注意：本稿は草稿です．最終版は「日本数学教育学会誌『数学教育学論究』, Vol. 94, 37-68, 2009」です．

フランスを起源とする数学教授学の「学」としての性格
～わが国における「学」としての数学教育研究をめざして～

宮　川　　健

目次

I. はじめに
1. 数学教育研究のアイデンティティ

今日，数学教育に関する研究は，国際的に見ても，わが国においても，いくつもの学会が存在し，研究雑誌が発行され，博士号が授与され，形としては一つの研究領域として確立しているように思われる．しかし，平林 (2007) が指摘しているように，数学教育研究の「学」としての基盤は今日においても必ずしも堅固ではない．教育に関する研究分野では，実践と理論が頻繁に交錯し，何をもって「研究」とするのか曖昧になりがちである．「数学教育研究とは何か？」「科学的な研究とは何か？」「理論とは何か？」などの問いに答えることは必ずしも容易ではない．これらの問いは，数学教育研究もしくは数学教育研究者のアイデンティティにかかわるものであり，数学教育研究が一つの学問としてさらに発展するため（もしくは，生き残るため）には，非常に本質的な問題である．

一方，数学教育研究のアイデンティティは，わが国のみならず世界の研究者にとっても懸念事項のようである（例えば，ドイツの場合が岩崎・中野 (2006) で報告されている）．重点的に研究すべき課題に取り組む ICMI Studies においても，90 年代に「数学教育における研究とは何か，そしてその結果とは何か？」が課題として取り上げられ（第 8 課題），数学教育研究のアイデンティティについて検討されてきた．この課題の成果がまとめられた Sierpinska & Kilpatrick (Eds.) (1998) を見ると，その問題意識や方法論は多種多様であり，異論も多く，数学教育研究の統一された国際的基盤は存在しないことがわかる．さらに，この ICMI Studies の代表者の一人である Sierpinska による数学教育研究の国際比較についての論文 (Sierpinska, 2002) は，数学のある特定の問題が異なる国の数学教育研究でそれぞれいかに扱われるか風刺し（ドイツ，フランス，米国，ロシア，

ポーランド，カナダの 6 ヶ国），欧米の数学教育研究の多様性を非常にうまく示している．

さて，このように国際的には統一された基盤がない中で，わが国の数学教育研究はその基盤をいかに形成していけばよいのであろうか．

2. 本稿の目的と方法

本稿では，数学教育の一つの研究プログラムである，「フランスを起源とする数学教授学」（以下，特に断りのない限り「数学教授学」は「フランスを起源とする数学教授学」を指す）を取り上げ，その内容に踏み込んでその問題意識と方法を探る．これにより「数学教授学」の「学」としての性格を明らかにし，そこからわが国における数学教育研究の基盤形成のための指針を得たいと思う．換言すれば，「数学教授学」のアイデンティティを明確にし，それをもとにわが国の数学教育研究の基盤形成について議論する．

一般に，数学教育研究の一部分をとりあげて，それを一括りにすることは容易ではない．研究を特徴づける何か明確な理論があればまだしも，国という括り方には曖昧さが伴う．そもそも，そのようなアイデンティティの存在にさえ疑問をもつものもいるだろう．しかし，筆者は，他国の研究者の見解 (cf. Sierpinska, 2002; Gascón, 2003; Bosch & Gascón, 2006; Warfield, 2007; etc.) やこれまでの個人的な経験をもとに，「フランスを起源とする数学教授学」という括り方が妥当と考え，本稿を執筆するに至った．本稿では，主に，研究誌 *Researches en didactique des mathématiques* (Grenoble: La Pensée Sauvage Edition) や数学教授学夏期講習会（第 VII 章 3 節参照）で扱われ，フランス人研究者が中心となる研究を「数学教授学」と捉え検討を進める．

また，わが国の数学教育研究のアイデンティティに関する議論において「数学教授学」を選択した理由は，筆者がこれまでに出会った数学教育の研究プログラムの中で，今日もっとも基盤がしっかりしており，より「科学 (*science*)」としての性格を有していると感じるからである．さらに，わが国では，「数学教授学」の研究成果の一部が利用されることはあっても，それを包括的に扱ったものがこれまでにないことも理由の一つである．

しかし本稿を書くことによって，わが国でもフランス式の研究を進めるべきだと主張するわけでは決してない．わが国における「学」としての「数学教育学」のアイデンティティ探求のための議論の糧となればと考えるのである．そのため，「数学教授学」を総括的に論じたのち，わが国の「学」としての数学教育研究の方向性について考えてみたい．

3. 本稿の章構成

章構成は以下のとおりである．第 II 章で「数学教授学」を，その現状，発生の歴史的背景，名称の起源から，その意味するところ，めざすところを概説する．第 III 章では，「数学教授学」における理論の意味するところと理論化の対象を示す．特に，「数学教授学」の「学」としての最大の特徴と思われる，指導・学習にかかわる事象の理論化を試みた点と，数学の知・知識の本性 (*nature*) を分析の中心に据えた点に焦点を当てる．第 IV 章，第 V 章，第 VI 章では，事例として，「数学教授学」の中心的な理論である「教授学的状況理論」と「教授学的転置理論・人間学理論」を取り上げ，第 III 章で示された特徴がいかに表出しているか見ていく．第 VII 章では，わが国でなされてきた研究や議論を踏まえて，数学教育研究の「学」としての性格とその方法論，実際的な課題について，「数学教授学」の視点から論じ，そして，第 VIII 章を結びとする．

II. 「数学教授学」の起源

本章では，「数学教授学」への導入として，その概要を述べ，発生の歴史的背景，名称の起源から，「数学教授学」がいかなる研究領域か見ていく．

1. 「数学教授学」の概要

フランスでは，1960 年代後半より「数学教授学 (*Didactique des Mathématiques*)」[1]と呼ばれる数学教育に関する一学問領域が発展してきた．その研究目的と手法は，同じ対象（数学教育）を扱っているにもかかわらず，わが国や米国などで進められている数学教育研究 (mathematics education research) と様々な点において異なる．特に，「数学教授学」では理論面が重視され，これまで，数多くの理論が構築されてきた．主なものとしては，

教授学的状況理論 (Brousseau, 1997a), 教授学的転置理論・人間学理論 (Chevallard, 1991, 1999a), 概念フィールド理論 (Vergnaud, 1990), setting と tool/object の理論 (Douady, 1987), 記号レジスターに代表される認知記号論 (Duval, 1995) などがあげられる.

そして, 今日, この「数学教授学」の研究は, フランスのみならず, ヨーロッパ, アフリカ, 中南米, スペイン語圏, アジアの主に旧フランス語圏に広がりを見せ, 同じ問題意識に基づいた研究が広く進められている. それゆえ, 本稿の題目では,「フランスの数学教授学」ではなく,「フランスを起源とする数学教授学」を用いたのである.

一方, 英語圏では,「数学教授学」は, 一部の研究者を除き, さほど認知されてこなかった[2]. ところが, 近年,「数学教授学」の生みの親の一人であるギ・ブルソーが, 第 1 回クライン賞[3]を受賞したことにより,「数学教授学」の中心理論の一つである「教授学的状況理論」, そして「数学教授学」そのものが注目されるようになってきた. また, 以前と比べフランス人研究者が英語で国際誌に論文を書くようになってきたことも, その認知度を上げる要因になっているようである. しかしながら, 英語圏などでは,「数学教授学は非常に理論的で難しい」と言われ, 敬遠されることも多い. 例えば, 教授学的状況理論は英語訳が出版され, 国際的な知名度はあるものの, 英語圏の研究者には, 十分には理解されていないようである (cf. Warfield, 2007; Herbst & Kilpatrick, 1999; Kilpatrick, 2003).

2.「数学教授学」が生まれた契機

さて, このように理論的と言われる「数学教授学」はいかにして生まれてきたのであろうか. その歴史を振り返ってみよう.

フランスでは,「数学教授学」が生まれるまで, いわゆる数学教育の研究がなされてこなかったわけではない. APMEP（公教育数学教師協会）と呼ばれる, 就学前教育から大学教育までの数学教師の集まりが 1910 年に設立されている. この団体は, 米国で言えば, NCTM（全米数学教師協会）に相当するだろう. APMEP では, 数学教育の改善をめざして, 紀要や会報を発行するとともに, 様々な研究グループを作り, 数学の学力調査をはじめ, いくつもの課題に取り組んできた.

一方, APMEP とは別に, 数学者のコミュニティでは, 19 世紀末及び 20 世紀初頭より数学教育に関心をもつものが増えてきた. 1899 年には数学教育の研究雑誌 *L'enseignement mathématique* （数学教育）が創刊され, 1908 年に設立された ICMI の活動に多くのフランス人が積極的に参加した. 実際, この数学教育の雑誌が ICMI の公式の機関紙となったことや, 第 1 回 ICME が 1968 年にフランス・リヨンで開催されたことにも, 数学教育への関心の高さが窺われる.

しかし, 1960, 70 年代を契機に, 科学としての数学教育研究, つまり「数学教授学」台頭の機運が高まってきた. この時代は, 数学教育の現代化の時代である. 現代化の失敗により, それまでの数学者, 心理学者, 教育学者による数学の教育課程の制定における限界が見えたのである (cf. Artigue, 1998). 数学教育にかかわる人々は,「改革に改革を重ねるが, 困難性の根源に真に対応できているとは殆ど感じられない」 (Johsua & Dupin, 1993, p. 1) という印象をもち, 数学, 心理学, 教育学などの分野の知識とは異なる知識体系の必要性を痛感したのである (cf. Brousseau, 2000). そして, 現代化やそれまでの教育政策への批判のために取った手法が,「数学教授学」の科学としての確立であった. 実際, 政策批判は, イデオロギーの対立になりやすい. そこで,「数学教授学」では新たな思想や指導法, 学習理論を提案するのではなく, よりラディカルに数学の指導・学習を理解する試みに挑戦したのである[4]. したがって, 現代化への批判を契機に「数学教授学」が生まれたと言ってよいであろう. このことは, Brousseau (1997a) などにおいて, 批判がこの当時の数学教育の改革者 (G. Papy, Z. P. Dienes など) に向けられていることにも如実に表れている.

また, 次章以降に触れるが, 科学としての「数学教授学」の性格を形作る過程で, 哲学や科学認識論, フランス社会学が大きな影響を与えた. Bourdieu et al. (1968) などからもわかるように, フランスでは, 社会科学に限らず, 自然科学, 人文科学など科学としての研究領域がいかなるもので

あるか，18 世紀後半より考察されてきた．このような背景が，「数学教授学」の科学としての確立を後押ししたと言えるだろう．

なお，本稿では，わが国で用いられる「学」という語と西洋における「科学 (*science*)」という語を区別して用いる．これは，前者が開発等の技術も含めて捉えられることが多いためである．この両者の語を用いて表現すれば，本稿は，わが国の「学」としての数学教育研究の確立のために，フランスを起源とする「科学」としての「数学教授学」を参照しようとするものである．

3. ***"Didactique"*** **という名称**

次に *didactique* の語源とそれに与えられた意味から「数学教授学」のめざすところを見ていく．「教授学」という語は，フランス語女性名詞 *la didactique* を邦訳したものである[5]．*didactique* は，ギリシャ語の didaktikos を語源とするため，他の西洋言語にも発音と綴りが類似した単語が存在する（例えば，ドイツ語の didaktik やイタリア語の didattica など）．フランス語のその意味は，時代により異なる (cf. Brousseau, 2000). 17 世紀のコメニウスの『大教授学 (didactica magna)』の時代には，「教える技術 (art)」を意味し，19 世紀には，今日の英語に見られる，「教訓的な」や「啓蒙的な」，「教えたがる」など，軽蔑的な意味を含む語であった．そして今日は，教育に関することに対して非常に広い意味で用いられる．

しかし，「数学教授学」では，これらの意味で *didactique* という語を用いているわけではない．それは，（数学）知識に固有な指導と学習の有様，広くは知識の伝播 (*diffusion*) の有様を研究の対象とする一つの「科学 (*science*)」を指す語，名称として用いられる (Brousseau, 2005a). 語源の意味と異なるため，「数学教授学」が「学」として確立する過程において，*didactique* の語の利用に対する抵抗があった．特に語源の意味が指導の側面を強調している点がその大きな理由となった．抵抗の過程は，*didactique* に代替する名称をこの研究領域に付与しようとしていたことに窺える．教えることに特化せず，知識に焦点を当てるその「学」としての性格（詳しくは次章参照）から「実験認識論 (*épistémologie expérimentale*)」の名称が用いられ (Brousseau, 1997a, p. xvii)，さらに「科学」としての研究であることを示すために，*didactique* に「学・論」であることを示す "logos" を足した *didactologie* (Brousseau, 1997a, p. xvii; Chevallard, 1999b, p. 6) の名称が用いられた．しかしながら，いずれも定着せず，結局一つの専門用語として *didactique* が定着したのである．

一般の *didactique* の意味との違いは，「数学教授学」の名称が英語で紹介される際にも窺われる．他言語の didaktikos を語源にする語との区別をはかるため，近年まで英文の論文でも *didactique* の語を英語の didactic もしくは didactics に訳さず，そのまま用いることが多かった．例えばそれは，Balacheff (1990) や Brousseau (1997a)，フランス語の論文を英訳した論文集 Douady & Mercier (Eds.) (1992) などに見られる．この傾向は，フランス人研究者に限らず，他国の研究者にも見られる（e.g., Bartolini-Bussi, 1994; Herbst & Kilpatrick, 1999; Kilpatrick, 2003; Warfield, 2007）．

その一方で，Douady & Mercier (Eds.) (1992) を見ると，訳語にこだわりのないフランス人研究者もいることがわかる．個々の論文において，Mathamatics Didactics，Didactics of Mathematics など，様々な語が混在しており，訳語が統一されていない．さらに，*didactique* というフランス語を押し通し英語に訳さないことに対する批判もあった (Chevallard, 1999b). そこで近年，*didactique* の英訳には，didactics が比較的用いられるようになってきた．「数学教授学」の創始者の一人であるブルソーは，言語学等の他の学問分野と同様に複数形で didactics を使うことにすると述べている (Brousseau, 2006).

