証明とコンセプションの関係
～「二偶数の和の証明」の分析と検証を例に～

宮川　健
グルノーブル大学院

１．はじめに

本稿では，フランス数学教授学（以下，数学教授学）の研究枠組みで，証明と数学教授学で用いられる概念であるコンセプション（観察者から見た個人のもつ考え・見方）の関係を探る。両者の関係を探ることは，子どもの証明がいかなる知識より生成されているか探ることであり，教師が証明を評価する際に一つの基準を与えることはもとより，証明学習環境をモデル化する上で知識面からのアプローチをも可能にする。ここで取り上げるコンセプションは証明そのものに対するものではなく，数学概念（本稿では偶数）に対するコンセプションである。本稿では Healy et al (2000) に用いられた，「ふたつの偶数の和が偶数である」（以下，「ふたつ」は省略）ことの証明を偶数に対するコンセプションから検討する。彼らは，この例を用いて証明のコンセプションを調査研究し，多くの子どもが証明を経験主義的•帰納的なものであるとするコンセプションを持っているとする。しかし，数学概念に対するコンセプションの証明への影響を考慮せずに結論づけている。ここに筆者の問題意識がある。つまり，用いられる数学概念に対するコンセプションによって証明の種類も変化するのではないかということである。

まず本稿の研究枠組みとなる数学教授学を簡単に解説する。1970 年代に始まったフランス固有の数学教授学のアイデアは，次のように述べられる。

> 「フランスにおける「数学教授学 (didactique des mathématiques)」という（不幸な？）名のもとにおこなわれている理論的活動の起源は，教育の現象，一般に理論的議論よりもむしろ経験主義的態度や意見を引き起こす現象を，合理的な方法で描写し説明することが可能である，という考えにある。」 (Bessot, 1998, p.1)
>
> 「我々の目的は，数学教育・学習に関わる現象・過程における知識の基本体系を構築することである。」 (Balacheff, 1990, p.269)

つまり数学教授学とは，教育という経験主義で語られかねない現象を理論的にモデル化する試みであり，それにより現象そのものとその性質を知ることを目的としている。よっ

て，現在おこなわれている教育の優劣を決めるのではなく，まずその現象を記述することを目的とする。また，ここで現象とは教授学的状況，つまり数学・子ども・教師の三要素を中心とする状況であり，それぞれの性質，相互関係に焦点をあてる。そしてそれらに基づき，数学教育を改善する方法を考えようとするものである。実際，現象を知らずに作られた指導法は非現実的，もしくはその場しのぎのものになりかねない。本稿で扱うコンセプションとは，この思想の延長上で子どもの知識をモデル化する道具である。

２．証明

(1)　証明と数学的証明

数学教授学において，「証明」には「数学的証明 (démonstration)」と「証明 (preuve)」のふたつの言葉が用いられる[1]。ここでは一般に数学教授学界で受け入れられている Balacheff (1987)の定義を採用する。つまり，「証明」はある時にある社会に受け入れられる説明であり,「数学的証明」が演繹的形式に則ったものであるとする定義である（宮川, 2000 参照)。

(2)　実践的証明と知的証明

本稿では Balacheff (1987, 1999) による認識論的・認知的側面からの証明の特徴付けを採用し,「偶数の和」の証明を分析する。ここでは「実践的証明 (preuve pragmatique)」と「知的証明 (preuve intellectuelle)」の性質を解説する。

まず,「実践的証明」とは「数学的対象の表現上で用いられる実際の行動にもとづいた証明」(1999, p.201)であり,「知的証明」とは「実際の行動から乖離し，対象やその性質を表現しそれらの関係を計算する言語的振る舞いに組み込まれる」(1999, p.201) 証明である。Balacheff はこのふたつの証明，及び数学的証明を次のように特徴づける。

