UNIVERSITE JOSEPH FOURIER
Science. Technologie. Santé

THÈSE

Présenté par

Takeshi MIYAKAWA

Pour obtenir le titre de

Docteur de l'Université Joseph Fourier – Grenoble 1

(arrêtés ministériels du 5 juillet 1984 et du 30 mars 1992)

Spécialité : **Didactique des Mathématiques**

Ecole doctorale "Mathématiques, Sciences et Technologies de l'Information, Informatique"

Une étude du rapport entre connaissance et preuve : le cas de la notion de symétrie orthogonale

Soutenue publiquement le 19 décembre 2005
devant le jury composé de

Jean-François **NICAUD**, *Professeur à l'Université Joseph Fourier, Président*
Maria Alessandra **MARIOTTI**, *Professeur à l'Université de Sienne, Rapporteur*
Claire **MARGOLINAS**, *Maître de conférence à l'INRP, Rapporteur*
Nicolas **BALACHEFF**, *Directeur de Recherche au CNRS, Directeur de thèse*
Denise **GRENIER**, *Maître de conférence à l'Université Joseph Fourier*
Masami **ISODA**, *Associate Professor à l'Université de Tsukuba*

Thèse préparée au sein du Laboratoire LEIBNIZ – IMAG (France)

Table des Matières

Chapitre I

INTRODUCTION

1 PROBLEMATIQUE DE RECHERCHE

La notion de démonstration occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques, non seulement en France mais aussi dans d'autres pays[1]. Par exemple, le programme de l'enseignement des mathématiques du collège en France explicite pour l'un de ses objets l'apprentissage progressif de la démonstration (Programme du collège 1996 et aussi du 2005). De même, au Japon la démonstration est abordée à partir de l'enseignement secondaire inférieurs (qui correspond trois dernières années du collège en France), alors que les notions abordées avec elle – les critères de congruence des triangles sont principalement mis en œuvre – sont différentes en géométrie. Etant donné que la démonstration est un moyen de la validation en mathématiques, son apprentissage envisage d'acquérir le niveau de validité mathématique qui ne correspond pas forcément à celle de la vie quotidienne.

Dans le domaine des recherches en didactique des mathématiques, la notion de preuve ou la notion de démonstration occupe aussi une place importante. C'est dû à sa difficulté d'apprentissage qui est souvent rencontrée par les élèves au collège. Beaucoup de travaux ont été effectués jusqu'aujourd'hui sur l'apprentissage et l'enseignement de la preuve[2].

Le travail que nous présenterons dans ce manuscrit s'inscrit dans la problématique de la

[1] L'enseignement de la preuve aux Etats-Unis est un peu particulier. *NCTM Standards* qui correspond sans contraint juridique au programme supprime la preuve dans sa publication l'année 1989 (*Curriculum Evaluation Standards For School Mathematics*). Or, elle est reprise dans sa publication l'année 2000 (*Principle and Standards for School Mathematics*).

[2] Voir le site web *La lettre de la preuve* (http://www.lettredelapreuve.it/) qui concerne la recherche dans ce domaine. Nicolas Balacheff en a été l'initiateur en 1997.

preuve. Notre point de départ est une considération sur les difficultés chez les élèves qu'ils proviennent non seulement de la nature de la preuve, mais aussi de la nature de la connaissance sur une notion mathématique abordée au cours de la construction d'une preuve. Ce deuxième point concernant la connaissance est important, parce que la démonstration n'est pas établie simplement par l'assemblage d'énoncés explicitement donnés, mais certains énoncés sont produits et leur validité est établie dans le processus de preuve en s'appuyant sur la connaissance d'une notion abordée. Nous considérons que la connaissance et la preuve sont en relation étroite. Les travaux de recherches remarquent cette relation. Balacheff remarque le rapport entre « nature de conceptions » mobilisée dans la preuve, « formulation » du niveau langagier et « validation » (1987, p.160). L'apprentissage et l'enseignement de la preuve envisagent non seulement l'acquisition du niveau de validité mathématique ou de la connaissance sur la démonstration, mais aussi de la connaissance engagée dans la preuve, comme Balacheff l'affirme « Apprendre la preuve en mathématiques est apprendre les mathématiques » (1999, p.233). De plus, la formalisation d'une connaissance est de temps en temps remarquée comme l'un des rôles joués par la démonstration (cf. Hanna, 2000). En particulier, l'apprentissage de la géométrie est très souvent avancé en vue de l'apprentissage de la démonstration ou au contraire l'apprentissage de la démonstration en vue de l'apprentissage de la géométrie. En effet, la géométrie est en premier lieu introduite dans l'enseignement scolaire dans le contexte de la vie courante, et au fur et à mesure, elle passe à la géométrie théorique qui exige la validité mathématique.

Or, la forme finale de démonstration formelle et établie occulte très souvent le processus de résolution – la validation d'un énoncé – dans lequel est investie la connaissance sur des objets mathématiques en jeu. Notre intérêt est centré sur la spécification de la connaissance engagée dans la preuve. La première question générale qui se pose est ainsi :

Q1. *Quelle connaissance ou quel aspect de la connaissance sur un objet mathématique est mobilisé par les élèves lors de la construction d'une preuve ? Quel rapport y a-t-il entre la connaissance et la preuve ?*

Certains travaux de recherches abordent cette question avec la notion d'« argumentation » qui est investie dans la phase de conjecture ou de recherche d'arguments[3]. C'est dans cette phase de résolution que la connaissance sur la notion abordée joue un rôle crucial. Par exemple, à partir d'une analyse fonctionnelle et d'une analyse structurelle de l'argumentation et de la démonstration, Duval (1991 ; 1992 ; 1995) a mis en évidence la distance fonctionnelle et structurelle de ces deux activités par rapport à la connaissance engagée. Du côté fonctionnel, l'argumentation est effectuée selon la valeur épistémique et le contenu d'une proposition, alors que la démonstration doit suivre la valeur de vérité et le statut d'une proposition. Du

[3] La notion d'argumentation est abordée dans le Chapitre II.

côté structurel, la démonstration peut être décrite par une structure ternaire – donnée, conclusion et énoncé-tiers –, alors que les inférences dans l'argumentation sont reliées par le contenu. Par ailleurs, Pedemonte (2002) montre, du point de vue du système de référence mis en œuvre et des niveaux de validité, l'écart entre l'argumentation qui se réfère à la conception et la démonstration qui se réfère à la théorie mathématique. Autrement dit, un aspect de la connaissance engagée dans la démonstration dispose d'un caractère théorique qui n'est pas nécessairement repéré dans l'argumentation.

Notre intérêt porte sur une étude du rapport entre la preuve et la connaissance d'une notion précise. Les travaux effectués sur le rapport entre argumentation et démonstration n'abordent pas explicitement l'effet de la connaissance mise en œuvre dans la résolution de problèmes usuels à part la preuve sur la construction d'une preuve. Dans la plupart des cas, la connaissance d'une notion mathématique est acquise dans un contexte autre que la preuve. C'est cet état de connaissance qui sera investi dans l'argumentation ou la preuve.

Nous avons ainsi choisi une notion mathématique, la symétrie orthogonale. Ce choix est retenu par deux raisons. Premièrement, cette notion qui est abordé depuis l'école primaire et qui occupe une place important dans l'enseignement secondaire en France s'appuie souvent sur le pliage ou l'effet du miroir ayant la validité plutôt pratique que théorique. Il serait donc intéressant de caractériser le fonctionnement des connaissances acquises avec la validité pratique dans la situation de preuve qui exige la validité théorique. Deuxièmement, c'est en raison de peu de recherches menées sur la preuve à propos de la notion de symétrie orthogonale. Signalons cependant que nombreuses recherches ont été réalisées à propos de la construction de figures symétriques. De plus, l'enseignement de la symétrie orthogonale est très souvent traité dans le contexte de construction géométrique et de reconnaissance des configurations. Les travaux de recherches effectués à ce propos nous faciliteront une modélisation des connaissances mobilisées dans la preuve en prenant pour référence celles déjà identifiées pour la construction ou la reconnaissance.

La question de départ présentée plus haut peut être précisée avec la notion de symétrie orthogonale et avec les activités spécifiques.

Q2. *Quelle connaissance ou quel aspect de la connaissance sur la symétrie orthogonale est mobilisé par les élèves lors de la construction d'une preuve ?*

Q3. *Quelles différences de connaissance peuvent être trouvées dans la construction d'une preuve et dans la construction géométrique et la reconnaissance de la symétrie orthogonale ?*

Notre travail porte ainsi sur l'enseignement et l'apprentissage de la preuve en mathématiques ainsi que sur la notion de symétrie orthogonale, en particulier la construction géométrique et la reconnaissance de figures symétriques.

Dans le domaine de la géométrie en didactique des mathématiques, une distinction entre la géométrie pratique ou intuitive et la géométrie théorique ou déductive a été prise en compte (cf. Balacheff, 1999 ; Mariotti, 1999). La première recourt aux « faits » et la manipulation des objets réels ou graphiques. La seconde recourt aux énoncés ou théorèmes et le raisonnement déductif sur la figure géométrique. Cette distinction se trouve aussi entre dessin et figure géométrique (Laborde & Capponi, 1994 ; Parszyz, 1999). La construction géométrique ayant l'objectif de la réalisation d'un objet réel est de temps en temps placée au côté de la géométrie pratique. Or, les travaux menés par Mariotti (1997 ; 1999 ; 2000) cherchent dans le problème de construction le passage d'un niveau pragmatique à un niveau théorique : le moyen pour faire évoluer le sens empirique de la construction géométrique vers le sens théorique. Ses travaux sont effectués dans le contexte « *Comment traiter la relation délicate entre la base des connaissances géométriques intuitives des élèves et une nouvelle approche à des connaissances selon une perspective théorique* » (Mariotti, 1999, p.116). Elle remarque que l'idée de la construction géométrique selon qu'elle émerge des activités de la classe fournit la clef d'accès à l'idée de théorème (Mariotti et al, 1997). L'hypothèse sur laquelle elle repose est « *l'évolution du sens du problème de la construction représente un point de départ efficace pour introduire les élèves à la géométrie comme un système théorique* » (Mariotti, 1999, p.116). En effet, dans la construction géométrique, l'utilisation d'instrument repose sur un système de référence théorique dans un cadre théorique et axiomatique bien précis. C'est de cette façon qu'une construction géométrique prend l'aspect d'un problème géométrique. L'approche qu'elle a trouvée afin de développer la signification de justification d'empirique à théorique s'appuie sur deux notions clefs : l'environnement de Cabri et la discussion mathématique. Nous ne précisons pas ces notions ici. Dans ce manuscrit, nous essayons de mettre en évidence la distance effective chez les élèves entre la construction et la géométrie théorique à partir de la spécification des connaissances d'une notion précise (symétrie orthogonale) engagées dans la résolution de deux types de problèmes différents.

2 METHODOLOGIE

Pour répondre aux questions décrites ci-dessus, il faut trouver un moyen qui permette de modéliser la connaissance à la fois dans la construction d'une preuve et dans la résolution des autres types de problèmes. La méthodologie adoptée pour notre travail est en premier lieu de développer une méthode de la modélisation de connaissance dans la preuve, à partir de l'analyse de la nature du raisonnement, puis, d'appliquer à un objet mathématique précis (la symétrie orthogonale) dans plusieurs contextes de problèmes (construction, reconnaissance et preuve). Cette méthode doit être un outil qui permette de comparer la connaissance dans la preuve et dans la résolution de construction géométrique et de reconnaissance. Cela nous permettra, d'une part, de dégager la nature de la connaissance mobilisée par les élèves, non seulement dans le contexte de la preuve, mais aussi dans d'autres contextes, ainsi que de mettre en évidence comment la connaissance fonctionne dans la construction d'une preuve, en vue de l'amélioration de l'apprentissage et de l'enseignement de la preuve.

Avant d'analyser effectivement les connaissances chez des élèves à partir des produits expérimentaux, nous présentons trois chapitres ayant les objectifs suivants :

1) Développer une méthode de la modélisation de connaissance appliquée à l'analyse de connaissances dans les activités autour de la preuve tels que raisonnement, argumentation, démonstration. Nous avons choisi comme modèle de connaissance le modèle cK¢. Pour l'analyse de la preuve, le modèle de Toulmin et les résultats de recherche de Duval sont principalement mis en œuvre. Cette méthode permettra de préciser les questions décrites ci-dessus (Chapitre II) ;

2) Mettre en évidence les connaissances de symétrie orthogonale hors du contexte de preuve à partir des trois points de vue suivant : mathématiques, enseignement scolaires et résultats de travaux effectués jusqu'aujourd'hui en didactique des mathématiques (Chapitre III) ;

3) Mettre en évidence théoriquement les connaissances de la symétrie orthogonale du point de vue de la problématique de la preuve, en employant la méthode développée. C'est une analyse a priori des problèmes de la symétrie orthogonale. Tous les types de problèmes usuels apparus dans les manuels scolaires sont analysés. Cela nous permet d'anticiper la nature et le fonctionnement de la connaissance dans différents types de problèmes (Chapitre IV).

Ensuite, les expérimentations seront proposées. La première expérimentation sera conduite avec l'objectif de recueillir suffisamment de données pour la première analyse tentative de connaissances dans la preuve (Chapitre V). L'analyse porte sur les preuves écrites. Nous espérons que le résultat de la première expérimentation permet de mieux poser les problèmes dans la seconde expérimentation afin d'obtenir les éléments de réponse aux questions décrites ci-dessus. Enfin, la seconde expérimentation sera conduite avec l'objectif d'analyser le rapport entre la connaissance engagée dans la preuve et la connaissance dans la résolution de construction géométrique et reconnaissance (Chapitre VI).

Chapitre II

CONNAISSANCE ET PREUVE

1 INTRODUCTION

L'intérêt de ce manuscrit est de tenter de mettre en évidence « le plus concrètement possible » le fonctionnement ou le rôle de la connaissance sur un objet mathématique précis (dans notre travail, c'est la symétrie orthogonale) dans le processus de construction de la preuve.

Les travaux réalisés à ce jour du point de vue de la connaissance montrent que la démonstration exige un système de référence théorique (Mariotti, 1997 ; Duval, 1995 ; Pedemonte, 2002 ; etc.), c'est-à-dire la connaissance théorique d'un objet mathématique. Or, les connaissances exigées dans le processus de construction d'une démonstration (non pas les connaissances identifiées dans la démonstration comme produit) sont souvent occultées par les exigences théoriques et le formalisme de la démonstration. Une connaissance qui n'est pas forcément théorique peut y être investie. Ce chapitre a pour objectif de trouver un moyen de repérer les connaissances engagées par les élèves dans un processus de construction de la preuve au-delà de celles formellement explicitées. La connaissance ne désigne pas ici celle sur la preuve, mais la connaissance sur un objet mathématique précis abordé dans le processus de construction de la preuve.

La connaissance dans le processus de construction de la preuve est aujourd'hui de temps en temps analysée en terme d'argumentation qui est une activité de recherche d'arguments en vue de la justification d'un énoncé-cible. Une telle analyse permet de mettre en évidence la différence sur la nature de la validation dans l'argumentation et dans la démonstration, en explicitant la spécificité de la démonstration à l'égard de la justification dans la vie courante.

Pour notre travail, la notion choisie est la symétrie orthogonale qui est souvent abordée dans la construction géométrique ou la reconnaissance de figures symétriques. Nous avons choisi, afin de mieux saisir la spécificité de la connaissance engagée dans le processus de preuve (argumentation, démonstration), de mettre en évidence la nature des connaissances dans la résolution d'autres problèmes que dans celle de la preuve. Pour cette raison, nous avons besoin d'un outil permettant la modélisation de la connaissance à la fois dans la preuve et dans d'autres activités de résolution de problème. Dans ce chapitre, nous présentons un outil de l'analyse de connaissances dans les activités de la résolution de problème en mathématiques. Puis, nous cherchons un moyen d'analyser la connaissance dans le processus de construction de la preuve en explicitant la nature des activités effectuées. Enfin, nous présentons l'état actuel de l'analyse par ce moyen dans les recherches en didactique des mathématiques aujourd'hui.

2 MODELE cK¢ : OUTIL METHODOLOGIQUE ET OUTIL D'ANALYSE DE LA CONNAISSANCE

La question qui se pose ici est celle de savoir comment on peut accéder aux connaissances mobilisées par les élèves dans la résolution de problèmes, et plus particulièrement dans les activités intellectuelles impliquées par la production de preuve. Dans les recherches en didactiques des mathématiques, la connaissance en jeu chez les élèves est très souvent discutée. Or, la connaissance elle-même n'est pas toujours explicitée par une définition ou par des critères caractéristiques bien définis. Alors par quoi reconnaît-on, en tant que didacticien ou observateur, les connaissances des élèves ? Pour aborder cette question, nous nous s'appuyons sur une assertion de Vergnaud :

> *« Le psychologue et le maître peuvent se former une image des connaissances et représentations des élèves à partir des observables dont ils disposent, c'est-à-dire des actions du sujet en situation et des témoignages symboliques que le sujet fournit de son activité : formulations verbales, dessins, schémas, écritures... »* (Vergnaud, 1981, p. 220)

Les indices des connaissances des élèves sont les observables tels que des actions du sujet et des témoignages symboliques que les observateurs peuvent identifier.

Nous avons choisi en tant qu'outil d'analyse de la connaissance le modèle cK¢ proposé par Balacheff (1995 ; 2002 ; etc.) qui s'est développé à la fois à partir de la théorie des situations didactiques en mathématiques de Brousseau (1998) et de la formalisation du concept de Vergnaud (1991). Ce modèle se différencie de celui de Vergnaud par la dissociation de l'opérateur et de la structure de contrôle. Nous pensons que le modèle cK¢ nous permettra de mener une analyse plus fine de la connaissance engagée dans la résolution d'un problème précis à un moment donné dans une situation donnée.

Ce modèle sera mis en œuvre tout au long de notre travail comme outil méthodologique permettant d'avancer en suscitant des questions de recherche et d'analyser les production des élèves. Nous présentons dans ce qui suit, une description du modèle cK¢, puis sa potentialité comme outil méthodologique dans notre travail.

2.1 La description du modèle cK¢

Nous présentons ici une description panoramique du modèle cK¢ depuis sa genèse, c'est-à-dire sa mise en œuvre dans une situation de modélisation des connaissances.

2.1.1 Connaissance dans le système sujet/milieu

Le modèle cK¢ repose sur la problématique de la théorie des situations didactiques développée par Brousseau (1998) dans laquelle la question de la relation entre les comportements d'un sujet et les connaissances est considérée comme fondamentale. La théorie des situations didactiques modélise la situation d'apprentissage et d'enseignement dans laquelle ont lieu les diverses interactions entre les élèves, le milieu et l'enseignant. Cette position de la théorie est tout à fait radicale pour la modélisation des connaissances des élèves. Dans notre travail, nous allons nous intéresser aux connaissances mobilisées par les élèves, dans la résolution de problème de façon dynamique. Etant donné que les observables qui sont accessibles à l'observateur sont seulement les comportements des élèves, les éléments de la connaissance qui en sont retirés portent la marque des contraintes de la situation de la résolution de problème. Une connaissance ne peut donc pas être réduite à une propriété du sujet en soi, ni au milieu en soi, mais aux interactions entre ces deux éléments.

Ainsi un état de la connaissance peut être caractérisé par un état d'équilibre du système sujet/milieu sous les contraintes temporelles et épistémologiques comme le schéma suivant :

> *A knowing is characterised as the state of dynamical equilibrium of an action/feedback loop between a subject and a milieu under proscriptive constraints of viability. (Balacheff, 2000; 2002)*

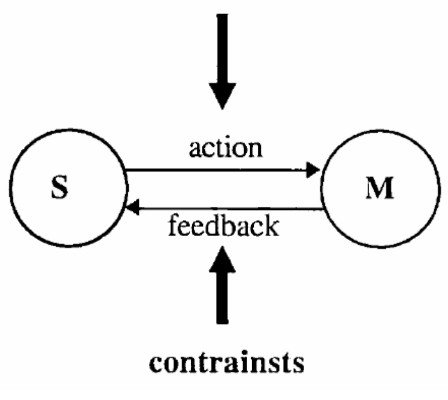


Figure II.1 : le schéma de l'interaction entre sujet et milieu
pris de Balacheff & Gaudin (2002)

Un tel point de vue donne aussi une indication sur la méthodologie de l'expérimentation dans la modélisation de la connaissance que nous organiserons plus loin. La question dans l'expérimentation qui demande directement aux élèves la connaissance dont ils disposent n'a pas de sens, si l'on veut savoir la connaissance mobilisée dans la résolution de problèmes. Parce que nous considérons que les connaissances ne pourraient pas apparaître en entier, mais plutôt qu'une facette dans l'activité intellectuelle exigée par une situation dans laquelle un problème est posé. Autrement dit, lorsqu'un observateur demande d'expliciter la connaissance d'un objet mathématique sans contexte, ce qui apparaît est mobilisée juste pour une telle situation particulière et non pas pour les activités de résolution de problèmes en classe de mathématiques. Dans la plupart des cas, ce qui apparaît de la connaissance subit fortement un effet du contrat didactique ou expérimental. Par exemple, dans une situation de résolution d'une équation, lorsque l'on veut appréhender la connaissance d'un élève sur la notion d'équation, une question comme « qu'est-ce que l'équation ? » ne pourrait pas révéler les connaissances qui seront mobilisées sur cette notion. Pour la résolution, l'aspect opératoire convenant à un problème posé de l'équation est nécessaire.

La connaissance peut être caractérisée ainsi. La question qui se pose maintenant est de savoir caractériser l'état de connaissance pour pouvoir l'évaluer et la faire évoluer en vue de l'apprentissage. La notion de « conception » retenue par le modèle cK¢ rend compte de la connaissance instanciée par une situation. Une conception est une facette de la connaissance attribuée à un sujet par l'observateur à partir du comportement pendant le processus de résolution de problème.

La notion de conception est mise en œuvre dans les recherches françaises en didactiques des mathématiques depuis longtemps comme un outil qui met en évidence la connaissance locale à une situation donnée du point de vue de la stratégie ou la méthode de résolution, du langage, etc. (Artigue, 1991 ; Artigue & Robinet, 1982 ; Grenier, 1988 ; etc.). Selon Artigue, la notion de la conception permet plus précisément de :

> *– mettre en évidence la pluralité des points de vue possibles sur un même objet mathématique, différencier les représentations et modes de traitement qui lui sont associés, mettre en évidence leur adaptation plus ou moins bonne à la résolution de telle ou telle classe de problèmes,*
> *– aider le didacticien à lutter contre l'illusion de transparence de la communication didactique véhiculée par les modèles empiristes de l'apprentissage, en lui permettant de différencier le savoir que l'enseignement veut transmettre et les connaissances effectivement construites par l'élève. (Artigue, 1991, p.265)*

L'élève mobilise, aux yeux de l'observateur, une conception sur un objet dans une situation de résolution de problème, et une autre sur le « même » objet dans une autre situation de résolution de problème. Autrement dit, il est possible que deux conceptions contradictoires relatives à un même objet mathématique coexistent chez un même sujet. Par exemple, le fait que la résolution de problème du calcul provoque de temps en temps les conceptions différentes dans la vie courante et dans la classe de mathématiques est aujourd'hui bien connu (cf. « *Street Mathematics and School Mathematics* » de Nunes et al. (1993)).

Pour rendre compte des comportements contradictoires d'un sujet rationnel, en raison du temps et de la diversité des situations, le terme de « sphère de pratique » repris de Bourdieu est introduit. Il désigne les domaines de validités mutuellement exclues dans l'histoire du sujet (Balacheff, 1995b ; Balacheff & Gaudin, 2002). En fonction de la sphère de pratique, une conception différente et parfois contradictoire à une autre conception aux yeux de l'observateur serait mobilisée.