「数学教授学」においては，その学問領域を指す女性名詞の *la didactique* だけではなく，さらに男性名詞 *le didactique* の語も用いられる（英語では単数名詞で didactic）．*Le didactique* は，教授学 *la didactique* の研究対象を指す．フランス語においては，形容詞が男性名詞として用いられ，その形容されるものすべてを示すことがある．特に，人間学の下位分野である宗教人間学，政治人間学などにおいて，研究対象全般を示す語として利用されている (宗教と政治の例では，*le religeux, le* *politique*). そこで,「数学教授学」に人間学的なアプローチを用いるシュバラールが新たに男性名詞として *le didactique* を採用したのである (Chevallard, 1991, p. 206). 教授学においてこの語は，ある知識が広がる有様にかかわるすべての対象を指す．つまり，教授学 *la didactique* は,「*le didactique* を研究対象とする科学 (*science*) である」 (Chevallard, 1997; Brousseau, 1997b).

以上のように,「数学教授学」の発展の歴史には，学問領域の名称や英訳に対して多くの議論があった．これは他国における数学教育研究や「数学教授学」と研究の目的・手法において大きな違いがあったからである．次章以降，この特殊性について見ていく．

III．「数学教授学」における理論とその対象

第 II 章では,「数学教授学」が科学的な研究を進めているため,「教授」という語を嫌ったことに触れた. 数学教育の研究を科学的に進めることは，フランスでなくとも多くの国でめざされていることである．その一方で，科学的でない，学問になり得ていないとの見方は少なくない (cf. 平林, 2007)．では,「数学教授学」にとって「科学的 (*scientifique*)」とは何を意味するのであろうか．その一つの回答として,「数学教授学」における「理論」とその性質があげられる．本章では,「数学教授学」において理論がいかなる地位を持つのか，何に対する理論なのかを見ていくことにする．

１．「理論」とは

「数学教授学」において,「理論 (*théorie*)」という語が頻繁に利用される．また先にも触れたように,「数学教授学」は非常に理論的で難解だと言われ，それが敬遠される要因にもなっている．

わが国でも「学習理論」や「教授理論」,「教育理論」など教育の実践と研究において「理論」という語がしばしば用いられる．例えば，数学教育に限らずよく知られているものとして,「プログラム学習」,「問題解決学習」,「発見学習」などがある．これらは「学習理論」とも「教授理論」とも呼ばれるであろう. また,「ブルーナーの教授理論」やフロイデンタール研究所で進められている「RME 理論」など,「理論」という語が直接用いられることもある．ここで言う「理論」は，子どもが望ましい知識を獲得できるための学習や教育の規範的な方法を示している．

一方，辞書を見てみると,「理論 (theory)」の第一にあげられている意味は,「個々の事実や認識を統一的に説明することのできる普遍性をもつ体系的知識」（広辞苑第五版）である．これは，上で触れた「学習理論」の「理論」の意味とは異なる．この辞書で与えられた意味は，当然ながら規範的な側面は含まないからである. すると,「学習理論」の「理論」の意味は，参照した辞書に載る三つ目の意味「ある問題についての特定の学者の見解・学説」に近いかと思われる．

「数学教授学」においては,「理論」は上の第一の意味を指し，第三の意味には用いられない．つまり，子どもの学習が進むための適切な教授の方法を示す「理論」ではなく，数学の指導・学習における様々な事実を引き起こすメカニズムを説明, 記述できる体系的知識を「理論」と捉えている[6]. そして，「数学教授学」の第一の目的は，以下の Balacheff の言葉のように, この体系的知識つまり「理論」を構築することにある[7]．このため,「数学教授学が非常に理論的である」のは必然である．

> 「我々の目的は，数学の教授・学習にかかわる現象・過程についての知識の基本体系を構築することである」 (Balacheff, 1990, p.269)

ここで言う「知識の基本体系」とは，単なる事実の経験的な記述や因果関係の記述ではなく，それを引き起こす要因を説明することのできる「理論」を意味する．自然科学における「理論」と同様である．自然現象における古典力学の役割を例に考えるとわかりやすい．ある物体（たとえばリンゴ）が落ちたとする．この事実において，物理学者にとっての関心は，その物体の軌道を生成するメカニズム（なぜこのように落ちるのか？）にある．事実そのものは，何千年もの昔から知られてきたことであり，経験的には様々な方法で記述されてきたであろう．しかし，そのメカニズムが説明されたのは，それほど昔ではない．古典力学が一つの「理論」としてそれを説明することができるようになり（重力と質量，もしくは万有引力の法則など），この事実は，一つの物理現象（自

由落下運動）として認められるようになったのである．なお，ここでは，「事実 (fact)」と「現象 (phenomenon)」を区別している．その違いは，前者が経験的に認識されたある事象・出来事をさすのに対し，後者は理論によって認められる，事実の背後にあるものをさす (cf. Chevallard, 1989b; Margolinas, 1998; Chevallard & Jullien, 1990)．つまり，現象は理論的構成物である．

指導･学習においても自然現象と同様に考える．ある学習者が，ある数学の問いに対して，教師にとっては不可解な解答をしたとする．これは，一つの事実 (fact) である．ここでの「数学教授学」の第一の関心は，その問いに対して期待する解答を学習者から得られるような学習法や教授法を見つけることではない．その不可解な解答がなぜ，いかに生じたのか，そのメカニズムを解明することに，つまり一般に認められる事実 (fact) の中に教授学の現象 (phenomenon) を発見することに関心がある (cf. Chevallard & Jullien, 1990, p. 2)．ここで注意しなければならないことは，先に述べたように事実の単なる経験的な記述や因果関係の記述ではなく，そのメカニズムの記述こそ肝要であるという点である．ある問いをある学習者に与えたとき，期待されていない解答が得られるという事実 (fact) は，多くの教師がすでに経験的に知っているのである．

このように書くと，「数学教授学」の研究者は，教育の改善をめざしていないのではないか，との批判を受けそうである．それは半分は当を得ており，半分は正しくない．教授学研究者 (*didactician*) は教育者 (*pédagogue*) ではない (cf. Sensevy, 2002; Brousseau, 1997a, pp. 253-274)[8]．そのため，教育に対する規範的な提言は，理論の構築を目的とする数学教授学研究の範疇ではない．しかし一方で，時間はかかるかもしれないが，また遠回りになるかもしれないが，数学の指導と学習における現象の知識体系を構築することによって，教育における様々な事実を理解する道具を提供し，教育を改善しようとするのである (cf. Chevallard, 1981)．なお，数学教授学が規範的な提言をしないことは，フランスにおいて数学教育をいかに進めるべきかといった議論や検討がなされていないことを意味しない．これは，あくまで数学教授学の理論が規範的な性格をもたないことを意味し，規範的な検討や提言において数学教授学で作られた言葉や理論が用いられることもある（第 VII 章参照）．

２．理論化の対象と「自明性の錯覚」

「数学教授学」では，フランス社会学で用いられてきた「自明性の錯覚 (*l'illusion de transparence*)」[9]という語がしばしば用いられる．この言葉が，「数学教授学」の研究対象，理論化の対象をもう少し明確にしてくれる．

フランス社会学は，20 世紀初頭のその成立過程において，いかに「科学」としての研究領域となりうるかが大きな問題意識としてあった．特に人間自身が関わる物事を研究の対象とする領域においては，その物事が生じる因果関係を人間がある程度すでに把握しているため，その物事は既知の事実と考えられがちである．しかし，デュルケムをはじめとするフランス社会学者は，事実や因果関係を同定した段階では科学的にはまだ何も理解できていないとみなす．むしろ，その社会的事実が社会学者の研究対象であり，それらが生じる要因を日常の概念や言葉ではなく，外的な概念で説明する必要があるとしたのである (cf. Bourdieu et al., 1968)[10], [11]．

「自明性の錯覚」とは，この物事や社会的事実を既知のことである，もしくは解釈が容易であると信じてしまう態度を指す．当然ながら，自明と思われていることが全く明らかではないということは，社会学を始めとする社会科学・人文科学のみならず自然科学においても見られる．そこで，「数学教授学」では，その科学的基盤を築くにあたって，フランス社会学と同様の問題意識を抱いたのである (cf. Chevallard, 1992b)．つまり，数学教育に関する様々な事実や事象を既知のこと，とする態度を「自明性の錯覚」と捉えた．

数学教育に関する例をあげてみよう．たとえば新学習指導要領の実施について，この事実がいかに生じたかと問われたとする．この問いに対しては，どこの国であっても概ね，学習指導要領が出来上がるまでの過程，つまり策定委員会などの委員会やその参加者の活動・意見を時系列に描写す

ることで回答可能であろう．ここには，物事の因果関係が示されている．すると，われわれは，あたかも学習指導要領がいかなるものか理解できたように感じる．しかし，ある視点，たとえば数学知識という視点から，学習指導要領で扱われる数学知識はいかなるものであるか，と問われれば，その回答は自明ではない．学習指導要領に含まれる知識がいかなる体系をもち，それが他の数学体系といかに異なるのか．さらにその体系は人工的に作られているが，それにより数学知識はいかなる性質を帯びるようになるのか．これらの問いに答えるためには，物事が生じる因果関係を知っているだけでは不可能であろう．そこで「数学教授学」は，これらの問いを追求しうる枠組み（理論）を構築するのである．後に紹介する教授学的転置理論・人間学理論は，その枠組みの一つである．

一方，同様のことが，日常の授業においても見て取れる．「数学教授学」の創始者の一人であるブルソーは，教授学的状況理論の研究対象を，心理学と比較し，図 1 のように規定する (Brousseau, 2006, 発表資料)．心理学では，刺激というインプットに対し，心理学的な主体がある行為をアウトプットとして出すと考える．そして，このアウトプットを分析することにより，主体の中で何が起きたのか探る．主体の中身がブラックボックスである．これに対して，「数学教授学」，特に教授学的状況理論では，生徒がインプットとしてある状況に置かれ，状況が生徒の行為をアウトプットとして出すと考える．そこで，このアウトプットを分析することにより，与えられた状況において何が起きたのか探る．状況がブラックボックスとなるのである．したがって，数学教授学は，主体の内的なメカニズムを探る心理学と異なり，主体の外的な状況のメカニズムを探る社会科学と言うこともできよう．ここで指導・学習の状況が研究対象となっていることに対し，教室における教師と生徒の相互作用や学習活動は目に見えるではないか，との批判があるかもしれない．実際，教師は毎日のようにそうした状況を見ているのである．しかし，それでその状況を理解したとすることは「自明性の錯覚」であり，その構造をある焦点に絞って科学的に知ることとは異なる．つまり，「数学教授学」においては，数学知識の本性という視点から見ると，その状況はまだ何も解明されていないに等しい．

以上のように，「数学教授学」は，フランス社会学と同様に「自明性の錯覚」と格闘しながら，その研究対象の理論化を進めてきたのである．

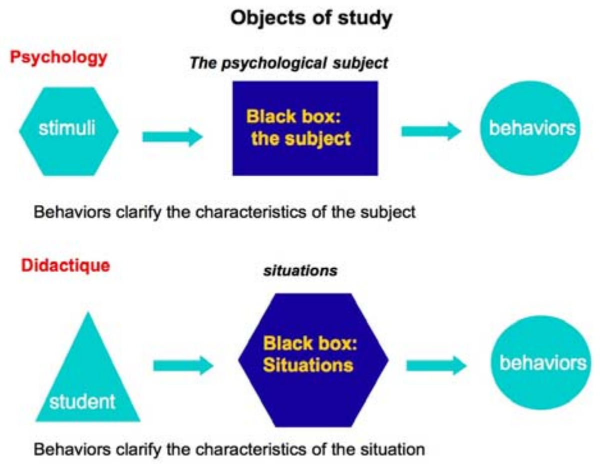

図 1：研究対象 (Brousseau, 2006, 発表資料)

３．理論化の視点：数学の知・知識の本性

理論化においては，常に視点が必要である．数学の教育という営みを対象とする研究においては，様々な視点からのアプローチが可能である．前節の指導・学習の状況の例であれば，人間の行動という視点もあれば，実践コミュニティ (community of practice) という視点もあるだろう．理論化の視点は，研究対象において解明すべきものを決定し，研究領域を特徴づける．

では，「数学教授学」における理論化の視点は何であろうか．実は，先にあげた学習指導要領と指導・学習の状況についての二つの例ですでに述べてしまった．それは，数学の知・知識[12]，その本性 (*nature*) である．数学教育の研究は，いかなるものも数学にかかわるため，数学の内容に焦点を当てることは当然のように思われるかもしれない．しかしながら，数学の知・知識そのものの性質を分析の視点とする研究は必ずしも多くはない．数学の知・知識というと，あたかも既知のもの，絶対的なものと捉えられやすい．学習指導要領であれば，指導の対象となる数学の知が列記されている．教科書を見れば，そこには数学の知が詰まっている．数学の授業で，ある数学知識が教えられ，生徒が学習している．それらの数学の知を扱って

いる教育課程制定者（数学者，数学教育者）や教師は当然のように数学知識をすでにもっており知っている，と考えるかもしれない．これは自明性の錯覚である．「数とは何か？」「図形とは何か？」「定義とは何か？」といった数学の知・知識への根本的な問いに対する解答は，まったく自明ではない (cf. Chevallard & Jullien, 1990)．さらに，教育という特殊な場に置かれた数学の知・知識の本性については，なおさらである．

「数学教授学」において構築される理論は，すべてが教育という特殊な場に置かれた数学の知の本性を知るための理論なのである．ここで本性を知るとは，数学の知・知識の異なる状態を明らかにし，ある場面におけるその状態を同定するとともに，それが生じる条件やメカニズムを明らかにすることである．そこでは，数学者が通常行なう数学的な活動とはやや異なる，数学の "認識論的" な分析が必要となる．

ここで「認識論 (*épistémologie*)」[13]という語を用いたが，この語は「数学教授学」において頻繁に用いられる．その理由は，まさにこの理論化の視点ゆえである．「実験認識論」という名を「数学教授学」の代わりに用いる試みがあったことは先に触れた．この名称は，「数学教授学」が数学の知・知識の本性を明らかにする学問であるため用いられたのである．さらに，多くの研究で最初に行なわれる，数学概念の異なる性質やその起源・発生の条件を明らかにするための「認識論的分析 (*analyse épistémologique*)」，数学概念の性質ゆえに生じる「認識論的障害 (*obstacle épistémologique*)」(Brousseau, 1997a, Ch. 2) など，「認識論」という語がしばしば用いられる．これらはいずれも，数学の知・知識の本性にかかわるものであることを示している．

この理論化の視点は，「数学教授学」を特徴づける上でもっとも重要な点である．国際的に見て，数学教育の現象の科学的な解明をめざした基礎的な研究は少なくないが，「数学教授学」は，この理論化の視点において，それらの研究とは異なる．今日，数学の知・知識の本性に焦点を当てた数学教育研究，つまり「数学教授学」の研究方法論は，「知識指向型アプローチ (knowledge-oriented approach)」 (Straesser, 1994, p. 119)，「認識論的研究プログラム (Epistemological program)」 (Gascón, 2003) などと呼ばれることもある．特に後者は，主に英語圏で進められてきた「認知的研究プログラム (Cognitive program)」と対比して命名されたものである．

