証明は量化に関わり，同様のことが問題となる．

(4) 自然演繹による論理のモデル化

本稿では，述語論理の演繹体系の一つである自然演繹を用いて，2 偶数の和の証明の論理的な構造をモデル化する．自然演繹とは，ゲンツェンが考案した演繹体系の一つである．「数学の演繹的推論をほぼそのままの形で推論規則として取り入れている」（高崎, 2014, p. 66）ため，自然演繹は数学的証明に含まれる論理的構造をうまく抽出してくれる．また，一般性や限量詞に関わる構造を抽出するためには，命題論理では不十分であり，述語論理を範疇に入れた演繹体系が必要となる．このことも自然演繹が本研究に適していると考える理由である．

自然演繹を理論的枠組みとして採用するアイデアは，Durand-Guerrier & Arsac (2005) によって提案されたものである．彼らは，大学生の証明を分析する際のツールとして自然演繹を用いる．本研究では，プロジェクトの枠組みの「言明」「証明」「理論」において，言明と証明の最も形式的な定式化を得るため，ならびに数学的証明では暗黙裡のことが多いメタ理論を顕在化するために自然演繹の形式的証明を用いる．無論，形式的証明を中等教育の論証指導で求めるわけではない．それをもとに，一般性の性質ならびに一般性を保証する仕組みを顕在化させ，中等教育の論証指導における一般性の扱いについて考慮すべき要素とその漸進性を検討するのである．

３．２偶数の和の証明における一般性

以下では，2 偶数の和に対する形式的証明を与え，それをもとに「言明」「証明」「理論」の各要素の一般性とのかかわりを示す．紙面の都合上，「証明」に焦点を当て，「言明」と「理論」については簡潔に述べる．

(1) 形式的証明

ここでは後々議論し易いよう，導出図（証明図）ではなく，高崎 (2014) を参考に 1 行 1 行書き下す方式を採用する．各行に論理式を

あげ，括弧内に注釈として，その論理式を導くために用いた論理式と推論規則を示した．

1. $\forall x\,(\mathrm{G}(x) \rightarrow \exists y\,(x = 2 \times y))$ (仮定)
2. $\forall x\,(\exists y\,(x = 2 \times y) \rightarrow \mathrm{G}(x))$ (仮定)
3. $\forall x \forall y\,(2 \times x + 2 \times y = 2 \times (x + y))$ (仮定)
4. $[\mathrm{G}(a) \wedge \mathrm{G}(b)]^{23}$ (仮定)
5. $\mathrm{G}(a)$ (4 $\wedge$E)
6. $\mathrm{G}(a) \rightarrow \exists y\,(a = 2 \times y)$ (1 $\forall$E)
7. $\exists y\,(a = 2 \times y)$ (5-6 $\rightarrow$E)
8. $\mathrm{G}(b)$ (4 $\wedge$E)
9. $\mathrm{G}(b) \rightarrow \exists y\,(b = 2 \times y)$ (1 $\forall$E)
10. $\exists y\,(b = 2 \times y)$ (8-9 $\rightarrow$E)
11. $[a = 2 \times p]^{20}$ (仮定)
12. $a + b = a + b$ (等号公理)
13. $a + b = 2 \times p + b$ (11-12 等号規則)
14. $[b = 2 \times q]^{19}$ (仮定)
15. $a + b = 2 \times p + 2 \times q$ (13-14 等号規則)
16. $2 \times p + 2 \times q = 2 \times (p + q)$ (3 $\forall$E)
17. $a + b = 2 \times (p + q)$ (15-16 等号規則)
18. $\exists y\,(a + b = 2 \times y)$ (17 $\exists$I)
19. $\exists y\,(a + b = 2 \times y)$ (10, 14-18 $\exists$E)
20. $\exists y\,(a + b = 2 \times y)$ (7, 11-19 $\exists$E)
21. $\exists y\,(a + b = 2 \times y) \rightarrow \mathrm{G}(a + b)$ (2 $\forall$E)
22. $\mathrm{G}(a + b)$ (20-21 $\rightarrow$E)
23. $\mathrm{G}(a) \wedge \mathrm{G}(b) \rightarrow \mathrm{G}(a + b)$ (4, 22 $\rightarrow$I)
24. $\forall x \forall y\,(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{G}(y) \rightarrow \mathrm{G}(x + y))$ (23 $\forall$I)

ここでの対象領域は整数とする．記号に関しては，“+” と “×” は通常の和と積に相当する 2 引数の関数記号，G は「偶数である」を表す 1 引数の述語記号とする．角括弧は一時的な仮定を意味し，右肩の番号はその仮定が解消される行番号である．そして，I は論理記号の導入を，E は除去を示す．