Ainsi, les conceptions sont caractérisées comme une propriété émergente des interactions au sein du système Sujet/Milieu reposant sur le « paradigme d'erreur » (cf. Balacheff, 1995b, p.222) qui est aujourd'hui, nous semble-t-il, partagé dans la communauté de la didactique des mathématiques et en prenant en compte la nature de la situation dans laquelle le problème est posé.

2.1.2 Une formalisation de la conception

Comme l'indique Artigue, la définition de la conception n'était pas explicitée, alors qu'elle est présente comme un outil d'analyse dans les travaux de recherches en didactique des mathématiques.

Pour pouvoir mieux analyser la pluralité des conceptions coexistantes chez un sujet et dépasser les contradictions éventuelles qui permettent de rendre compte de sa localité, Balacheff (1995a ; 1995b ; 2002) propose une formalisation de la notion de « conception » et aussi de celles de connaissance et de concept. La formalisation des conceptions est inspirée par la définition pragmatique d'un concept proposé par Vergnaud (1991).

> *« Nous appelons conception C, un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel :*
> *- P est un ensemble de problèmes sur lequel C est opératoire ;*
> *- R est un ensemble d'opérateurs ;*
> *- L est un système de représentation, il permet d'exprimer les éléments de P et de R ;*
> *- Σ est une structure de contrôle, elle assure la non contradiction de C.*
> *En particulier, un problème p de P est résolu si il existe r de R et s de Σ tel que s(r(p)) = vrai. » (Balacheff, 1995b)*

La conception est caractérisée par un quadruplet (P, R, L, Σ) dans lequel : l'ensemble du problème (P) est une sphère de pratique sur lequel un ensemble d'opérateurs (R) est opératoire ; un opérateur permet une manipulation ou une transformation du problème initial à un autre état de problème ou de produire une réponse au problème donné sur le système de représentation (L) tel que le langage naturel, le symbole, le graphique, etc. ; la structure de contrôle (Σ) qui permet la décision et le choix d'opérations ou actions, et la validation de résultat par rapport au problème posé.

Ce quadruplet permet de décrire une conception de l'élève qui intervient dans la résolution de problèmes. Mais, du point de vue de l'observable, les éléments de conception ne sont pas toujours explicites. D'une façon générale, l'opérateur est plus accessible alors que la structure de contrôle est moins accessible. En effet, l'opérateur qui manipule le problème est souvent explicite dans l'opération effective des objets mathématiques, alors que le contrôle qui dirige l'opération est plutôt implicite et n'est souvent accessible qu'à partir de l'analyse des autres éléments et de la réponse donnée. La structure de contrôle a donc souvent un statut hypothétique.

2.1.3 Le domaine de la validité d'une conception

Dans le modèle cK¢, le terme « domaine de validité » est souvent utilisé. Il désigne un ensemble de problème sur lequel une conception donne une réponse correcte au problème posé, du point de vue de l'observateur. Toute conception possède un domaine de validité du point de vue du paradigme d'erreur. En effet, nous considérons que le sujet rationnel ne mobilisera pas une conception qui n'a jamais marché ou jamais donné une réponse correcte. La caractéristique de la notion de « misconception » des recherches initiales (années 80) peut aussi être expliquée par ce mot. La réponse donnée est étiquetée « misconception », parce que le problème posé est hors du domaine de validité de cette (mis)conception du point de vue de l'observateur. Mais, il doit exister un tel domaine même pour cette (mis)conception, si celle-ci est de l'ordre de la connaissance.

La notion de domaine de validité est importante. Elle permet de relier la conception qui est une modélisation de la connaissance à un apprentissage. Du point de vue de cette notion, l'élève qui donne une réponse incorrecte aux yeux de l'enseignant ne sait pas encore la frontière du domaine de validité de la conception mobilisée. Pourtant, c'est tout à fait normal au sens où l'explicitation de la frontière du domaine lors de l'introduction d'un outil n'est pas toujours précisée. Il se peut même que ce ne soit pas possible. Parce que d'une part l'explicitation de tout le domaine de validité pour toutes les conceptions ne serait pas possible, et d'autre part certains domaines mathématiques ne sont pas encore introduits ou supposés lors de l'introduction d'un outil.

Par exemple, supposons une conception « la multiplication de deux nombres donne toujours un nombre plus grand ». Cette conception est valide pour tous les deux nombres entiers plus grands que un. Avant d'apprendre les nombres décimaux, les nombres connus sont seulement les nombres entiers. C'est la conception qui marche tout le temps pour les élèves. Les élèves n'ont donc pas besoin de penser au domaine de validité de cette conception. Or, l'introduction des nombres décimaux élargit le monde de nombres. Comme cette conception marchait auparavant pour tous les nombres de leur monde, ce serait raisonnable qu'ils l'appliquent aussi dans le nouveau monde. C'est à cette phase qu'une erreur est identifiée ! Il s'agit donc ici d'un apprentissage qui permet de reconnaître ou de s'apercevoir de la frontière du domaine de validité de la conception initiale.

Nous pouvons dire à partir de cette réflexion que l'un des objectifs de l'apprentissage est de reconnaître le domaine de validité d'une conception, parce que d'autres apprentissages doivent aussi être envisagés pour acquérir un nouvel outil, etc.

2.2 L'outil méthodologique

Le modèle cK¢ est mis en œuvre comme outil méthodologique dans notre étude. Il nous offre un certains points de vue sur l'analyse de connaissances. Nous présentons ici les points auxquels nous nous intéressons par rapport à notre analyse sur le rapport entre connaissance et preuve.

2.2.1 Le rapport entre le problème et la connaissance

Le premier apport du modèle cK¢, est la prise en compte du rapport entre le problème posé et la connaissance. Comme la connaissance est caractérisée par un état d'équilibre de sujet/milieu, la conception modélisée dépend du problème posé. C'est un point de vue classique dans la didactique des mathématiques, dès lors les variables didactiques sont considérées. Le modèle cK¢ permet d'analyser non seulement les variables locales d'un type de problème mais aussi les variables plus globales, de différents types de problèmes et de situations, du point de vue de la connaissance engagée.

Ainsi, le modèle indique une possibilité de différence des conceptions mobilisées dans les problèmes différents et les situations différentes, et exige une analyse des connaissances pour chaque type de problème. Dans notre étude, nous aborderons le problème de la preuve dans le cas de la symétrie orthogonale (Chapitre III). La connaissance lors de la construction de preuve sera finement analysée, mais il se peut que le fonctionnement et le rôle de connaissances soient différents selon les types de problèmes, par exemple dans la construction de preuve et celles qui sont mobilisées dans la construction de figures symétriques. La question que permet de poser ce modèle est donc de savoir quel est le rapport entre les conceptions sur la symétrie orthogonale qui sont mobilisées dans la preuve et dans d'autres problèmes : les mêmes contrôles sont-ils mobilisés ? et les mêmes opérateurs ? En effet, le processus d'apprentissage d'un objet mathématique évolue généralement à partir des problèmes de manipulations ou calculs empiriques vers la preuve ou la démonstration dont la nature est plus théorique. Une telle question suggère une analyse de la continuité et de la rupture de connaissances dans le processus d'apprentissage. Ce point de vue est important afin de mettre en évidence la spécificité de la connaissance engagée dans la construction de preuve.

2.2.2 Le rapport entre contrôle et preuve

L'analyse de contrôle se situe dans la problématique de la validation. Le niveau de validation de la réponse donnée par une conception est géré par le contrôle. C'est le contrôle qui permet d'accepter la réponse comme vraie et la valide.

Le travail mené par Pedemonte (2002) étudie de ce point de vue la continuité et la rupture entre l'argumentation et la démonstration en s'appuyant de la notion d'« unité cognitive ». L'argumentation mobilise une conception qui n'obéit pas nécessairement aux contraintes du système théorique de référence, alors que la démonstration mobilise une théorie qui obéit strictement à ces contraintes. Elle montre la continuité possible de la structure et la rupture du système de référence dans le passage de la conjecture (argumentation) à la démonstration. En outre, l'équipe italienne qui remarque l'« unité cognitive » entre le processus de conjecture et le processus de démonstration, analyse aussi, l'effet du niveau de validité de la connaissance mobilisée dans la conjecture à la construction de démonstrations.

Par ailleurs, une telle problématique conduit aussi à une analyse du rapport entre les conceptions et les niveaux de validité de différents types de preuve. En effet, il se peut qu'il existe des conceptions qui permettent d'élever le niveau de validité plus que d'autres. Dans le cas arithmético-algébrique, l'analyse du rapport entre la conception du nombre pair et le niveau de validité généré par la preuve concernant la somme de deux nombres pairs montre que les types de preuves disponibles et effectivement construites varient en fonction de la conception, surtout selon le contrôle mobilisé (Miyakawa, 2002).

Ainsi, le modèle permet de remarquer aussi la possibilité que différents contrôles suscitent différents niveaux de validité de la preuve. Autrement dit, l'analyse du contrôle est un moyen d'analyse du rapport de la conception à la preuve. Ce point sera pris en compte dans notre travail.

2.2.3 Un outil de l'analyse systématique

Le modèle cK¢ nous permet d'analyser systématiquement et précisément les comportements des élèves du point de vue de la conception. Nous considérons que c'est un point très puissant du modèle cK¢. Cela permettra de comparer et d'évaluer les éléments nécessaires pour résoudre un problème, et aussi les éléments identifiés dans les comportements des élèves. Avec ce modèle, il s'agit d'indiquer les éléments du quadruplet et leurs relations.

En outre, la structure de contrôle qui est un élément de la conception permet de se poser systématiquement la question didactique du « pourquoi » sur l'action, le comportement et la réponse des élèves. En particulier, puisque c'est la structure de contrôle qui permet de choisir un opérateur sur un problème donné et de valider la réponse obtenue, il s'agit toujours de poser des questions au moins pour ces deux activités. Nous considérons donc que cela permet une analyse très fine de la connaissance engagée dans la résolution de problème.

Notre étude sur la connaissance dans la preuve porte premièrement sur l'analyse de conceptions mobilisées pour les problèmes hors du contexte de la preuve, puis sur l'analyse dans le contexte de la preuve (cf. Chapitre IV). Il importe d'avoir un outil qui permet de comparer systématiquement les connaissances engagées dans deux types de problèmes différents, de plus, et leurs fonctionnements. Nous considérons que ce modèle convient à notre objectif. Nous l'employons donc comme outil méthodologique qui permet d'analyser les comportements des élèves du point de vue de la connaissance.

3 ACTIVITES DE CONSTRUCTION DE LA PREUVE DU POINT DE VUE DE LA CONCEPTION

Notre étude de cette section a pour objectif de trouver un moyen d'identifier les connaissances d'un objet précis dans le cours du processus de construction de la preuve. Comme la notion de conception était choisie dans la section précédente comme outil d'analyse de la connaissance des élèves, le moyen que nous cherchons est le lien entre la conception et la preuve. D'une façon générale, le processus de construction d'une preuve n'est pas simple. Il est plutôt complexe, et différentes activités y sont investies. Dans les recherches de la preuve en didactique des mathématiques, plusieurs mots sont adoptés pour indiquer les activités qui paraissent de temps en temps proches dans le vocabulaire quotidien : explication, preuve, démonstration, raisonnement, argumentation, validation, justification, etc.

Nous aborderons ici le raisonnement, l'argumentation, la preuve et la démonstration qui sont les activités dominantes dans la construction de la preuve. Il s'agit dans un premier temps de mettre en évidence la nature des activités afin de mieux trouver les endroits ou les fonctionnements dans lesquels sont identifiés les conceptions. Puis d'étudier le moyen par lequel la conception peut être identifiée dans ces différentes activités.

3.1 Avant de commencer …

Avant de commencer nos analyses, nous introduisons comme outil d'analyse « la valeur épistémique » et « la valeur logique » et clarifions quelques termes employés dans nos analyses à savoir, « justification » et « validation ».

3.1.1 Valeur épistémique et logique

Nous employons les notions de « valeur épistémique » et « valeur logique » développées par Duval (1991) afin de dégager les fonctionnements différents de raisonnements mobilisés dans l'activité de justification sur l'énoncé-cible. *« La valeur épistémique est le degré de certitude ou de conviction attaché à une proposition »* (Duval, 1991, p. 254). Elle est attribuée par un individu à une proposition comme « je suis sûr que ... », « je crois que ... », etc. Au contraire, la *« valeur logique [d'une proposition] : elle est vraie ou elle est fausse »* (Duval, 1991, p. 254). Duval mobilise ces notions pour comprendre l'apparition d'attitudes propositionnelles qui distingue l'argumentation de la démonstration. Ces notions seront indispensables lorsque le niveau de validité d'un énoncé ou d'un permis d'inférer chez les élèves sera discuté.

3.1.2 Justification et validation

Nous emploierons parfois deux termes qui paraissent très proches de notre problématique : « validation » et « justification ». La notion de la valeur épistémique permet de distinguer ces deux notions.

Nous nous appuyons sur le travail de Margolinas (1993) à propos de la validation dans la situation d'apprentissage et d'enseignement. Elle montre que, du point de vue du projet ou finalité des élèves, le processus de validation peut être distingué en deux processus : *le processus de vérification* et *le processus de preuve*. Le processus de vérification est à l'œuvre lorsque la certitude d'une conclusion ou un résultat d'action n'est pas encore suffisamment établie. Le processus de preuve est plutôt mobilisé pour une conclusion ou un résultat d'action qui est considérée plus ou moins vrai. En terme de valeur épistémique, ces deux processus modifient tous les deux la valeur épistémique de la conclusion, mais d'une façon différente. Le premier augmente la valeur épistémique de la conclusion en supprimant un doute dans sa certitude, alors que le deuxième l'augmente en explicitant les arguments qui sont acceptables dans une institution. Par exemple, dans le cas de la réalisation de segments symétriques, le pliage serait mis en œuvre pour le processus de vérification des symétriques tracés, et l'explicitation de propriétés mises en œuvre dans la réalisation serait effectuée pour le processus de preuve.

Par ailleurs, nous considérons que le terme « justification » désigne l'activité de persuasion de l'interlocuteur ou le processus de preuve dans le processus de validation au sens de Margolinas. Dans ce cas, la valeur épistémique qui sera modifiée est celle qui est attribuée par l'interlocuteur à un énoncé-cible, non pas par le locuteur. En effet, la justification a pour objectif d'élever la valeur épistémique (ou le degré de certitude) de l'énoncé-cible.

3.2 Raisonnement et conception

Cette sous-section a pour objectif d'analyser le raisonnement du point de vue de la conception. Nous présentons premièrement sa structure et son fonctionnement, et ensuite l'analyse du point de vue de la conception.

3.2.1 Fonctionnement et structure

Le mot « raisonnement » est très souvent mobilisé non seulement dans le contexte de la preuve mais aussi hors de la preuve. Du côté preuve, « le raisonnement déductif » est aujourd'hui un objet d'apprentissage à partir de la classe de sixième au collège français (programme, 1996). Ceci est reconnu comme activité cruciale de la démonstration. D'autre part, comme l'indique « le raisonnement algébrique ou calcul », le raisonnement est aussi mis en œuvre en algèbre qui produit une expression ou une valeur à partir d'une autre expression[1]. En outre, il existe aussi le raisonnement connu, « les raisonnements plausibles » de Polya (1954) qui correspondent aux « analogie », « induction », « inférence plausible », etc. qui se trouvent dans le développement des mathématiques. Tout cela n'est pas identique du point de vue de leur fonctionnement. Nous clarifions ici ce que nous entendons par ce terme.

Balacheff (1987) dans son article sur la preuve, propose la définition suivante du raisonnement.

> *« Nous réserverons le mot raisonnement pour désigner l'activité intellectuelle, la plupart du temps non explicite, de manipulation d'informations pour, à partir de données, produire de nouvelles informations. » (pp.147-148)*

Cette définition correspond au sens large du raisonnement souvent mis en œuvre en mathématiques, voire dans la vie courante. En effet, comme sa fonctionnalité est la production de nouvelles informations, les activités intellectuelles investies dans les productions de propriétés géométriques, conjectures, arguments, valeurs de calculs, représentations graphiques, etc. sont toutes des raisonnements.

Le mot raisonnement est de temps en temps réservé au sens strict, à la justification au niveau du discours. C'est en ce sens que Duval (1995) propose la définition du « raisonnement » en ces termes :

> *« D'une façon générale, tout discours ayant pour but de prouver la vérité d'un énoncé ou de faire admettre par un interlocuteur le "bien fondé" de son affirmation, ou de son rejet, est reconnu comme "raisonnement". Autrement dit, les deux caractéristiques suivantes sont nécessaires pour qu'un discours puisse être reconnu comme un raisonnement :*
> *- être orienté vers un énoncé-cible, c'est-à-dire vers la proposition à justifier,*
> *- être centré sur la valeur, logique ou épistémique, de cette proposition et non pas sur son contenu » (Duval, 1995, p.217)*

La caractéristique de sa définition est la fonctionnalité de justification et l'existence de l'énoncé-cible. Dans cette définition, le raisonnement qui produit juste les nouvelles informations n'y est pas pris en compte. Ce serait pour cette raison qu'il s'intéresse particulièrement à la justification et qu'il voulait donner un statut particulier au raisonnement pour le dissocier de l'explication et de la preuve.

Nous considérons dans notre travail que le terme « raisonnement » désigne au sens large l'activité intellectuelle de la production de nouvelles informations telles que les propriétés

[1] Exemple : dans le calcul symbolique « $a\,(b + c) = ab + ac$ », l'expression du côté droite est produite de celle du côté gauche par un raisonnement algébrique.

mathématiques, les théorèmes, etc. Le raisonnement ayant pour objectif de justifier un énoncé-cible est abordé en tant qu'argumentation que nous présenterons dans une section ultérieure.

En ce qui concerne la structure du raisonnement, une démarche de raisonnement peut être décomposée en deux types de passages (Duval, 1991, pp.234-235) : « inférence » et « enchaînement ». L'inférence est un pas de raisonnement qui produit une nouvelle proposition à partir de propositions données. L'enchaînement est le passage d'un pas de raisonnement à un autre. Nous mettons ici en évidence la structure d'un passage « inférence ».

L'analyse structurelle de l'inférence, d'un pas de raisonnement, est effectuée depuis longtemps dans le domaine de la logique ou rhétorique et aussi dans la didactique des mathématiques. Les inférences sont parfois classifiées par leur structure. Peirce (1960, 2.623) identifie trois types d'inférence comme ce qui suit, selon la structure de trois composants, « rule », « case », et « result ».

> Deduction
> Rule. – All the beans from this bag are white.
> Case. – These beans are from this bag.
> ∴ Result. – These beans are white.
>
> Induction
> Case. – These beans are from this bag.
> Result. – These beans are white.
> ∴ Rule. – All the beans from this bag are white.
>
> Hypothesis (Abduction)
> Rule. – All the beans from this bag are white.
> Result. – These beans are white.
> ∴ Case. – These beans are from this bag.

Dans tous les cas, la proposition après la marque « ∴ » est celle qui est produite. Deux premières inférences sont bien connues. La troisième, l'hypothèse qui est aussi appelée « abduction », est une inférence par laquelle à partir d'une règle et un résultat de l'action, on obtient un cas comme nouvelle proposition, qui dérive le résultat connu au départ. Nous voyons aussi chez Polya ce type de l'inférence. Il l'appelle « Syllogisme heuristique » (Polya, 1957, p.186). Nous citons un exemple proposé par Polya et la structure simplifiée.

> *« If we are approaching land, we often see birds.*
> *Now we see birds.*
> *Therefore, it becomes more credible that we are approaching land » (Polya, 1957;*

p.181)

If A then B
B true

A, more credible

(Polya, 1957 ; p.187)

Peirce et Polya analysent tous les deux précisément le fonctionnement de chaque inférence surtout la véracité de la conclusion obtenue en fonction du degré de certitude de chaque proposition, et les relations entre différentes inférences.

3.2.2 Du point de vue de la conception

Du point de vue de la conception, les structures proposées ci-dessus ne sont pas très claires. Dans le cas de Peirce, alors que les trois éléments communs sont bien mis en œuvre pour distinguer différentes inférences, ce qui est opératoire à chaque inférence afin de produire une nouvelle information, c'est-à-dire l'opérateur, reste implicite. En effet, les liens entre les énoncés ne sont pas bien établis.

La structure du passage inférence dans le cas du raisonnement déductif est plus finement analysée par Duval (1992). Les relations entre les énoncés et l'opérateur sont plus claires. Nous citons le schéma avec un exemple donné par Duval (Figure II.2 : Duval, 1992, p.44). Le passage inférence dans le raisonnement déductif part des énoncés donnés comme prémisses ou comme hypothèses vers un énoncé établi selon une règle explicite et convenue. Comme le permis d'inférer ou l'énoncé tiers est exprimé sous la forme « si A alors B », la vérification des conditions est faite entre les énoncés donnés et la partie « si ... » (conditions) du permis d'inférer. Les énoncés donnés doivent être inclus dans la partie conditions. Puis, la partie « conclusion » du permis d'inférer est détachée comme un nouvel énoncé à la conclusion d'un pas de raisonnement.

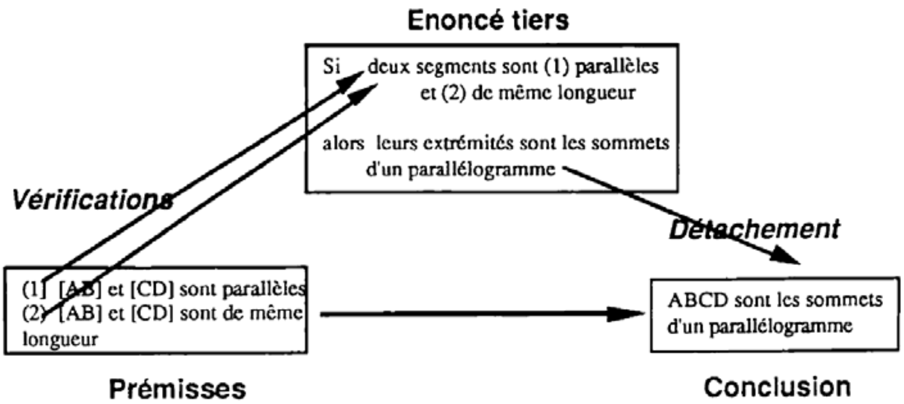


Figure II.2 : Schéma d'un pas du raisonnement déductif avec un exemple du parallélogramme.

Dans cette inférence, ce qui est opératoire est bien l'énoncé tiers ou le permis d'inférer qui permet de passer des énoncés donnés à la conclusion. Aussi c'est grâce à son fonctionnement, vérification et détachement, que la conclusion peut être obtenue. Nous considérons ici que la règle qui permet de passer de l'un à l'autre dans une inférence doit être toujours exprimée sous la forme de « si ... alors ... » pour qu'il puisse être un opérateur dans la production d'une information.

La règle donnée dans l'exemple de Peirce peut aussi être traduite sous la forme « si ... alors ... ». Mais, la règle de Peirce relie deux faits par une causalité. Elle n'est donc pas exprimée sous la forme d'implication « si ... alors ... » mais plutôt sous la forme de causalité « si ... donc ... ». Avec l'exemple de Peirce, elle est exprimée par « si les pois sont dans ce sac, donc ils sont blanc ».