Ⅳ. 教授学的状況理論

では，「数学教授学」で構築された理論が実際にいかなるものか見ていこう．まず，教授学的状況理論である (Brousseau, 1997a, 1998)[14]．この理論におけるブルソーの研究対象については先に触れた．教授学的状況理論は，名称のとおり，数学の指導・学習における数学知識の本性を「状況・場 (*situations*)」[15]という概念を通して科学的に明らかにすることを試みる．以下では，理論の中心となる三つの側面に触れ，「数学教授学」の「学」としての性格がいかに表出しているか示す．第一の側面は，指導・学習状況のモデルを構成する要素．第二は，構成要素間の関係であり，知識に大きな影響を与える「教授学的契約」．第三は，指導・学習の過程を考慮した複数の場によるモデル化である．

１．指導・学習状況の構成要素

教授学的状況理論では，指導・学習をミクロな視点からモデル化する．まず，ある理想的な簡略化された指導・学習場面を設定する．この意味を示すため，再度，物理学における「自由落下運動」の喩えを用いよう．自由落下運動のより簡略化されたモデルは，ある物体が真空中を落下する場面であろう．自由落下運動は，天体の運動や斜面を転がるおむすびにも認められる．しかし，自由落下運動の本質のみを示すといったモデルの目的からすると，いずれもノイズが多い．モデルは，理想的なもっとも簡略化されたものでなければならない．同様に，ブルソーは数学の指導・学習に関わる本質的な構成要素のみを考慮してモデルを構築する．

その出発点として，次の原理を学習の前提として採用し，学習場面をモデル化する．

「主体は矛盾や困難，不均衡を生成する環境 (*milieu*) に適応しながら学習する」(Brousseau, 1997a, p.30)

これは，ピアジェによる構成主義の考え方である．構成主義は様々に解釈されてきたが，ここでは規範的な側面を含まず，単に「学習」を定義し，教授学的状況理論における学習形態を定めている．この構成主義的な前提は，行動主義のそれとは相反し，知識を獲得するということは，学習者が「*環境* (*milieu*)」に適応（同化と調節）しながら自らの知識を構成することと考える (cf. Piaget, 1975; Balacheff, 1990, p.258)．このモデルは，学習の理想的な簡略化された場面を設定しているだけであり，実際にどのような学習形態がこの学習を引き起こすのかは示していない．「学習」の現象は，活動を中心とした数学の授業で認められるかもしれないし，ドリル学習においても認められるかもしれない．この後者のドリル学習は，わが国では研究の対象としては敬遠されるかもしれないが，そこでいかなる学習が生じるのかといった問いは「数学教授学」の研究課題の一つである．実際，教授学的状況理論を用いて宿題の演習問題を分析した研究もある(Genestoux, 2002)．

ここで，学習の場面におけるモデルつまり一つの学習状況を構成する要素は，「主体」[16]と「*環境* (*milieu*)」（以下，イタリックの*環境*は "*milieu*" を示す）[17]である．一方，教授学的状況理論は，学習のメカニズムのみを説明する理論ではなく，指導と学習の両方のメカニズムを包括的に説明する理論である．この点，ピアジェの均衡化理論とは異なる．それゆえ，ブルソーは，学習の状況にもう一つの構成要素を追加する．それは，次の教授の前提に認められる．

「教授意図のない環境 (*milieu*) は，我々が主体に獲得するよう望んでいる知識を主体に引き出させるためには，明らかに不十分である」(Brousseau, 1997a, p.30)

自明のことだが，数学教育においては，学習者により学習されることが望まれる数学知識が存在する．それは，*環境*との相互作用のみによって自然に発生するものではない．そのため，「教師」という構成要素が必要となる．

では，これら三つの構成要素間の関係はいかなるものであろうか．教師という構成要素が主体と*環境*という学習場面に組み込まれることにより，当然，主体の学習に影響を与えるであろう．その際，主体の*環境*への適応ではなく，主体の教師への適応であれば，前出の「学習の前提」の意味での学習は成立しない．すると教師が介入するにもかかわらず主体の*環境*への適応が生じる指導・学習場面としての状況が想定される．このような状況を「亜教授学的状況 (adidactical situation)」と呼び (ibid., p.30), *その際の環境を*「亜教授学的*環境*」と呼ぶ．また，「*環境*」の語を用いてこの場面を説明するなら，学習者が教師の要求ではなく，*環境*の要求として，対象となる概念との関係を形成し，その関係を改善できるような状況を示す．この状況は，以下のように図式化される．

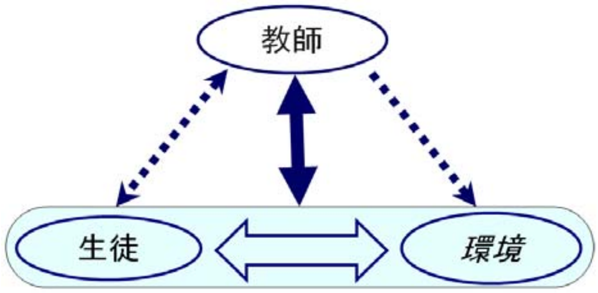

図 2：Brousseau, 1997a, p.56

図 2 は，生徒（主体）が*環境*との相互作用により自ら知識を獲得し，教師による働きかけがおこなわれているものの，生徒にとってはあたかも教師が不在であるかのような状況を示している．ここで，縦の黒い太線は，生徒と*環境*との相互作用に応じた教師の働きかけを表現し，点線は，矢印の先にあるものに対する意図 (intention) を表現している．それぞれの詳細については，後に扱う．

このように，教授学的状況理論では，状況の構成要素と学習が生じるための相互の関係を決定し，指導・学習の場面をモデル化するのである．

２．教授学的契約

教授学的状況理論では，上の三つの構成要素において，知識の性質に大きな影響を与える関係をさらに理論化する．「教授学的契約 (didactical contract)」である．これは教師と学習者が存在することによって生じる，目には見えない，当事者には制御できない関係である (cf. ibid., pp. 31-32, 227-249；宮川, 2004, 2007)．その定義は，次のように与えられる．

「それぞれのパートナー，教師と教えられる者が自らの担当する物事に責任を負い，何らかの方法で相手に対し責任を持つことを決定する関係が形成される．この相互義務のシステムは契約に似ている．ここで我々に関心があるのは，教授学的契約である．つまり，『内容』，目標となる数学知識に固有なこの契約の一部である」(Brousseau, op.cit., pp. 31-32)

簡単に言えば，「教授学的契約」とは，ある状況において，学習対象についてほぼ全てを知っている教師とまったく知らない学習者が存在し，教師が数学のある内容を教えようと意図し，学習者が教師の教えようとする内容を学習しようと意図することによって自然に生じるものである．換言すれば，教師と学習者との相互期待において生じる関係である．

図 2 では，生徒と教師との間の点線が教授学的契約の関係を示している．先に述べたように点線は，構成要素のもつ意図を示す．教師は生徒に教える意図を，生徒は教師から学ぼうという意図を相互にもつ．一方，教師は*環境*に対して亜教授学的にする意図をもつが，*環境*は意図をもたない．そのため, 図 2 では*環境*から教師への矢印がない．

この教授学的契約の関係は，前述の学習の視点からすれば，望ましくない影響を与えることがある．なぜなら，学習者と教師という非常に異なる性質をもつ者が存在するために，問題を解決する上で用いられた方法や得られた結果（つまり数学知識）の性質が変わってしまうことが生じるからである．

例えば，数学の授業では，学習者が教師の期待しているものを探る活動が頻繁に見られる．これは教授学的契約の影響であり，授業において発見すべき内容を教師が定めるから生じるのである．もっとも，指導内容を教師が定めなければ教育にならないため，ある程度避けられない現象ではある．しかしその結果，表面的には構成主義的な学習がなされていても，実は教師が主体となり，解答の妥当性が教師の権威によって保証される学習になっていることも，しばしばある．

教授学的契約の視点を取り入れることにより，指導・学習の場における数学知識の本性を問い直すことができる．特に，学習者の得た解答が教師の期待に沿ったものであった場合に，それが真に問題を解決する必要性から（つまり*環境*との相互作用から）生じたものか，それとも教師の期待しているものを探った結果なのか，議論する枠組みを与えてくれるのである．

なお，教授学的契約は，あくまで数学知識に関わる学習者と教師との相互期待の関係である．学習者と教師の間には，数学知識に関わらない「教育学的契約 (*contrat pédagogique*) 」も考えうる．しかし，教授学的状況理論の関心は，数学知識の本性の究明であり，それに固有な契約に向けられている．そのため，教育学的契約は研究の対象からはずれる．

３．様々な状況と数学知識

「教授学的状況理論」では，「状況・場 (*situations*)」がキーワードとなり，それらが主な研究対象となることに触れた．さらに第 1 節と第 2 節において，指導と学習の一般的な場面を数学知識の本性からモデル化する方法を示した. 一方, 教授学的状況理論は，フランス語で *Théorie des situations didactiques* と複数形で綴られるように，状況は単数ではなく複数である．これは，数学一般において数学知識の発生過程を概観すれば，異なる知識状態が見られ，ブルソーはそれぞれを異なる状況・場として特徴づけようとするからである (ibid., pp. 3-18)．教授学的状況理論では，異なった知識状態は，それが生成される状況・場に対応する．主なものは，以下の三つである．

〇実践の場 (situation of action)

学習者がある課題を達成するために考え，*環境*に対して働きかける場．生成される数学知識は明示的でなく暗黙的である．

〇定式化の場 (situation of formulation)

「伝達の場 (situation of communication)」とも呼ばれる．学習者が実践の場において明確ではなかった考えやストラテジー，仮説を定式化する場．生成される数学知識は定式化され，明示的になる．

〇妥当性判断の場 (situation of validation)

学習者が定式化の場において定式化されたものの有効性・妥当性を評価・検証する場．生成される数学知識は妥当性をもつ．

ここでは，それぞれの場の説明に「学習者」という語を用いたが，それは必ずしも指導・学習の場面に限ったものではない．「学習者」を「数学者」に置き換えても同様である．つまり，これらの異なる場は，数学知識の状態を一般的に特徴づけるモデルである．教授学的状況理論が議論される際に，教育の次元を含まない「数学的状況理論 (Theory of mathematical situations)」という語がしばしば用いられるのはこれゆえである (Brousseau, 2008).

一方，教育の文脈，つまり数学的状況ではなく教授学的状況においては，教師の働きかけが重要になる（教授の前提）．実際，それがなければ，それぞれの場に学習者を置くこともままならない．これらの複数の場において，学習が生じるように教師の働きかけがなされる場面は，「委譲 (devolution)」と「制度化 (institutionalisation)」の過程である．前者の「委譲」は，学習者に*環境*との相互作用を起こさせるために，つまり亜教授学的な状況を生じさせるために，ある問いや課題に対する“責任”を学習者に移す過程である．この過程では，生成される数学知識が文脈化 (contextualisation) ・人間化 (personalisation) される (cf. Brousseau, 1997a, pp. 31-35). 後者の「制度化」は，前者とは逆の性質をもつもので，得られた数学の概念や定理，定義などを脱文脈化 (decontextualisation)・脱人間化 (depersonalisation) し，より形式的な知識とする過程である．この過程は,「制度化の場 (situation of institutionalisation)」として捉えることもできる (ibid., Ch. 4).

図 2 では，委譲と制度化は，教師から生徒と*環境*との相互作用へ向けられた縦の黒い太線で表現されている．生徒と*環境*との相互作用の状態に応じて，教師の委譲と制度化がなされるのである．なお，本節であげた異なる場は，いずれも図 2 で示される指導と学習の一般的な状況の中で，数学の知識状態により特徴づけられる特殊な場である．したがって，いずれの場も図 2 のように表現できる（瞬間的に見れば，教師からの働きかけがない瞬間もあるが）．

このように，教授学的状況理論では，知識の発生過程における異なった状態の数学知識を特徴づけるため，そして数学の指導と学習の過程を数学知識の視点から特徴づけるために，状況・場を認識論的なモデルとして採用した．ここまで「状況・場」そのものの定義には触れなかったが[18]，本章で述べたその性質から，状況がある数学知識に固有なものであることがわかると思う．教授学的状況理論では，状況は数学知識の本性を示すための理論構成物であり，状況の性質を同定することによって数学知識の本性を同定するのである．この点は，授業を観察し，その過程を経験的な言葉で描写したプラグマティックなモデルとは異なる．実際，数学教育研究及びその周辺領域において，上述の異なる場と類似した授業分析の枠組みや授業における指導・学習過程の描写は少なくないが（例えば，Stigler & Hiebert (1999) の「スクリプト (script)」の概念など），これらは数学知識の状態を示すものではない．

さて，これらの異なる場は何を意味するのであろうか．教育・学習において学習者が必ず通るべき場だというのか．そうではない．教授学的状況理論は，数学の指導と学習，より広くは数学知識が伝播 (*diffusion*) する過程を説明するための道具である．規範的な側面は含まない．もちろん，学習者の数学知識が上述の過程を辿って生成されれば，教育としては望ましい形かもしれない．しかし，そもそもこの過程を辿ることが常に可能かどうかは不明である．また，それぞれの場は，前述の学習の視点からすれば亜教授学的であることが望まれる．教授学的状況理論では，すべての数学知識に対して，亜教授学的になりうる状況（「基本状況 (fundamental situation)」）が存在することを前提としている (Brousseau, 1997a, p. 30; Brousseau, 2005a). しかし，基本状況を見つけることは必ずしも容易ではなく，その教室内での実現可能性も不明である．これらは，すべて「数学教授学」の研究課題となる．

さらに，これらの道具は，古典力学が自然現象を説明する言葉を与えたのと同様に，実際の授業を数学知識の視点から説明する言葉を与えてくれる．授業における異なる過程に異なった場のラベルを貼ること，つまりある特定の場を同定することにより，その過程における知識状態を示すこと

になる．例えば，ある過程が「定式化の場」であると伝えられれば，暗黙裡に利用されていた知識が顕在化しようとしている状態であると判断できる．また，良し悪しは別として，ある授業において，ある特定の場がなかった（ある知識状態が扱われなかった）と判断されれば，その特定の場が欠落する現象がなぜ生じたのかが，更なる研究課題となる．