(2) 言明

上の形式的証明が対象とする言明は，24 行目の結論にある

$$\forall x \forall y\,(\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{G}(y) \rightarrow \mathrm{G}(x + y)) \qquad (1)$$

である．これは，日本語で「偶数たす偶数は偶数」や「2 つの偶数の和は偶数」などと表現される言明をより形式的に定式化したものである．この定式化では，2 つの全称記号が用いられ，それらが言明の一般性を示している．対象領域には整数の集合が想定されているため，ここでの一般性とは，整数の集合のすべての要素について $\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{G}(y) \rightarrow \mathrm{G}(x + y)$ が成り立つことである．また，式 (1) は，「任意の整数 x と y に対し，それぞれが偶数であれば，$x + y$ も偶数である」など「任意」や「すべて」などの限量詞を用いて言い表される．

一方，一つの命題は複数の視点より解釈が可能であり（cf. 大塚，2013），視点によって言明の定式化が異なる．式 (1) は，「任意の 2 つの偶数の和は偶数である」と読めば，対象領域に偶数の集合を想定し，$\forall x \forall y\,\mathrm{G}(x + y)$ と定式化できる[4]．また，2 偶数の和に焦点を当てれば，$\forall z\,(\exists x \exists y\,((\mathrm{G}(x) \wedge \mathrm{G}(y) \wedge (z = x + y)) \rightarrow \mathrm{G}(z)))$ と定式化可能である．このように複数の定式化が可能であり，それに応じて考えるべき変数と変域という一般性の性質は異なる．

(3) メタ理論：推論規則

証明の仕組みの前に，理論について整理する．証明には，数学の一般的な理論と論理学的な理論（メタ理論）が用いられる．1, 2, 3 行目の前提（仮定）は前者に属する．1, 2 行目は偶数の定義，3 行目は加法と乗法についての分配法則である．一方，後者のメタ理論とみなされるものは，主たるものが括弧の注釈に与えられた推論規則である．その中でも，一般性に関わるものは，述語論理のみで扱われる推論規則，全称記号の導入と除去，存在記号の導入と除去の四つである（図 2）[5]．ここでそれぞれの詳細は示さないが，全称記号の導入 ($\forall$I) は全称命題を導く際に鍵となるものである．この推論規則の適用には，図 2 左上において変数 a がまったく任意に選ばれることという適用条件がある[6]．

$$\forall\mathrm{I} : \frac{\phi[a/x]}{\forall x \phi} \qquad \forall\mathrm{E} : \frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]}$$

$$\exists\mathrm{I} : \frac{\phi[t/x]}{\exists x \phi} \qquad \exists\mathrm{E} : \frac{\exists x \phi \qquad \begin{matrix} [\phi[a/x]] \\ \vdots \\ \psi \end{matrix}}{\psi}$$

図 2 高崎（2014, p. 131）を参考に作成

(4) 証明

上の形式的証明は，図 1 の教科書の証明の

論理的な構造を示していて，逆に，形式的証明を略記したものが図 1 の証明とみなせる（偶数・奇数の違いはあるが）．形式的証明の仕組みを説明し，それがいかに一般性を保証しているのか，明確にしよう．

① 形式的証明の仕組み

1-3 行目は，この証明で用いる数学的な性質である．4 行目では，どんな偶数でも常に成り立つことを示すため，すなわち最終的に 24 行目で全称記号導入($\forall$I)を適用するため，まずまったく任意に整数を 2 つ (a と b) 選び，それらが偶数であると仮定する．ここで a と b は，変域から任意に選んだ要素であるため意味的には定数である[7].

6 行目で，全称記号除去 ($\forall$E) により，1 行目の性質を a の場合に適用し，7 行目を導く．7 行目は a を $2 \times y$ と表せるような y が存在することを意味する存在命題である．8-10 行目は b について同様の推論．

次に，7 行目と 10 行目の存在命題から $a + b$ の場合の存在命題（20 行目）を導くため，一度，存在記号を除去する．そのために，11 行目でまず a の場合に，$a = 2 \times p$ となることを仮定する．ここで，p は a, b と同様，任意の変数である．ただし，この式が成り立つような整数であるため，意味的には，a に従属して決まるある一つの整数，定数である．