Il semble que cette règle n'est pas très opératoire pour la production d'une information, surtout pour l'induction et pour l'abduction. Dans le cas de l'induction, ce qui est produit est une « règle » à partir de deux énoncés. Une telle « règle » n'est pas un opérateur dans cette opération mais un produit de cette opération. D'autre part, dans le cas de l'abduction, la « règle » est bien proposée avant l'opération. Ce n'est pas cette « règle » qui permet de passer d'une donnée à un produit. Parce que la coïncidence entre la partie conclusion de la règle et une donnée ne produit rien du point de vue de l'opérateur. Les liens entre les énoncés sont très éloignés. Dans ces deux cas, il semble qu'il existe quelque(s) implicite(s) qui permet(tent) de telles opérations.

La réflexion ci-dessus du point de vue de la conception permettent de nous conduire à une structuration des inférences comme le schéma du raisonnement déductif proposé par Duval (Figure II.2), même pour d'autres types d'inférences, l'induction, l'abduction, etc. Nous proposons la structuration pour l'induction et l'abduction par la suite. Dans les exemples ci-dessous, les lettres minuscules « a » et « b » signifient les énoncés particuliers, et les majuscules « A » et « B » signifient respectivement les énoncés généraux de « a » et « b ».

Pour l'induction, la structure suivante est proposée par Peirce. Considérons dans l'induction que la relation entre deux énoncés n'est pas une seule, mais plusieurs. Nous utilisons dans ce cas les lettres « a_i » et « b_i ».

$$\frac{\begin{array}{c} a_i \\ b_i \end{array}}{\text{Si A donc B}}$$

Ce qui est connu avant l'inférence est juste deux énoncés « a_i » et « b_i ». Or la conclusion « si A donc B » est obtenue. Les deux énoncés « a_i » et « b_i » sont déjà reliés par une causalité implicite. Sinon, deux énoncés ne seront pas abordés. A partir de la relation ou causalité trouvée entre deux énoncés telle que chaque cas « a_i » correspondent respectivement à chaque résultat « b_i », la rège généralisée « si A donc B » dans laquelle « $a_i \in$ A et $b_i \in$ B » est obtenue. Nous considérons ici qu'il doit y avoir une règle opératoire sur la généralisation. Sinon la conclusion ou le résultat ayant des éléments plus généraux ne peut pas émerger. Les causalités trouvées sont les données qui amènent à un énoncé ou une règle généralisé comme conclusion ou produit. Nous considérons donc que le permis d'inférer qui est une règle de la généralisation telle que « Si $\exists i$ (si a_i alors b_i), alors (si A alors B) ».

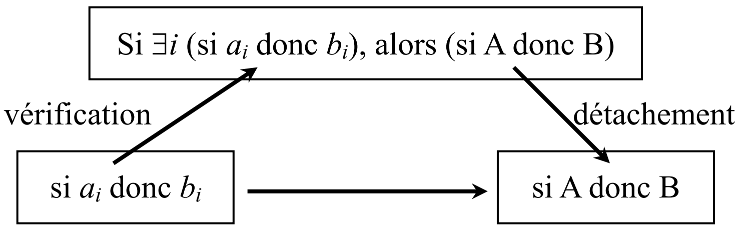


Figure II.3 : la structure ternaire de l'induction

Dans ce cas, la structure de l'induction est une structure ternaire, c'est-à-dire peut être aussi exprimée en trois parties. De plus, la vérification de conditions et le détachement de la conclusion proposés par Duval sont aussi bien repérés (Figure II.3).

De la même façon, nous considérons la structure de l'abduction. La structure suivante était proposée par Peirce.

$$\frac{\begin{array}{c}\text{Si A donc B}\\ b\end{array}}{a}$$

Dans ce cas, à partir d'une règle ou un énoncé « si A donc B » qui est une causalité et d'un énoncé « b », un énoncé « a » est produit. Du point de vue de la conception, qu'est-ce qui peut être un opérateur dans ce raisonnement plausible ? Considérons comme le cas de l'induction. Nous interprétons que la règle « si A alors B » est considérée comme un énoncé et que l'énoncé « a » est obtenu à partir des deux énoncés par un opérateur implicite. Ainsi une règle « Si (si A donc B) et b, alors a » doit être mobilisé. Dans ce cas, une vérification et un détachement comme le schéma de Duval plus haut peuvent être identifiés. En conséquence, la structure de l'inférence avec une nouvelle règle est encore ternaire, et la vérification des conditions et le détachement sont effectués, ainsi que la déduction.

De la même façon, nous pouvons considérer la déduction proposée par Peirce. Dans ce cas, la règle implicitement mobilisée est « Si (si A donc B) et a, alors b » qui est le modus ponens.

Comme le montre le schéma de Duval plus haut, la structure de trois inférences proposées par Peirce peut être ainsi exprimée sous la forme déductive intégrant la vérification de conditions et le détachement de la partie conclusion. Comme notre intérêt porte sur les connaissances mobilisées dans le raisonnement et la preuve, ce qui importe est la structure qui permet d'identifier les traces des connaissances engagées dans les activités de raisonnement : la règle opératoire. Du point de vue du modèle cK¢, il s'agit de l'opérateur. Ainsi, à partir de l'anlayse ci-dessus, nous formulons l'hypothèse suivante : *la règle sous la forme déductive est repérée pour tous les raisonnements, bien qu'elle soit très souvent implicite*. C'est cette hypothèse qui nous amène à essayer d'identifier la règle sous la forme « si ... alors ... » tout au long de l'analyse dans notre travail.

En ce qui concerne l'élément du contrôle dans le raisonnement déductif, ce qui permet de mobiliser un permis d'inférer est la théorie admise au départ qui atteste sa validité. En effet, comme l'indique Duval (1991), le raisonnement déductif ne peut pas avoir l'effet de contenu. La valeur épistémique d'une proposition dans le raisonnement déductif ou la démonstration est liée au statut opératoire (propositions d'entré, énoncé tiers, et conclusion) du cadre théorique, c'est-à-dire :

> *« les valeurs épistémiques doivent être "traduites" en l'un des trois statuts opératoires pour que les propositions puissent être reliées déductivement » (Duval, 1991, p.257)*

Et pour qu'une proposition ait un statut d'« énoncé tiers » ou de permis d'inférer, elle doit être toujours vraie, c'est-à-dire avoir la valeur logique « vraie ». Puisqu'elle est toujours vraie, le nom théorique tel que « théorème », « définition » et « axiome » lui est attribué. Du point de vue de la conception, la théorie qui sous-tend la proposition et aussi ces noms dans le raisonnement déductif peuvent être un contrôle qui atteste sa validité.

En revanche, pour les autres raisonnements, la validité de la règle opératoire, c'est-à-dire l'opérateur, n'est pas toujours attestée. Par exemple, la règle de généralisation de l'induction « Si $\exists i$ (si a_i alors b_i), alors (si A alors B) » n'est pas toujours vraie. Mais, dans la vie courante, on la met en œuvre selon le contenu et selon les nombres de phénomènes qui suscitent une relation ou une causalité « si a_i alors b_i ». C'est pour cela qu'il s'agit de mettre en évidence la structure de contrôle, du point de vue de la problématique didactique, qui sera variée selon les élèves ou les sujets.

3.3 Argumentation et conception

Le second terme que nous abordons est celui de l'« argumentation ». Nous présentons, à la suite de l'analyse sur son fonctionnement et sa structure, son rapport à la conception en explicitant le moyen d'identifier les éléments de conception.

3.3.1 Qu'est-ce que l'argumentation ?

La notion d'« argumentation » est aujourd'hui souvent employée dans les analyses et recherches de preuve en didactique des mathématiques (Balacheff, 1988 ; Duval, 1991, 1992 ; Pedemonte, 2002 ; etc.). Elle est souvent située à l'autre pôle par rapport à la démonstration ou le raisonnement déductif, pouvant constitué un obstacle pour l'apprentissage de la démonstration (Balacheff, 1999). Nous présentons, en premier lieu, brièvement ce que nous entendons par argumentation dans notre travail.

L'argumentation est un mode du raisonnement naturel. Le sens ordinaire de « l'argumentation » est trouvé dans le dictionnaire (*Le Grand Robert*, 1987).

> *Argumentation : « 1. Action d'argumenter ; 2. Ensemble d'arguments tendant à une même conclusion ; 3. Art d'employer, d'opposer des arguments dans une discussion » (p.535)*
> *Argumenter : « 1. Discuter en employant des arguments, prouver ou contester qqch. par des arguments ; 2. Soutenir (une opinion, une thèse) par des arguments » (p. 535)*
> *Argument : « 1. Raisonnement destiné à prouver ou à réfuter une proposition » (p. 534)*

C'est une activité de justification ou une activité d'exploration et de production des raisons ou arguments pour la justification. L'activité effectuée dans la construction de la démonstration ou la preuve en mathématiques peut donc être aussi une argumentation.

Dans les travaux de didactique des mathématiques, Duval (1991 ; 1992) considère l'argumentation comme un mode de raisonnement naturel à l'opposé de la démonstration qui elle, obéit à des contraintes strictes en mathématiques. Il souligne les écarts entre l'argumentation et la démonstration. Mais, cela ne veut pas dire qu'il considère que l'argumentation n'est pas mise en œuvre dans la construction de la démonstration. En effet, il propose une distinction de l'argumentation en deux types : « l'argumentation rhétorique » et « l'argumentation heuristique » (1992). La première mise en œuvre dans le discours naturel est conduite pour convaincre un interlocuteur, alors que la seconde mise en œuvre en mathématique est conduite pour progresser dans un problème. La différence selon lui est :

> *« elle tient ou bien à l'existence d'une organisation théorique du champ de connaissances et de représentation dans lequel se déroule l'argumentation, ou à l'absence d'une telle organisation théorique » (1992, p.51)*

Il considère que cette argumentation heuristique précède une démonstration.

> *« une argumentation heuristique doit comporter des "sous-programmes" de raisonnement valide, même si on ne sait pas encore comment relier ces différents sous-programmes pour parvenir à un arbre déductif complet qui corresponde à la démonstration ! » (ibid. p.52)*

Ainsi, nous considérons que l'argumentation en mathématique est un raisonnement qui est mis en œuvre dans la phase de recherches d'arguments ou raisons en vue d'une démonstration ou une justification. Ce point peut avoir un accord avec d'autres travaux. Par exemple, Pedemonte qui analyse la continuité et la rupture entre l'argumentation et la démonstration considère l'argumentation comme :

> *« Le travail qui précède une démonstration, c'est-à-dire le processus qui recueille les raisonnements plausibles, est une argumentation » (2002, p. 11).*

3.3.2 Structure de l'argumentation : modèle de Toulmin

L'argumentation serait un mode de raisonnement naturel. Ce serait un raisonnement qui ne peut pas être réduit au calcul des prédicats développés dans la logique mathématique. Dans la discussion ordinaire, la structure de l'argumentation est très implicite. Néanmoins, le modèle de Toulmin (1958) propose dans le domaine de la philosophie ou de la linguistique une structuration de l'argumentation qui, nous semble-t-il, permet de dévoiler les éléments de conceptions. Nous l'adoptons afin d'analyser et structurer les argumentations et les preuves construites par des élèves du point de vue de la connaissance.

Nous le présentons ici en nous appuyant sur un exemple donné par Toulmin. L'auteur propose ce qui suit comme un modèle, comment les arguments sont formés et émergés. C'est une argumentation pour une assertion « C : Harry est sujet britannique ». Pour une telle assertion, une question qui peut se poser par l'interlocuteur qui doute cette assertion serait « Qu'est-ce qui te fait dire ça ? ». Pour toute assertion, on peut trouver une ou des proposition(s) qui peut être une raison ou un argument. La réponse dans l'exemple serait une proposition « D : parce que Harry est né aux Malouines », qui est appelée « donnée ». C'est sur cette donnée que s'appuie l'assertion. Mais pour l'instant, il n'y a aucun lien entre deux énoncés « C » et « D », bien que le sujet de chaque énoncé soit le même. La question qui se pose encore est donc « quel est le lien entre les deux énoncés ? ». Il doit y avoir une règle qui permet de relier deux énoncés. La réponse serait « L : puisque un individu né aux Malouines est généralement sujet britannique ». Toulmin l'appèle « loi de passage » qui correspond au permis d'inférer. Cependant, la loi de passage mobilisé est de temps en temps contestable. La question qui peut se poser encore est « pourquoi un individu né aux Malouines est généralement sujet britannique ? ». La réponse serait « S : parce qu'il est soumis aux dispositions légales suivantes ... ». Toulmin l'appelle « support » qui soutient la loi de passage, voire l'argument soi-même.

Le degré de certitude ou la valeur épistémique de la conclusion n'est pas absolu. Dans ce cas, il est exprimé comme « l'indicateur de force ». Dans l'exemple donné, elle est « F : probablement ». En effet, dans l'exemple, il se peut que « R : son père et sa mère ne soient étrangers ». C'est une exception appelée « restriction » par Toulmin.

Le schéma suivant résume ces éléments et leurs liens apparus ci-dessus.

D : Harry est né aux Malouines. → donc **F :** probablement **C :** Harry est sujet britannique

puisque

L : un individu né aux Malouines est généralement sujet britannique

étant donné

S: les dispositions légales suivantes

à moins que

R: son père et sa mère ne soient étrangers

C : Conclusion

D : Donnée

L : Loi de passage

F : Indicateur de force

R : Restriction

S : Supports

Figure II.4 : le schéma donné par Toulmin (1958)

Le modèle de Toulmin permet ainsi d'expliciter la structure implicite qui est derrière l'argumentation d'un énoncé-cible. Ce qui importe dans cette modélisation de l'argumentation, ce sont les questions posées par l'interlocuteur à chaque réponse du locuteur. Ce sont ces questions qui permettent de chercher et former les arguments et en même temps qui font émerger les éléments de connaissances. Ce dernier point est crucial pour notre problématique de recherche.

3.3.3 Fonctionnement de l'argumentation

La structure donnée par le modèle de Toulmin ressemble à celle du raisonnement donnée par Duval (Figure II.2, p.21) et à la structuration que nous avons proposée pour toutes les inférences. Les trois éléments du raisonnement (propositions données ou prémisses ; règle d'inférence ou énoncé tiers ; nouvelle proposition ou conclusion) apparaissent dans le modèle de Toulmin comme Conclusion (C), Donnée (D) et Loi de passage (L).

Dans le rapport entre la donnée (D) et la loi de passage (L), la donnée est un cas particulier du sujet de la phrase de la loi de passage. De la même façon, dans le rapport entre la loi de passage (L) et la conclusion (C), le prédicat de la phrase de la loi est aussi le prédicat de la conclusion. Ces deux rapports correspondent respectivement à la vérification entre l'hypothèse et la partie condition du permis d'inférer et au détachement de la partie conclusion du permis d'inférer (Figure II.2). En effet, la loi de passage peut être reformulée sous la forme « si ... alors ... » pour mieux saisir les rapports entre la loi de passage, la donnée et la conclusion. L'exemple de la loi de passage proposé par Toulmin ci-dessous peut être reformulé à :

> *« L : si un individu est né aux Malouines, alors il est généralement sujet britannique »*

Sous cette forme, la vérification d'hypothèses et le détachement de la conclusion peuvent être bien identifiés dans la structure de l'argumentation. Du point de vue de la conception, la loi de passage est bien opératoire et est un opérateur qui permet de produire la conclusion.

Ce qui est différent du raisonnement déductif est l'utilisation du mot « généralement » dans la loi de passage et du mot « probablement » comme l'indicateur de force (F). En effet, dans le raisonnement déductif, le permis d'inférer implique directement des hypothèses à la conclusion sans ambiguïté et sans doute. La conclusion obtenue est donc cent pour cent vraie, si les hypothèses étaient bien admises. En revanche, l'indicateur de force (F) n'atteste pas la véracité de la conclusion cent pour cent : « généralement » et « probablement » indiqueraient soixante-dix ou quatre-vingt pour cent de la véracité. Ce point est proche de la règle apparue dans notre structuration pour l'induction et l'abduction dans lesquelles le niveau de validité de la règle n'est pas absolu.

L'indicateur de force dans le modèle correspond à la valeur épistémique. Il indique le niveau de validation ou le degré de certitude attribué à la conclusion par le locuteur, c'est-à-dire la valeur épistémique. Ce qui la détermine dans le modèle est le niveau de validité de la loi de passage. En effet, la véracité de la loi pour le locuteur provoque une valeur épistémique telle que « probablement », « sûrement », « peut-être », etc. Et encore, le support détermine le niveau de validité de la loi de passage. Parce que, c'est le support qui désigne la loi de passage et qui assure la validité de la loi mise en œuvre.

Dans la structure du raisonnement donnée par Duval, ce qui correspond au contrôle de la conception était implicite. Nous avons considéré que c'est le statut théorique de l'énoncé tiers dans le raisonnement déductif (théorème, définition, axiome, etc.) qui assure la validité du permis d'inférer. Dans le modèle de Toulmin, les « supports » assurent la validité de la loi utilisée, et la loi qui n'est pas admise par les « supports » ne serait pas mobilisée. Nous considérons donc que c'est à partir des supports qu'on peut accéder au contrôle du point de vue de la conception.

Par ailleurs, dans l'argumentation, comme le mentionne Duval sur la différence entre l'argumentation et la démonstration, les arguments ou les données sont souvent ajoutés les uns aux autres.

> *« Les arguments s'ajoutent les uns aux autres soit pour se renforcer mutuellement, soit pour s'opposer » (Duval, 1991, p.241)*

En effet, lorsque la valeur épistémique de l'énoncé-cible n'est pas cent pour cent « vraie », d'autres arguments permettent de temps en temps d'augmenter la valeur épistémique. Du point de vue du modèle de Toulmin, nous interprétons cet ajout d'un argument comme soit un nouvel argument constitue un autre pas de l'argumentation ayant le même énoncé-cible, soit il est ajouté comme restriction qui permet d'augmenter l'indicateur de force ou la valeur épistémique de la conclusion. Dans le premier cas, les arguments ne sont pas organisés entre eux, c'est-à-dire le rapport entre les arguments est implicite sauf l'énoncé-cible commun.

3.3.4 Rapport entre la structure de l'argumentation et la conception

Alors, comment relier cette structure de l'argumentation et la conception mobilisée. Quels rapports sont considérés ? Dans l'exemple donné par Toulmin, la connaissance en jeu est la nationalité. Nous considérons que dans la structure de l'argumentation, les éléments intervenant fortement à la connaissance en jeu sont la loi de passage (L) qui relie deux énoncés, et le support (S) qui atteste la véracité de la loi de passage.

Du point de vue de la conception, le problème posé dans l'argumentation est de « p : justifier l'énoncé-cible ». Pour résoudre ce problème, on cherche des données et en même temps une loi de passage. Ce qui est opératoire dans la résolution, c'est-à-dire l'opérateur, est la loi de passage. En effet, c'est la loi de passage qui amène la validité de la conclusion en reliant les données valides à la conclusion.

Ce qui permet de décider et de choisir un opérateur et de valider le résultat dans un problème posé, est une structure de contrôle dans le modèle cK¢. Dans un processus d'argumentation, c'est le support qui permet de choisir un opérateur pour un problème donné et d'assurer sa pertinence, c'est-à-dire le support peut être considéré comme une structure de contrôle de la conception. Dans l'exemple donné par Toulmin, le fait que la loi de la Grande Bretagne contienne les dispositions légales concernant la nationalité permet d'assurer la validité de l'opérateur.

Alors, quelle est la position de la restriction dans le modèle de conception ? Lorsque la restriction (R) est posée, nous considérons que la loi de passage est soit modifiée, c'est-à-dire la restriction est intégrée à la loi de passage, soit une autre loi de passage est mobilisée pour éviter la restriction. En effet, la restriction est une exception contre la loi de passage et liée étroitement à la loi. Pour que l'argumentation à ce moment là ne soit pas dans une exception, une réaction est nécessaire. Ce point est aussi mentionné par Pedemonte dans sa thèse (Pedemonte, 2002, pp.94-101).

3.4 Preuve et Démonstration

Le mot « preuve » est souvent employé en mathématiques et aussi dans le milieu scolaire autant que le mot « démonstration ». Il semble que la différence entre ces deux mots est aujourd'hui bien partagée dans la communauté de la didactique des mathématiques en France. Nous citons d'abord les définitions données par Balacheff.

> *« Nous appelons preuve une explication acceptée par une communauté donnée à un moment donné. Cette décision peut être l'objet d'un débat dont la signification est l'exigence de déterminer un système de validation commun aux interlocuteurs.*
>
> *Au sein de la communauté mathématique ne peuvent être acceptées pour preuve que des explications adoptant une forme particulière. Elles sont une suite d'énoncés organisée suivant des règles déterminées : un énoncé est connu comme étant vrai, ou bien est déduit de ceux qui le précèdent à l'aide d'une règle de déduction prise dans un ensemble de règles bien défini. Nous appelons démonstrations ces preuves. » (Balacheff, 1987, pp.147-148)*

Le mot « preuve » désigne surtout une justification dont la validité peut être modifiable en fonction de la communauté et du temps. En revanche, le mot « démonstration » désigne la preuve qui adopte une forme particulière. Nous présentons d'abord cette forme particulière dans sa structure et son fonctionnement, et ensuite le rapport avec la conception est analysé.

Comme le terme « *preuve* » est employé dans le sens large de la justification, nous réservons le mot *« la construction de la preuve »* à une activité contenant l'argumentation et la formulation. En revanche, le mot *« la construction de la démonstration »* désigne une activité de formulation après l'argumentation pour bien dissocier la démonstration de l'argumentation.

3.4.1 Structure et fonctionnement de la démonstration

Les enchaînements des propositions dans la démonstration sont établis par les raisonnements déductifs à partir des hypothèses données jusqu'à la conclusion. Duval (1991 ; 1992) analyse bien la structure de la démonstration. Deux passages y sont considérés : inférence et enchaînement. Le premier passage est un pas de la démonstration qui est un pas du raisonnement déductif. La démonstration se compose des pas de raisonnements déductifs. Comme nous avons vu dans la section « raisonnement » la structure de raisonnement déductif proposée par Duval, la structure d'un pas de la démonstration est la même que celle montrée dans la Figure II.2.

Le deuxième passage est l'enchaînement d'un pas de raisonnement à un autre. Le raisonnement ne se limite pas à une seule inférence, mais il doit en articuler plusieurs. Dans ce cas, la conclusion du premier pas sera soit une proposition qui est prise en compte comme entrée au deuxième pas, soit une proposition prise comme règle d'inférence. Duval (1991, p. 239) appelle ce processus « recyclage ». L'enchaînement se fait ainsi par le recouvrement ou le recyclage d'une proposition. La structure globale du raisonnement déductif est bien montrée dans l'image ci-dessous prise du logiciel Cabri-Euclide (Figure II.5). Ce logiciel est développé par Luengo (1997) pour l'apprentissage de la démonstration en prenant en compte des résultats de recherche en didactiques des mathématiques. Il a une fonctionnalité permettant de montrer la structure de la preuve construite par les élèves.

Ainsi, la structure de la démonstration est exprimée comme un graphe à partir des hypothèses admises par la théorie au départ jusqu'à la conclusion en passant par les théorèmes, les définitions ou les axiomes aussi admises. Et chaque pas d'une démonstration est exprimé sous la forme ternaire du raisonnement déductif qui est bien analysée par Duval.