このように本節で示した異なる状況・場は，数学の指導と学習の過程を数学知識の視点より分析する道具となり，かつ数学教育研究の研究課題を与えてくれるのである．

４．教授学的状況理論：おわりに

第 III 章では，「数学教授学」が科学的な研究領域の構築をめざし，規範性を排除して数学の指導・学習に関する事象を理論化したこと, その際, 数学知識の本性に焦点を当てたことの二点を示した．本章では,「数学教授学」の中心理論の一つである教授学的状況理論がいかなるものか述べることにより, それらを具体的に示したつもりである．教授学的状況理論は，数学知識の本性を「状況」という概念を通してより科学的に解明しようとした．なお，本稿で紹介した理論は，教授学的状況理論のほんの一部にすぎない．この理論における他の概念やその詳細，例については，Brousseau (1997a) や, それを易しく説いた Sierpinska (1999), Warfield (2007), Bessot (2003) 等を参考にしていただきたい．また，教授学的状況理論の研究成果については,「数学教授学」の研究においていたるところに見られるものの, この理論の 30 年の歴史を振り返ってその多様な貢献をまとめた Salin et al. (Eds.) (2005) を参照していただきたい．

ここで，繰り返しになるが，教授学的状況理論は科学としての理論であり規範理論ではないことを再確認して，本章を終えたい．なぜならば，教授学的状況理論は，構成主義が規範的な学習理論として利用されるのと同様に[19]，容易に規範理論・モデルとして利用される可能性があるからである．例えば,「授業において亜教授学的状況を実現すべきだ」,「定式化の場がないから悪い授業だ」などと，教授学的状況理論で示された指導・学習過程が実現すべき「よい授業」のように扱われかねない．しかし，それは，決して，ブルソー，そして「数学教授学」の意図するところではないのである．ブルソーは，教授学的状況理論の歴史を振り返って，次のように述べている．

> 「数学教授学では，これらの［教授学的状況理論の］『モデル』は，研究の道具として，教授現象の分析と説明の一貫性を証明する手段として，本来利用されるものである．たとえ教授工学を作り上げる際においても，それらは決して再生産されるべき『手本』として提示されることはなかった」(Brousseau, 2005b, p. 56) [20]

「数学教授学」では「モデル」という語がしばしば用いられるが，これは日常言語でしばしば用いられる「模範」や「手本」を意味するのではなく，あくまで教授現象の働き方・メカニズムを明らかにし，その妥当性を示すための「モデル」，つまり「理論」とほぼ同じ意味で用いられているのである．なお，教授工学については第 VII 章で述べるため，ここでは割愛する．

V. 教授学的転置理論・人間学理論

「数学教授学」のもうひとつの中心的な理論である「教授学的転置理論 (*Théorie de la transposition didactique*)」[21] (Chevallard, 1991) は，70 年代から 80 年代にかけてシュバラールを中心に構築された理論であり，この理論に関して様々な研究がなされてきた．「教授学的転置」という語自体は，フランスの社会学者 Michel Verret によって最初に用いられた (Verret, 1975)．それを「数学教授学」の枠組みでシュバラールが大きく発展させたのである．

この理論の主目的は，教育において扱われる知そのものの性質を知ることである．しかし，教授学的状況理論とは異なるアプローチを採用する．教授学的状況理論が，状況という概念を用いて数学知識をミクロな視点から問い直したのに対し，教授学的転置理論は，数学の知をマクロな視点から問い直し，その本性を解き明かす理論の構築をめざす (cf. Chevallard, 1992a; Laborde, 2007).

以下，まず教授学的転置理論の前提となったこの理論の役割に対するシュバラールの考えを示し，そして実際に彼がいかに数学の知の本性に焦点を

当て，いかに指導・学習にかかわる事象の理論化を進めてきたか見ていく．

１．教授学的転置の前提

シュバラールは，教授学的転置理論の前提となったこの理論の役割について，次のように言及している．少々長いがここに引用する．

「教授学の研究者にとって，[教授学的転置の概念は］距離を置いて，証拠を疑い，単純な考えを破壊し，研究対象に対する油断ならない親密性を排除する道具である．つまり，認識論的警戒を実行する道具である．これは，教授学が固有の領域として自己を確立するために実行しなければならない［認識論的］断絶の道具の一つである．教授学の問題性へ知識を通して入ることが可能態を現実態に移行させるのはこのためである．つまり，教授学的転置の概念を通して，「知」が問題性を持ち，今後，（新しい，もしくは手直しされた）課題の文中に，そしてその解決の中に，一つの用語として形を持つことができるようになるのである．」(ibid., p. 15) [20]

ここに，「認識論的警戒 (*vigilance épistémologique*)」や「認識論的断絶 (*rupture épistémologique*)」という用語が出てくるが，それらは認識論や社会学，そしてしばしば「数学教授学」で用いられる語であり，科学としての研究領域を構築するために必要不可欠とみなされるものである（cf. Bachelard, 1938; Bourdieu et al., 1968）．前者は，学問の科学としての性質をコントロールし妥当性判断を行なう手段を指す．後者は，ある学問が科学として確立する際に実行すべき，前科学的思考からの断絶もしくは決別 (*rupture*) を意味する．したがってシュバラールは，常日頃から多くの人々にとって身近な，つまり前科学的思考に導きかねない「油断ならない親密性」をもつ「数学教育」を科学的に研究する枠組みとして，教授学的転置理論を導入したのである．そして，「教授学的転置の概念を通して「知」が問題性をもつ」とあるように，この理論は数学の知そのものを問題にしようとするのである．つまり，数学の知というと，あたかも既知のもの絶対的なものとして捉えられがちであるが，そのような認識は「自明性の錯覚」であるとし，その本性の解明を試みるのである．

２．知的集合体 (*institution*) と数学の知

教授学的転置理論のキーワードは *institution* の概念である．この語は非常に訳しにくい．それは，この語のフランスにおける慣用的な意味に対応する適切な日本語がないこと，さらに「数学教授学」では専門用語として特殊な意味で用いられることがその理由である．フランス語では通常，制度や機関，学校などを意味する．しかし，教授学的転置理論においては，知を扱うある特定の社会的集まりが *institution* である．一つの *institution* は数学の知の扱い方によって規定される．例えば，数学者の集まり，学習指導要領を制定する委員会，学校，教室等は，それぞれすべて異なる *institution* と捉えられる．またそれは，必ずしも目に見える集まりとは限らず，その構成員相互の関係が明確とも限らない．実際，技術者は数学の知を利用することにおいて，一つの *institution* に属する．しかし，相互に何の関係もないわが国某社の技術者も海外の某社の技術者も同じ *institution* に属すると考えることができる（一方，より局所的には別の *institution* と考えることもできる）．そこで，本稿では，*institution* が知との強い結びつきのあることを考慮し，さらに専門用語であることから日常にはあまり用いられない語として，「知的集合体」と意訳する．

知的集合体の語を用いて，シュバラールは，次のように教授学的転置理論の前提を示す．

「知は，空の状態で (in vacuo) 空の社会に存在することはない．つまり，どんな知も一つもしくはいくつかの知的集合体の中に錨を下ろしたものとして，ある与えられたときに，ある与えられた社会に現れる」(Chevallard, 1989a)

つまり，どんな知 (*savoir*) も知的集合体においてのみ，存在できる．逆に言えば，知的集合体の存在なしには，知も存在しない．この前提は，さらに，数学の知（もしくは広く知一般）の本性がそれぞれの知的集合体に応じて異なる可能性を示している．実際，ある知がある知的集合体に存在するためには，その知的集合体に固有な要求や制約に従わなければならない．この知的集合体に応じて知が異なる可能性のあることが，教授学的転

置理論の基盤になっている．こうして，教授学的転置理論では，数学の知自体を知的集合体という語で捉えなおすのである．

３．様々な知的集合体と転置の過程

前節では，数学の知の本性が知的集合体によって異なる可能性があることを述べた．では，数学の知に関していかなる知的集合体が存在するのだろうか．数学の知の扱い・操作を考えると，それぞれに対応する知的集合体を考えることができる．シュバラールは主な操作として次の 4 つをあげる (Chevallard, 1991, pp. 210-214).

生産：数学者が知を生産する操作
利用：技術者が知を道具として利用する操作
教育：教師が，数学の知を教える操作
転置：知をある知的集合体から別の知的集合体へ転置する操作

それぞれが知的集合体を構成するが，4 番目の操作が，教授学的転置理論でもっとも注目する操作である．転置先の知的集合体が教育関係のそれであるとき, その転置の操作は厳密な意味での「教授学的転置 (*transposition didactique*)」と呼ばれる (ibid., p. 214).

一方，教育に関する数学の知の転置の過程をある対象（e.g., 関数，三角形など）に対して考えれば，その過程，広い意味での教授学的転置は以下の図式で示される (ibid., p. 39).

→ 知の対象→ 教育すべき対象 → 教育の対象

ここで,「知の対象 (*objet de savoir*)」とは「学問としての知 (*savoir savant*)」となる対象である．「教育すべき対象 (*objet à enseigner*)」とは，学習指導要領や教科書などに見られる「教えるべき知 (*savoir à enseigner*)」となる対象である．そして，「教育の対象 (*objet d'enseignement*)」とは，実際に教育実践において「教えられる知 (*savoir enseigné*)」となる対象である. また,「対象 (*objet*)」という語と「知 (*savoir*)」という語が用いられているが, 多くの対象は, 知の対象となる. しかし, 知的集合体に属さない対象，つまり知の対象とならない対象も存在する (cf. Chevallard, 1992a, pp. 87-88).

なお，この図式は，数学教育における教育内容が決定される過程を時系列に描写したものではない．ある対象の属する異なる知的集合体とその知的集合体間の転置が存在することによって導かれる過程を示したものである．つまり，数学の知の扱いの視点から，その変化の過程をモデル化している．図式のそれぞれの転置は，異なる知的集合体によってなされ，数学の知の本性は，それぞれの知的集合体における制約と条件により形づくられる[22]．それぞれの過程を簡単に説明してみよう．

最初の転置（→ 知の対象）は，数学者などによる学問としての知を生産する知的集合体でなされる. この過程における制約は, Chevallard (1991) よりも第 III 章で扱った教授学的状況理論に詳しい．教授学的状況理論においても教授学的転置の過程が検討されており (Brousseau, 1997a, pp. 21-23), その制約は異なる状況からも示唆される．学問としての知として残ることが期待されるのは，ある程度無味乾燥なものである．研究において行き詰まったという歴史やある概念がなぜ生み出されたのかなどは，この知的集合体においては関心をもたれることが少なく，その多くが消去される．つまり，学問としての知の対象となるためには，前後の状況や背景から切り離す，知の脱文脈化と脱人間化という制約を受ける．

二つ目の転置（知の対象→ 教育すべき対象）は，教育に関する政策を決定する，もしくはその決定に大きな影響を与える知的集合体でなされる．この知的集合体は,「ノースフェール(*noosphère*)」[23] と呼ばれる．ここでは，厳密な意味での教授学的転置が主な仕事となる．ある学問としての知の対象が学校教育で教えるべき対象へと置き換えられる．その際，一つ目の転置の過程における制約とは異なる制約を受ける. 例えば, シュバラールは, Verret (1975) を参照し，学問としての知の範囲を限定する「脱混沌化」, 人間的な要素をさらに排除する「知の脱人間化」, 専門知の段階的な獲得を促すため，よく練られた配列に従った学習と検査計画を作成する「知の獲得の計画可能性」(Chevallard, 1991, pp. 57-62) などの制約をあげている．

三つ目の転置（教育すべき対象 → 教育の対象）は，教師がかかわる教育実践の知的集合体でなされる．シュバラールは，この過程における，時間

に対する教師と学習者の位置づけの相違による制約，知の構造に対する教師と学習者の位置づけの相違による制約を取り上げ，数学の知を分析する枠組みを提案している．これらの制約を受けた知の性質は，それぞれ「時間的素性 (*chronogenèse*)」，「位相的素性 (*topogenèse*)」と呼ばれる (ibid., pp. 71-79).

上の図式では，転置の過程があたかも線形に進むかのように解釈できる．実際，数学者が生産する学問としての知は一つの絶対的な数学の知のように示されている．しかし，それはこの図式が意図するところではない．ここでは，一つの知的集合体を非常に広く捉えているのである．より局所的な知的集合体を考えれば，異なる学問としての知や異なる教えるべき知が存在する[24]．さらに，矢印はすべて右を向いているが，教えられる知となる対象が常に同じように転置されるわけではない. 子どもの学習を容易にすると考えて作られた，学問としての知に存在せず教えるべき知に存在する対象もあろう．これらの詳細を明確にすることは，教授学的転置理論の枠組みにおける研究課題である．上の図式はあくまで転置の過程を広く捉え示したものであり，これを出発点に，具体的にある知的集合体を特定し，ある対象の異なる知的集合体における性質，数学の知の本性の解明を試みるのである．

なお，この枠組みにもとづいた研究とその研究成果は，実際に「教育すべき知」と「教えられる知」の正当性の議論のための言葉や情報を与える (cf. Chevallard, 1989b; Arsac, 1992)．例えば，「教えられる知」は正当と言えるのか，その知の元になる学問としての知とは何なのか，教育上の知と学問としての知との間にはどの程度の隔たりがあるのか，どのような制約がその隔たりを生じさせるのか，などである．さらに，この枠組みにより，それぞれの過程でいかなる数学の知の操作がなされているかを問い直すことができる．しかしながら，先にも述べたように，「数学教授学」における理論は，規範理論ではなく，あくまで記述理論である．そのため，たとえ教授学的転置理論を用いて学問としての知と教育上の知との大きな隔たりを同定したとしても，「数学教授学」の研究の範疇でその隔たりが悪いこと，すぐさま変更すべきことと判断するわけではない.「数学教授学」の研究者にとっては, そのような状態が起きていること，そして理論を用いてその要因を説明することが仕事である．その情報をもとに，実際の教育の良し悪しや指導要領の改訂等の判断を下すことは,「数学教授学」の役割ではなく，教育者や政策の策定者（ノースフェール）の仕事である. したがって，転置理論では，異なる知の本性と，それを生じさせる知的集合体における制約と条件を解明することが仕事となる.

4．教授学的転置理論から人間学理論へ

教授学的転置理論は，70 年代後半に構築され，1980 年の第一回数学教授学夏季講習会で発表された. その後，この理論は，教授 (*le didactique*) の人間学理論として発展する．シュバラールは,「数学教授学」が一つの孤立した学問ではなく，教授学 (*les didactiques*) の一つであり，そして教授学が人間の研究であることから人間学 (*anthropologie*) の領域に位置づけられるとした (Chevallard, 1991, p. 205)．では，教授学的転置理論が人間学理論としていかに発展したのか，簡単に見ていくことにする.