14 行目で b の場合にも同様に仮定し，等号公理や等号規則，3 行目の分配法則を使って，17 行目を導く．ここでは，$a + b$ が $2 \times (p + q)$ と表せるため，存在記号導入 ($\exists$I) により 18 行目が導かれる．そして，18 行目は p, q という記号と無関係に成立するため，14 行目と 11 行目に存在記号除去 ($\exists$E) が適用でき，20 行目が導かれる．

その後，2 行目の偶数の定義を適用し，22 行目を導き，23 行目に至る．そして，a と b を任意に選んで 23 行目が成立するため（適用条件を満たすため），全称記号の導入 ($\forall$I) により結論の 24 行目が導かれるのである．

② 一般性を保証する仕組み

形式的証明はいかに一般性をもつ言明が正しいことを示しているのか．記号論理の視点からすれば，述語論理に関わる推論規則がそれを保証している．数学的な証明を構成する際には，それらの推論規則と関わって，次の三点が鍵となると考える．

第一に，偶数を表す a と b の導入の仕方である．これらは，24 行目で最終的に全称記号を導入すること，すなわち言明の一般性を保証することを念頭に導入される．その際，全称記号導入 ($\forall$I) の適用条件を満たすよう，まったく任意に選ばれる．したがって，全称命題を導くために任意に選ばなければならないのは，$2p$ などと偶数を表すための整数 p ではなく，偶数である．

第二に，一時的な仮定で導入された a, b や p, q という記号の意味である．これらは，記号としては自由変数だが，意味としては，任意に選ばれた特定の数を意味する．形式的証明では，まったく任意に選ばれた a, b を用いて $G(a) \wedge G(b) \rightarrow G(a + b)$ が示せたからこそ，$G(x) \wedge G(y)$ を満たすそれ以外のどんな整数を選んでも，4 行目から 23 行目の理屈がまったく同様に適用できるのである．ここでの a, b の性格は，バラシェフ (1997) のいう「生成的な例 (generic example)」である．実際，この生成的な例において推論を進めるために，1 行目から 3 行目の一般的な性質を，全称記号の除去 ($\forall$E) により特定の場合に帰着させてから，命題論理でも使われる modus ponens ($\rightarrow$E) などを適用し，新たな論理式を導いている．したがって，この生成的な例が言明の一般性保証の鍵となるのである．

第三に，「偶数であること」が存在記号を伴うこと，そこで現れる数は偶数と従属関係にあることである．存在記号を除去するために導入された p, q は，全称記号導入のために導入された a, b とはその性格が異なる．p, q は偶数として任意に既に選ばれた a, b とのかか

わりで導入されるため，p, q の数学的な意味は a, b に従属して一意に決まる整数である．無論，存在記号除去 (∃E) を前提とした仮定の導入では，その論理式が成立し適用条件を満たす変数から任意に選ぶことができる．しかし意味的には，偶数の場合は，a が決まってしまえば，それを表す数には他に選択肢はない．したがって，Durand-Guerrier & Arsac (2005) が大学の数学教育において指摘する AE statement における従属関係が，中学校で扱われる 2 偶数の和の証明でも同様に問題となるのである．中等教育段階においても，大学までを展望した限量詞の漸進的な指導を検討する必要性が示唆される．

４．考察：一般性の漸進的な扱い

中等教育を一貫した漸進的な論証指導において，一般性はいかに扱うことが可能であろうか，いかに扱うべきか．「言明」「証明」の視点から考察していく．「理論」については，「証明」の中で検討する．

(1) 言明の漸進的な扱い

言明において，一般性は限量詞によって表される．そのため，限量詞の定式化に漸進性が求められる．数学的な表現を徐々に学習することを考えれば，最初はより日常的な言葉で定式化され，徐々に数学的な表現となることが望まれる．例えば，中学校では全称性を表すとき「いつも」や「どんな」などの語を用い，高等学校ではより数学的な言い方である「任意」を用い始めることが考えられる（全称記号は中等教育の範疇を超えていよう）．ところが，今日の中学校の数学教科書では，限量詞の扱いは限られている[8]．数学では一般に，説明や証明の省略は自明であることに対してなされる．中学校段階で量化が自明でないことからすれば，限量詞の利用が望まれる．

言明については，定式化の仕方に応じて全称束縛された変数とその変域が異なることが示唆された．これも言明の定式化の漸進的な扱いにおいて検討すべき点である．しかし，紙面の都合上，この考察は別の機会としたい．