証明の機能・役割は，一般にそれによってある命題が正しいことを確信し，なぜ正しいか理解し，それらを伝達することであると言える[2]。数学における証明には厳密性が求められ，日常における証明には効率性が求められる。この対峙は，証明が理論的であることと実践的であることの対峙に対応し，証明のそれぞれの機能においても伺われる。「伝達」に関しては，具体物上での操作をとおして証明を示すことが効率的であるのに対し，数学言語を用いる証明は厳密である（言語の対峙)。「理解」に関しては，実践的なノウハウを獲得することが効率的であるのに対し，理論として知識を獲得することは数学的に厳密である（知識の本質の対峙)。「確信」に関しては，具体物によって妥当性を求める「実践的証明」が効率的であるのに対し，抽象的なものによる「知的証明」は厳密である（妥当性の対峙)。これら三点はそれぞれ強く相互作用・依存している。そして，Balacheff はこれら

---

[1] 英語では"mathematical proof"もしくは"formal proof"と"proof"が用いられる。

[2] De Villiers (1990) は証明の機能・役割として「立証」,「説明」,「体系化」,「発見」,「コミュニケーション」をあげているが,「発見」や「体系化」は証明の機能・役割というよりも証明による利点と考える。

を表 1 のように示している (1987, p.160)。

知識の本質	言語	妥当性
	具体物	
実践（ノウハウ）		実践的証明（行為における定理）
	日常言語	
対象としての知識		知的証明
	機能的言語	
理論的知識（科学的知識）	素朴な形式主義	数学的証明（定理）

表 1 : 証明の特徴付け

(3)　証明の種類

また Balacheff (1987) は上述の実践的証明から知的証明への移行において，用いられる知識の機能と合理性の本質から，四種類の証明を与えている。ここでは，Balacheff のそれぞれの定義をあげ，本稿で扱う「偶数の和は偶数」に対する証明をあげながら解説する。

○素朴な経験主義 (empirisme naïf)

「素朴な経験主義とは少数の場合の観察によって主張の正当性を確信するものである」(p.163)。例えば, 2 + 4 = 6 ; 4 + 8 =12 ; 10 + 6 =16 ; 8 + 12 = 20 の四つの場合で正しいので「偶数の和は偶数」と結論づけるものである。

○決定実験 (expérience cruciale)

「決定実験は，個人が明確に一般化の問題に取り組み，可能な限り特別でない場合に賭けることによって解決する際に用いられる妥当性確認の手段である」(p.163)。例えば,「偶数の和は偶数」を示すため，無作為に十分大きなふたつの偶数を選びその場合が正しいから一般の場合も正しいと結論づけるものである (25762 + 87542 = 113304)。

○生成的例 (exemple générique)

「生成的例は，ある場合における操作や変換を行うことによって，ある主張の妥当性の理由を説明するものである。その場合はそれ自身のためではなく，ある集まりを特徴づける代表として用いられる」(pp.164-165)。例えば，"24 + 32 = (12 + 12) + (16 + 16) = (12 + 16) + (12 + 16) = 18 + 18"のように，ある特殊な場合を用いてはいるが，一般の場合が正しいことを示すためにその理由となる偶数の和の構造を示しているものである。この種の証明は特殊な場合を用いている点で実践的証明だが，そのひとつの場合が一般の代表である点で知的証明と考えられる。読み手の解釈による。

○思考実験 (expérience mentale)

「思考実験は，行動を内面化することによって，そして行動をある特殊な代替物上で示すことから乖離させることによって，その行動を引き合いに出す」(p.165)。例えば,「偶数は 2 の和に分解できる。ふたつの 2 の和に分解された数をそのまま足せば，その和も 2 に分解されている。よって偶数の和は偶数である」は思考実験を用いていると言える。実際，これによって"4 + 6 = (2 + 2) + (2 + 2 + 2) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2"などを想起させるが，証明自体は生成的例のように特殊な例を用いているわけではない。この証明は，生成的例を日常言