人間学理論は，教授学的転置理論を否定するものではない. まず 80 年代に提案された枠組みにおいて，シュバラールは，教授学の研究対象となるもの (*le didactique*) を知的集合体の視点から統一的に捉えなおす．そのために用いた方法は，知の性質・働き方をより根源的 (*primitif*) な構成要素を用いてモデル化することであった．先述の教授学的状況理論においては，状況をモデル化するために，様々な構成要素が導入された．一方，人間学理論では，「準公理的 (*quasi-axiomatique*)」(Chevallard, 1992a, p. 86) に根源的構成要素を導入し，より詳細に「対象」「人」「知的集合体」の関わり，もしくはメカニズムをモデル化する．これらの構成要素からなるモデルを用いて，教授学的転置理論で見てきた異なる知的集合体における知 (*savoir*) の働き方，さらにはより局所的な指導・学習状況まで説明するのである．これにより，教授学的状況理論で導入された「契約」や「*環境*」「状況」「学習」の概念なども，知的集合体の視点

から再定義される. 以下, その一部を簡単に示す.

まず,「知識の人間学 (*anthropologie de la connaissance*)」(ibid., pp. 85-92) と呼ばれる枠組みでモデル化を進める．モデル化の対象は，教授学的状況理論と同様，教授意図を排除した状態での「対象」「人」「知的集合体」の関係である．シュバラールは，次の根源的構成要素を設定する．

O: 対象 (*objet*)

X: 人 (*personne*)

I: 知的集合体 (*institution*)

R (X, O):対象 (O) と 人 (X) との関係

R_I (O): 対象 (O) と知的集合体 (I) との関係

ここで,「対象」とは何でも構わない (ibid., p. 86). 知的集合体もほぼ何でも構わない (ibid., p. 88). そして,「ある対象は，ある人 (X) もしくはある知的集合体 (I) が自らにとって存在するものとして認めれば, 存在する」(ibid., p. 86). したがって「対象」は，少なくともある「人」にとって存在するものすべてを含む非常に広い概念である．また，残りの二つの R (X, O) と R_I (O) はそれぞれ「人との関係 (*rapport personnel*)」「知的集合体との関係 (*rapport institutionnel*)」と呼ばれる．前者はある人がある対象をいかに認識しているか，後者はある知的集合体がその対象をいかに認識しているかを示すものである．

これらの構成要素により，様々な概念を定義することができる．例えば,「学習」は，主体と対象との関係 R (X, O) の変化により定義される．ある時間 (t) における，知的集合体 (I) に対するある「知的集合体における契約 (*contrat institutionnel*)」C_I (t) は，O が O_I (t) の元であるときに (O, R_I (O, t)) の集合として定義される．ここで，O_I (t) は，ある I におけるある時間 t に対する対象の集合である．これは，I が認識している対象のすべてが，ある時間 t において認識されるわけではないからである．したがって,「知的集合体における契約」は,「教授学的契約」と異なり，知的集合体が存在するからこそ生じる対象と知的集合体との関係として定義される．つまり，ある与えられた時間に，いくつもの対象に対して，それらがいかなる対象であるべきか，知的集合体が規定しているのである．一方,「知的集合体における*環境* (*milieu institutionnel*)」は，ある時間における安定した (O, R_I (O, t)) が形成する C_I (t) の部分集合として定義される．ここで「安定した」とは，主体にとって自明なものとして見える知的集合体との関係である．

この「知識の人間学」を基礎に，人間学は,「知識の教授人間学 (*l'anthropologie didactique de la connaissance*)」と呼ばれる理論を展開する．前述の知的集合体においては，教授意図が必ずしも含まれていなかったが，ここでは，教授意図を含む知的集合体に限定し，さらに教師と生徒の位置づけを明確に示すのである．詳細は割愛するが，この理論の主要なアイデアは常に，対象の「人との関係」と「知的集合体との関係」である．

教授学的状況理論は指導・学習の状況をモデル化した．人間学理論においても同じ対象を知的集合体の視点からモデル化している．なお，教授学的転置理論は，マクロに数学の知 (*savoir*) を捉える枠組みを示したが，人間学理論はよりミクロな個人の知識 (*connaissance*) までも捉える枠組みを示した．時間によって変わる対象，関係など，教授学的状況理論よりもさらにミクロな視点を用いていると言ってよいかもしれない．実際，状況理論は，時間に対しても，対象に対しても，分析のスケールがやや大きい．科学的な視点からすれば，シュバラールは，より根源的 (*primitif*) な概念を用いて，教授学の研究対象を知的集合体の視点から統一的に説明する，より基礎的な理論を構築したと言える．

繰り返しになるが，人間学理論は，規範理論ではない．では，それは「数学教授学」において，いかなる役割を果たすのか．教授学的状況理論と比較すれば，人間学理論は，研究の有効範囲が異なり，扱う研究対象が異なると考える．実際,「数学教授学」の研究において必ずしも常に人間学理論が必要なわけではない．ある決まった知的集合体における指導・学習を分析する上では，教授学的状況理論で十分であることが多い．しかし，知的集合体の性質を明確に考慮しなければならない場合には，人間学理論が有効であろう．例えば，異なる知的集合体が前提となる国際比較研究，異なった学年における指導内容や授業に関する研究

などの場合である．したがって，これらの「数学教授学」の二大理論は，研究の目的に応じて使い分けられ，相補うものであると考える．どちらも，指導と学習における数学の知・知識の本性を科学的に明らかにすることをめざし，一方は，数学知識を状況という視点からモデル化し，他方は，社会的に構築された数学の知をはじめ個人の数学知識をも知的集合体の視点からモデル化しているのである．

５．プラクセオロジー：知の構成

実は，人間学理論にはまだ続きがある．前述の人間学理論で扱った「人との関係」「知的集合体との関係」は，教授学的転置理論の中心となる研究対象である知 (*savoir*) の本性や知識 (*connaissance*) も含めた指導・学習にかかわることのすべてを，対象，人，知的集合体の視点から捉えなおす枠組みであった．では，教授学的転置理論において示唆された，知的集合体によって異なる数学の知の本性をいかに示すことができるであろうか．人間学理論の言葉を用いて言えば，数学の知の「知的集合体との関係」は，いかに記述できるであろうか．もちろん，それぞれの知的集合体におけるデータにもとづいて，ある対象と「知的集合体との関係」を経験的に記述もしくは羅列することはできる．しかし，それではそれぞれの関係や構造を経験的にしか示せない．より科学的な研究をめざすのであれば，知的集合体における数学的な関係や構造を，ある程度規則的，体系的に示すことが望まれる．

そこで，シュバラールは，研究の対象である知を実践的な活動の視点を取り入れ拡張し，人間学理論をさらに発展させる．知的集合体における知の構成をうまく説明する理論を構築するのである．それは，90 年代に導入された「プラクセオロジー (*praxéologie*)」の概念である (Chevallard, 1999a). プラクセオロジーは，人間の行為の背景となる知が実践的な側面 (*praxis*) と理論的な側面 (*logos*) を持つことに注目する．この理論は，近年非常に多く利用され更なる発展がみられるため，少し詳細に取り上げてみたい．まず，その前提となる原理は以下のものである．

「きちんと成し遂げられたいかなる行為も，プラクセオロジーの語で概括する唯一のモデルに包含されうる」(ibid., p. 223)

これは，ある知識の学習・指導などの行為や社会における実践活動をはじめとして，いかなる行為もプラクセオロジーという語で説明されるとするのである．そして，プラクセオロジーは以下の要素で構成されるとする．

T: 少なくとも一つのタスク (t) を含むタスクタイプ

τ: 上のタイプのタスクを成し遂げることを可能にする，ある方法もしくはテクニック

θ: テクニックを正当化し(*justifier*)，理解できるようにする (*expliquer*)，そしてさらにテクニックを生成する (*produire*) テクノロジー

Θ: 今度は，そのテクノロジーを正当化し理解できるようにするセオリー

ここで言うタスク (t) は，小さなタスク（例えば，「階段を上る」や「1 + 3 =」）から大きなタスク（例えば，「フランスに行く」や「フェルマー予想の証明」）まで，何でも構わない．あるタクスタイプに対し，その他の三つの要素が考えられ，その組 [T/τ/θ/Θ] が「プラクセオロジー」もしくは「プラクセオロジー構成 (*organisation praxéologique*)」である．前半の二つ [T/τ] は実践部分 (*praxis*) であり，通常，ノウハウ (*savoir-faire*) とみなされるものである．後半の二つ [θ/Θ] は理論部分 (*logos*) であり，通常，知 (*savoir*) とみなされるものである．この二つの部分は，ある行為において必ずしもそのすべての要素が用いられるわけではない．理論部分が空で，問題がノウハウのみで解決されることもある．

ここで，タスクタイプが一つの場合，それは「局部プラクセオロジー (*praxéologie ponctuelle*)」と呼ばれる．また，複数の局部プラクセオロジーは，セオリーとテクノロジーの共通したある「局所プラクセオロジー (*praxéologie locale*)」[$T_i/\tau_i/\theta/\Theta$] としてまとめることができる．実際，ある知的集合体におけるセオリーとテクノロジーに対し，複数のテクニックがあり，さらにそれぞれのテクニックに対し，解決することのできる複数のタスク，つまり，あるタスクタイプが考えられる．同様に，一つのセオリーに対して，複数のテクノロジーを

まとめて含む，より大局的なプラクセオロジーを考えることもできる．

さて，ここまでプラクセオロジーの構成要素を示したが，数学にはほとんど触れてこなかった．教授学的転置理論の視点からすれば，まず関心があるのは，知の本性にかかわる，異なる知的集合体における「数学的プラクセオロジー (*praxéologie mathématique*)」（「数学構成 (*organisation mathématique*)」とも呼ばれる）である．このモデルは，知的集合体の枠組みで，数学の知を実践と理論の両面から分析することを可能にする．Chevallard (1999, pp. 230-231) は，知的集合体によって数学構成が異なることを簡単な例で示している．その例を取り上げてみよう．

20 世紀中頃までのフランスの学校数学と数学教育の現代化時代の学校数学という二つの知的集合体における比例に関する数学構成について考える．問い（タスク）は，「8 つの飴が 10 フランしたときに 3 つ分の値段を求めよ」というものだとする．このタスクに対し，20 世紀中頃までは，ユークリッドの『原論』第 5 巻にみられる比例論という理論（セオリー）の範疇で，$x : 3 = 10 : 8$ において内項の積と外項の積が等しいという定理（テクノロジー）に基づき，$3 \times 10 = 8x$ と式変形し，この方程式を解くテクニックが用いられていた．一方，現代化の時代には，この比例論を含む古典的な数学が押しやられ，より複雑な数学構成が入ってくる．先のテクニックが排除されたわけではないが[25]，「線形関数 (*fonction linéaire*)」[26] の概念が導入され，次のようにタスクが扱われるようになる．$f(8) = 10$ からテクノロジーである線形性の性質 ($f(\lambda x) = \lambda f(x)$) に基づき，$f(3) = f(3/8 \times 8) = 3/8\, f(8) = 3/8 \times 10$ とする．つまり，既知の $f(8)$ を用いた式に式変形するテクニックが利用される[27]．このように，20 世紀中頃までのフランスの学校数学の知的集合体では，比例論を中心としたプラクセオロジーが見られ，現代化の学校数学の知的集合体では，比例論のプラクセオロジーと線形代数を中心としたプラクセオロジーが混在している．それぞれの知的集合体では，共通のタスクが扱われるものの，その扱いは異なるのである．

この Chevallard の例は，わが国の視点からすれば，やや特殊なものだが，プラクセオロジーの理論は，いかなる知的集合体にも適用できる．これはフランスの数学教育にのみ関わるものではない．プラクセオロジーの強みは，ある程度規則的にそれぞれの要素を決定していけるところにある．そして，知的集合体ごとに異なる数学構成，つまり数学の実践活動におけるノウハウ（実践面）と知（理論面）の構成を示すことができる．これにより，教授学的転置によって何が変化しているのか，何が保存されているのかをより明確に示し，その要因（制約と条件）を探す際の手がかりと言葉を与えてくれる．

そして，数学構成の違いが存在すれば，数学教育の実践自体，異なる構成を持つことが予想されるであろう．人間学理論では，この授業実践における構成も，プラクセオロジーの視点から理論化する．「教授構成 (*organisation didactique*)」(Chevallard, 1999, pp. 237f) と呼ばれるものである．教授構成では，ある教授システム (*système didactique*) もしくは教育システム (*système d'enseignement*)[28] において，ある数学構成 [T/τ/θ/Θ] が教師にいかに扱われ，いかに授業に導入されていくのか，その過程を様々な時 (*moments*) と数学構成との関係によりモデル化する．これは教授学的状況理論における様々な場 (*situations*) に似ているが，常にプラクセオロジーの文脈で議論される点において異なる．そしてさらに，教授構成は，人間の活動であることから，数学構成と同様にプラクセオロジー [T/τ/θ/Θ] の四つの要素で記述できる．これは，教師の用いる実践知（ノウハウ）と理論知 (*savoir*) を明らかにする試みに他ならない．詳細は割愛するが，以上のように人間学理論はプラクセオロジーという道具を用いて知的集合体における指導・学習に関する人間の知を分析する枠組みを与えたのである．

６．教授学的転置理論・人間学理論：おわりに

本章では，教授学的転置理論，及び人間学理論について簡単に紹介した．これらの理論は，これまで，様々な研究対象を提供し，数学教育研究において多くの研究成果をあげてきた. このことは，ICMI Bulletin に掲載された総説 'Twenty-five years of the didactic transposition' (Bosch & Gascón,

2006) からも窺い知ることができる．この論文では，教授学的転置理論の歴史を振り返り，教授学的転置理論・人間学理論の主たる貢献が三つにまとめられている．それらをここに紹介しよう．

- 学校数学の適切な理解のためには, 数学の再構成に関連する現象まで広く考慮する必要性があることを示したこと.
- 数学的な活動と指導の活動を記述する道具を提供したこと.
- 教室における指導と学習の条件と制約が, 必ずしも教室を起源とするものではなく, 様々なレベルで決定されることを示したこと.