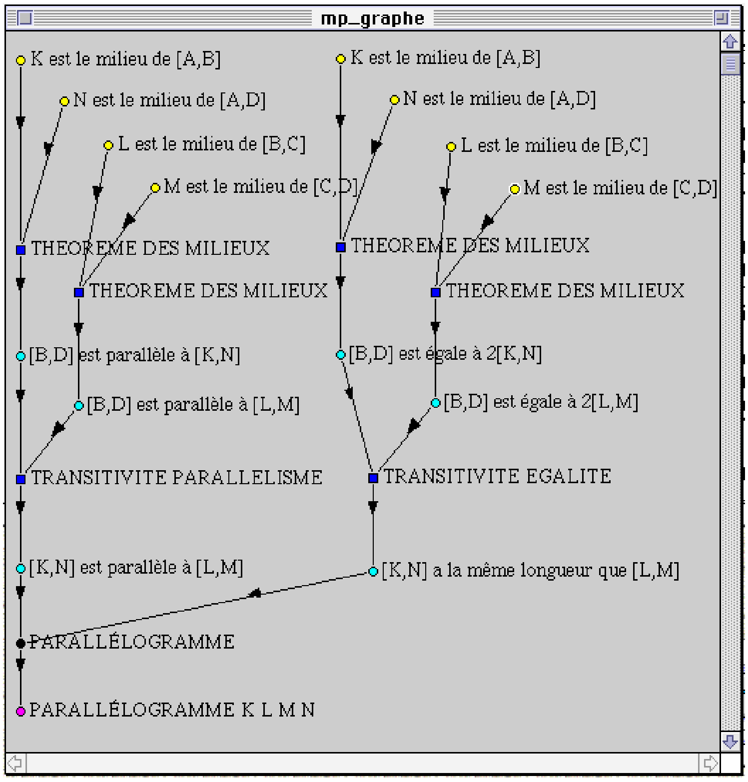


Figure II.5 : le graphe produit par Cabri-Euclide[2]

En ce qui concerne le fonctionnement caractéristique d'un pas de raisonnement dans la démonstration, les propositions interviennent en fonction de leur statut opératoire, c'est-à-dire de la place qui leur est préalablement assignée dans le fonctionnement du pas. Trois statuts opératoires dans un pas de déduction sont possibles : proposition d'entrée, permis d'inférer, et conclusion. Ces statuts de proposition peuvent changer selon les situations. Par exemple, une proposition qui était la conclusion peut être une proposition entrée ou une règle d'inférence

[2] Dans cette image, les ronds clairs (huit ronds en haut) sont les hypothèses admises au départ ; les ronds légèrement foncés sont les propositions déduites qui sont recyclées comme les propriétés d'entrée pour le prochaine pas du raisonnement ; le rond en bas (« PARALLELOGRAMME KLMN ») est la conclusion de ce raisonnement ; les carrés sont les énoncés tiers qui permettent une nouvelle proposition. Un pas du raisonnement déductif est présenté dans cette image par les éléments ternaires remarqués par Duval : par exemple, les prémisses : « K est le milieu de [A, B] » et « N est le milieu de [A, D] ; l'énoncé tiers : « théorème des milieux » ; conclusion : « [B, D] est parallèle à [K, N].

dans une autre situation. Les statuts opératoires des propositions d'entrée et de la plupart des permis d'inférer sont préalablement fixés par le cadre théorique admis au départ.

En terme de valeur épistémique et valeur logique, comme les statuts sont bien définis au départ, les propositions dans la démonstration n'ont pour attribut que la valeur logique. Dans le processus de construction de la démonstration, les valeurs logiques mises en œuvre sont « vrai », « faux », et « inconnu ». Cette dernière valeur doit être transformée en « vrai » ou « faux » à la fin de la démonstration. La valeur épistémique ne joue donc pas un rôle important dans son fonctionnement.

Ainsi, la justification par la démonstration doit être tout à fait théorique et effectuée à l'intérieur du système de référence théorique de mathématiques admis au départ.

3.4.2 Le processus de construction d'une preuve

En vue de mettre en évidence les activités effectuées dans la construction d'une preuve, nous analysons ici le processus de la construction d'une preuve, en résumant les activités effectuées pendant ce processus. D'une façon générale, le processus global de construction d'une preuve se fait en deux phases :

- Processus de conjecture ;
- Processus de justification.

Ces deux processus sont très souvent en relation dialectique et ne peuvent pas être explicitement dissociés dans le processus effectif[3]. Mais, nous employons cette distinction juste pour analyser leurs natures ici. Ces processus envisagent deux productions de nature différente. Le premier processus se fait lors de la production ou invention d'un énoncé qui n'est pas auparavant acquit. Du point de vue du raisonnement mobilisé, plusieurs types de raisonnements et d'explorations des objets mathématiques sont mis en œuvre : induction, abduction, déduction, intuition, perception, etc. Du point de vue du modèle cK¢, le problème posé est « trouver la conjecture » c'est-à-dire le problème de production d'un objet ou une propriété mathématique, alors que le problème posé pour le processus de justification est « justifier la conjecture » c'est-à-dire le problème de production d'une preuve. Ainsi, deux problèmes différents sont abordés. En outre, selon Pedemonte (Table II.1), du point de vue du processus de résolution et de la référence mobilisée, le processus de conjecture et le processus de justification peuvent être différenciée comme la Table II.1.

Le processus de justification se fait lors de la production d'une ou plusieurs raisons

[3] Les deux processus ont les rapports étroits. L'équipe italienne étude, par exemple, la continuité de ces deux phases avec l'idée d'*« unité cognitive »* (Boero et al., 1996 ; Mariotti et al. 1997 ; Garuti et al. 1998 ; etc.). Nous pouvons aussi trouver l'interaction de ces deux phases dans la dialectique des preuves et réfutation de Lakatos (1985).

permettant une justification ou validation de l'énoncé déjà trouvé ou produit. Comme nous considérons que l'argumentation précède la démonstration, ce processus contient donc deux activités : *l'argumentation* qui exploite et produit des raisons ou arguments permettant de justifier une proposition et *la construction de la démonstration* qui formule et rédige une démonstration à partir des éléments trouvés dans le processus d'argumentation en construisant des inférences et en établissant des liens entre eux en vue de communiquer ou justifier la validité de la conclusion.

Avant de construire une démonstration bien structurée et établie, plusieurs raisonnements et argumentations seraient donc mobilisés. L'argumentation ne se termine pas par une seule étape de l'argumentation comme le schéma proposé par Toulmin (Figure II.4), mais plusieurs étapes peuvent intervenir. De plus, l'activité de justification ou d'argumentation n'avance pas comme la démonstration produite à partir des hypothèses admises au départ jusqu'à la conclusion. Sur la Figure II.5, quelque fois, les activités avancent du haut en effectuant les raisonnements déductifs, et d'autres fois, elles avancent depuis l'énoncé-cible qui se situe en bas. En outre, l'argumentation ne serait pas bien structurée comme la démonstration de la Figure II.5. Certains pas ou énoncés ne sont pas bien reliés entre eux. Plusieurs raisonnements ou activités intellectuelles qui produisent des arguments à partir de l'énoncé à justifier seront mélangés pour avoir la véracité d'une proposition. C'est pour cela que Duval (1992) introduit la notion d'« argumentation heuristique » pour la phase de recherches des arguments en mathématiques. Certains auteurs remarquent aussi que le raisonnement déductif et linéaire est rarement appliqué tel quel dans la construction d'une démonstration (Antibi, 1988 ; Pedemonte, 2002).

En revanche, dans la phase de démonstration, puisqu'elle a une structure bien établie sous la forme déductive à partir des hypothèses jusqu'à l'énoncé-cible comme des calculs numériques ou algébriques, les activités intellectuelles nécessaires dans cette phase sont des raisonnements déductifs sur des éléments déjà obtenus. Le processus de rédaction dans la plupart des cas avance comme la structure bien établie : écrire d'abord les hypothèses données, ensuite appliquer un permis d'inférer, écrire une conclusion intermédiaire, etc. Nous considérons donc que les conceptions sont mobilisées lors du raisonnement déductif.

3.4.3 Démonstration du point de vue de la conception

Du point de vue de la conception, la structure et le fonctionnement de la démonstration sont « très secs ». A partir des hypothèses admises jusqu'à la conclusion, les permis d'inférer en tant qu'opérateurs dont les contrôles sont les statuts théoriques aussi acceptés. Une fois qu'une nouvelle proposition est produite, elle est toujours vraie et ensuite recyclée à la prochaine inférence. La valeur épistémique n'intervient pas dans le fonctionnement.

Pedemonte (2002) propose un rapport intéressant entre démonstration et argumentation du point de vue de la conception. Elle distingue les énoncés en « théorème », « conjecture » et « énoncé prouvé » selon le système de référence mis en œuvre et les niveaux de validité (Table II.1).

Théorème	Enoncé prouvé	Conjecture
Enoncé	Enoncé	Enoncé
Démonstration	Preuve	Argumentation
Théorie mathématique	Conception	Conception

Table II.1 : la table est synthétisée à partir des tables proposées dans sa thèse par Pedemonte (2002, p.83 et p.85)

Dans cette table, le « théorème » est un « théorème mathématique » au sens de Mariotti et al. (1997) qui est défini par trois composants montrés dans la colonne de « théorème » (énoncé, démonstration et théorie mathématique). L'« énoncé prouvé » et la « conjecture » sont aussi respectivement définis par les trois composants présentés dans la table. La « conception » dans cette table indique le système de référence de l'« énoncé prouvé » et de la « conjecture ». La « conception » signifie ici un système de référence subjectif qui n'est pas institutionnalisé. Elle se différencie de la « théorie mathématique ». En effet, pour le théorème, les énoncés mobilisables sont seulement ceux qui sont admis par la théorie mathématique acceptée dans l'institution.

La nature du système de référence mis en œuvre pour le théorème est différente par rapport aux deux autres. Pour que la preuve devienne une démonstration ou que l'énoncé prouvé devienne un théorème, le système de référence doit être transféré de la conception qui comporte certains contextes ou contenus concernant les objets abordés à la théorie mathématique et qui n'admet que certains principes et règles déductives bien définis.

Si nous employons pour l'étude de la démonstration le modèle cK¢ comme outil de la modélisation de connaissance, la conception modélisée est tout à fait théorique et aucune ambiguïté ou contenu ne s'y trouve : tous les opérateurs sont les énoncés démontrés ou ceux qui sont dérivés directement des théorèmes, définitions ou axiomes admis au départ ; tous les contrôles qui portent sur la validité et le choix des opérateurs sont le statut opératoire (le permis d'inférer) admis ou attribué par une démonstration ; le contrôle qui porte sur la validité de la conclusion est la démonstration elle-même. En outre, tous les éléments doivent être bien explicités : ceux qui sont admis au départ ; ceux qui sont vrais ou faux ; etc. Ainsi, c'est une conception théorique et idéale qui permet une preuve théorique et idéale c'est-à-dire la démonstration.

La réflexion ci-dessus nous amène à clarifier l'intérêt de l'outil du le modèle cK¢ par rapport à la démonstration. Ce qui nous intéresse n'est pas seulement la démonstration produite elle-même, bien formulée et bien structurée, mais les connaissances investies dans le processus pour atteindre une telle justification. Or, l'analyse de la démonstration du point de vue de la conception permettrait d'établir la conception de référence afin d'analyser les conceptions effectivement mises en œuvre dans le processus de construction de la preuve. En effet, dans le processus de production d'une démonstration, plusieurs activités intellectuelles qui n'obéissent pas forcément au système de référence théorique sont effectuées (dans la Table II.1, c'est énoncé prouvé et conjecture). La conception théorique peut donc être une référence pour évaluer les conceptions effectivement mobilisées.

4 A PROPOS DE LA REGLE

Dans cette section, nous proposons la règle comme outil d'analyse de la connaissance dans les problèmes différents. Puis nous envisageons d'une part la clarification de la terminologie sur la règle, puisque plusieurs termes qui nous semblent proches sont employés jusqu'ici, et d'autre part une présentation des recherches effectuées qui portent sur la règle.

4.1 Terminologie : la règle, l'opérateur, le permis d'inférer, etc.

Nous avons employé jusqu'ici plusieurs termes qui semblent proches dans leurs significations : la règle, l'opérateur, le permis d'inférer, la règle d'inférence, l'énoncé tiers, la loi de passage, etc. Nous clarifions ici notre utilisation de ces termes par rapport à la règle.

Nous employons le terme « règle » pour l'opérateur, la loi de passage, l'énoncé tiers, le permis d'inférer, etc. qui peuvent être exprimés sous la forme « si A, alors B ». Tous les opérateurs sont bien des règles opératoires pour la résolution de problèmes. Même si les opérateurs dans les actions de la résolution ne sont pas sous la forme « si A, alors B » et ne sont pas explicites, nous utilisons cette forme comme un outil qui permet de modéliser et d'analyser la connaissance du point de vue de la preuve, c'est-à-dire que cela ne signifie pas que les individus possèdent explicitement une telle règle.

Le terme « permis d'inférer » désigne la loi de passage, l'énoncé tiers, etc. dans un pas de raisonnement et argumentation qui permet de passer des données à l'énoncé-cible pour la justification, ou de produire à partir des données une nouvelle information. Le permis d'inférer est donc un opérateur dans un pas de raisonnement.

Or, nous considérons que la règle ne serait pas toujours mobilisée comme opérateur. Ce point sera présenté dans l'analyse théorique de la résolution de problèmes dans le Chapitre IV.

Ainsi, la règle sera mise en œuvre d'une façon la plus générale ; l'opérateur sera mis en œuvre dans le contexte de la résolution d'un problème ; le permis d'inférer sera réservé dans le contexte de raisonnement ou argumentation.

4.2 La règle comme outil d'analyse

Le processus de construction d'une preuve est souvent long et contient plusieurs étapes. Les activités intellectuelles engagées pendant la construction d'une preuve ou démonstration sont très variées. Nous avons adopté le point de vue du modèle cK¢ pour accéder à la connaissance engagée dans les différentes activités de construction de la preuve. Le modèle cK¢ nous permet de remarquer d'abord la règle opératoire dans la structuration de raisonnement et ensuite le contrôle qui est derrière de cette règle et qui la soutient. Particulièrement, le point de vue de la règle a permis de dévoiler la structure implicite du raisonnement du point de vue de la connaissance engagée et le fonctionnement effectif. C'est cette règle qui effectue directement un raisonnement. D'ailleurs, la mobilisation de la règle n'est pas effectuée toute seule. Le point de vue du contrôle nous permet de remarquer la connaissance derrière la règle. En effet, c'est le contrôle qui désigne cette règle comme opérateur dans une situation donnée et atteste de sa validité.

En même temps, quelques composants remarqués dans le modèle de Toulmin dans le fonctionnement de l'argumentation, la loi de passage et le support, sont très proches des éléments de conception. Cela permet de relier la conception et l'activité d'argumentation qui est dominante dans la construction de la preuve. Autrement dit, le modèle de Toulmin permet d'analyser l'argumentation du point de vue de la connaissance.

Ainsi, nous considérons que la règle, surtout le point de vue de la règle, peut être un outil d'analyse de la connaissance non seulement engagée dans les activités de la résolution de problème en mathématiques qui nécessite des raisonnements, mais aussi engagée dans les activités de la construction de preuve qui nécessite l'argumentation et plusieurs types de raisonnements. Le modèle cK¢ est envisagé plutôt pour ces premières activités que les deuxièmes, mais le modèle de Toulmin permet de relier ces deux activités. Nous remarquerons donc la mise en œuvre de la règle et du contrôle dans les analyses de la connaissance de notre travail. Elle peut être un outil commun qui permet d'expliciter le rapport entre les connaissances engagées dans différents types de problèmes.

La règle mobilisée par les élèves ne serait pas nécessairement explicite, même pour les sujets qui raisonnent pour la construction de la preuve et dans les activités de la résolution des problèmes. Or, nous l'emploierons comme révélateur de la connaissance dans les activités.

4.3 Recherches sur la règle : l'état de l'art

La remarque concernant la règle n'est pas nouvelle. Dans les recherches en didactique des mathématiques, la règle qui peut être exprimée sous la forme « si ..., alors ... » est analysée de certains points de vue[4]. Nous présentons par la suite deux types de travaux liés plus ou moins

[4] Hors du domaine de la didactique des mathématiques, le point de vue de la règle est aussi employé dans les travaux effectués depuis longtemps de l'Intelligence Artificielle. Dans ce domaine, en considérant à la règle comme aspect crucial de la connaissance, le système expert qui résolve des problèmes est développé. Il est un logiciel capable de répondre à des questions en effectuant un raisonnement à partir de faits et de règles connus. L'ensemble de règles est appelé « la base de connaissances ».

à la règle, en vue de mieux situer notre problématique sur la règle. Le premier est le travail de groupe italien sur le processus de génération de la conditionnalité, et le deuxième est le travail sur l'implication.

4.3.1 Processus de génération de la conditionnalité

Dans les travaux effectués à ce jours, le groupe italien considère la conditionnalité des énoncés (« the conditionality of the statements ») exprimés sous la forme « si ..., alors ... ». Celle-ci correspond dans notre travail à la « règle ». Leur intérêt est en premier lieu le processus de génération de la conditionnalité en vue d'une conjecture (Boero et al., 1996 ; Boero et al., 1999) : comment peut-elle être générée ? Dans quelles conditions ? etc. Ensuite, ils analysent le rapport entre ce processus et le processus de construction d'une preuve pour la conditionnalité générée (Garuti et al., 1996 ; Garuti et al., 1998). Ils proposent dans cette direction la notion d'« unité cognitive » qui permet d'analyser le rapport entre les processus de la conjecture et de la preuve.

La règle remarquée dans ces travaux n'est pas celle qui est mise en œuvre dans le processus de preuve, mais plutôt une règle globale qui nécessite une preuve. En effet, toutes les règles mises en jeu sont les conjectures, et la preuve de ces conjectures est aussi importante dans leurs travaux. Ce point les éloigne de notre intérêt. La règle que nous considérons est plutôt locale et celle qui est mobilisée implicitement ou non dans les activités de la résolution de problème, voire dans le processus de construction de la preuve. Elle peut avoir un statut non-théorique et la justification d'une telle règle ne serait pas forcément demandée. Notre intérêt est donc local et de mettre en évidence les règles mobilisées et leurs natures, par exemple, quel niveau de validité est attribué ou attaché par les élèves à la règle effectivement mobilisée. Dans le processus d'argumentation et dans la résolution de problème, la règle mobilisée par les élèves ne serait pas forcément acceptée par la théorie et plusieurs règles de validité ambiguë seraient mobilisées.

Or, nous nous intéressons à leur analyse dans le processus de génération de conditionnalité, que la règle soit globale ou locale. Parce qu'elles nous permettent de proposer des idées sur la nature de la mobilisation d'une règle par les élèves, c'est-à-dire sur le contrôle ou le support d'une règle. Dans ce cas, il est indifférent qu'une telle règle soit la conjecture ou celle mobilisée localement pendant la construction d'une preuve. Ainsi, nous présentons ici particulièrement la nature de quelques processus de la génération de conditionnalité.

Boero et al. (1999) identifient quatre types de processus de génération de la conditionnalité dans la phase de la conjecture. Deux d'entre eux reposent sur la causalité trouvée dans les expériences (PGC1 et PGC2) : à partir de l'exploration dynamique, les élèves trouvent une condition qui permet un phénomène mathématique. Les deux autres reposent sur la généralisation à partir des analyses intensives ou extensives de l'objet mathématique (PGC3 et PGC4). Nous présentons en premier lieu un exemple de PGC1 proposé par Boelo et al. (ibid.) dans le domaine de la géométrie.

> *EX.1.1.: geometry field, undergraduate students. Task: "In the euclidean environment, formulate and prove a conjecture concerning the possible existence of a minimum area among the areas of all triangles obtained by closing an angle with straight lines passing through a point on the bisecting line of the angle itself". (ibid. p.140)*

Pour la tâche ci-dessus, les auteurs identifient un processus de la génération par un élève. La règle générée est « *if the passing through line is perpendicular to the bisecting line, the area gets its minimum* ». Le premier support est l'expérience sur le dessin dessiné sur le papier, c'est-à-dire que l'élève trouve à partir de la perception et des expériences de plusieurs cas que lorsque le segment est perpendiculaire, l'aire est la plus petite. Ensuite, l'élève trouve que lorsque le segment n'est pas perpendiculaire, l'aire perdue par rapport à la figure initiale (le segment est perpendiculaire) est plus petite que l'aire gagnée. La justification proposée à la fin, nous semble-t-il, est un « *exemple générique* », l'un des types de preuve classifiés par Balacheff (1987). La spécificité du processus PGC1 du point de vue du processus de génération est « *the analysis of that configuration suggests the condition A, hence "if A, then B"* » (Boero et al. ibid. p.140), c'est-à-dire à partir de l'exploration ou l'expérience, une condition est identifiée.

Le processus de PGC2, dont nous ne présentons pas l'exemple, est proche de celui de PGC1. Les auteurs décrivent comme :

> *« noticing a regularity B in a given situation, then identifying, by exploration performed through a* transformation *of the situation, a condition A, present in the original situation, such that B may fail to happen if A is not satisfied » (ibid. p.141)*

Le processus est donc de remarquer une régularité B dans une situation donnée, puis identifier une condition A qui est spécifique de la situation initiale en analysant cette régularité dans d'autres situations. Le rapport entre deux énoncés A et B est d'abord la causalité identifiée dans les expériences. Puis, ce rapport est forgé par une exploration d'autres situations dans lesquelles si la condition A n'est pas satisfaite, B n'est pas provoqué. Les supports de cette règle sont premièrement une expérience de la causalité entre A et B, et deuxièmement d'autres expériences de la causalité « si non A alors non B ». Bien entendu la règle « si non A alors non B » n'est pas équivalente à « si A alors B » et que la seconde n'élève pas nécessairement la validité de la première.

L'enjeu de deux autres processus PGC3 et PGC4 est la généralisation de la condition A. Nous les voyons avec un exemple proposé pour la tâche suivante.

> *EX. 3.2.: V-graders (cf. Bartolini Bussi et al., to appear). Task: "Ascertain what*

happens when the number of cog-wheels, engaged and arranged in a ring configuration, increases, having already found that three can not turn all together, while four do". (ibid. p.141)

A partir des expériences lors de cinq ou six roues dentées, les élèves trouvent une règle « si le nombre de roues est pair, alors elles peuvent rouler » et « si le nombre est impair, alors elles ne roulent pas ». C'est le processus de PGC3. Dans ce cas, c'est la condition A qui est généralisée par les expériences. Le processus de généralisation est qu'à partir de l'exploration extensive (pour plusieurs cas), la condition générale A est obtenue qui implique B. Le moyen de la validation pour PGC3, nous semble-t-il, l'« *empirisme naïf* », l'un des types de preuve classifiés par Balacheff (1987).

Le processus PGC4 est décrit avec la même tâche que pour PGC3. Le point remarqué par les auteurs est qu'après avoir trouvé une régularité, le cas particulier est un exemple ou un moyen de générer une règle générale. Pour la tâche ci-dessus, une réponse suivante de l'élève est présentée :

"With 6 wheels, it all turns well, but if I put one more (he draws a small wheel between one pair of wheels and draws two arrows beside it - one clockwise and the other counter-clockwise - very close to the two wheels it is contacting); this wheel prevents the others from turning. It is an odd number. It is like with 5 wheels with respect to 4. If they are odd, they can not turn." (ibid. p.141)

A partir du cas de six roues, l'élève montre que le cas de six roues avec une autre roue ne permet pas de rouler. Puis, il généralise pour d'autres cas. Ainsi, l'exploration intensive d'un cas particulier conduit à une règle générale (ibid. pp.141-142). Dans ce cas, ce qui est généralisé est le même que PGC3, la condition A. Il semble que le cas particulier dans les expériences de PGC4 est un « *exemple générique* » comme l'exemple de PGC1.

La nature de deux premiers processus (PGC1 et PGC2) est d'un ordre différent de celui des deux derniers processus (PGC3 et PGC4). Dans les deux premiers cas, la généralité de la condition A n'est pas en jeu et est déjà supposée, alors que le niveau de validité sur la généralité est discuté dans les deux derniers cas.