(2) 証明の漸進的な扱い

証明のもつ一般性の指導に関してまず検討すべきは，一般性を保証する証明の仕組みの扱いである．これは述語論理の推論規則（メタ理論）に関連する．メタ理論の顕在化は中等教育の範疇を超えているが，証明の仕組みを扱わずに，数学的に正しい論理的な構造をもった数学的証明を構成することはできないであろう．そのため，本稿で指摘した全称束縛された変数の導入の仕方，生成的な例，変数の従属関係といった仕組みは中学校の指導内容となり，漸進的に扱うべきものは証明の定式化であると考える．

証明の仕組みの定式化ならびに顕在化は，限量詞に負うところが大きい．限量詞を用いれば仕組みも顕在化され，用いなければ仕組みは暗黙的になる．例えば，変数の従属関係に関しては，「どんな偶数についても，それを $2p$ と表せる整数 p が存在する」などと，「存在する」という限量詞の使用により，存在束縛の変数の従属関係が明確化される．また，全称束縛された変数の導入では,「どんな 2 つの偶数を選んでも」などと，これも限量詞の定式化によってその仕組みが顕在化される．さらに，生成的な例の仕組みについても，限量詞の定式化なくして，任意に選ばれた偶数の役割を顕在化することはできないであろう．

では，こうした証明における限量詞は，いかなる漸進性をもって定式化し，指導すべきか．この問いへの回答は容易ではない．中学校での文字式を用いた 2 偶数の和の証明では，図 1 をみてもわかるように，偶数を a や b とそのまま文字には置き換えず，最初から $2m$ や $2n$ と表現する．これはおそらく，扱う文字の数を少なくするという，文字式の学習への配慮であろう．一方，限量詞の定式化は，証明として記述する論理式にも依存する．上の形式的証明において，記号化された 24 個の論理

式は，すべてが数学的証明として記述されるわけではない．いずれを記述しいずれを省略するかについての検討が必要となる．それに応じて定式化すべき限量詞が生じる．

このように，証明における限量詞の漸進的な扱いについては，まだ検討が必要な事項が多い．ただ，今日の中学校及び高等学校の教科書では，限量詞の利用が限られている．そのため,今回注目した一般性保証の仕組みは,学習者には認識されていないのではないだろうか．日常生活で「どんな」や「いつも」などの語が頻繁に利用されていることからすれば,それらを用いない理由はないように思う．中学校第 2 学年で，図 3 のような限量詞を用いた証明を扱ってもよいのではないだろうか.

どんな 2 つの偶数を選んでも，それに応じて決まる整数 m, n を使って，

$2m$, $2n$

と表せる．このとき，2 数の和は，

$2m + 2n = 2\,(m + n)$

$m + n$ は整数だから，これは偶数である．
したがって，どんな 2 つの偶数をたしても，いつも偶数になる．

図３　限量詞を用いた証明[9]

５．論証指導カリキュラムの開発に向けて

本稿では，中等教育を一貫する論証指導という視点から，‘一般性’の漸進的な扱いについて限量詞の利用が本質的であることを指摘した.一方,代数的な証明の学習においては,限量詞以外にも種々の課題が存在する．今後の論証指導カリキュラムの開発に向けてそれらを検討し，本稿を終えよう．以下では，先行研究（国宗, 1997）を踏まえ，2 偶数の和に関する生徒の理解という視点から，言明・証明・理論各々について代表的な課題を示す.

言明については，限量詞以外にもその定式化により生徒の理解は異なる．本稿での 2 偶数の和は，しばしば「偶数と偶数の和」とも表現される．これにより，同じ偶数同士の和 (2 + 2, 4 + 4, …) と捉える生徒が出てくる．

証明で $2m + 2m$ と同じ文字を用いる生徒がいる．これには二通りの解釈がある．一つは，上記の同じ偶数同士の和と捉えているというものである．もう一つは，文字 m が変数として色々な値をとりうると指導しているため, $2m$ がすべての偶数を表現していると考えることから生じるというものである．

理論に関しても様々な課題がある．まず，公理として何が設定されているのか曖昧な点は困難性の要因の一つとなろう．実際，2 偶数の和は証明しなければならないが，2 整数の和が整数であるのは当然とする．また，数学的な理論に関しては，偶数をいかに捉えているかにより証明が異なる (Miyakawa, 2002 も参照). 偶数を一の位が偶数の整数と捉えていれば，図 2 のように偶数を $2m$ と表現することはできない．さらに，日常の論理より帰納的な説明でよしとする生徒もみられる．

注

[1] 国宗 (1987, p. 5) は，図形の論証の場合に，定理・証明・図の三つの一般性に触れている. 本稿ではそのうちの 2 つを取り上げる.