語で表現しているものとも言える。また，生成的例と同様，読み手が証明生成者と同じ構造の例を想起するとは限らず，その解釈による。

３．コンセプション

(1)　コンセプションとは

数学教授学におけるコンセプション研究は，ひとつの研究分野として古くからおこなわれてきた（Artigue & Robinet, 1982 ; Grenier, 1988 など）。英語圏ではミスコンセプション研究が盛んにおこなわれているが，主に認知的側面を扱うため，認識論的側面も扱うフランスのものとは異なる。コンセプションとは子どもの知識をモデル化する一つの道具である。

Artigue (1990)はこの概念によって，「ある数学概念に対し多様な観点が可能であることを明らかにし，その概念を扱う表現や方法を区分し，それらがある種の問題解決に多かれ少なかれよく適応していることを明らかにする」(p.265) といった教授学的必要性に答えることができるとする。これらのことはコンセプションの性質をよく示している。例えば，「関数」という一概念も，対応関係，グラフ，代数式，表などで表され，様々な見方が可能であり，それぞれの表記・扱いは明らかに異なる。代数式で表された関数が演算には大変有効なのに対し，グラフは視覚的にある関数の性質を簡単に知ることができる。つまり，それぞれの見方には，ある正答を与えることができる有効範囲があるのである。このように考えれば，英語圏で扱われているミスコンセプションは一つのコンセプションであり，扱われる問題がその有効範囲からずれてしまったものと考えられる。

この研究は古くからおこなわれてきたものの，その概念は明確に定義されず，上述の必要性に答えることができるものとして扱われていた (Artigue, ibid, p.266)。しかし近年，Balacheff (1995)は数学教授学が採用する「誤答のパラダイム[3]」に基づき主体と環境 (milieu)の相互作用から，その形式的な定義・モデルを与えた。この定義は Artigue が上で示しているコンセプションの性質を備えたものである。しかし本稿では，このモデルは用いず簡略化したもののみ扱うため，ここでは省略する[4]。

(2)　偶数のコンセプション

偶数のコンセプションは大きく次のように分けられる。

C_1：偶数の下一桁は 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかである。

[3] バッシュラールの誤りに対する仮定に基づいていることを示す。つまり，「誤答は，学習の経験主義・行動主義の理論で信じられている無知・不正確さ・偶然の影響ではなく，良い点やうまくいくこともあったが，現在は誤りもしくは単に適切でないと判明した以前の知識の影響である」(Brousseau, 1983, p.171) と考えるものである。

[4] Balacheff (1995) は，コンセプションが (P, R, L, Σ) の四要素で特徴づけられるとする。ここで P は問題の集合，R は演算子・規則の集合，L は表記法，Σ は制御構造である。

C_2：偶数は 2 で割れる，もしくは 2 の倍数である[5]。

C_{21}：偶数はふたつの等しい部分に分けられる。

C_{22}：偶数は 2 の和に分解できる。

C_{23}：偶数はある整数の 2 倍である，もしくは 2 を因数に持つ。

C_3：偶数は $a = 2p$ ($p \in \mathbf{Z}$)と書ける。

C_2は自身に含まれる「割れる」・「倍数」という概念から下位コンセプションに分けることができる。C_3は完全に代数表記のコンセプションである。

４．アプリオリ分析

(1)　アプリオリ分析とは

アプリオリ分析とは数学教授学で常に用いられる方法論である。「アプリオリ」とは「まえ」を意味するが，実験の事前分析とは異なる。本来，教授学的状況理論において，実際に生じた状況が理論から導かれる多様な状況の中に，その位置・性質を示すために用いられていた。現在ではより広く，状況に限らず子ども・教師の行動など数学教授学研究全般に用いられている。Balacheff は，その重要性を「アプリオリ分析は観察にもとづいた研究において方法論の本質になるべきである。それはある事が起こる必然性を議論することに我々を導く」(1990, p.270)と述べる。つまり，ある事象や誤答がなぜ生じ別の事象や誤答がなぜ生じなかったか，それらの起源を理論枠組みより議論するために必要なのである。