一つ目は教授学的転置理論・人間学理論全般に関連するものであり，二つ目は，特にプラクセオロジーに関連するものである．そして三つ目は，本稿では扱わなかったが，数学構成や教授構成の「決定水準 (*niveaux de détermination*)」(cf. Chevallard, 2002; Barbe et al., 2005; etc.) に関連するものである．これらの貢献は，やや一般的な言葉で示されているが，教授学的転置理論・人間学理論が主張していることは，それらの理論の範疇で進められた多くの研究に裏打ちされたものである．なお，本稿では個々の研究については触れないが，それらは，この総説 (Bosch & Gascón, 2006) で取り上げられた文献や，数学教授学研究者の国際的な発表の場となる 2005 年から始まった「教授の人間学理論国際会議」[29], ヨーロッパの学会 (cf. ERME) などで発表された成果を参照していただきたい.

最後に，教授学的転置理論・人間学理論は，完成してしまった理論ではなく，今日，更なる展開を見せていることを付け加えておきたい. 中でも，Study & Research Course (フランス語では *PER, parcours d'étude et de recherche*) と呼ばれる概念は, 注目すべきものであろう. これは, 学習の過程（つまり知識形成の過程）を，教授学的状況理論に見られた特定の知識の発生という局所的な視点から捉えるのではなく，より長い期間にわたる学習の過程を人間学理論に基づいて新たに特徴づけたものである (cf. Chevallard, 2006). 今後の発展が期待される．

Ⅵ.「数学教授学」の「学」としての性格のまとめ

これまで,「フランスを起源とする数学教授学」がいかなる「学」としての性格を有しているか探ってきた．規範的な側面を排除して指導・学習の事象の理論化を進めたことと，数学の知・知識が固定された絶対的なものであるとした認識を「自明性の錯覚」として退け数学の知・知識の究明を研究の中心に置いたこと，この二点が,「数学教授学」の最大の特徴と考え，その中心的な理論である教授学的状況理論と教授学的転置理論・人間学理論の二つの理論において，それらがいかに現われているか見てきた．この二つの理論は，数学の知･知識の本性への近接の仕方は異なるものの（前者は状況，後者は知的集合体を通して)，いずれも「数学教授学」の「学」としての性格を特徴づけると思われるこの二点を備えていた．また，本稿では扱わなかったが,「数学教授学」の他の理論もほぼ同様にこの二点を備えているように見受けられる．この二点が，まさに「フランスを起源とする数学教授学」のアイデンティティであると言ってよいのではないだろうか.

そこで生じる素朴な疑問は，そうしたアイデンティティをもつ数学教育研究の価値であろう．本稿で扱った二つの理論，教授学的状況理論と教授学的転置理論は，30 年近く前に発表され，発展してきた．そして，いまだに新たな研究対象を提供し利用されているとともに，更なる発展が試みられている．また，これらの理論は，他国にも広がりを見せているのみならず，数学という枠を超えて, 教育学 (educational science) や他教科の教授学にも広がりを見せている．特に，理科教育をはじめとして，体育教育，音楽教育などにおいて,「数学教授学」と同じ問題意識にもとづいた研究の推進と理論の構築・利用が見られる．これらは，その有用性が認められた証であり,「数学教授学」の試みがある程度成功し,「数学教授学」が数学教育研究における一つの研究プログラムとして確立した証と考えてよいのではないだろうか. もちろん,「数学教授学」が，現段階で数学の指導と学習に関するいかなるメカニズムをも説明できるわけではない．解明された現象は，まだほんの一部かもしれない．しかし,「数学教授学」が，認識論的警

戒を実行し,その科学としての性質を検証しつつ,数学の指導と学習に関する知識体系を構築してきたことは確かであろう.

VII.「学」としての数学教育研究をめざして

本稿では，わが国の数学教育研究の「学」としての確立をめざして,「フランスを起源とする数学教授学」の場合に，その「学」として基盤となる性格がいかなるものか探ってきた．では，わが国の数学教育研究は，いかなる方向に進むべきであろうか．本章では，わが国でなされてきた研究や議論を踏まえて，数学教育研究の「学」としての性格とその方法論，実際的な課題について検討してみたい．これは，あくまで「数学教授学」の視点から見たもので，他の視点からすれば，また異なる見解もあるだろう．

1. 数学教育研究の「学」としての性格

わが国では，これまで数学教育の実践など，実際的な問題に結びついた研究が多かったように思う．大学等の研究者が，新たな教授法もしくは教育における規範的な側面を提言し，それが（すべてではないが）実践に導入されることが少なくなかった．さらに，研究者が学習指導要領の制定や教科書の執筆にかかわることが多いため，つまり「ノースフェール」の一員であることが多いため,実際面が常に念頭に置かれてきた．これらのことは，わが国の数学教育の発展に大きく寄与したと考えられる．少なくとも，国際比較の観点からすれば，わが国の子どもたちは学力も高く，教師の質も高く，教育の心配は比較的少ないかもしれない.しかし一方で,これまでの教育政策を見ると，他国とさほど変わらない点も見られる．改革を実行し，数年後にうまくいかないから以前の政策に近いものに戻す，時間が経つと昔に戻る．まるで「振り子」のようである．これは減衰振動のように収束するのだろうか．ここに，わが国の「学」としての数学教育研究の必要性があると考える．

一方，これまで，数学教育研究は一つの独立した研究領域というよりは,むしろ心理学や教育学,言語学，社会学，民族誌学などの隣接分野の複合分野として捉えられることが多かった．数学の指導・学習の研究には，確かにこれらの学問の対象となる側面があり，借用理論が便利であることもある．しかし,「数学教授学」の視点からすれば,「学」としての数学教育研究の確立は，それらの融合だけではなしえないだろう．数学教育における指導・学習の核心である数学の知・知識の本性が十分に考慮されることは，他のいかなる分野においてもないのである．それは，数学教育研究においてのみ，研究対象の中心となりうる．数学教育研究が堅固な基盤を築くためには，数学の知・知識の本性の究明を核にした研究・理論が必要である．

この数学教育研究もしくは数学教育学という一つの独立した研究領域確立の必要性に関しては，異論は少ないのではないだろうか．問題は，いかなる「学」としての性格をもつかである．

これまで，わが国でも数学教育研究の「学」としての性格が議論されてきた．80 年以降の比較的新しい文献を参照すると，数学教育研究を，理論と実践の統合的研究，そして規範的性格をもつものと捉えることが提案されている (cf. 平林, 1987, p. 28; 杉山, 1989; 中原, 1995, pp. 3-6).「規範」の語がしばしば用いられているが，これは数学教育研究が人間形成を追求するもの，価値判断を含むものとするからである．すなわち，数学教育研究が社会や教師集団等が同調することが期待される行動や判断の基準を生み出すと捉えていると言えよう．価値判断は，教室における教育実践や教育課程の制定，カリキュラム開発など数学教育の実際面に対処する際に必ず生じ，排除できないものである．実際，良し悪しの判断がなければ，何事も決定されない．それゆえ,「学」としての数学教育研究に「規範」の側面を含めるのである．

これは，規範性を排除し，数学の学習・指導を理解すること，つまり数学の指導・学習についての知識の基本体系もしくは理論を構築することを目的とした「数学教授学」と大きく異なる点である．ここで生じる疑問は,「学」としての数学教育研究における規範性の位置づけである．規範性を研究に含めることによって，より合理的なもしくは科学的な研究から遠のきはしないか．価値判断は時代の影響を受けやすく，時代とともに変化する.「数学教授学」の場合，数学の指導・学習にお

いて理論化される対象は，その時代の実際の数学教育の問題，つまり時代の影響を大きく受けるかもしれない．しかし,「数学教授学」で構築された理論の妥当性や整合性が別の理論や反例によって反証され棄却されることはあっても，数学教育についてのある時代の価値判断に影響を受けることは，科学としてあってはならない．「数学教授学」の視点からすれば，科学的な理論において規範性の居場所はなく，理論が「こうすべきだ」と数学教育において期待される実際の行動や判断の基準を規定することはないのである．

しかしながら，科学的な理論の言葉や研究成果をもとに,「こうした方がよい」や「こうしたことを大事にすべきだ」など数学教育における規範を議論すること，教材やカリキュラムを開発することは，可能である．それは，フランスにおいてもしばしばみられる[30]．ただ，こうした仕事を数学教育研究と捉えるか否かは難しい．「数学教授学」では，それらは研究者としてではなく，教育者もしくは技術者としての仕事と考える．もっとも，これまで「数学教授学」の理論を理解し研究の成果を開発に利用できる技術者が十分におらず，研究者が技術者の役割を果たすことも少なくなかった (Artigue, 1994, p.30)[31]．しかし，ここは混同してはならない点であり，混同すると，構築される理論にも規範が含まれ，科学的な理論から遠のく恐れがあるのである．

一方，規範性の排除は実際面を考慮に入れないことを意味するわけではない．本稿では「数学教授学」の理論のみを取り上げ，実際にそれらに関わる多くの研究は割愛したため，規範性を排除した研究が実際面には役立たない，机上の空論のような印象を与えたかもしれない．だが，この判断は正しくない.「数学教授学」は，その研究領域自体が，数学者，心理学者，教育学者らによって進められた数学教育の現代化の失敗を契機に，数学教育の改善という実際的な問題の解決をめざして生まれてきたものであり，個々の研究は，特定の数学領域の学習困難性を生じさせる（教室内外の）メカニズムの解明や，それを克服するための状況（特に基本状況）の発見，テクノロジーの数学教育への適用可能性など，様々な実際面に関わる課題に取り組んできた．これまで執筆された 300 本以上にのぼる博士論文[32]を見れば，実際面と密接に関連する研究がなされてきたことがわかる.「数学教授学」の研究自体には規範の側面が排除されているため，実際的な問題を直接的には解決しないが，その際に考慮すべき情報（なぜ，ある実際的な問題が起きているか，ある学習が生じるための条件は何かという問いへの回答）を提供してきたのである．したがって，数学教育研究から規範性を排除することと実際面を考慮しないことは，同一ではなく，実際面に寄り添ってはいるが，規範性を排除した数学教育研究は可能である．

わが国において,「学」としての数学教育研究をめざすにあたって，そして今後の数学教育の改善をはかるにあたって，数学教育を一歩下がって観察者の目から捉え直し，そこで実際に何が起きているのか知ることが重要ではないだろうか．そのとき，規範性を排除したより科学的な数学教育研究の役割は小さくないと思う．

実際，これまでに指摘された数学教育研究の問題点についても，数学教育の様々な事実・事象を科学的に説明する理論の欠如に起因するものが少なくない．例えば，数学教育学の「学」としての性格を経験学であると同時に規範学であるとする杉山は，数学教育学の問題のひとつとして様々な実践がバラバラに行なわれており，それを統一的に説明する理論に欠けることを指摘している (杉山, 1989, p. 5)．これはまさに「数学教授学」がもっているような科学的な理論の必要とされるところである．

もっともわが国には，そのような研究を進める下地があるように思う．なぜならば，わが国においても，科学的な研究の動向が見られるからである．やや古い論文になるが，塩見 (1967) の数学教育学の捉え方は，本稿で述べてきた科学としての数学教育研究の考えに近い．塩見は，数学研究との比較から，数学教育学が「数学的思考乃至は数学的活動をその根本的な研究対象とするもの」(ibid., p. 3) とし,「事象科学的な性格が強いもの」(ibid., p. 3) とする．ここで,「事象科学的な性格」とは，まさに「数学教授学」がもつ科学的な性格に対応するものであろう．

2. 研究手法・方法論

さて,「学」としての数学教育研究を推進するにあたって，いかなる手法・方法を採用すべきだろうか．ここでは，数学教育における様々な事象のメカニズムの解明をもたらす理論構築のための方法論，特に，哲学的な考察や歴史的な考察ではなく，具体的なデータ（授業データ，調査データ，教科書，学習指導要領など）を扱う研究の方法論について検討してみたい．これは，わが国でも具体的なデータを扱う研究が進められており，多くの研究で具体的なデータがその根幹となることが多いからである．そこで，以下，わが国で見られる方法論を「数学教授学」の視点から検討し，次に「数学教授学」の方法論を簡単に紹介する．

一概には言えないが，わが国では，これまで数学教育研究固有の方法論よりも,社会学や心理学,教育学など，むしろ近接領域の方法論の利用が多かったのではないだろうか．例えば，実験心理学などでしばしば用いられる実験群・統制群や検定などの統計的手法，社会学等で用いられるエスノメソドロジー，グラウンデッドセオリー，談話分析などの観察を中心においた質的な研究法などがそれである.「数学教授学」の視点からすると，そのような方法論では，数学の知・知識の本性にまで迫る理論の構築や現象の解明は難しいように思われる．その理由を，統計的手法と観察の手法，それぞれについて述べてみたい.

まず統計的手法について．一般に，数学教育研究において科学的手法を用いると言うと，統計の利用と捉えられることが少なくない．しかし，実際のところ，統計的手法が自然科学などの事象科学における理論構築にどれだけ貢献したであろうか．例えば，ニュートンの古典力学は統計によって構築されたものではない．自然科学における多くの理論は，その構築過程で統計の結果を事例として参照したり，理論の妥当性を検証するために統計を用いることはあるが，必ずしも統計的な手法が中心になって生み出されたものではない．数学教育においても，統計で得られる結果は，あくまで事実 (fact) であって，現象 (phenomenon) ではない（第 III 章 1 節参照)．統計で得られる相関関係は，メカニズムを示しているわけではない．例えば，TIMSS や OECD/PISA をはじめとする学力調査は，統計的にある傾向，つまりある事実を示すことはできても，なぜそれらが生じるのかを説明できる理論を構築することはできない．それゆえ，本稿で取り上げたような理論や現象の発見にはつながりにくい．実際，教授学的状況理論にしても，人間学理論にしても，その構築には統計的手法は用いられていない. もっとも, ここで,事実の発見が数学教育研究において不要だと主張しているわけではなく，事実は，理論の構築・検証において，常に参照されるべきものである．あくまで，事実の積み重ねだけでは，必ずしも理論の構築にはつながらないと述べているのである.

次に, 観察について. 教授学的状況理論の構築・発展において，観察は非常に大きな役割を果たしている．しかし,「数学教授学」でしばしば採用される観察は,「素朴な経験主義的な観察」とは異なる.「素朴な経験主義的な観察」とは，バッシュラールの言葉を借りれば，「科学的経験論 (*l’empirisme scientifique*)」における「現象記録法 (*phénoménographie*)」を用いた研究 (cf. Bachelard, 1970)，科学論では「素朴な帰納主義」などと呼ばれる研究 (チャルマーズ, 1985) で採用される観察を指す.「数学教授学」の視点からすれば,「素朴な経験主義的な観察」は，これも又それが理論の構築，現象の発見をもたらすことは稀である．なぜなら，一般に，観察されるものは，観察者のもつ考えや“理論”により解釈されるからである．先にも用いた喩えだが，リンゴが落ちる事象の中に，物理学者は自由落下運動という物理現象を見る．古典力学を知らない観察者がいくら“純粋無垢な目”で同じ事象を観察したとしても，そこでは観察者の経験によって既知の単なる物体の落下（「落ちた」）を見るだけである．さらに，リンゴが落ちることや月が落ちないことは何千年も観察されてきたにもかかわらず，その理論の構築がつい最近であったことを考えれば，素朴な観察は方法論として適しているとは言い難い.