[2] 本稿では，それぞれを「全称束縛」「存在束縛」と呼ぶ.

[3] ∀と∃という記号は,「量化子」や「限量子」などと呼ばれる．本稿では，量化に関わる表現一般を「限量詞」と呼び，∀と∃の記号については,両者を併せて「量化記号」,各々を「全称記号」と「存在記号」と呼ぶ.

[4] 偶数を別の変数を用いて表す際には，整数を対象領域とする変数も考える必要がある. そのため, 形式的証明の 1 行目は, $\forall x \exists y\ (y \in \mathrm{Z} \wedge x = 2 \times y)$ などとなる．

[5] 論理学では，全称記号の導入と除去はそれぞれ「全称汎化」「全称例化」，存在記号の導入と除去はそれぞれ「存在汎化」「存在例化」などと呼ばれる（野矢, 1994）.

[6] より正確には，a は$\phi\ [a/x]$ を導く推論の

仮定の中にも，$\forall x\phi$ の中にも自由変数として現れないという条件である．先の形式的証明では，a を含む 4 行目の仮定が 23 行目で解消されているため，24 行目で∀I を適用できる．さらに，適用条件は存在記号の除去 (∃E) にもあり，図 2 右下で「a はψ自体やψを導く推論のϕ [a/x] 以外の仮定の中に自由変数として現れない」（高崎, 2014, p. 132）ことである．先の形式的証明では，18 行目の論理式と 11, 14 行目の仮定以外の仮定に p, q が現れていないため，19, 20 行目で∃E を適用できる．

[7] 記号論理における定数記号は，1, 2, 3, … やπなど，対象領域の特定の要素を意味するため（前原, 2005, pp. 29-32; 高崎, 2014, p. 133），a や b は記号としては自由変数である．論理学では，定項と自由変項を一括して扱うものもある (野矢, 1994, p. 109).

[8] 偶数や奇数の和に関する証明で，限量詞を用いている教科書は 2 社のみである．

[9] 最後の一文は，命題に通常用いられる「～である」ではなく，生徒にとってより自然な表現とした．

引用・参考文献

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On students understanding of AE and EA quantification. *Research in Collegiate Mathematics Education IV*, 8, 239–289.

Durand-Guerrier, V., & Arsac, G. (2005). An epistemological and didactic study of a specific calculus reasoning rule. *Educational Studies in Mathematics*, 60(2), 149–172.

Healy L. & Hoyles C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 31(4). 396-428.

Mariotti, M. A., Bartolini, M, Boero, P., Ferri, F. & Garuti, R. (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition. In E. Pehkonen, (Ed.) *Proceedings of the 21st PME Conference* (Vol. 1, pp.180-195), Lahti, Finland: PME.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of the sum of two even numbers. In A. D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th PME Conference* (Vol. 3, pp.353-360), Norwich: PME.

大塚慎太郎 (2013).「命題が偽であることの説明における困難性の要因の分析：学習者による命題解釈に焦点を当てて」. 数学教育学論究，99, 3-17.

岡本和夫ほか (2012). 未来へひろがる数学２. 啓林館.

国宗進 (1987).「「論証の意義」の理解に関する発達の研究」. 数学教育学論究,47/48, 3-23.

国宗進編著 (1997). 確かな理解をめざした文字式の学習指導．明治図書.

熊倉啓之 (1997).「文字式の基本的な内容についての理解－計算・表現・読式，変数－」. 国宗進編著，確かな理解をめざした文字式の学習指導 (pp. 49-64). 明治図書.

高崎金久 (2014). 学んでみよう！記号論理. 日本評論社.

野矢茂樹 (1994). 論理学．東京大学出版.

バラシェフ, N. (1997). 「数学的証明の学習の改善:実践を改善するための理論的枠組み」, 数学教育学論究, 67/68, 52-62.

平林一榮 (1964).「数学教育における表記の問題（第 2 報）: 4. 論理語」, 数学教育学論究, 7, 43-52.

前原昭二 (2005). 記号論理入門. 日本評論社.

宮川健・真野祐輔・岩崎秀樹・國宗進・溝口達也・石井英真・阿部好貴 (2015). 「中等教育を一貫する数学的活動に基づく論証指導の理論的基盤：カリキュラム開発に向けた枠組みの設定」, 全国数学教育学会誌 数学教育学研究，21(1), 63-73.

文部科学省 (2010). 平成 22 年度全国学力・学習状況調査報告書，国立教育政策研究所.

付記: 本研究は, 科学研究費補助金(24330245)の助成を受けて推進された．