この分析は実験の事前だけでなく，事後にも再検討される。例えば，Bessot et al (1985) は「アプリオリは研究における時間的位置づけを意味するのではなく，実際に起こるであろう特殊な状況ではなく一般的な状況を考慮する認識論的順序を反映するものである(p.312)」と述べ「アプリオリ」が数学教授学研究において認識論的意味で「まえ」であることを示している。

(2)　証明の分析

ここでは前章であげた偶数のコンセプションを用いて，偶数の和に対する実践的証明から知的証明・数学的証明まで理論枠組みから考えられる多様な種類の証明を構成することを試みる。これにより，偶数の和の証明において可能なコンセプション間の関係，実験調査によって子どもが作成した証明の位置づけを知ることができる。その際，操作的表記にも注目する。つまり，その表記上で計算や操作・変換がおこなわれるものである。実際，日常言語は証明のあらゆるところで用いられるため操作的表記と区別する必要がある。

○C_1：偶数の下一桁は 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかである。

素朴な経験主義（数表記）: 2 + 4 = 6 ; 4 + 8 =12 ; 10 + 6 =16 ; 8 + 12 = 20

---

[5] 2 で割れることと 2 の倍数であることは異なるがほぼ同じ下位コンセプションを持つことから本稿では区分せずに扱う。

決定経験（数表記）: 25762 + 87542 = 113304

生成的例（数表記）: 24 + 32 = (20 + 4) + (30 + 2) = (20 + 30) + (4 + 2) = 50 + 6

思考実験（日常言語表記）: 偶数の下一桁は 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかなので，偶数の和の下一桁はそれらのふたつの和で計算できる。その結果それぞれの和の下一桁も 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかとなり，偶数の和は偶数。

数学的証明（数表記）: 偶数の下一桁は 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかなので, 偶数の和の下一桁はそれらのふたつの和で計算できる。表 2 より和の下一桁も 0, 2, 4, 6, 8 のいずれかとなり，和は偶数。

	0	2	4	6	8
0	0	2	4	6	8
2		4	6	8	0
4			8	0	2
6				2	4
8					6

表 2: 下一桁の計算

○C_2: 偶数は 2 で割れる，もしくは 2 の倍数である。

➢C_{21}: 偶数はふたつの等しい部分に分けられる。

素朴な経験主義（数表記）: 4 + 8 = 12 = 6 + 6 ; 6 + 12 = 18 = 9 + 9, etc.

決定実験（数表記）: 25762 + 87542 = 113304 = 56652 + 56652

生成的例（数表記）: 12 + 32 = (6 + 6) + (16 + 16) = (6 + 16) + (6 + 16) = 22 + 22

生成的例（図形表記）: ：：：＋：：：：＝：：：：：：：（横に分割）

思考実験（日常言語表記）: 偶数はふたつの等しい部分に分けられる。ふたつの等しい部分に分けられたそれぞれの部分を足せば，和は等しいふたつの部分に分けられる。

数学的証明（代数表記）: $\forall a, b$: 偶数 $\exists\, p, q \in \mathbf{Z}$ *s.t.* $a = p + p, b = q + q$

$a + b = (p + p) + (q + q) = (p + q) + (p + q)$

➢C_{22}: 偶数は 2 の和に分解できる。

素朴な経験主義（数表記）: 4 + 6 = 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 ; 2 + 8 = 10 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2, etc.

決定実験（数表記）: 25762 + 87542 = 113304 = 2 + 2 + etc.