Boero et al. (1996) considèrent que la conditionnalité peut être générée à partir d'une activité d'exploration dynamique de situation problème. Ensuite, dans leurs travaux, ils mettent en évidence le rapport (la continuité et la rupture) entre ces processus et la construction de la preuve en terme d'« *unité cognitive* ».

Nous considérons que certains processus sont possibles pour la génération de règles qui seront mobilisée dans le processus de construction de la preuve. Nous analyserons aussi dans notre observation ces processus du point de vue du contrôle ou support de la règle.

4.3.2 La règle du point de vue de l'implication

Dans les recherches en didactique des mathématiques, la « règle » est aussi analysée en terme d'« implication » de la logique (Durand-Guerrier, 1995 ; Deloustal-Jorrand, 2000 ; Durand-Guerrier, 2003 ; etc.). Dans les travaux que nous venons de mentionnés, la nature de la règle elle-même est bien analysée. Nous présentons ici quelques travaux effectués à ce jour afin de mieux comprendre les types de règles en mathématique et hors des mathématiques.

Durand-Guerrier (2003 ; 1995) présente d'après Quine, quatre types d'énoncés conditionnels : « the common understanding », « the propositional connective », « the logically valid conditionnal » et « the generalized conditionnal ».

- « the common understanding » : le cas où l'antécédent faux de « si p alors q » n'est presque jamais considéré.
- « the propositional connective » : aussi appelé « implication matérielle » est un énoncé conditionnel « si p alors q » dans lequel p et q sont des variables propositionnelles. Ceci suit la table de vérité, c'est-à-dire que l'implication est fausse si et seulement si l'on a p et (non q).
- « the logically valide conditionnal » : la forme d'un énoncé conditionnel reliant deux énoncés du calcul des propositions. Par exemple, le modus ponens « $p \wedge (p \Rightarrow q)$ implique q ». Dans ce cas, l'énoncé conditionnel « $p \Rightarrow q$ » est toujours vrai.
- « the generalized conditionnal » : est l'énoncé conditionnel « (x) (si P(x), alors Q(x)) » qui, p et q étant des prédicats, s'interprètent comme des propriétés pour les objets de la classe considérée. La quantification intervient.

L'auteur remarque particulièrement le calcul des prédicats dans lequel la quantification intervient. Parce qu'elle considère que pour « *l'activité mathématique, la logique de référence pertinente est le calcul des prédicats, le calcul des propositions étant le système formel minimum qui permet de le construire* » (1995, p.211). Elle remarque aussi comme aspect de l'implication du point de vue de la quantification une formule du calcul des prédicats qui est non close, c'est-à-dire qu'elle contient des variables libres. Cela est une extension de l'implication matérielle qui se trouve comme un pont entre l'implication matérielle et le conditionnel généralisé (2003, p.11).

Le point de vue intéressant des travaux de Durand-Guerrier est la différenciation entre le calcul des propositions et le calcul des prédicats. Une telle différenciation n'était pas prise en compte dans notre structuration du raisonnement et ni dans notre analyse de l'argumentation. Nous considérons que dans les exemples donnés jusqu'ici, les règles présentées, sauf un exemple de PGC1 proposé par Boero et al. « si la droite est perpendiculaire à la bissectrice, alors l'aire prend son minimum », relèvent toutes du calcul des prédicats ou du conditionnel généralisé. Il semble que l'exemple de Boero et al. se trouve entre le calcul des prédicats et le calcul des propositions. En effet, la généralité est prise en compte dans cette implication, mais l'importance est mise plutôt sur la propriété géométrique « perpendiculaire ». C'est pourquoi le moyen de validation pour PGC1 (exemple générique : l'aire gagnée est plus grande que l'aire perdue) porte sur la grandeur de l'aire et non pas sur la généralité.

D'autre part, Deloustal-Jorrand (op. cit., pp.37-44) propose trois points de vue sur l'implication mathématique : « raisonnement déductif », « ensembliste » et « logique formelle ». Sans donner le détail de chaque point de vue, nous nous contentons de rappeler le schéma qui décrit ces points de vue (Figure II.6).

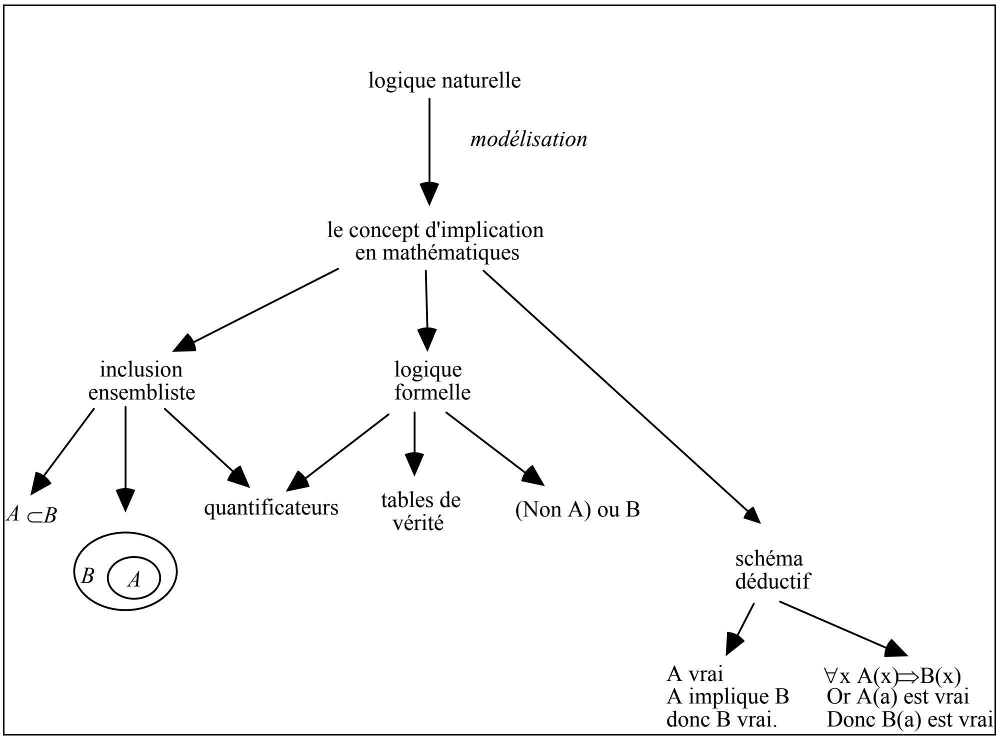


Figure II.6 : le schéma proposé par Deloustal-Jorrand (2000, p.37)
sur le rapport entre différents points de vue sur l'implication

Le point qui nous intéresse parmi ces trois est surtout le point de vue du raisonnement déductif. Parce que, d'une part, le lien entre deux énoncés A et B peut être établi par la causalité comme dans le cas du processus de génération de la conditionnalité de Boero et al. présenté ci-dessus. D'autre part, parce que l'implication que les élèves utiliseraient dans le contexte de la construction de preuve est particulièrement mise en œuvre lorsque A est vrai. Ce point de vue est adapté à la règle que nous avons remarquée dans la structuration de plusieurs raisonnements ainsi que le raisonnement déductif et l'argumentation.

Les différents points de vue sont analysés par les travaux présentés ci-dessus sur l'implication. Nous considérons que ceux-ci nous permettent de mieux saisir la nature des règles qui seront mobilisées par les élèves.

5 CONCLUSION

Ce chapitre avait pour objectif d'identifier un moyen permettant de repérer des connaissances dans une situation de construction de la preuve. Nous avons présenté le modèle cK¢ comme outil d'analyse des connaissances dans la résolution de problème en mathématiques. Puis, en mettant en évidence la nature des activités dans le processus de construction de la preuve, nous avons cherché un moyen d'identification de la connaissance dans la preuve. A partir de ces analyses, le modèle de Toulmin était choisit comme outil permettant d'analyser la connaissance dans la structure et le fonctionnement de l'argumentation, c'est-à-dire dans le processus de construction de la preuve. C'est grâce à ce modèle que le modèle cK¢ peut être mis en œuvre pour l'analyse de la connaissance dans l'argumentation. Le modèle de Toulmin est une médiation entre l'argumentation et le modèle cK¢. Nous avons ainsi considéré du point de vue du modèle cK¢ et du modèle de Toulmin la règle comme étant un outil permettant d'une analyse à la fois des activités de la résolution de problème et de la construction de preuve.

La pertinence du modèle cK¢ en vue de clarifier la spécificité de la connaissance engagée dans le processus de preuve par rapport à d'autres types de problèmes, sera examinée dans l'analyse théorique et l'analyse de donnée expérimentale plus loin.

Le modèle cK¢ nous permet de problématiser les connaissances dans des problèmes différents. Du point de vue de ce modèle, il se peut que les conceptions différentes soient mobilisées en fonction du problème posé, puisqu'une conception est dépendante du problème posé dans une situation donnée. Autrement dit, nous ne savons pas encore quelle conception est mobilisée dans le contexte de la preuve et dans d'autres types de problèmes. Il importe ainsi de faire une analyse des conceptions dans d'autres types de problèmes afin de mettre en évidence la particularité de la conception mobilisée dans la construction de la preuve. Dans notre travail, la symétrie orthogonale est choisie comme objet mathématique précis pour l'analyse de la connaissance dans la preuve. Le modèle cK¢ propose donc d'analyser cet objet dans d'autres types de problèmes, tels que la construction et la reconnaissance de la figure symétrique, etc. que la preuve.

Etant donnée que la règle émerge en tant qu'élément crucial dans la conception et dans l'argumentation, elle est un outil qui permet de mettre en évidence les traces de connaissances dans les activités de résolution de problème et de construction de la preuve. Nous analyserons donc avec la règle comme outil commun, les connaissances mobilisées par les élèves dans les problèmes différents.

Ce travail nous a permis de revoir nos différentes questions et de les résumer de façons plus concrètes. Nous les présentons des manières suivantes :

- Quelles règles concernant la symétrie orthogonale sont mobilisées par les élèves dans le processus de construction de la preuve et dans d'autres types de problèmes (construction géométrique et reconnaissance) ?
- Quelles sont leurs natures ? Quels sont leurs supports ou contrôles ? Comment une règle est-elle générée ?
- Quel est le rapport entre les éléments analysés dans la preuve et dans d'autres problèmes ?

Nous essayons de répondre à ces questions dans les chapitres qui suivent.

Chapitre III

A PROPOS DE LA SYMETRIE ORTHOGONALE

Nous avons choisi la symétrie orthogonale comme domaine mathématique pour l'analyse du rapport entre la nature de la preuve et la connaissance y engagée (cf. Chapitre I). Ce chapitre a pour objectif de mettre en évidence la nature de la symétrie orthogonale qui sera investie dans le processus de construction d'une preuve. Nous essayons d'expliciter au premier lieu le fonctionnement de la notion de symétrie orthogonale en mathématiques et sa position dans l'enseignement scolaire. Celle-ci permettra aussi de justifier le choix de notion dans notre problématique. Ensuite, nous présentons, à partir des travaux effectués jusqu'aujourd'hui dans le domaine de didactique, certains résultats qui permettent de mieux comprendre les activités autour de la notion de symétrie orthogonale.

1 LA SYMETRIE ORTHOGONALE

Le terme de « symétrie » se trouve très souvent dans la vie courante : dans la réflexion des images sur le miroir ou l'eau, dans la nature, dans l'architecture, etc. L'homme y trouve très souvent une beauté particulière. Aussi est-il souvent mis en œuvre en mathématiques et en disciplines scientifiques, en physique, en chimie, en biologie, etc. Puisque la notion « symétrie » prend une place particulière dans la vie courante ainsi que dans les disciplines scientifiques, elle est aujourd'hui un objet d'enseignement en mathématiques dans l'enseignement secondaire en France et en d'autres pays.

Par la suite, nous présentons d'abord la nature de la symétrie orthogonale du point de vue mathématique en explicitant les objets géométriques qui sont appelés « symétrique ». Ensuite, la position de la symétrie orthogonale dans l'enseignement secondaire en France et au Japon est présentée.

1.1 Symétrie en mathématiques

La notion de « symétrie » est vague. Le terme de « symétrie » est très souvent utilisé non seulement en mathématiques mais aussi dans la vie quotidienne. Par exemple, dans son ouvrage « Symmetry » (1952), Weyl analyse la symétrie dans le monde physique du point de vue des mathématiques. Nous clarifions ici ce que nous entendons par ce terme. Le terme de « symétrie » est aussi trouvé en algèbre et en analyse. Nous le considérons principalement en géométrie.

Dans *Encyclopaedia of mathematics* (1993) qui est mis à jour en s'appuyant sur l'encyclopédie soviétique de mathématiques, la symétrie est définie par deux moyens.

> *1) An involutory orthogonal transformation that changes the orientation (an involutory transformation is a transformation that, then applied twice, yields the identity).*
>
> *2) Symmetry is the following property of a geometrical figure Φ: Φ is mapped onto itself under the action of some group G of transformations, called* the group of symmetries *of Φ* (ibid., Volume 9, p.102)

Le terme d'« orthogonal transformation » signifie une transformation affine dont la matrice est orthogonale et dans un espace euclidien peut être réduit aux rotations et réflexions (ibid., volume 7, p.39). Elle conserve la longueur de vecteurs, donc isométrique du point de vue de la géométrie euclidienne. La première définition caractérise la symétrie en tant que transformation isométrique avec l'involution, c'est-à-dire une transformation orthogonale T est une « symétrie » si et seulement si T (F) = F' et T (F') = F pour un objet ou une figure F quelconque sur un espace euclidien. Par exemple, une transformation géométrique S d'un plan sur lui-même qui transforme un point P à un autre P' respectant les propriétés géométriques « PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M $\in$ *d*) » est une symétrie par rapport à la droite *d*, puisqu'elle permet « S (P) = P' et S (P') = P » et que la transformation est orthogonale[1]. Dans la Figure III.1, cette symétrie permet de transformer le triangle ABC au triangle A'B'C' et vice-versa : S (ΔABC, *d*) = ΔA'B'C' et S (ΔA'B'C', *d*) = ΔABC.

[1] La transformation est exprimée par une matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ en géométrie analytique (un axe de coordonnées est la droite *d*).

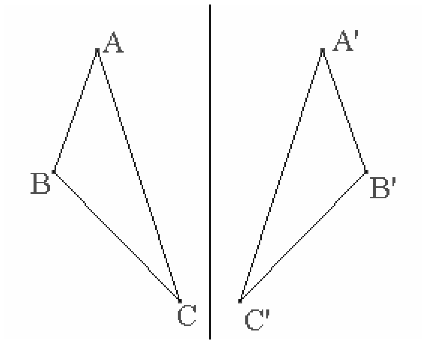


Figure III.1 : Deux triangles (une droite *d* est celle entre deux triangles)

La deuxième définition caractérise la symétrie en tant que propriété d'une figure géométrique, c'est-à-dire une figure F dispose une propriété « symétrie » si T (F) = F sous l'action d'un groupe de transformations. Dans l'exemple de triangle ci-dessus, la figure qui consiste de deux triangles dispose une propriété de symétrie sous l'action d'un groupe de la transformation S (S (ΔABC $\cup$ ΔA'B'C', *d*) = ΔABC $\cup$ ΔA'B'C') et de la transformation identité I. Pour cette définition, différentes transformations peuvent être élément d'un groupe : translation, rotation, réflexion, etc. Les symétries données et analysées par Weyl (1952) s'appuient aussi sur cette définition : symétrie de translation, symétrie de rotation, symétrie relationnelle, symétrie ornementale, etc.

Par ailleurs, dans un dictionnaire français de mathématiques, la symétrie est définie simplement par « automorphisme involutif d'un espace vectoriel » (Chambadal, *Dictionnaire de mathématiques*, 1981, p. 271). L'objet transformé dans cette définition est un vecteur dans un espace vectoriel. Un exemple suivant est donné.

> *« Soient E un espace vectoriel sur un corps commutatif K, E' et E" des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E. Tous vecteur $\vec{x}$ de E s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme $\vec{x} = \vec{x'} + \vec{x''}$, où $\vec{x'}$ appartient à E' et $\vec{x''}$ à E". L'application $\vec{x} \mapsto \vec{x'} - \vec{x''}$ est une symétrie de E, appelée symétrie par rapport à E' parallèlement à E". » (pp.271-272)*

L'application dans cet exemple est une transformation involutive d'un espace vectoriel sur lui-même. La première définition de celles qui sont donnée ci-dessus dans l'encyclopédie est proche de cette définition. Dans tous les deux cas, la propriété d'involution est en jeu.

Le terme de « symétrique » est aussi utilisé à part « symétrie ». Dans le dictionnaire de la langue française, le terme de « symétrique » est présenté comme substantif et comme adjectif (*Le Grand Robert*, 1987). Dans les parties concernant la géométrie, le substantif « symétrique » indique la figure transformée par une symétrie. Dans l'exemple de triangle ci-dessus (Figure III.1), le symétrique du triangle ABC par rapport à la droite *d* est le triangle A'B'C'. L'adjectif « symétrique » indique deux sens. D'une part, il se dit de « deux figures en rapport de symétrie » (ibid., p.97), c'est-à-dire lorsqu'une symétrie transforme deux figures de l'une à l'autre, la relation entre ces deux figures est appelée « symétriques ». Avec les triangles ci-dessus, les triangles ABC et A'B'C' sont symétriques par rapport à la droite *d*. D'autre part, il indique aussi « qui a de la symétrie » (ibid., p.97), c'est-à-dire la propriété d'une figure ayant un axe de symétrie est appelée « symétrique ». L'exemple « Le triangle isocèle est symétrique. Le cercle, figure symétrique par rapport à un point » (ibid., p.97) est donnée dans *Le Grand Robert*. Ce sens correspond à celui de la deuxième définition de l'encyclopédie ci-dessus : la symétrie en tant que propriété d'une figure symétrique.

La symétrie que nous aborderons dans notre travail est celle orthogonale ayant une propriété d'orthogonalité par rapport à l'axe et une propriété d'équidistance : « PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M $\in$ *d*) ». Elle est aussi appelée « symétrie axiale » ou « réflexion ». Elle est définie de la façon suivante avec les notations qui seront utilisées dans nos analyses.

D1 : Sym (P, P', *d*) $\Leftrightarrow$ PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*)

La notation « Sym (F, F', *d*) » signifie « deux figures F et F' sont symétriques par rapport à la droite *d* ». Lorsque la transformation d'une figure à une autre doit être accentuée, la notation « F' = Sym (F, *d*) » sera aussi utilisée. Dans ce cas, nous la lirons « la figure F' est symétrique de la figure F par rapport à la droite *d* ».

La symétrie orthogonale peut être aussi définie de deux façons suivantes. Elles sont équivalentes entre elles du point de vue des mathématiques.

D2 : Sym (P, P', *d*) $\Leftrightarrow$ PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M $\in$ *d*)

D3 : Sym (P, P', *d*) $\Leftrightarrow$ PM = MP' et PN = NP' (M $\neq$ N $\in$ *d*)

Dans ces trois définitions, deux propriétés autres que l'orthogonalité sont mises en œuvre : « PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) » et « PM = MP' (M $\in$ *d*) ». Toutes les deux concernent l'équidistance de deux points à partir d'un point sur une droite. Mais, nous appelons la première « la propriété de milieu » et la deuxième « la propriété d'équidistance », parce que deux propriétés différencient la première définition (D1) de la deuxième (D2). Cette terminologie est commune au travail antérieur de Grenier (1988).

1.2 Symétrie orthogonale dans l'enseignement scolaire

Le terme de « symétrie » apparaît dans les programmes de l'école primaire en France et dès la première année de l'enseignement secondaire inférieur au Japon (correspondre à la classe de 5^{e} en France) [2]. Nous présentons ici la position de la symétrie orthogonale dans l'enseignement scolaire des mathématiques en France et au Japon et ensuite comment elle est

[2] L'enseignement secondaire inférieur au Japon correspond aux 5ème, 4ème et 3ème du collège en France.

abordée dans les manuels scolaires.

1.2.1 Dans les programmes du collège en France

La transformation géométrique s'occupe une place importante dans l'enseignement des mathématiques au collège en France. Dans toutes les classes de programmes, l'apprentissage et l'enseignement des transformations géométriques se composent un des objectifs de programmes en mathématiques. Nous présentons quelques extraits de programmes au collège[3].

> Au collège (programme de 6e 1996, p.25)
> *utiliser quelques transformations géométriques simples, telles symétries ou translations, permettant au delà des comparaisons de figures géométriques d'envisager l'espace géométrique tout entier ;*
>
> La classe de 6ème (programme de 6e 1996, p.31)
> *L'objectif fondamental, en sixième, est encore la description et le tracé de figures simples. (…) les connaissances sont réorganisées à l'aide de nouveaux outils, notamment la symétrie orthogonale par rapport à une droite (symétrie axiale).*
>
> La classe de 5ème et 4ème (programme de 5e et 4e 1996, p.2)
> *Le programme du cycle central du collège a pour objectif de permettre:*
> *en géométrie, (…) l'approche de transformations du plan (symétrie centrale, translation),*
>
> La classe de 3ème (programme de 3e, 1996, p.106)
> *Le programme de la classe de troisième a pour objectif de permettre*
> *- en géométrie :*
> *de compléter (…) l'approche des transformations par celle de la rotation,*

Une transformation géométrique est ainsi progressivement introduite comme objet d'apprentissage chaque année au collège en France : 6ème : symétrie axiale ; 5ème : symétrie centrale ; 4ème : translation ; 3ème : rotation, compositions de symétries centrales ou de translations. La symétrie orthogonale apparue en classe de 6ème est la première transformation géométrique à étudier au collège. Les activités principales indiquées dans le programme sont la construction de figures symétriques ou d'axes de symétrie et la mise en évidence de conservation. La symétrie orthogonale est aussi abordée comme un outil qui permet de construire certaines figures (triangle isocèle, triangle équilatéral, losange, rectangle, carré,

[3] Les programmes des collèges sont en train de changer. Le nouveau programme de 6ème est appliqué à la rentrée de l'année scolaire 2005-2006. Cependant, il est pertinent d'utiliser les anciens programmes, parce que les élèves observés dans notre travail sont ceux qui suivent les programmes précédents. Par ailleurs, la position de symétrie, en particulier celle de symétrie orthogonale, n'a pas beaucoup changée dans les nouveaux programmes de 6ème, 5ème et 4ème publiés en 2004 et en 2005.

médiatrices, bissectrice, etc.) et de réorganiser les connaissances acquises sur les figures géométriques.

Par ailleurs, le programme avertit « La symétrie axiale n'a ainsi, à aucun moment, à être présentée comme une application du plan dans lui-même » (programme 6^{e}, 1996, p.31).

1.2.2 Dans les manuels scolaires en France

Comme nous l'avons vue dans les programmes, la symétrie orthogonale est un objet d'étude en classe de 6ème au collège. Nous présentons ici un aperçu de la partie de la symétrie orthogonale dans les manuels scolaires comment elle est introduite et abordée par rapport à d'autres propriétés géométriques. Notre intérêt ici n'est pas l'analyse détaillée du savoir abordé dans les manuels, mais une présentation générale du processus d'enseignement dans les manuels. L'analyse plus détaillée de problèmes abordés dans les manuels sera proposée plus loin (Chaitre IV).

Les manuels scolaires que nous avons consultés sont donnés dans la liste suivante. Tous ces manuels reposent sur le programme de 6ème publié en 1996.