なお，理論構築のための統計的手法や素朴な観察の手法への批判は，科学哲学においても，しばしばみられるものである (cf. チャルマーズ, 1985, 1 章〜3 章).

では,「数学教授学」においては，いかなる方法論が用いられるのか. 先の素朴な観察とは異なり,「現象工学 (*phénoménotechnique*)」の考えを採用する[33]．これは，フランス科学認識論においてバッシュラールが提起したもので，彼は，物理学をはじめとする自然科学の発展において「新たな現象は単に発見されるのではなく，発明され，一から十まで作り上げられる」 (Bachelard, 1970, p. 18) と考える．その際，現象は，実験の装置や手続きに依存し，様々な理論や技術を用いて実験を設定する過程で構成される．この技術・手法を「現象工学」と呼ぶのである．

この考えを「数学教授学」の方法論に適用する．現象工学の手法がもっとも明確に表れている「教授工学 (didactical engineering)」を簡単に見てみよう．この方法論は，主に教授学的状況理論を用いた教授実験や観察実験を実施する際に採用されてきたものであり,「数学教授学」の方法論の中でもっとも明確に確立されたものである．一言で言えば，教授工学とは，理論にもとづいて授業等の実験を設定し，実験結果から，理論へのフィードバックを得て，新たな理論構築の手掛かりとするものである．

なお，教授工学には，研究のためのもの (engineering for research) と開発のためのもの (engineering for production) の 2 種類が存在する (Artigue, 1992, 1994)．後者は，カリキュラムの開発や教育実践における授業の開発を目的としたものであり，前節で触れた技術者の仕事である．ここでは，前者についてのみ触れる．

研究のための教授工学は，大きく分けて 4 段階からなる (Artigue, 1992). 第 1 段階は,「事前分析」と呼ばれ，指導内容の認識論的な分析をはじめとし，多くの場合，通常の授業とその結果，子どものもつ考え，授業における制約などを分析する．第 2 段階は，授業のデザインとアプリオリ分析 (*analyse a priori*) からなる．ここでは，第 1 段階で明らかにした制約の影響を受けないが，子どもの学習に影響を与える変数を明らかにし，授業をデザインする．そして，採用した「数学教授学」の理論からすれば，いかなる現象が生じるのか明確にする．現象工学の視点からすれば，作り上げられる現象は実験の装置に隠れているため，そこで生じうる現象をすべて明らかにするのである．第 3 段階は，実際の実験であり，様々なデータを収集する．第 4 段階は，アポステリオリ分析 (*analyse a posteriori*) と評価からなる．ここでは，アプリオリ分析で予想された現象と実験結果を照らし合わせ，理論の適用範囲と限界を示す．アポステリオリ分析の結果，理論で予想された現象が全く生じなければ，他の理論を追加してアプリオリ分析に戻るなど，さらにその要因を追及することになる (cf. Bessot & Comiti, 1985).

このように,「数学教授学」では，理論と観察が密接に結びついた方法論が採用されることが多い. それは，観察が理論から分離されてしまうと，観察結果が理論の発展に貢献することは困難になるからである．なお，教授工学の手法は，これまで多くの成果をもたらしてきた．ブルソーの著名な論文 *The case of Gaël* (Brousseau & Warfield, 1999) にまとめられている実験結果は，教授学的状況理論の発展，特に教授学的契約の概念とそれにかかわる現象の発見に結びついた教授工学の事例として，よく知られたものである．

さて，わが国における「学」としての数学教育研究を確立するにあたって，いかなる方法論を採用すべきか．その判断は本稿の趣旨を超えているが，研究に「学」としての性格をもたせるためには，少なくともこうした方法論についての検討が不可欠であろう．

3. 実際的な課題：知の共有と洗練

これまでの検討を通じて,「学」としての数学教育研究確立のためにもっとも重要だと思われることは，学問の基盤となる知の確立である．それは当たり前のことだ，と言われるかもしれないが，わが国の数学教育研究において，そうした知がまだ曖昧模糊としていることも事実ではないか．本稿の冒頭で述べたように，学会の開催や研究雑誌の発行など，形としては一つの学問領域として確立しているかもしれないが，その核となる部分，つまり基盤となる知については，まだ盤石とは言えない. 特に, わが国の研究者養成課程を見ると，学ぶべき知が明確に確立しているようには感じられない．

数学教育研究の知と言った場合，様々なものが含まれる．本稿で取り上げたような，数学教育研究における明文化された理論は当然含まれるし，研究成果として得られた様々な事実や現象も含まれるであろう．さらに研究を進める上で必要となる研究の実践的な技術（具体的な分析の方法をはじめとして,研究のそれぞれの段階で必要となる，多くの場合明文化されない技術）も含まれる．シュバラールの言葉を援用すれば，数学教育研究者のプラクセオロジーを構成するものすべてが数学教育研究の知である．

知の確立にあたり，数学教育研究のコミュニティの実際的な課題として，もっとも肝要と思われることは，このコミュニティで作り出される知の共有と洗練である．わが国においては，学術雑誌の発行や研究発表会が，知の共有と洗練の中心的な役割を担っている．学術雑誌は研究成果を誰もが参照できる手段となり，さらに論文の審査過程は知の洗練の役割を果たす．このほか，共同研究の機会や先行研究にもとづいた研究なども，研究者のもつ知を共有・洗練する機会にはなっているだろう．

「数学教授学」においては，これらの通常の機会に加えて，知の共有と洗練のために非常に興味深い機会を設けているので，ここに紹介したい．それは，1980 年から隔年で開催されている「数学教授学」の夏期講習会 (*école d'été*; summer school)[34]である．夏期講習会というと，学生や教員，若手研究者を対象とした講習会が想像されがちだが[35]，これはあくまで研究者による研究者に対する夏季講習会である．参加するには審査があり，大学院生は基本的に「数学教授学」の基礎をすでに学んだ博士後期課程以降のもののみ参加可能である．講習会は学会の年会のような個々の研究者の研究発表の場ではなく，個々の研究者が新たな「数学教授学」の知を学ぶとともに，知を共有・洗練する場である．そのため，講習は主として研究者による理論面の講義とその講義に対応した演習の授業から構成される．演習では講義で学習した理論を用いて実際にデータ（プロトコル，教科書，学習指導要領など）を分析し，理論とそれを分析に適用する技術の習得をめざす．この演習は,同時に,理論自体へフィードバックを与え，理論を洗練する機会ともなる.実際,多くの場合，理論は，理論作成者の固有の背景や問題意識から作られる．それをこの場で，脱文脈化・脱人間化し（制度化の場），より堅固な理論へと洗練する．本稿で扱った理論も，この過程を経て形成され，発展してきたのである．

この夏季講習会は，知の確立のため，知の共有と洗練のために,「数学教授学」の研究者コミュニティが選択した方法の一つである．もちろん，この方法が十全だと言うわけではない．わが国にはわが国の方法があろう．しかしながら，学術雑誌や研究発表会の機会が，知の共有・洗練の役割を十分に果たしているのか，そして果たすことができるのだろうか．学術雑誌の論文は，紙面の制約もあり，研究のまとめであることが大半である．読者は，データのほんの一部しか見ることができない．さらに，研究を進める上で必要となる研究の実践的な技術は，論文から窺い知ることはほとんどできない．また，たとえ，学術雑誌の論文を通して一部の知が洗練されたとしても，非常に多くの知が人目に触れられずに残っているのではないだろうか.

VIII. おわりに

本稿は,「フランスを起源とする数学教授学」を取り上げ，その内容に踏み込んで，その問題意識と方法を探り，そこからわが国の数学教育研究の基盤形成のための指針を得ることを目的とした．

数学教育研究の「学」としての確立は，わが国の数学教育研究のアイデンティティ，つまりすべての研究者の存在価値に関わることであり，数学教育研究という領域の将来がかかっているとも言える．数学教育研究が今後も一研究領域としてあり続け，更なる発展を遂げるとともに，数学教育の改善に寄与するためにも，今後も，知の確立をはじめとして，その方法論やあるべき成果について，活発に議論されることが望まれる．

謝辞

本稿の最初の草稿は，2007 年 12 月 11 日に広島大学で開催されたセミナーでの講演原稿です. 本稿は,

その後，多くの先生方に貴重なご意見をいただき，新たな検討を加え，大幅に加筆修正しました．セミナーを開催していただいた広島大学岩崎秀樹先生をはじめ，査読者の先生方，ご意見をいただいた多くの先生方に深甚なる謝意を表します．

注

[1] 文中においてフランス語を表記する場合，他言語と区別するためイタリック体で示す（著書と雑誌の名称はこの限りではない）.

[2] フランス語の論文を英訳して出版するなどの努力も見られたが (Douady & Mercier (Eds.), 1992), 国際学術誌である *Educational Studies in Mathematics* や *For the Learning of Mathematics* などはフランス語で投稿可能であるため，フランス人はこれまでフランス語で投稿することが多かった.

[3] 国際数学連合 (IMU) の下部組織である数学教育国際委員会 (ICMI) が，2003 年より数学教育学研究の功績に対するクライン賞とフロイデンタール賞を設けた．前者は，長年数学教育学研究の発展に寄与した研究者に，後者は数学教育学のある分野において著しい業績を残した研究者に与えられる．近年さらに，シュバラールがフロイデンタール賞を受賞した.

[4] 当初，このような試みは，他国の数学教育研究者は不可能に近いと考えていたようである (Brousseau, 2006).

[5] 日本語の「教授」という語は, 英語の teaching と didactics の両方の訳語に利用されることが多い．本稿では，これらを区別するため，teaching には「指導」，didactics に関する語には「教授」を用いる.

[6] 数学教育研究において，近年「理論」に対するこの二つの意味を区別して議論するようになってきた．例えば，Silver & Herbst (2007) では，数学教育研究における理論を「規範理論 (prescriptive theory)」と「記述理論(descriptive theory)」の二つに分けている.

[7] 近年，米国においても，同様の問題意識により数学教育に関する記述理論の構築が試みられている．例えば，Schoenfeld (1998) では，理論とモデルという語の意味するところを明確にした上で，教師の意思決定 (decision making) に関する理論とモデルを提案している.

[8] 両者の役割をもつ研究者は多いが，基本的に研究と実践は区別される．そのため,「実践研究 (action research)」や「研究者としての教師」などの考え方は,「数学教授学」にはない (cf. Chevallard, 1991, p. 13; Sierpinska & Kilpatrick, 1998, pp. 537-539).

[9] 社会心理学などにおいて，自己の内面が他者に見られているように感じることを「透明性の錯覚 (illusion of transparency)」と呼び，非常に類似した英単語が用いられるが（例えば，コワルスキ＆リアリー, 2001），フランス社会学や「数学教授学」で用いられているものとは別物である.

[10] ブルデュー他 (1994) では，*l'illusion de la transparence* が「透視の幻想」と訳されているが，その意味するところから，本稿では「自明性の錯覚」を訳語として用いることにする.

[11] 「数学教授学」において様々な概念や用語が新たに導入されるのは，このためである．物理学が日常用語のみでは構築できないのと同様に，科学として「数学教授学」が成立するためには，それは不可避である.

[12] ここでは，数学の「知」と「知識」の二語を用いている．これは，フランス語には英語の "knowledge" に相当する語が *savoir* と *connaissance* の二つあり，両者を包括した全体的なものを意味したいからである．前者は，歴史的な過程により社会的に構築されたものであり，後者は, 個人的に獲得されるものである. 本稿では, 前者を「知」，後者を「知識」と呼ぶ．この区別は「数学教授学」の理論を理解する上で重要になる．知の源は当然ながら知識にあり，知識が長い時間をかけて社会に共有され知になるのである.

[13] *épistémologie* の語は，平林 (2007) で指摘されているように,「知識論」と訳したほうが適切と考える．しかし本稿では，わが国の慣習に従い,「認識論」とした．フランスにおいては，バッシュラールやポッパーの研究など，知，特に科学知の生産 (*production*) を研究対象とする領域を指す．個人の認識 (*reconnaissance* や recognition) を問題にするわけではない．一方,「数学教授学」において，シュバラールは，知の生産のみでなく，その扱いをも考慮に入れて「認識論 (*épistémologie*)」を広く捉える．「知の人間学 (*anthropologie des savoirs*)」と同義とする(Chevallard, 1991, p. 210). また，ブルソーが「数学教授学」を「実験認識論」と呼んだ理由もまた，従来の「認識論」を広く捉えた結果である.

[14] Brousseau (1997a) は，Brousseau (1998) を英訳したものであり，ほぼ同一の内容である．そこで本章では，読者が参照しやすいよう，前者を主に用いる.

[15] *situation* の訳語として,「状況」,「場」,「場面」などが考えられる．本稿では，拙稿 (2007) 同様,「状況」と「場」を *situation* の訳語として，つまり教授学的状況理論の理論的構成物として用いる．一方,「場面」は, 通常の非専門用語として用いる.