生成的例（数表記）: 4 + 8 = (2 + 2) + (2 + 2 + 2 +2) = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 +2

生成的例（図形表記）: ：：＋：：：：＝：：：：：：（縦に分割）

思考実験（日常言語表記）: 偶数は 2 の和に分解できる。ふたつの 2 の和に分解された数をそのまま足せば，その和も 2 に分解される。

数学的証明（代数表記）: 偶数は 2 の和に分解できるので，ふたつの任意の偶数は $a = 2 + 2 + \cdots +2$ (p 項), $b = 2 + 2 + \cdots +2$ (q 項) と書ける。その和は $a + b = (2 + \cdots +2) + (2 + \cdots +2) = 2 +2 + \cdots +2$ ($p + q$ 項) であり，和も 2 の和に分解できる。

➢C_{23}: 偶数は 2 を因数に持つ。

素朴な経験主義（数表記）: 4 + 8 = 12 = 2 × 6 ; 6 + 12 = 18 = 2 × 9 ; etc.

決定実験（数表記）: 25762 + 87542 = 113304 = 2 × 56652.

生成的例（数表記）: 4 + 8 = 2 × 2 + 2 × 4 = 2 (2 + 4)

思考実験（日常言語表記）: 偶数は 2 を因数に持つ。したがって，ふたつの 2 を因数に持つ数を足せばその和も 2 を因数に持つ。

数学的証明（代数表記）: 偶数は 2 を因数に持つので，ふたつの偶数は $a = 2p, b = 2q$ ($p, q \in \mathbf{Z}$) と書ける。その和は $a + b = 2p + 2q = 2 (p + q)$ とでき，和も 2 を因数に持つ。

〇C_3：偶数は $\boldsymbol{a = 2p}$ ($\boldsymbol{p \in Z}$)と書ける。

数学的証明（代数表記）：$\forall$a, b　：偶数 $\exists\, p, q \in \mathbf{Z}$ *s.t.* $a = 2p$, $b = 2q$

$a + b = 2p + 2q = 2\,(p + q)$

(3)　アプリオリ分析からわかること

〇C_1はすべての場合を検証し，C_2, C_3は構造を示す

C_1, C_2, C_3 それぞれの知的証明を比較すると証明の性質に大きな相違がある。C_1 は数字に注目し，下一桁の 0, 2, 4, 6, 8 のそれぞれの和をすべて検証しており，構造は関係ないもしくは存在しない。これに対し，C_2，C_3 は数字ではなく偶数の構造に着目することにより，偶数の和の構造・操作を示し証明を与えている。筆者は C_1 の生成的例にもとづく証明を与えたが，この例は 0, 2, 4, 6, 8 のそれぞれの和に対する生成的例ではない。実際，C_1 の証明は二段階に分かれており，筆者の与えた生成的例は，第一段階の「二数の和の下一桁はそれぞれの下一桁の和で求められる」という定理[6]に対するものである。そして第二段階はすべての場合の検証である。つまり，C_1 の第二段階は特別な構造がないため生成的例を与えられないのである。このことは思考実験の証明に対しても言える。もし教師が第一段階の定理を認め第二段階のみが争点であるとするならば，筆者のあげた生成的例・思考実験の証明はなにも示していないことになる。

証明が二段階に分割されることは，一段階しかない素朴な経験主義・決定実験とそれらより知的な証明との間における，証明の構造上の断絶をも示している。実際，この偶数の例に限らず，求められた値の単純な判断から数学概念の構造へ着目する移行は，子どもにとって易しくないであろう。

〇コンセプション間の距離

上述のことにも関連するが，コンセプションの性質を検討すれば，C_2, C_3 は C_1 よりも近い関係だと伺われる。実際，ふたつの部分に分ける C_{21}，2 の和に分解する C_{22}，2 を因数に持つ C_{23} は，C_2 に表出する"2"が C_3 の"2p"の"2"になるという意味で C_3 に密接に結びついている。C_{21}, C_{22}, C_{23}, C_3 間の距離は"2p" (C_3), "p + p" (C_{21}), "2 + 2 + ··· + 2 (p 項)" (C_{22}), "2p" (C_{23})との距離と考えられる。このことから，C_2 から C_3 へは学習上大きな障害はないと予想される（このことは本稿では扱わない）。反対に，C_1 は常に下一桁の数字"0, 2, 4, 6, 8"のみが重要となり，数字を全体として扱わないことから大変異なる性質を持つ。