- ✓ *Le Nouveau Pythagore 6ème*, Hatier, 2002
- ✓ *Le Triangle Maths 6ème*, Hatier, 2000
- ✓ *Dimathème 6ème*, Didier, 2000
- ✓ *Cinq sur Cinq 6ème*, Hachette Education, 2000
- ✓ *Math 6^{e} Nouveau Décimale*, Belin, 2000
- ✓ *Math 6^{e} Collection Transmath*, Nathan, 2000
- ✓ *Mathématiques Edition 2000 6^{e}*, Bordas, 2000

Chaque chapitre de la plupart des manuels scolaires en France aujourd'hui se composent de trois parties « activités », « cours », et « exercices »[4]. La partie « activités » proposent des activités d'introduction de la notion à apprendre en s'appuyant sur les connaissances auparavant acquises ou sur les connaissances de la vie courante. Elle aurait pour objectif de faire percevoir une nécessité de cette notion. La deuxième partie « cours » est un bilan ou une synthèse des savoirs mathématiques sur la notion à apprendre qui a émergée dans les activités de la classe. Le savoir-faire, comme une méthode de la construction de figures symétriques et d'axe de symétrie, est aussi proposé dans cette partie. La troisième partie « exercices » est l'ensemble d'exercices sur la notion à apprendre.

[4] Le nom de chaque partie varie selon des manuels, mais les formes de travail proposées de ces parties sont presque les mêmes. Par exemple, dans le manuel Dimathème 6^{e}, la partie « cours » dans laquelle la définition et les propriétés de la symétrie orthogonale sont présentées est appelé « retenir le cours ». La méthode de la construction de la figure symétrique est dans une section appelée « retenir les méthodes ». Le manuel Triangle est le même que Dimathème 6^{e} : « cours » est appelé « connaissance » et la méthode de la construction est donnée dans une section « méthodes ».

La notion de symétrie orthogonale est abordée dans la partie « activité » en introduisant le pliage ou l'effet de miroir avec des dessins symétriques issus de la vie courante. Les activités proposées par les manuels scolaires sont en principe :

- La reconnaissance de figures ou dessins symétriques par rapport à une droite
- La construction de figures symétriques (points, figures) à main levée
- La construction de figures symétriques (points, figures) avec les instruments
- La construction d'axe de symétrie aux figures proposées à main levée
- La construction d'axe de symétrie aux figures proposées avec les instruments
- La recherche de propriétés géométriques attachées à la symétrie orthogonale (équidistance, orthogonalité, conservation de la longueur, de l'aire, de l'angle, et du milieu d'un segment, et le rayon de deux cercles symétriques)
- Le rapport entre la symétrie orthogonale et les figures usuelles
- Le rapport de la symétrie orthogonale avec la bissectrice et la médiatrice

Dans la partie « cours », les objets mathématiques apparus dans l'« activité » sont formalisés. Dans tous les manuels que nous avons consultés, la définition et les propriétés géométriques attachées à la symétrie orthogonale sont premièrement données. Les définitions de la symétrie orthogonale données dans les manuels sont les suivantes.

> *On dit que deux figures sont symétriques par rapport à une droite d quand on peut les superposer en pliant selon la droite d. (Le Nouveau Pythagore, 2002, p.142)*
>
> *Figures symétriques : Deux figures sont symétriques par rapport à un axe, si, en pliant suivant l'axe, les deux figures se superposent (Triangle, 2000, p.203)*
>
> *Dire que le point P est le symétrique du point M par rapport à la droite (d) veut dire que la droite (d) est la médiatrice du segment [MP] (Dimathème, 2000, p.240)*
>
> *Une droite est un axe de symétrie d'une figure si deux parties de la figure se superposent par pliage le long de cette droite. (Cinq sur Cinq 6^e^, 2000, p.212)*
>
> *Deux figures sont symétriques par rapport à une droite si les deux figures se superposent par pliage le long de cette droite. (Cinq sur Cinq 6^e^, 2000, p.213)*
>
> *Symétrie axiale : Symétrique d'un point : Deux points distincts A et A' sont symétriques par rapport à une droite d lorsque la droite d coupe le segment [AA']* **perpendiculairement** *en son* **milieu** *(Nouveau Décimale, 2000, p.182)*
>
> *Axe de symétrie d'une figure : Définition : La droite d est un axe de symétrie d'une figure F lorsque la symétrique de F par rapport à d est la figure F elle même (Nouveau Décimale, 2000, p.183)*
>
> *Approche expérimentale : Lorsque par pliage autour d'une droite (d), deux figures F*

et F' se superposent, on dit que F et F' sont symétriques par rapport à la droite (d). (Nouveau Décimale, 2000, p.196)

Symétrique d'un point : Définition : Dire que deux points distincts A et A' sont symétriques par rapport à une droite (d) signifie que (d) est la médiatrice du segment [AA']. Un point qui appartient à la droite (d) a pour symétrique lui-même. (Transmath, 2000, p. 196)

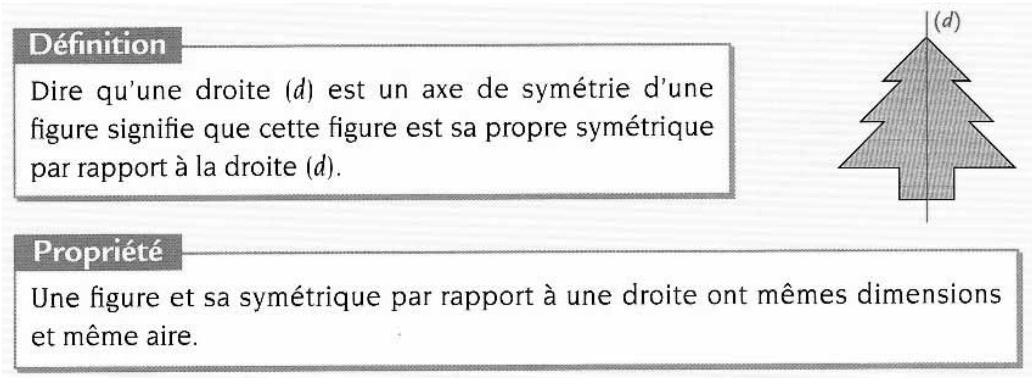
Figures symétriques : Deux figures symétriques par rapport à une droite se superposent par pliage le long de cette droite (Bordas, 2000, p.112)

Axe de symétrie d'une figure : Une droite d est un axe de symétrie d'une figure si les deux parties de la figure se superposent par pliage le long de cette droite (Bordas, 2000, p.196)

La symétrie orthogonale est caractérisée par les propriétés différentes selon manuel : le pliage et la superposition (*Le Nouveau Pythagore, Triangle, Cinq sur Cinq, Nouveau Décimale, Bordas*) ; la médiatrice (*Dimathème, Transmath*) ; l'orthogonalité et le milieu (*Nouveau Décimale*). A part de la définition de la symétrie orthogonale, la définition de l'axe de symétrie d'une figure est aussi de temps en temps donnée (*Cinq sur Cinq, Nouveau Décimale, Bordas*). En ce qui concerne les propriétés géométriques attachées à la symétrie orthogonale, les propriétés d'« équidistance », « orthogonalité », « conservation de la longueur et de l'aire », etc. sont données dans tous les manuels. A la suite de la présentation de la définition et les propriétés géométriques, les manuels proposent des méthodes de la construction de figures symétriques, axes de symétrie, et éventuellement médiatrices d'un segment avec des instruments. Par exemple, les méthodes proposées par *Dimathème 6^e* pour un point symétrique sont premièrement celles à la règle graduée et à l'équerre, puis une autre au compas. Dans les autres manuels, le nombre de méthodes proposées est deux ou trois. Le processus de la construction par chaque méthode est plus précisément analysé plus loin (Chapitre IV).

Enfin, la partie « exercices » propose certains exercices concernant les notions apprises. Les exercices de reconnaissance, construction de figures symétriques et d'axes, et aussi ceux qui demandent le rapport avec d'autres propriétés géométriques, sont proposés. Les analyses de manuels sur les types d'exercices sont menées par Both Carvalho (1999-2000), les manuels étudiés sont de l'ancien programme de 1986.

En ce qui concerne la preuve dans toutes les parties de manuels, la justification ou la preuve n'est pas souvent abordée. Les activités de construction et de reconnaissance et celle d'identification de propriétés géométriques attachées à la symétrie orthogonale sont dominantes. En effet, la démonstration n'est pas encore systématiquement introduite en classe de 6^e. La justification abordée serait plutôt une description de la procédure de construction ou de reconnaissance. Or, dans les manuels scolaires, les indices de l'initiation à la preuve ou au raisonnement déductif peuvent être repérés. En effet, la définition et la propriété qui peuvent être mises en œuvre comme permis d'inférer dans la preuve sont souvent explicitement proposées dans la partie de « cours ». Par exemple, la Figure III.2 est pris du manuel *Transmath* (2000).



Définition

Dire qu'une droite (d) est un axe de symétrie d'une figure signifie que cette figure est sa propre symétrique par rapport à la droite (d).

(d)

Propriété

Une figure et sa symétrique par rapport à une droite ont mêmes dimensions et même aire.

Figure III.2 Un extrait du manuel *Transmath* (2000, p.196)

1.2.3 Dans les programmes au Japon

Les programmes de l'enseignement secondaire au Japon sont publiés par le ministère de l'éducation. Ils obligent légalement les enseignants et les manuels scolaires à les respecter.

Dans les programmes actuels de l'enseignement secondaire inférieur publiés en 1998, la transformation géométrique n'est pas explicitement abordée. Le terme de « transformation » n'est jamais utilisé à l'enseignement secondaire inférieur, ni supérieur[5]. Le terme de « déplacement de points » qui correspond à la transformation géométrique apparaît seulement en « Mathématiques C »[6] dans la section des matrices[7].

Or, la symétrie orthogonale et la symétrie centrale sont objets d'apprentissage de la classe de première année de l'enseignement secondaire inférieur (correspondant à 5ème en France). D'une façon générale, le terme de « symétrie » (*Taisho*) ne signifie pas une transformation en japonais. Lorsque l'on indique une symétrie au sens de la transformation, les termes « transformation symétrique » (*Taisho Henkan*) ou « déplacement symétrique » (*Taisho Ido*) sont utilisés. Ainsi le programme aborde la symétrie orthogonale et la symétrie centrale en tant que outils qui permettent de compléter la connaissance des propriétés de certaines figures planes, comme l'indique l'extrait suivant.

Comprendre la signification de symétrie axiale et de symétrie centrale pour

[5] L'enseignement secondaire supérieur au Japon correspond au lycée au Japon, trois années d'études.

[6] La matière de « Mathématiques C » est destinée aux élèves de troisième année de l'enseignement secondaire supérieur (correspondre à la classe Terminale au lycée en France) et en particulier aux élèves de filière scientifique.

[7] La transformation affine n'est pas explicitement abordée dans le programme.

approfondir le moyen intuitif de voir et de penser sur les figures planes en remarquant la symétrie (programme de première année).[8]

1.2.4 Dans les manuels scolaires au Japon

La symétrie orthogonale est abordée en première année de l'enseignement secondaire inférieur (correspond à la classe de 5ème en France). Les manuels scolaires publiés au Japon doivent se soumettre à la censure du ministère de l'éducation. Six éditeurs publient les manuels de mathématiques pour l'enseignement élémentaire et l'enseignement secondaire inférieur. Pour l'enseignement secondaire supérieur, une vingtaine d'éditeurs publient des manuels de mathématiques.

Nous analysons les trois manuels suivants de la première année de l'enseignement secondaire inférieur parmi ces six éditions. Ces manuels reposent sur le programme publié en 1998.

- *Mathématiques 1ère année*, Keirinkan, 2002
- *Nouvelles Mathématiques 1*, Tokyo Shoseki, 2002
- *Mathématiques 1*, Kyoiku Shuppan, 2002

Nous utilisons les noms d'éditeurs pour indiquer les manuels, parce que les noms des manuels se ressemblent tous. La symétrie orthogonale est abordée dans la section de « Figures symétriques » du chapitre « Figures planes ». Les noms de chapitre et de section sont communs pour les trois manuels. La section ou chapitre de manuel scolaire n'est pas nettement séparée en type de travail comme dans les manuels français. Les activités, les bilans et les exercices sont mixtes. Dans la classe, le cahier d'exercices associé au manuel est souvent utilisé.

Dans tous les manuels, la symétrie orthogonale est introduite à partir des objets familiers dans la vie courante avec le pliage ou l'effet de miroir. Par exemple, l'activité suivante est proposée avant introduire la notion de symétrie orthogonale dans un manuel (Keirinkan, 2002, p.129).

[8] Nous présentons aussi une traduction anglaise proposée par l'association de l'enseignement des mathématiques au Japon : « To understand the meaning of line symmetry and point symmetry to deepen students' intuitive way of viewing and thinking about plane figures by noticing symmetry » (JSME, 2000, p.22).

Figure III.3 L’énoncé est « Trouver les panneaux de signalisation qui ont la même forme que les panneaux originaux lorsqu’on met un miroir verticalement sur les panneaux » (Keirinkan, 2002, p.129)

La définition de la symétrie orthogonale est proposée après une ou deux activités. Les définitions suivantes sont données dans les trois manuels.

> *La figure sur laquelle les deux côtés du pli se superposent, en pliant selon une droite comme pli, est appelée symétrique par rapport à la droite, et la droite utilisée comme pli est appelée l’axe de symétrie.* (Keirinkan, 2002, p.129)

> *La figure plane sur laquelle les parties de deux côtés se superposent, en pliant selon une droite comme pli, est appelée la figure symétrique par rapport à la droite, et la droite étant pli est appelée l’axe de symétrie.* (Tokyo Shoseki, 2002, p.119)

> *La figure sur laquelle la partie gauche du pli et la partie droite se superposent, en pliant selon une droite comme pli, est appelée la figure symétrique par rapport à la droite. Cette droite comme pli est appelée l’axe de symétrie.* (Kyoiku Shuppan, 2002, p.136)

Les trois définitions sont très sembrables. Elles s’appuient sur le pliage et la superposition. Le terme de « figure symétrique » signifie ici la figure ayant un axe de symétrie. Puis certaines propriétés géométriques attachées à la figure symétrique sont proposées. Les propriétés géométriques explicitement indiquées dans les manuels sont premièrement l’orthogonalité et le milieu, puis la médiatrice. La conservation de longueur et de mesure d’angle n’est pas explicitement abordée, simplement les segments correspondants et les angles correspondants sont évoqués. En rapport à d’autres figures usuelles, la reconnaissance de figures symétriques et la construction d’axes sont de temps en temps proposées pour le losange, le triangle isocèle, le parallélogramme, le trapèze, etc.

Les activités proposées dans les manuels sont diverses : la réalisation d’une figure symétrique avec les ciseaux et un papier ; la construction d'une figure symétrique ; la construction d'un axe de symétrie ; la reconnaissance d'une figure symétrique ; etc. Nous présentons ici un exercice de la construction (Figure III.4).

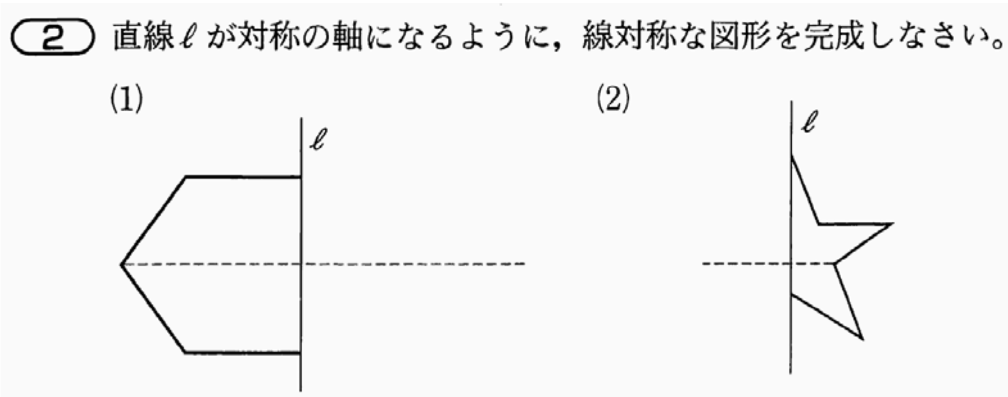


Figure III.4 L'énoncé est « Compléter la figure symétrique par rapport à la droite, de manière que la droite *l* soit l'axe de symétrie » (Keirinkan, 2002, p.131)

Dans l'activité de construction, la figure à construire n'est pas le symétrique d'une figure antécédente, mais une partie de la figure ayant un axe de symétrie. C'est pour cela que le verbe « compléter » est utilisé à la place de « construire » dans l'énoncé du problème. Cela indique que la symétrie comme propriété d'une figure est envisagée.

Dans tous les cas, la symétrie orthogonale est abordée en tant que propriété d'une figure. L'idée de transformation ou de déplacement n'apparaît aucun dans manuel. Les figures symétriques l'une par rapport à l'autre ne sont jamais abordées dans ces trois manuels.

2 RECHERCHES SUR LA SYMETRIE ORTHOGONALE

La notion de transformation géométrique est étudiée depuis longtemps en France : Gras (1983), Bauthier (1988), Grenier (1988), Tahri (1993) pour la symétrie orthogonale, plus récemment Jahn (1998) pour la symétrie orthogonale et Sangaré (2000) pour la rotation. Ceci s'explique du fait de la place significative de transformation géométrique dans les programmes français. La symétrie orthogonale apparaît à l'école primaire et est approfondie à partir du 6ème au collège en France, comme nous l'avons vu.

Dans les travaux effectués, la symétrie orthogonale est très souvent abordée en tant qu'objet d'étude en didactique des mathématiques dans un contexte de construction de figures symétriques. Plusieurs types de construction mathématiquement incorrectes par les élèves sur papier-crayon et plusieurs types de procédures de construction ont déjà été repérés (Küchement, 1981 ; Grenier, 1985a, 1985b, 1988 ; Bell, 1993).

Nous présentons ici certains résultats de recherches concernant la symétrie orthogonale et les termes ou outils développés pour l'analyse de comportement des élèves. Pour ceux-ci, nous clarifions notre point de vue afin de les utiliser dans l'analyse de nos expérimentations.

2.1 Appréhension de la symétrie orthogonale

Dans la section qui précède, il apparaît que la notion de symétrie est abordée de deux façons différentes en mathématiques, ainsi que dans l'enseignement scolaire surtout en comparaison entre la France et le Japon. Dans les recherches en didactique des mathématiques, les différents niveaux d'appréhension de la transformation géométrique ont déjà été remarqués. Nous les présentons et analysons dans le cas de symétrie orthogonale.

2.1.1 Différents niveaux d'appréhension

Les travaux effectués sur la transformation géométrique proposent une existence de différents niveaux d'appréhension de la transformation du point de vue épistémologique. D'après Grenier & Laborde (1988, p.66), une transformation peut être considérée aux niveaux suivants dans leur genèse en tant qu'objet en mathématiques.

> *Niveau 1 : comme une relation entre deux configurations géométriques ou une relation entre deux parties d'une même configuration : à ce niveau, le caractère fonctionnel est absent ;*
>
> *Niveau 2 : comme une application de l'ensemble des points du plan sur lui-même ;*

> *Niveau 3 : comme un outil fonctionnel à des fins de mise en évidence d'invariants.* (Grenier & Laborde, 1988, p.66)

Le niveau 2 est différencié du niveau 1 par la présence du caractère fonctionnel de la transformation, ainsi que par l'appréhension ponctuelle exigée au niveau 2. En outre, la conception du plan mobilisée est aussi différente à ces deux niveaux.

> *« Le niveau 1 met en jeu une conception hétérogène du plan. Le niveau 2, par contre, correspondant à une conception homogène du plan »* (ibid., p.67)

Dans l'enseignement au collège en France, la transformation du niveau 1 est abordée, alors que le niveau le plus élevé est repoussé au lycée. Les programmes et les manuels au Japon que nous avons vus dans la section précédente envisagent seulement le niveau 1 dans l'enseignement secondaire. En effet, le caractère fonctionnel de la symétrie orthogonale y est complètement absent. Selon ces auteurs et aussi d'autres travaux précédents, le passage du niveau 1 au niveau plus élevé n'est pas évident pour les élèves. Plusieurs travaux cherchent des moyens qui permettent ce passage dans une situation papier-crayon, ainsi que dans une situation informatisée (Bauthier, 1988 ; Jahn, 1998 ; Healy, 2003, etc.). En particulier, le travail de Jahn se focalise sur le passage de la transformation figurale à l'application ponctuelle dans la transition Collège-Lycée.

La transformation d'un plan sur lui-même est interdite dans l'enseignement actuel au collège, c'est-à-dire que le niveau 2 est interdit. Cependant, une appréhension ponctuelle est exigée. En effet, la symétrie orthogonale est caractérisée par les points lorsque la définition est proposée avec les propriétés géométriques (l'orthogonalité et le milieu, par exemple, non pas par la superposition). En outre, la propriété primordiale de la symétrie orthogonale est l'orthogonalité qui est impliquée par un rapport entre deux points symétriques. Nous considérons que cette appréhension ponctuelle est située à l'intermédiaire de ces deux niveaux.

Par rapport à notre intérêt, la connaissance engagée dans la preuve, il importe de remarquer ce point. Parce que les propriétés mises en œuvre dans le processus de construction d'une preuve dépendent du résultat d'appréhension de la symétrie orthogonale ou d'appréhension d'une figure. Les propriétés qui ne sont pas reconnues ne peuvent pas être mises en œuvre dans la preuve.

2.1.2 Appréhension d'une figure

Nous faisons mention des recherches sur l'appréhension d'une figure en didactique des mathématiques. Ces travaux n'envisagent pas directement la symétrie orthogonale, mais la figure générale en géométrie. Toutefois, comme la symétrie orthogonale est représentée dans un dessin sur la feuille de papier ou l'écran, l'appréhension d'une figure est étroitement liée à celle de la symétrie orthogonale.

Duval (1994) identifie quatre appréhensions d'une figure suivantes en fonction de la fonction épistémologique et des traitements cognitifs des objets géométriques.

> *Appréhension* ***discursive***
> *Les propriétés mathématiques représentées ne peuvent pas être déterminées par une simple constatation visuelle : certaines doivent être données par une indication discursive : dénomination ("Soit un …"), hypothèse …*
>
> *Appréhension* ***séquentielle***
> *Il y a un ordre de prise en compte des unités figurales qui entrent dans la construction d'une figure. Cet ordre dépend des propriétés mathématiques à représenter et des contraintes techniques des instruments utilisés (logiciels, règle et compas…).*
>
> *Appréhension* ***opératoire***
> *Une figure donnée peut être modifiée de différentes manières,* ***matériellement*** *ou* ***mentalement****.*
>
> *Appréhension* ***perceptive***
> *Ce qu'une figure montre au premier coup d'œil. Nous pouvons ensuite y discriminer des sous-figures qui ne coïncident pas nécessairement avec les unités figurales prises en compte dans la construction de la figure.* (ibid., p.125)

La première appréhension s'appuie sur une dénomination de propriété qui est explicitement exprimée. Seules les propriétés mathématiques énoncées et celles déduites sont considérées. Lors de la construction d'une démonstration, ce type d'appréhension est requis. La deuxième appréhension s'appuie sur l'ordre de la construction d'une figure. Comme la symétrie orthogonale est très souvent abordée dans l'enseignement scolaire, l'appréhension séquentielle serait souvent effectuée.

D'ailleurs, Duval (1995, p.175) propose aussi un outil qui permet de mettre en évidence les objets abordés dans les traitements cognitifs ou opérations au sein du registre de représentation sémiotique de figures. Il remarque les unités figurales du registre qui compose une figure (Figure III.5). Deux grands types de variations visuelles dans le registre figural sont proposés : le type des variations lié au nombre de dimensions et le type de variation qualitative. Pour le premier type, la dimension 0 est un point, la dimension 1 est une ligne et la dimension 2 est une zone. Pour le deuxième type, la variation de forme (ligne droite ou ligne courbe ; contour ouvert ou conteur fermé d'une zone), variations de taille, d'orientation (par rapport au plan fronto-parallèle), variations de grain, de couleur etc. sont prises en compte. D'après l'auteur, il y a la prédominance perceptive des unités de dimension 2 sur celles de dimension inférieure dans le registre figurale (ibid., p.178). Le traitement de la situation mathématique requiert que l'on se restreigne aux unités figurales de dimension 1 ou 0 alors que la perception focalise automatiquement sur les unités figurales de dimension 2. Et il montre que ce décalage constitue la complexité de l'activité géométrique.