[16] 教授学的状況理論において,「学習者」は,「主体」,「生徒」など, 異なる名称で表現されてきた．近年, "*actant*" も利用される．"*actant*" とは,「モデルにおいて，状況における規則の枠組み内で合理的に経済的に*環境*に働きかける『もの』である」(Brousseau, 2002, p. 3)．また「生徒」の語を利用したくない理由は，それが日常用語であるため，モ

デルにおける働き以上の意味をもってしまうことにある．つまり，“*actant*” や「主体」がモデルの理論的構成物であるのに対し，「生徒」は理論的構成物ではない．また，「主体」よりも “*actant*” が好まれる理由は，前者が心理学の用語であり，「生徒」の語と同様に，*環境*に合理的に働きかける理論的構成物以上の意味をもってしまうからであろう．

[17] 「*環境*」は「知もしくはその側面の一つに固有な環境のみをモデル化する」(Brousseau, 1990, p.312) 枠組み，理論的構成物である．したがって，生徒を取り巻く教室などの学習環境を指すのではなく，数学の知にかかわるその一部である（宮川, 2007 等を参照）．

[18] 「状況 (*situation*)」の定義は，「ある数学知識の個々の利用に対する環境は，『状況』と呼ばれるシステムを形成するものとして考えられる」(Brousseau, 2002, p. 2) と与えられている．また，教授学的状況理論のその他の概念の定義は，Brousseau (2002) を参照していただきたい．

[19] 例えば，Simon (1995a), Steffe & D'Ambrosio (1995), Simon (1995b) では，米国で構成主義が規範的に用いられてきたことが議論されている．

[20] 引用文中の “[ ]” 内は訳者の補足である．

[21] *Transposition didactique* を「教授学的変換」と訳すこともあるが，*transformation* ではなく，*transposition* である．ある知・対象がある知的集合体 (*institution*) から別の知的集合体に変換されるのではなく，ある対象を異なる知的集合体に置き換えることにより，それを取り巻く知の体系が異なったものとなる．シュバラールは，音楽における「移調 (*transposition*)」のようなものとする (Chevallard, 1999b)．そこで，本稿では訳語として「転置」を用いる．

[22] 一般に，「集合」や「距離」などといった名称は，不変であることが多い (cf. Chevallard, 1991, pp. 20-21)．

[23] 1920 年代の Teilhard de Chardin による造語で「思惟の領域」と訳されることが多い. 本稿では，シュバラールは「パロディーとして」 (Chevallard, 1991, p. 25) この語を採用しているため，フランス語の片仮名表記にした．

[24] 例えば，シュバラールは，イギリスにおける数学とフランスにおける学問知としての数学の違いを，glide reflection の例を用いて指摘している (Chevallard, 1992b)．フランス語には，幾何学の変換として英語の glide reflection に対応する語は存在しない．わが国においても，「映進」が物理用語であることからすれば，glide reflection に対応する数学用語は存在しないのではないか．

[25] 実際，今日でも前期中等学校で扱われている．

[26] 「線形関数」とは $f(x) = ax$ と書ける関数である．線形性を備えることからこのように呼ばれる．

[27] 今日も前期中等学校第 3 級（日本の中学校第 3 学年に相当）で「線形関数」や文中のテクニックが指導される．

[28] 前者は，教師・学習者・数学の知からなるシステム．後者はそれをもう少し広く捉えたものである (cf. Chevallard, 1991, pp. 22-25; Chevallard, 1992a, pp. 92-100)．

[29] 本会議は，主にフランス語圏・スペイン語圏の研究者によって進められている（参照 http://www4.ujaen.es/~aestepa/TAD/ 最終アクセス 2009/09/15）．

[30] フランスでは，教材開発やカリキュラム開発などより実際的な問題は，数学教師や教員養成担当者 (*formateur*) を主に対象とした雑誌や機関誌で扱われる．例えば，*Bulletin APMEP* をはじめとする公教育数学教師協会の複数の機関誌，全国の IREM （数学教育研究所）による実践家と研究者を対象とした *Repère*,「数学教授学」の成果を教師や教員養成担当者等に還元することを目的とした Grenoble の IREM による *petit x*（中等教育対象），*Grand N* （初等教育対象）などである．また，「数学教授学」の研究者を対象とした主たる研究雑誌は，*Recherches en Didactique des Mathématiques* である．これは研究の基本文献として参照されるものである．

[31] 今日，「数学教授学」に関連するフランスの大学院修士課程 (Master 2) の多くには，博士前期課程に相当する研究者養成コース (M2 Recherche) と大学での教員養成を担当できるような教員養成担当者養成コース (M2 Professional) が設置されている．後者は，Artigue (1994) が危惧していた技術者の育成を目的としている．

[32] 博士論文の一覧は「数学教授学」研究協会 (ARDM) のホームページ (http://www.ardm.eu/base_de_donnees_theses 最終アクセス 2009/09/04.) で閲覧可能であり，その多くが，国立科学研究センター (CNRS) の運営する博士論文サーバー(http://tel.archives-ouvertes.fr/ 最終アクセス 2009/09/04) から無料で閲覧・入手可能である．

[33] http://www.ardm.eu/contenu/th%C3%A8me （最終アクセス 2009/09/07）もしくは 2010 年発行予定の 2009 年夏季講習会の論文集 *(Actes de la 15ème école d'été de didactique des mathématiques*), Artigue (1992, p. 43) を参照.

[34] ARDM のホームページを参照 (http://www.ardm.eu/ 最終アクセス 2009/09/08)．また，夏期講習会を英語で紹介した資料に Straesser (2008) がある．

[35] ヨーロッパ数学教育学会 (ERME) が数年前より実施している夏季講習会は，若手研究者を対象とし，研究者養成を目的とする (http://ermeweb.free.fr/ を参照．最終アクセス 2009/09/08)．

参考文献

Arsac, G. (1992). L'évolution d'une théorie en

didactique : l'exemple de la transposition didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, No. 1, 7 – 32.
Artigue, M. (1992). Didactical engineering. In R. Douady & A. Mercier (Eds), *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers* (pp. 41-65). Grenoble: La Pensée Sauvage.
Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser, B. Winkelmann (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 27-39), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Artigue, M. (1998). Research in mathematics education through the eyes of mathematicians. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 477-489). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Paris : J. Vrin. （及川馥訳『科学的精神の形成－客観的認識の精神分析のために』，国文社，1975 年）
Bachelard, G. (1970). *Etudes*. Paris : J. Vrin.（及川馥，小井戸光彦訳『エチュード 初期認識論集』，法政大学出版，1989 年）
Balacheff, N. (1990). Towards a problématique for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(4), 258 – 272.
Barbe, J., Bosch, M., Espinoza, L., & Gascon, J. (2005). Didactic Restrictions on the Teacher's Practice: The Case of Limits of Functions in Spanish High Schools. *Educational Studies in Mathematics*, 59(1-3), 235-268.
Bartolini-Bussi, M. G. (1994). Theoretical and Empirical Approaches to Classroom Interaction, In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser, B. Winkelmann (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 121-132), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Bessot, A. (2003). Une introduction à la théorie des situation didactiques. *Les cahiers du laboratoire Leibniz*, No. 91, 1-28.
Bessot A. & Comiti C. (1985). Un élargissement du champ de fonctionnement de la numération : étude didactique du processus. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 6(2/3). 305-346.
Bourdieu, P., Chamboredon, J-C, & Passeron, J-C. (1968). *Le métier de sociologue*. Paris : Mouton. （田原音和，水島和則訳『社会学者のメチエ－認識論上の前提条件』，藤原書房，1994 年）
Bosch, M. & Gascón, J. (2006). Twenty-five years of the didactic transposition. *ICMI Bulletin*, No. 58, 51-65.
Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 309-336.
Brousseau, G. (1997a). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques 1970 – 1990*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Brousseau, G. (1997b). La théorie des situations didactiques. Lecture *Doctorat honoris causa* à l'Université de Montréal. http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/TDS_Montreal.pdf 最終アクセス 2007/11/17.
Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.
Brousseau, G. (2000). *Education et didactique des mathématiques*. (http://math.unipa.it/~grim/brousseau_didact_03.pdf 最終アクセス 2009/09/03)
Brousseau, G. (2002). *Glossaire de quelaues concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques.* (http://pagesperso-orange.fr/daest/guy-brousseau/textes/Glossaire_Brousseau.pdf 最終アクセス 2007/11/17)
Brousseau, G. (2005a). The Study of the Didactical Conditions of School Learning in Mathematics. in M.H.G. Hoffmann, J. Lenhard and F. Seeger (eds.) *Activity and Sign Grounding Mathematics Education*. Dordrecht: Springer.
Brousseau, G. (2005b). Réponses écrites. In P. Clanché, M.-H. Salin; B. & Sarrazy (Eds.) *Sur la théorie des situations didactiques.* (pp. 48-80). Grenoble: La Pensée Sauvage.
Brousseau, G. (2006). Mathematics, didactical engineering and observation. In J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká & N. Stehlíková, (Eds.) *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 1 (pp. 3-18). Prague: PME. （発表資料は以下参照．http://www.math.washington.edu/~warfield/Didactique.html 最終アクセス 2007/11/16）
Brousseau, G. (2008). Research in mathematics education. In M. Niss (Ed.) *ICME-10 Proceedings* (pp. 244-254). Denmark: Roskilde University.
Brousseau, G. & Warfield, V. M. (1999). The case of Gaël. *Journal of Mathematical Behavior*, 18 (1), 7-52.
Chevallard, Y. (1981). The didactics of mathematics: its problematic and related research. *Recherches en didactique des mathématiques*, 2(1), 146-158.
Chevallard, Y. (1989a). Le concept de rapport au savoir – Rapport personnel, rapport institutionnel, rapport official. *Séminaire de didactique des mathématiques et de l'informatique*, No. 108, 211 – 235, IMAG, Grenoble.
Chevallard, Y. (1989b). On didactic transposition theory: some introductory notes. In *Proceedings of International Symposium on Selected Domains of Research and Development in Mathematics Education* (pp. 51-62), Bratislava.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage (1st edition: 1985).

Chevallard, Y. (1992a). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 12, No. 1, 73-112.

Chevallard, Y. (1992b). A theoretical approach to curricula. *Journal für Mathematikdidaktik*, 13(2/3), 215-230.

Chevallard, Y. (1997). Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission : un point de vue didactique. *Skholê*, no 7, 45-64.

Chevallard, Y. (1999a). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 19, No. 2, 221-266.

Chevallard, Y. (1999b). Didactique? ~~Is it a pleasantrie?~~ You must be joking! A critical comment on terminology. *Instructional Science*, 27(1/2), 5-7.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3 Ecologie et régulation. In J.-L. Dorier et al. (Eds.) *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 41-56), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. In Bosch, M. (Ed.), *Proceedings of the 4th CERME* (pp. 21-30), Barcelona: FUNDEMI IQS.

Chevallard, Y. & Jullien, M. (1990). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège : première partie. *Petit x*, no.27, 41-76.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et Dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 7, No. 2, 5-32.

Douady, R. & Mercier, A. (Eds) (1992). *Research in Didactique of Mathematics: Selected papers*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine*. Bern: Peter Lang.

Gascón, J. (2003). From the Cognitive Program to the Epistemological Program in didactics of mathematics. Two incommensurable scientific research programs? *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 44–55.

Genestoux, F. (2002). Les assortiments didactiques. In J.-L. Dorier et al. (Eds.) *Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (pp. 177-186), Grenoble : La Pensée Sauvage.

Herbst, P. & Kilpatrick, J. (1999). Pour lire Brousseau. *For the Learning of Mathematics*, 19(1), 3-10.

Johsua, S. & Dupin, J-J. (1993). *Introduction à la didactique des sciences et des mathématiques*. Paris : PUF.

Kilpatrick, J. (2003). Twenty years of French didactique viewed from the United States. *For the Learning of Mathematics*, 23(2), 23-27.

Laborde, C. (2007). Towards theoretical foundations of mathematics education. *ZDM*, 39 (1-2), 137-144.

Margolinas C. (1998). Relations between the theoretical field and the practical field in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 351-356). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives*. Paris : PUF.

Salin, M.-H., Clanché, P., & Sarrazy, B. (Eds.) (2005). *Sur la théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, 4 (1), 1-94.

Sensevy, G. (2002). Pour une didactique des Arts et Créations: Introduction à l'approche didactique, *Le nouvel éducateur*. No. 141, 30-35.

Sierpinska, A. (1999). *Lecture notes: Theory of Didactic Situations*. (http://alcor.concordia.ca/~sierp/TDS.html, 最終アクセス2007/11/23)

Sierpinska, A. (2002). Perspectives sur les recherches en didactique des mathématiques. *Zentralblatt fuer Didaktik der Mathematik*, 34(4), 164-174.（英語版は以下のURLにて入手可能：http://www.asjdomain.ca/DIDACTEA-English.pdf 最終アクセス 2009/09/01）

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (Eds.) (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sierpinska, A. & Kilpatrick, J. (1998). Continuing the search. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity* (pp. 527-548). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Silver, E. & Herbst, P. (2007). Theory in mathematics education scholarship. In F. Lester (Ed.). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 39-67, Reston: NCTM.

Simon, M. A. (1995a). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Reserch in Mathematics Education*, 26 (2), 114-145.

Simon, M.A. (1995b). Elaborating models of mathematics teaching: A response to Steffe and D'Ambrosio. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 160-162.

Steffe, L., & D'Ambrosio, B. (1995). Toward a working model of constructivist teaching: a reaction to Simon. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (2), 146-159.

Stigler, J. & Hiebert, J. (1999). *Teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Free Press.

Straesser, R. (1994). Introduction to chapter 3: Interaction in the classroom. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Straesser, B. Winkelmann (Eds.) *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*,

117-120, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
Straesser, R. (2008). Review of the proceedings of the 2001, 2003 and 2005 French summer schools in Didactics of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 69 (3), 277-281.
Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques,* 10(2), 133-170.
Verret, M. (1975). *Le temps des études*. Paris : Librarie Honoré Champion.
Warfield, V. M. (2007). *Invitation to didactique*. USA: Xlibris.
岩崎秀樹，中野俊幸 (2006). 「学としての数学教育研究の展開」. 日本数学教育学会誌『数学教育学論究』. Vol. 85, 3-21.
塩見健之祐 (1967). 「数学教育研究の性格と領域に関する考察—数学教育学の構想—」, 日本数学教育学会『数学教育学論究』. Vol. 14, 1-9.
杉山吉茂 (1989). 「数学教育学の学問的性格について」, 学芸大数学教育研究，第 1 号，1-7.
チャルマーズ, A.F. (1985). 『科学論の展開：科学と呼ばれているのは何なのか？』(高田紀代志，佐野正博訳)，恒星社厚生閣.
中原忠男 (1995). 『算数・数学教育学における構成的アプローチの研究』, 聖文社.
平林一榮 (1987). 『数学教育の活動主義的展開』, 東洋館出版社.
平林一榮 (2007). 「数学教育学の居場所 (niche): 新しい認識論の視点から」. 日本数学教育学会『数学教育学論究』. Vol. 88, 39-47.
宮川健 (2004). 「フランス算数教育研究から見た『自ら考え，自ら学ぶ』こと」. 新しい算数研究. No.402, 7 月号，pp. 38-40.
宮川健 (2007). 「関数グラフソフトを用いた指導・学習過程の分析 ～教授学的状況理論の視点から～」. 日本数学教育学会誌. Vol. 89, No.1, 2-12.
コワルスキ＆リアリー (2001). 『臨床社会心理学の進歩－実りあるインターフェイスをめざして』(安藤清志，丹野義彦訳). 北大路書房.