〇コンセプションに依存する証明の種類

アプリオリ分析であげられた証明には，実際に起こりそうにないものがある。例えば，C_2 の素朴な形式主義・決定実験にもとづく証明である。なぜなら，求められた数が偶数かどうか判断する際，たいていの人は C_1 を用いるであろう（例えば 24399992 は偶数か？）。数字の下一桁の確認のみで十分であり，より容易に判断できる。逆に，ある数を C_2 で偶数であるか確認するには大変な労力を要する（C_2 の決定実験に基づいた証明を見よ！）。し

[6] この定理は代数表記で証明可能である。

たがって，C_2を用いることは偶数の構造を示そうとする意図が含まれており，生成的例など，より知的な証明を目指していると解釈できる。このことは上述のふたつの考察からも伺われる。またC_3を用いて数学的証明以外の証明の種類を生成できないことからも，それらがコンセプションに依存していることが伺われる。

○コンセプションに依存する表記法

C_1は数字に着目するため数表記を中心とするのに対し，C_2は必ずしも数字に着目しないため数表記・図表記・代数表記・日常言語表記が可能であり，C_3では代数表記のみ用いられる。この表記法がコンセプションに依存することは，前出の Artigue の言明からも伺えることであり，新しいことではない。しかし，それぞれの異なるコンセプションを用いて数学的証明を構成すると，それらに用いられる表記法は必ずしも代数表記でないことは興味深い。数学的証明を生成するためのより適切な表記は，コンセプションに依存することが伺われる。したがって，もし教師の意図が代数表記を用いた証明学習にあるのであれば，C_1は適切なコンセプションではない。

また C_{21}, C_{22}で可能であった図形表記は構造を示しやすく，生成的例を構成しやすい。この表記は偶数の和の構造を示す意図から用いられると予想される。実際，子どもが数表記での扱いにもっとも慣れている偶数という概念を図形表記で表すことには，何かしらの意図があると考えられる。

５．実験調査結果と考察

(1)　実験調査

アプリオリ分析によって予想されたことを実証するため実験調査をおこなった。筆者は，2000 年 3 月にフランス・グルノーブル郊外にある公立コレージュ（日本の小 6 から中 3 に相当）の第三級（中 3 に相当）の生徒 37 人に「ふたつの偶数の和は偶数」の証明を依頼した。証明は第四級（中 2 に相当）で本格的に扱われ，偶数概念は日仏で同様に扱われる。したがって，ここで得られた結果は，学力差などはあっても日本でも同じ結果が得られると考えられる。

(2)　結果と考察（アポステリオリ分析）

数学教授学では，実際に得られた結果をアプリオリ分析で得られた知の体系の中に位置づける分析をアポステリオリ分析と呼ぶ。

まず，表 3 に生徒の証明を実際に用いられたと思われるコンセプションとその証明の種類に分類した。C_{21}, C_3を用いた証明はなかった。分類における判断基準は，決定実験であれば，いくつかの場合より明らかに大きな数を用いている場合や「大きな数では」など明言している場合とし，生成的例にはある特定の場合に偶数の構造とその和を示そうとしている場合を，思考実験には日常言語表記で構造を示そうとしている場合である。これらは必ずしも最後まで明確に示せているとは限らない。コンセプションの「その他」には特定

のコンセプションが観察されなかったものを分類し，証明の「その他」には仮定に「偶数の和が偶数」であることを用い証明が循環しているもの，あるコンセプションを用いようとしているものの証明に遠いものを分類した。

	C_1	C_{22}	C_{23}	その他
素朴な経験主義	12			
決定実験	8			
生成的例	1	4		
思考実験			1	
数学的証明	3		2	
その他			2	4