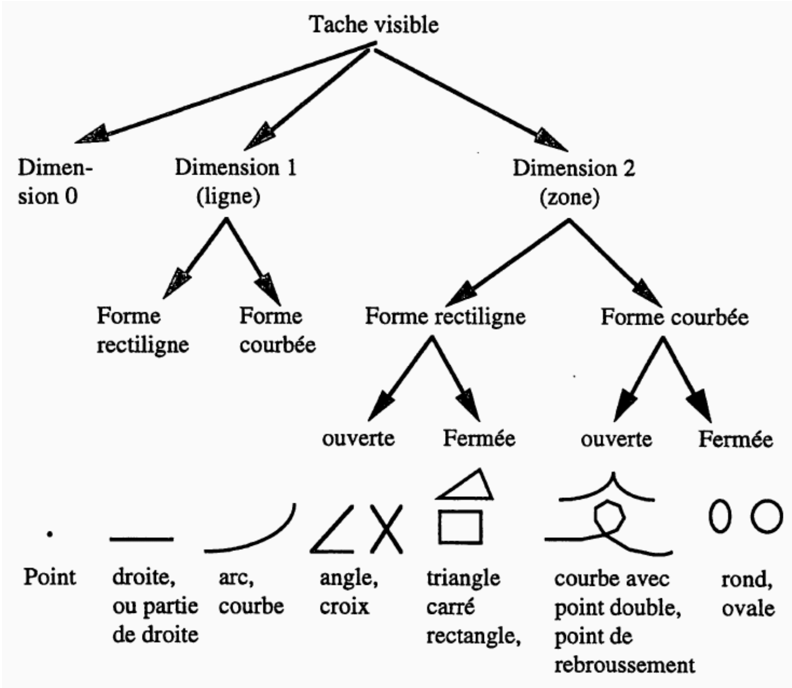


Figure III.5 Classification des unités figurales élémentaires (Duval, 1995, p.177)

Dans le cas de la symétrie orthogonale, comme nous l'avons vu, l'appréhension ponctuelle est exigée afin d'aborder certaines propriétés de la symétrie orthogonale, en particulier, l'orthogonalité et le milieu. Elle porte sur le rapport entre deux points symétriques, c'est-à-dire sur le rapport entre deux unités figurales de dimension 0 par rapport à une droite qui est une unité figurale de dimension 1. La dimension requise d'unités figurales pour l'appréhension ponctuelle est inférieure à celle généralement requise de l'appréhension perception. Le traitement géométrique de la symétrie orthogonale nécessite souvent un changement de dimension aux dimensions 0 et 1. En outre, le support qui relie deux points symétriques n'est pas de temps en temps tracé dans les figures symétriques données. A la suite de l'appréhension ponctuelle, il s'agit encore d'un changement de dimension avec une modification figurale qui correspond à l'appréhension opératoire (ajout d'un segment). Nous considérons que ces changements de dimensions suscitent aussi une complexité de l'appréhension de figures symétriques.

Du point de vue de la problématique de la preuve avec la notion de symétrie orthogonale, plusieurs appréhensions du point de vue de la transformation géométrique et de la figure géométrique doivent être effectuées à la fois.

2.2 Construction de symétriques

En didactique des mathématiques, beaucoup de travaux ont été conduits. Le travail effectué par Grenier (1988) s'intéresse à l'identification des procédures de construction symétrique, à la recherche des conceptions (au sens de Vergnaud (1984)) chez les élèves et à l'élaboration d'une suite des situation-problèmes permettant de remettre en question les conceptions non-pertinentes. Dans ce travail, elle propose une typologie des réponses à partir des observations de la situation papier-crayon en fonction des procédures de résolutions utilisées (Grenier, 1985b).

Par ailleurs, les travaux effectués sur la symétrie orthogonale étudient non seulement la construction dans la situation classique papier-crayon, mais aussi dans la situation informatique utilisant les logiciels de construction géométrique tel que Cabri-géomètre et Logo (Gallou-Dumiel, 1987 ; Tahri, 1994 ; Hoyles & Healy, 1997, etc.). Dans cette situation, Tahri (1994) remarque et propose les approches possibles de construction.

Nous présentons ici, en tant que comportements des élèves face aux problème de la symétrie orthogonale, certains résultats de recherches. Dans tous les cas, notre position sera précisée en vue de l'analyse de données qui seront recueillies dans les expérimentations à réaliser.

2.2.1 Approches de la construction

Tahri (1994, pp.49-51) classifie les approches de construction d'un segment symétrique en fonction des processus de réalisation d'objets dans l'environnement Cabri-géomètre. Trois types d'approches sont proposés : la procédure globale ; la procédure semi analytique ; la procédure analytique[9].

> *« la procédure de construction de l'image du segment est globale si cette image ne fait pas intervenir d'autres objets que le segment produit »* (Tahri, 1994, p.49)
>
> *« la procédure de construction de l'image du segment est semi analytique, ou semi globale si seule une extrémité image est construite. Le segment image est ensuite construit "au jugé" en s'appuyant sur cette extrémité »* (ibid., p.50)
>
> *« la procédure de construction de l'image du segment est analytique si cette image est obtenue après construction des deux extrémités. L'élève construit l'image de la première extrémité, puis celle de la deuxième et ensuite définit le segment image en joignant ces deux extrémités »* (ibid., p.50)

[9] En ce qui concerne le terminologie des termes « approche » et « procédure ». Nous utiliserons le premier pour l'approche globale d'une construction et le deuxième pour la procédure locale de chaque pas d'une construction. Une approche se compose donc de certaines procédures. Tahri utilise le terme « procédure » pour trois approches (analytique, globale, et semi-analytique) plutôt que le terme « approche ». Mais, nous utilisons le terme « approche » pour les « procédures » de Tahri.

Nous considérons que la classification proposée est spécifique à la construction d'un segment symétrique et à l'environnement Cabri-géomètre. En effet, la nature de procédure de construction de points n'est pas mentionnée. Deux points symétriques peuvent être réalisé par une procédure « perceptive » ou « semi analytique », bien que le segment soit réalisé par une procédure « analytique » à partir de ces points. Par exemple, le support qui relie deux points symétrique est tracé lors de la réalisation d'un point symétrique suivant la direction privilégiée sans expliciter le critère mis en œuvre. Dans ce cas, la direction privilégiée est perceptivement choisie, puisque la direction n'est pas quelconque. Cette classification ne permet de prendre en compte la place précise de la perception dans le processus de construction.

Nous proposons les autres définitions avec les termes « perceptif ou globale », « semi analytique » et « analytique » pour les approches et procédures de construction en fonction des propriétés mises en œuvre dans le processus de construction d'un point, ainsi que d'un segment. Nous considérons trois types d'approches suivants.

- Approche de construction globale ou perceptive
  Tous les pas de la construction ne reposent pas sur les propriétés géométriques ou les critères explicites, mais sur la perception globale (conservation de la forme, par exemple) des figures symétriques et des propriétés spatio-graphiques (localisation dans l'espace de la feuille, par exemple). Par exemple, un point est pris sans critères explicites à un endroit privilégié sur une droite. Du point de vue mathématique, un point quelconque sur la droite est pris, alors que l'élève dispose d'une raison implicite que ce point doit être à cet endroit et non pas ailleurs sur cette droite.

- Approche de construction semi analytique
  Quelques pas de la construction reposent sur les propriétés géométriques ou les critères explicites, mais d'autres ne le sont pas. C'est une approche composée des pas analytique et perceptif.

- Approche de construction analytique
  Tous les pas ou toutes les procédures de l'approche d'une construction reposent sur les propriétés géométriques (par exemple, l'équidistance, l'orthogonalité, le milieu, etc.).

Lors de la réalisation d'une construction dans la situation papier-crayon, dans la plupart des cas, la perception globale est plus ou moins mise en œuvre. Par exemple, lorsqu'une droite perpendiculaire est tracée avec l'équerre pour la réalisation d'un point symétrique, la droite sera tracée dans la partie de feuille de « l'autre côté » de l'axe, parce que la perception globale indique grosso modo la position du point symétrique. Mais, dans ce cas, nous ne dirons pas que la procédure ou l'approche est perceptive, mais analytique, puisque la réalisation d'une droite s'appuie bien sur une propriété géométrique.

Les approches ci-dessus peuvent donner des constructions correctes ou non. Dans la construction géométrique en mathématiques, l'approche analytique est exigée, alors que l'approche perceptive est aussi souvent mise en œuvre pour réaliser rapidement une figure.

2.2.2 Procédures de la construction

Grenier (1985b ; 1988 ; etc.) a classé les réponses des élèves à partir des observations des élèves pour une tâche de construction de segments et points symétriques à main levée en fonction des procédures de résolution utilisées. La classification de réponses indique aussi les procédures différentes de construction.

> *« - réponse de type "orthogonalité" : la détermination des sommets de la figure-image se fait le long des directions orthogonale à l'axe et passant par ces sommets »* (Grenier, 1985b, p.57)
>
> *« - réponse de type "recouvrement partiel ou total" qui donnent pour image une figure recouvrant partiellement ou totalement la figure-objet »* (ibid., p.57)
>
> *« - réponse de type "prolongement" qui donnent pour image une figure située dans le prolongement de la figure-objet »* (ibid., p.57)
>
> *« - réponse de type "parallélisme" ou "translation" qui donne pour image une figure translatée globalement de la figure-objet »* (ibid., p.57)
>
> *« - réponse de type "rappel horizontal" ou "rappel vertical" qui donnent pour image une figure dont les sommets sont obtenus par translations horizontale ou verticale des sommets de la figure-objet »* (ibid., p.58)

Aussi un autre type de réponse est proposé : « demi-symétries » (Grenier, 1988, p.38) lorsque le segment à transformer a une interaction avec l'axe. Les images des deux parties coupées par l'axe sont séparément réalisées et « se recollent mal » (ibid., p.38). Tahri propose aussi une classification des procédures de construction dans un environnement Cabri-géomètre en s'appuyant sur les résultats de Grenier : « rappel vertical ou horizontal », « parallélisme », « prolongement », « report orthogonal au segment », « demi-symétrie » (Tahri, 1994, pp.64-68).

Les procédures ci-dessus proposées par Grenier et Tahri s'appuient sur une typologie des réponses erronées des élèves. Pour cela, certaines propriétés attachées à la symétrie orthogonale ne sont pas prises en compte. Par exemple, la propriété de milieu dont la mobilisation ne soulève pas une grande difficulté pour les élèves (Grenier, 1988, p.46). D'ailleurs, une procédure est caractérisée par une propriété géométrique ou non qui se situe aux différents niveaux du point de vue de la nature d'objet abordé. Par exemple, la procédure « parallélisme » rend compte la propriété mise en œuvre dans le processus de construction d'un segment symétrique et la procédure de construction d'un point symétrique n'est pas mentionnée. En revanche, les procédures « rappel horizontal » et « orthogonalité » rendent compte des propriétés dans le processus de construction d'un point symétrique. Du point de vue de la preuve, nous avons besoin de spécifier toutes les propriétés mises en œuvre correctes ou non. Parce que d'une part il s'agit de la règle mobilisée dans une preuve qui est composée par plusieurs propriétés et d'autre part il importe de savoir les propriétés mises en œuvre dans le processus de construction afin de faire le rapport avec des règles identifiées dans la preuve ou dans la construction d'une preuve.

Ainsi, dans l'analyse de données que nous obtiendrons dans les observations, nous n'utiliserons pas les termes de Grenier ou Tahri mais nous mettrons en évidence des propriétés géométriques ou non sous-jacentes dans le processus de construction. Par exemple, l'orthogonalité, le milieu et l'équidistance sont plutôt pour le point symétrique et le parallélisme, la même longueur et la même mesure d'angle sont plutôt pour le segment symétrique (les propriétés données ici ne sont pas exhaustives).

Dans la classification ci-dessus par Grenier, les procédures « orthogonalité », « prolongement », et « rappel horizontal ou vertical » sont très proches ou ont la même nature au sens où toutes les trois s'appuient sur une direction privilégiée, lors de la construction d'un point symétrique. Nous utilisons plutôt le terme de « direction privilégiée » comme une propriété sous-jacente de ces procédures.

2.2.3 Variables didactiques

Les travaux antérieurs identifient les variables didactiques de la construction de figure symétrique à partir des réponses données par les élèves (Küchement, 1981 ; Grenier, 1988). Nous voyons les variables didactiques dans les analyses de réponses des élèves par Grenier (Grenier, 1988, pp.45-64). Nous citons ici les variables principales.

- La complexité de figure
  Par exemple, l'expérimentation de Grenier montre que les élèves ont plus de difficultés lors de la construction symétrique d'un segment que celle des points (Grenier, 1988, pp.15-43).
- Direction de l'axe (horizontal, vertical, oblique)
  Les élèves réussissent mieux le problème de construction lors de l'axe horizontal ou vertical que l'axe oblique.
- Intersection entre l'axe et l'objet
  L'existence de l'intersection influe la procédure de la construction. Lorsque le segment-objet croise, la procédure « demi-symétrie » est mobilisée ; lorsque le segment-objet touche l'axe, la procédure « prolongement » est mobilisée.
- L'angle formé par le segment objet et l'axe

Grenier analyse précisément dans ses expérimentations les relations entre l'angle formé par le segment-objet et l'axe et la réussite des élèves. Elle trouve que lorsque l'angle vaut 11° et 90°[10], la réussite des élèves est excellente quel que soit la direction de l'axe et le type de papier. En revanche, la réponse « prolongement » apparaît souvent lorsque l'angle entre le segment à transformer et l'axe est proche à 90°.

- Le type de papier : blanc ou quadrillé
  Sur le papier quadrillé, les appuis sur la direction privilégiée (la direction de quadrillage) par les élèves sont repérés plus souvent que sur le papier blanc. La réponse « rappel horizontal » est donnée par les élèves sur le papier quadrillé plutôt que sur le papier blanc.

En prenant en compte ces variables, nous produirons les problèmes à utiliser dans les expérimentations.

2.3 Conception sur la symétrie orthogonale

Quelques travaux étudient les conceptions mobilisées par les élèves sur la symétrie orthogonale lors de la construction ou de la reconnaissance. Néanmoins, il semble que sa signification est différente selon les travaux. Nous présentons ici les « conceptions » repérées par ces travaux.

2.3.1 Conceptions repérées par Grenier

Les travaux de Grenier (1988) tentent de repérer les conceptions des élèves de collège sur la symétrie orthogonale à partir des procédures et des réponses d'élèves en situation de résolution de problème. Il nous semble que le terme de « conception » désigne pour Grenier un aspect de la connaissance ou un théorème-en-acte sous-jacent qui permet des procédures et des réponses dans la résolution de problème. Nous interprétons, en terme de modèle cK¢, qu'elle correspondrait à la structure de contrôle.

Les contrôles suivants sont repérés comme « conception », « théorème-en-acte », etc. dans les travaux de Grenier (1988). Elle les a identifiés à partir des expérimentations de la construction de figures symétriques.

- « la symétrie axiale transforme une figure en une figure isométrique, de l'autre côté de l'axe, située sur une ligne de rappel horizontal ou vertical » (ibid., p.62)
- « l'image d'un segment vertical (respectivement horizontal) est un segment de même direction dans la feuille » (ibid., p.63) : la conservation des directions privilégiées
- « la symétrie comme transformation d'un demi plan dans l'autre demi plan (délimités

[10] Grenier utilise le problème dans lequel la mesure de l'angle formé entre le segment et l'axe est 11°, parce que les valeurs sont telles que les extrémités des segments sont située sur les sommets des carrés du papier quadrillé (Grenier, 1985b, p.58).

par l'axe) » (ibid., p.63)

- « la figure-image a dans la feuille la même direction que la figure-image » (ibid., p.64)

Grenier a aussi repéré certains contrôles suivants comme théorème-en-acte ou règle d'action pour la reconnaissance de figures symétriques et d'axe de symétrie.

- « une droite de symétrie passe par le "milieu" de la figure » (ibid., p.152)
- « la droite de symétrie partage la figure en deux parties égales » (ibid., p.166)
- « la matérialisation des directions horizontale et verticale (éléments de la figure dans ces directions) ou des directions parallèles (éléments de la figure parallèles entre eux) va privilégier la recherche de droites à égale distance relativement à ces directions » (ibid., p. 167)
- « la droite de symétrie comme élément ne s'intégrant pas à la figure, ayant donc un statut à part » (ibid., p. 168)

De notre point de vue avec un outil du modèle cK¢, les « conceptions » ci-dessus fonctionnent plutôt comme contrôles dans la résolution de construction ou de reconnaissance. Or, ce qui appartient au contrôle et à l'opérateur pendant la résolution de problème de la symétrie orthogonale n'est pas encore précisément présenté. L'analyse théorique de la procédure de construction et de reconnaissance dans le chapitre IV clarifiera ce point.

Par ailleurs, les contrôles ci-dessus seront importants pour notre analyse qui vient lors de l'expérimentation, parce qu'ils nous permettrons d'anticiper des comportements d'élèves et d'attribuer des contrôles aux comportements d'élèves.

2.3.2 Conceptions proposées par Tahri

Tahri (1994) analyse la question de la modélisation de décisions didactiques dans un environnement informatique d'apprentissage en mathématiques, en utilisant des problèmes de construction de la symétrie orthogonale. Elle adopte la classification des procédures de Grenier (1988) pour analyser les conceptions sur la symétrie orthogonale, et propose quatre conceptions dans la situation de construction de segment symétrique (Tahri, 1994, pp.68-69). Par le terme de « conception », elle entend « conception attribuée à l'élève par le didacticien » (ibid., p.68). Citons ces quatre conceptions proposées.

> « - *la conception de "parallélisme" liée à une procédure de parallélisme citée plus haut* » (ibid., p.68)

> « - *la conception "symétrie oblique". L'image du segment est obtenue par symétrie oblique* » (ibid., p.68)

> « - *la conception "symétrie centrale". Le segment image est obtenu par symétrie centrale* » (ibid., p.68)

> *« - la conception symétrie orthogonale. Le segment image est obtenu par symétrie orthogonale par rapport à l'axe »* (ibid., p.69)

La première conception « parallélisme » est caractérisée par la procédure mobilisée dans le processus de réalisation d'un segment symétrique. Les procédures pour la réalisation d'extrémités du segment ne sont pas prises en compte. Pour cela, Tahri remarque « Les extrémités du segment peuvent être obtenues par une procédure de type "rappel horizontal", "rappel vertical" ... » (ibid., p.69). Par ailleurs, la conception « symétrie oblique » est caractérisée par la nature de rapport entre deux segments symétriques réalisés (obliques) qui a pour origine la procédure choisie lors de la réalisation de points symétriques. Une direction privilégiée est prise en compte pour la réalisation de support. Enfin, la conception « symétrie centrale » est caractérisée par la procédure de construction pour la symétrie centrale en prenant un point ou centre privilégié sur l'axe. La procédure « prolongement » peut être interprétée comme la procédure de la symétrie centrale.

Nous voyons que Tahri a caractérisé « une » conception par la procédure mobilisée ou par l'utilisation de segment ou point privilégié pour le problème de construction d'un segment symétrique. Cette modélisation de conception est effectuée dans le cadre de construction et d'environnement Cabri-géomètre avec la finalité de la décision didactique. Du point de vue de l'analyse de connaissance engagée dans la preuve qui est le sujet de notre travail, la mise en œuvre de la classification de Tahri comme outil d'analyse ne serait pas pertinente pour notre expérimentation. Parce que notre intérêt réside en une spécification de la règle mobilisée dans la construction d'une preuve, c'est-à-dire le point de vue plus local est nécessaire. L'attribution d'une étiquette à un comportement d'élève ne serait pas suffisante. C'est pour cela, nous avons adopté pour méthode d'analyse une explicitation d'éléments de la conception au sens du modèle cK¢. En ce qui concerne le contrôle pendant la résolution de problème, nous essayons de dégager les contrôles comme ceux présentés ci-dessus qui sont mis en évidence par Grenier.

3 CONCLUSION

Nous avons esquissé d'une part la nature épistémologique de la symétrie dans laquelle se situe la symétrie orthogonale et son enseignement en France et au Japon. Les enseignements de la symétrie orthogonale dans ces deux pays sont largement différents. Au Japon, les programmes de l'enseignement secondaire inférieur n'accordent pas d'importance, ni à la transformation géométrique, ni à la symétrie orthogonale. Celle-ci est abordée simplement en tant que propriété d'une figure géométrique. En revanche, les programmes français des mathématiques abordent approfondissement au moins une notion des transformations géométriques chaque année pendant quatre ans de collège. La transformation géométrique prend donc une place importante dans l'enseignement des mathématiques en France.

D'autre part, en présentant l'état de l'art des recherches sur la symétrie orthogonale en didactique des mathématiques, nous clarifions notre position sur certains outils d'analyse en vue de l'analyse de comportement d'élève dans les expérimentations du point de vue de la problématique de preuve.

Ce qui importe du point de vue de la problématique de notre travail, c'est que la preuve n'est pas encore systématiquement abordée en classe de 6^{e} en France, alors que la symétrie orthogonale est principalement abordée à ce niveau. Notre intérêt présenté au début de travail concerne le fonctionnement et l'état de la connaissance, dans la résolution de preuve, d'une notion mathématique qui est plus ou moins auparavant acquise. Si une réorganisation de connaissance est nécessaire pour la preuve, nous voulons mettre en évidence la nature de cette réorganisation. Prenant en compte ce point, la notion de symétrie orthogonale s'est révélée pertinente pour notre travail. En outre, le fait que beaucoup de recherches aient effectuées pour la symétrie orthogonale soutient aussi notre choix. Les résultats de recherches présentées ci-dessus favoriseront l'analyse de connaissance dans le contexte de construction ou de reconnaissance de figures symétriques ainsi que dans le contexte de preuve.

Chapitre IV

ANALYSE DE CONCEPTIONS DANS DIFFERENTS TYPES DE PROBLEMES

1 INTRODUCTION

Ce chapitre a pour objectif d'analyser a priori des conceptions dans différents types de problèmes sur la symétrie orthogonale, en vue de mettre en évidence les fonctionnements différents de la connaissance. Du point de vue du modèle cK¢, une conception sera mobilisée en fonction de la situation dans laquelle le problème est posé. Les conceptions différentes sont exigées par des problèmes différents, et les conceptions disponibles seraient aussi différentes selon les problèmes posés. Notre question est ainsi « quelles conceptions sont disponibles et exigées dans différents types de problèmes ? » et « quelles différences sont trouvées dans différents types de problèmes ? ». Pour répondre à ces questions, nous analyserons les éléments des conceptions et le fonctionnement de règles dans certains types de problèmes. Cette analyse théorique nous permettra d'une part d'expliciter la nature de différents types de problèmes du point de vue du modèle cK¢ et d'autre part un cadre théorique dans lequel se situent les problèmes employés dans notre expérimentation et par lequel les produits et les comportements des élèves seront analysés. Nous utilisons pour l'analyse de chaque type de problèmes les exemples pris à partir des manuels scolaires, c'est-à-dire que l'analyse porte aussi sur les problèmes usuels que rencontrent souvent les élèves.