表 3：調査結果

素朴な経験主義・決定実験にもとづいた証明は，アプリオリ分析で予想されたように C_1 のみで見られる。C_{22} を用いた証明はすべて生成的例に基づいたものである。生徒の母数が少ないが，少なくとも C_{22} と C_3 はより知的な証明に用いられ，証明の種類がコンセプションに依存していることがわかる。また，C_1 の生成的例は第一段階のみに対するもので，C_1 の思考実験とともに第二段階に対する証明はなかった。C_1 の数学的証明においても，すべて第一段階が暗示的であり，定理もしくはその証明を明確に示しているものはなかった。やはり，それらで第二段階を示すことは不可能なのである。

また表記に関しては，数表記・日常言語表記・代数表記のみが用いられ，具体物（点や小さな円）を用いた図形表記はなかった。C_1 と C_{22} で用いられた表記はすべて数表記であり，C_{23} の思考実験のみ日常言語表記が用いられ，C_{23}・その他は代数表記であった。アプリオリ分析でも伺われたが，表記がコンセプションに依存していることは明らかである。

Healy et al (2000) は，この例を用いて子どもが素朴な経験主義や決定実験にもとづいたものを証明とするコンセプションを持っているとする。そうであれば，少なくとも子どもが生成的例にもとづく証明を構成できるように，より適切な数学概念に対するコンセプション（本稿では C_2）を用いることができる状況・問題を教師が作ることが必要になる。

６．おわりに

本稿では，フランス数学教授学の研究枠組みで「ふたつの偶数の和は偶数」の例を用いてコンセプションと証明の関係を示した。第一に，一つの概念に対する多様なコンセプションによって証明の性質（すべての検証，構造）が異なり，生成できる証明の種類も異なることを示した。そして，たとえ同じ証明の種類を生成できても，より適切・効果的なコンセプションが存在し，コンセプションに依存していることを示した。つまり，これらはコンセプションに有効範囲があることを示しているのであり，数学教授学において子どもの知識をモデル化するために必要とされている理由である。

また証明学習には，より知的な証明を与えるコンセプションを用いることができる状況・問題を作ることの必要性が示唆された。このことは，実践的証明から知的証明を促す

教材開発研究において，証明の分析・研究のみではなく，そこで扱われる子どもの知識との関係を探る必要性も示唆している。

本稿では，理論枠組みとして実践的証明から知的証明への証明の特徴付けとコンセプションのみを用いたため，推測に至る過程，証明作成過程やその構造には触れることはできず，これらに生じる困難性・障害，コンセプションの働きに関する分析はおこなえなかった。これについては別の機会に述べたい。

参考文献

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 10(2/3). 241-286.

Artigue M. & Robinet J. (1982). Conceptions du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 3(1). 5-64.

Balacheff N. (1987). Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics.* 18(2). 147-176.

Balacheff N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education.* 21(4). 258-272.

Balacheff N. (1995). Conception, connaissance et concept. In: Grenier D. (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble : IMAG.

Balacheff N. (1999). Apprendre la preuve. In: Sallantin J., Szczeciniarz J.J. (eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle.* (pp.194-236). Paris : PUF.

Bessot A. (1998). Introduction à l'analyse du système didactique. *Cours de DEA de didactique des disciplines scientifiques.* Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Bessot A. & Comiti C. (1985). Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 6(2/3). 305-346.

Brousseau G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques.* 4(2). 164-198.

De Villiers M. (1990). The role and function of proof on mathematics. *Pythagoras.* 24. 17-24.

Grenier D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième.* Thèse. LSD2 - IMAG Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Healy L. & Hoyles C. (2000). A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education.* 31(4). 396-428.

宮川健 (2000). 推論構造から見た証明の特徴. 日本数学教育学会論文発表会，鳴門教育大学，283-288.