Afin de démarrer notre analyse, en premier lieu, une classification de problèmes concernant la symétrie orthogonale sera proposée. Puis, une classification de règles ayant pour objectif de mettre en évidence la nature des règles du point de vue du rapport avec les objets et les propriétés géométriques et de construire un cadre théorique de la nature de règles sera proposée. Cette deuxième classification est importante, parce que comme la règle est reconnue en tant qu'élément crucial du point de vue de la connaissance engagée dans la preuve, elle permet d'analyser les liens entre la conception dans la preuve et celle dans d'autres types de problèmes.

1.1 Une classification de problèmes

Les problèmes abordés sur la symétrie orthogonale dans les manuels scolaires au niveau collège peuvent être classifiés grosso modo en trois types du point de vue de l'activité[1]. Le premier est le problème de reconnaissance qui demande d'identifier des symétriques dans les dessins ou figures données. Le deuxième est le problème de construction d'images symétriques qui demande de construire une image symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite donnée. Le troisième est le problème de construction d'axes qui demande à construire des axes à un dessin ou une figure symétrique donné. Pour le problème de la preuve, nous avons consultés les manuels scolaires de quatrième de collège (*Le Nouveau Pythagore 4^e^*, 1998 ; etc.). Mais, il est très peu abordé avec la notion de la symétrie orthogonale, alors que la symétrie centrale est de temps en temps mobilisée en tant qu'outil de la démonstration (ex. la preuve du théorème de Thalès).

Both Carvalho & Laborde (1999-2000) classifient les problèmes de construction en trois types en fonction de l'objet à construire (l'image, l'axe, et l'objet initial). Mais, comme leur analyse montre qu'il existe très peu de problèmes dans lequel l'image symétrique et l'axe sont donnés et qui demande de construire un objet initial, nous ne prenons pas en compte ce type de problèmes.

Trois types de problèmes identifiés dans les manuels scolaires et le problème de la preuve sont ainsi abordés dans l'analyse de ce chapitre.

- Preuve
- Reconnaissance de la figure symétrique ;
- Construction de l'image symétrique ;
- Construction de l'axe.

1.2 Différente nature de la règle

Considérons la nature de la règle concernant la symétrie orthogonale. D'une part, comme une

[1] Les manuels scolaires que nous avons consultés pour la classification de problèmes sont les mêmes que ceux qui sont utilisés dans le chapitre précédent (voir Chapitre III §1.2.2).

règle peut être exprimée sous la forme « si … alors … », les règles concernant la symétrie orthogonale peuvent être classées en certains types du point de vue de la place de symétrie par rapport à d'autres propriétés géométriques.

Une règle peut être exprimée sous la forme « si ... alors ... ». La symétrie peut se positionner aux deux places : prémisse ou hypothèse et conclusion d'une règle. Nous pouvons donc considérer trois types de règles : « si symétrie alors une propriété », « si propriétés alors symétrie » et « si symétrie alors symétrie ».

Règle de propriété : « si symétrie alors une propriété géométrique »

La première règle est celle qui produit une propriété géométrique à partir de la symétrie orthogonale. Lorsqu'une propriété de la symétrie est énoncée, nous considérons qu'une de ces règles est mobilisée. Par exemple, l'énoncé « deux segments symétriques ont la même longueur » indique la modélisation de la règle suivante R_1. Nous appelons ce type de règle la « règle de propriété » de la symétrie orthogonale.

R_1: Si Sym (P_1Q_1, P_2Q_2, d), alors $P_1Q_1 = P_2Q_2$
R_2: Si Sym (P_1, P_2, d), alors $P_1P_2 \perp d$
R_3: Si Sym (P_1, P_2, d), alors $P_1M = MP_2$ $(M \in d)$;

Règle de caractérisation : « si des propriétés géométriques, alors symétrie »

La deuxième règle est celle qui implique la symétrie orthogonale à partir des propriétés géométriques. C'est une règle qui caractérise la symétrie. La mise en œuvre des propriétés caractéristiques[2] de la symétrie orthogonale est interprétée comme une des règles de ce type est mobilisée. Nous l'appelons la « règle de caractérisation » de la symétrie orthogonale. Les exemples sont :

R_4: Si $P_1P_2 \perp d$ et $P_1M = MP_2$ $(M = d \cap P_1P_2)$, alors Sym (P_1, P_2, d) ;
R_5: Si $P_1M = MP_2$ et $P_1N = NP_2$ $(M \neq N \in d)$, alors Sym (P_1, P_2, d);

Règle d'héritage : « si symétrie, alors symétrie »

La troisième règle est celle qui implique à partir d'une symétrie orthogonale une autre symétrie. C'est une règle qui hérite la symétrie de certains objets à celle des autres objets. Nous l'appelons la « règle d'héritage » de la symétrie orthogonale.

R_6: Si Sym (P_1, P_2, d) et Sym (P_3, P_4, d), alors Sym (P_1P_3, P_2P_4, d)
R_7: Si Sym (P_1P_3, P_2P_4, d), alors Sym (P_1, P_2, d) et Sym (P_3, P_4, d)

[2] Les propriétés qui permettent de caractériser un objet sont appelées dans les programmes français « les propriétés caractéristiques ». Par exemple, « une propriété caractéristique du parallélogramme » est « deux diagonales coupent en leurs milieux ». Par contre, les propriétés « deux côtés opposés sont parallèles » et « ils ont la même longueur » ne sont pas « caractéristiques ».

La liste de règles ci-dessus n'est pas du tout exhaustive. Nous avons donné les règles qui apparaissent souvent dans la résolution de problèmes concernant la symétrie orthogonale. Lorsqu'une règle est mobilisée, elle ne serait pas dans la plupart des cas sous la forme « si ... alors ... ». Mais, c'est une modélisation d'un aspect de la connaissance est la méthode d'analyse que nous avons adopté. Comme nous cherchons des liens entre la preuve et les connaissances mobilisées dans d'autres contextes, il s'agit d'un invariant qui permet d'identifier la différence et le point commun dans différentes activités du point de vue de la connaissance. Par exemple, lorsqu'un élève énonce une propriété de la symétrie orthogonale tel que « deux segments symétriques ont la même longueur », nous y trouvons la règle « R_1: Si Sym (P_1Q_1, P_2Q_2, d), alors $P_1Q_1 = P_2Q_2$ » ; lorsque deux points sont reconnus comme symétriques en remarquant que « deux points sont équidistances de cette droite (axe) et ce segment (qui relie deux points) est perpendiculaire à l'axe, donc ce sont symétriques par rapport à cette droite », nous y trouvons la règle « R_4: Si $P_1P_2 \perp$ d et $P_1M = MP_2$, alors Sym (P_1, P_2, d) ($M = d \cap P_1P_2$) ». Nous essayons d'identifier des règles dans le processus de résolution de problème et dans les énoncés des élèves. Nous espérons que la règle peut être un outil afin d'identifier une facette de la connaissance qui est exigée dans la construction d'une preuve et dans d'autres types de problèmes.

1.3 La méthodologie de l'analyse

La méthodologie d'analyse de ce chapitre s'appuie sur le modèle cK¢ présenté dans le chapitre précédent. Nous considérons que dans tous les types de problèmes, les opérateurs mobilisés peuvent être identifiés à partir des actions ou transformations effectuées dans le processus de résolution. Cependant, ce qui importe est la méthodologie de l'identification de contrôles qui sont dans la plupart des cas implicites, c'est-à-dire nous ne pouvons que les supposer.

Revenons un peu à la nature du contrôle afin de bien établir une méthodologie de l'analyse du contrôle. Trois rôles différents de contrôles peuvent être considérés :

1. Le contrôle qui désigne l'opérateur dans la situation de la résolution d'un problème. C'est aussi un contrôle qui valide le choix d'un opérateur pour un problème donné.
2. Le contrôle qui assure la validité de l'opérateur
3. Le contrôle qui assure la validité du résultat obtenu.

Pour expliciter ces contrôles qui sont implicites dans la plupart des cas, la question « pourquoi ? » serait un fil conducteur de leur explicitation. En effet, le contrôle est un objet qui répond aux questions ayant trois points de vue ci-dessus : Pourquoi l'opérateur est-il mobilisé au problème posé ? Pourquoi l'opérateur mobilisé est-il valide ? Pourquoi le résultat obtenu est-il valide ?

Dans l'analyse de ce chapitre, nous nous posons souvent les questions « pourquoi » de ces trois points de vue afin de mettre en évidence les contrôles possibles ou prévus dans différents types de problèmes de la symétrie orthogonale et leurs fonctionnements.

En ce qui concerne l'explicitation de règles dans la résolution de problèmes, nous essayons de formaliser autant que possible. Parce qu'une règle peut être exprimée d'une façon diverse en langage naturelle et qu'elle est de temps en temps très longue. La formalisation permet de simplifier l'écriture de règles. En outre, dans cette formalisation, un point de vue du variable ou sujet dans une règle sera mis en œuvre pour bien distinguer les règles qui sont similaires entre elles ou qui sont identiques par la représentation formelle. Parce que la formalisation occulte de temps en temps les objets qui sont mis au point. Par exemple, deux règles suivantes (R_a) et (R_b) seront décrites comme (R_a') et (R_b').

> R_a : Si une droite est perpendiculaire au support de deux points et équidistante de ces points, alors elle est l'axe de symétrie des deux points
> R_b : Si le support de deux points est perpendiculaire à une droite et deux points sont équidistance de cette droite, alors ils sont symétriques par rapport à cette droite.
> R_a' : Si PP' $\perp$ x et PM = MP' (M $\in$ x) alors Sym (P, P', x)
> R_b' : Si $xy \perp d$ et xM = My (M $\in$ d) alors Sym (x, y, d)

Les lettres u, v, w, x, y et z sont les variables ou les sujets dans une règle. Les règles (R_a') et (R_b') sont grosso modo les mêmes. Mais elles sont différenciées par les objets mis au point. Nous considérons que cette distinction permet de prendre en compte au niveau épistémique les appréhensions de figure différentes ou les unités figurales reconnues par les élèves (cf. Duval, 1994 ; Duval, 1995).

2 PROBLEMES DE LA PREUVE

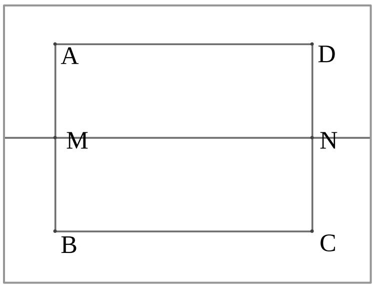
Nous avons remarqué, dans le Chapitre II qui précède sur l'intégration du modèle de Toulmin et du modèle cK¢, que la connaissance sur la notion abordée dans la preuve peut être particulièrement repérée par la règle (la loi de passage, la règle d'inférence, l'énoncé-tiers, ou le permis d'inférer) et au support. Cette section a pour objectif de mettre en évidence les règles liées à la symétrie orthogonale qui sont a priori prévues dans la construction d'une preuve et leurs natures. En particulier, nous essayons de rendre compte du fonctionnement de la connaissance pragmatique de symétrie orthogonale a priori prévu dans la construction d'une preuve. En effet, la symétrie orthogonale est souvent abordée avec la perception globale ou avec le pliage et la superposition dans le registre spatio-graphique lors de la résolution de problèmes (voir §3, §4 et §5 de ce chapitre).

Comme la symétrie orthogonale est abordée en classe de 6^e^, très peu de problèmes de preuve sont présents dans les manuels scolaires. Cependant, nous pouvons considérer certains problèmes à partir des autres types usuels de problèmes. Par exemple, la justification d'une reconnaissance peut être un problème de preuve. Nous proposons ici l'analyse de deux problèmes : la justification d'une reconnaissance et le problème dans lequel la symétrie orthogonale est mise en œuvre en tant que propriété géométrique.

2.1 Justification d'une reconnaissance

Considérons le problème suivant (Problème 1) qui demande de reconnaître d'abord les segments symétriques et de justifier la réponse.

Problème 1 : *Le quadrilatère ABCD est un rectangle. Soit M, N les milieux des côtés opposés AB et DC. Les segments [AD] et [BC] sont-ils symétriques par rapport à la droite (MN) ? Répondre « oui », « non » ou « pas toujours » et démontrer.*



Pour la reconnaissance, plusieurs moyens permettent de produire une réponse « oui, symétrique » ou « non ». L'analyse détaillée du problème de reconnaissance sera proposée dans la section « Problèmes de la reconnaissance » de ce chapitre (§3). Nous analysons ici la construction d'une preuve après avoir reconnue les deux segments symétriques, c'est-à-dire avoir la réponse correcte « oui ».

La symétrie n'est pas donnée dans les énoncés de ce problème. Elle doit être déduite à partir des propriétés géométriques connues. Proposons un chemin de la démonstration comme les étapes suivantes qui démontre « Sym (BC, AD, MN) ». Nous présentons juste les parties qui sont étroitement liées à la symétrie orthogonale : supposons la validité des propositions « AB ⊥ MN » et « DC ⊥ MN » qui ne sont pas données dans les énoncés du problème.

AB ⊥ MN et AM = MB	DC ⊥ MN et DN = NC
P-r1↓	P-r1↓
Sym (A, B, MN)	Sym (D, C, MN)
P-r2↓	
Sym (AD, BC, MN)	

P-r1 : si $xy \perp d$ et xM = My (M = $xy \cap d$) alors Sym (x, y, d)
(x et y : points)
P-r2 : Si Sym (v, w, d) et Sym (x, y, d), alors Sym (vx, wy, d)

Dans ce schéma, du point de vue statique, les opérateurs (P-r1 et P-r2) sont mobilisés : l'opérateur (P-r1) transforme l'énoncé « AB ⊥ MN et AM = MB » en énoncé du symétrique « Sym (A, B, MN) » ; l'opérateur (P-r2) transforme deux énoncés obtenus dans la première étape en conclusion, le symétrique de deux segments « Sym (AD, BC, MN) ». L'opérateur (P-r1) est une règle qui caractérise les points symétriques. L'opérateur (P-r2) est une règle d'héritage qui transforme le symétrique des points en celui du segment. Il a le rôle de l'association de symétriques. Ces opérateurs transforment les énoncés dans le registre discursif ou géométrique. En effet, il semble que la perception globale ou la propriété spatio-graphique de figures symétriques n'intervient pas dans la résolution.

Concernant le contrôle, l'opérateur (P-r1) peut être directement déduit de la définition de deux points symétriques, si l'on définit la symétrie comme « D1 : PP' ⊥ d et PM = MP' ⇔ Sym (P, P', d) ». La définition est un contrôle qui valide l'opérateur choisi. Il importe dans ce cas l'étiquette ou statut « définition ». En effet, l'étiquette assure que les règles de deux sens reposent sur la théorie admise au départ. Bien entendu, si le symétrique est défini autrement, il doit avoir en tant que contrôle un support ou une preuve qui assure sa validité. Cela dépend de la définition mise en œuvre.

Nous pouvons considérer un autre contrôle qui valide l'opérateur (P-r1), du point de vue de la règle pragmatique. Par exemple, c'est la *constructivité*, c'est-à-dire la règle de caractérisation de la symétrie (P-r1) est valide, parce que les propriétés données comme hypothèses de la règle permettent de construire les points symétriques. Ce contrôle repose sur la reconnaissance. En effet, pour que la règle soit valide, l'activité de jugement du symétrique tracé, c'est-à-dire la reconnaissance, est effectuée. Dans ce cas, la perception globale de figures symétriques ou le pliage peut être mobilisée. De la même façon pour l'opérateur (P-r2), d'une part un contrôle de *constructivité* et d'autre part le contrôle qui déduit la règle (P-r2) peuvent être considérés.

En ce qui concerne le contrôle qui désigne les opérateurs de la résolution de ce problème, il s'agit d'analyser du point de vue dynamique le processus de la construction de la preuve. En effet, à partir seulement de la preuve bien construite, la raison de choix d'opérateurs ne peut pas être identifiée. Autrement dit, pour répondre à la question « pourquoi un tel opérateur et non pas un autre est mobilisé ? », il s'agit d'analyser le processus d'argumentation. Nous supposons que le processus de raisonnement part de la conclusion « Sym (AD, BC, MN) », parce qu'elle est déjà identifiée à partir de la reconnaissance.

1. Les propriétés qui déduisent la conclusion, le symétrique de deux segments, sont cherchées et les symétriques des points (Sym (A, B, MN) et Sym (D, C, MN)) sont trouvés en mobilisant l'opérateur (P-r2) ;
2. Les propriétés qui déduisent le symétrique des points sont cherchées et les orthogonalités ($AB \perp MN$ et $AM = MB$) seraient trouvés en mobilisant l'opérateur (P-r1).

Dans ce processus de résolution, le contrôle qui désigne l'opérateur (P-r1) est une exigence de déduction qui implique deux points symétriques lorsque certaines propriétés sont connues par hypothèses ou par la perception globale sur la figure. Plus concrètement, puisque la situation dans laquelle l'orthogonalité, l'équidistance et aussi d'autres propriétés géométriques sont reconnues exige de déduire la symétrie « Sym (A, B, MN) », l'opérateur (P-r1) est choisi pour la construction d'une preuve. Il est inhérent à la résolution ou situation d'un micro problème. En effet, si les propriétés connues dans cette situation étaient différentes, un autre opérateur qui n'est pas celui de (P-r1) serait désigné.

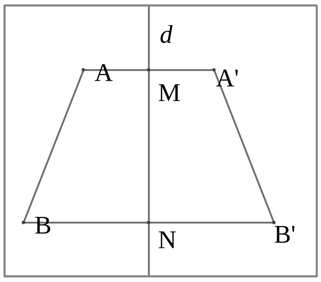
De la même façon pour le contrôle qui désigne l'opérateur (P-r2), une exigence de déduction qui implique les segments symétriques provoque une mobilisation de la règle de l'association (P-r2). Or, au moment de l'étape 1, la perspective de preuve ne sera pas encore établie, parce que l'on ne sait pas encore que le symétrique de points peut être déduit des propriétés géométriques connues. L'opérateur est mobilisé d'une façon incertaine. Nous considérons ainsi, en tant que contrôle de cette étape, plutôt que l'exigence de la situation, le contrôle de la résolution de problème de symétrie (par exemple, « pour caractériser un symétrique, il faut d'abord caractériser les points », « les points permettent de caractériser des objets géométriques », etc.). En outre, la validation de la mobilisation de l'opérateur (P-r2) reviendrait plus tard, lorsque les points symétriques sont déduits à partir des propriétés proposées au départ. Autrement dit, le fait que les points symétriques sont bien déduits est un contrôle qui valide le choix de l'opérateur (P-r2). C'est un contrôle de la validation du résultat obtenu.

Le processus de la résolution proposé ci-dessus repose sur le résultat de la reconnaissance effectuée auparavant. Pour cela, en fonction de ce résultat, le processus et la nature de la construction de preuve diffèrent largement. En effet, si le résultat obtenu par la reconnaissance est « non symétrique », l'argument qui nie la symétrie est cherché. Par exemple, un contre exemple indiquant non symétrique de la figure donnée est cherché, et le manque d'une propriété caractéristique est presenté. La connaissance engagée dans cette activité est ainsi bien différente de celle de notre analyse ici.

2.2 Preuve avec la symétrie orthogonale

Analysons ensuite un problème qui propose la symétrie dans ses énoncés et qui demande de prouver une propriété géométrique. C'est le problème 2.

Problème 2 : *Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à la droite d. Le segment [AB] n'a pas d'intersection avec d et ni A, ni B ne sont sur la droite d. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.*



La réponse correcte de ce problème est « trapèze » (ou « trapèze isocèle »). Le problème propose en premier lieu une configuration de la figure donnée. La reconnaissance d'un trapèze serait effectuée. Comme la connaissance engagée est plutôt liée au trapèze qu'à la symétrie orthogonale, nous ne l'aborderons pas ici, c'est-à-dire nous supposons que la reconnaissance d'un trapèze est bien effectuée. Le problème posé est ainsi de démontrer que le quadrilatère ABB'A' est un trapèze, plus précisément, construire une preuve qui permet d'arriver à la conclusion de façon déductive à partir des hypothèses proposées. Comme il ne suppose que la symétrie, la mise en œuvre d'une règle de propriété est nécessaire. D'ailleurs, étant donné que le problème n'exige aucune caractérisation d'une symétrie, la règle de caractérisation « si propriétés alors symétrie » ne serait pas requise. Proposons comme exemple un chemin de la démonstration comme les étapes suivantes.

$$\begin{array}{ccc} \text{Sym (A, A', } d\text{)} & & \text{Sym (B, B', } d\text{)} \\ ①\downarrow & & ①\downarrow \\ \text{AA'} \perp d & & \text{BB'} \perp d \\ & ②\downarrow & \\ & \text{AA' // BB'} & \\ & ③\downarrow & \\ & \text{Conclusion : ABB'A' : trapèze} & \end{array}$$

① P-r3: si Sym (*x*, *y*, *d*), alors $xy \perp d$ (*x* et *y* : points)
② une règle du parallélisme
(si deux droites sont perpendiculaires à une droite commune, alors les deux droites sont parallèles)
③ une règle dérivée de la définition du trapèze (si deux côtés sont parallèles dans un quadrilatère, alors ce quadrilatère est un trapèze)

Dans cette preuve, du point de vue statique, les opérateurs ①, ② et ③ sont mobilisés. La règle (P-r3) qui implique une propriété géométrique est bien opératoire pour que l'énoncé « Sym (A, A', *d*) » se transforme en énoncé « AA' $\perp$ *d* ». La transformation est effectuée dans le registre discursif. Les règles ② et ③ ne sont pas directement liées à la symétrie orthogonale mais surtout au parallélisme et au trapèze sont ensuite mobilisées.

En ce qui concerne le contrôle de l'opérateur (P-r3), il existe premièrement celle qui valide l'opérateur choisi, puisque la règle invalide ne serait pas mobilisée. Du point de vue théorique de règle, le support de règle doit être une définition ou une démonstration. Pour la règle (P-r3), l'opérateur est directement déduite de la définition « D_1 : PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) $\Leftrightarrow$ Sym (P, P', *d*) ». Par ailleurs, du point de vue de la règle pragmatique, la perception globale de figures symétriques peut aussi être un support de cette règle. En effet, les propriétés attachées aux figures symétriques peuvent être acquises pendant les expériences liées à la symétrie. Par exemple, l'argument suivant est une explicitation de ce support : « le support de deux points symétriques est perpendiculaire à l'axe, parce que tous les points symétriques qu'on a vus auparavant l'étaient ».

A part ce type de contrôle, il doit encore exister un contrôle qui désigne l'opérateur (P-r3) pour la résolution du problème qui répond à la question « pourquoi un tel opérateur est-il mobilisé ? ». De même que la résolution du problème précédent, l'explicitation de celui-ci nécessite un point de vue dynamique de la construction de preuve. En effet, dans le processus d'argumentation, le raisonnement n'avance pas toujours de façon déductive comme le schéma proposé ci-dessus. Les raisonnements à partir des hypothèses et de la conclusion sont à la fois engagés. Par exemple, lorsque le raisonnement avance à partir de la conclusion « trapèze », le processus suivant serait réalisé.

1. Les propriétés qui déduisent le trapèze en tant qu'arguments sont cherchées et le parallélisme (AA' // BB') est trouvé en mobilisant la règle ③.
2. Les propriétés qui déduisent le parallélisme sont cherchées et les orthogonalités (AA' ⊥ *d* et BB' ⊥ *d*) seraient trouvés en mobilisant la règle ②.
3. Les propriétés qui déduisent l'orthogonalité sont cherchées et les symétriques (Sym (A, A', *d*) et Sym (B, B', *d*)) qui sont les hypothèses du problème posé seraient trouvés en mobilisant la règle ① ou P-r3.

Dans ce processus de résolution, le contrôle qui désigne l'opérateur ou la règle ① ou (P-r3) est l'exigence d'orthogonalité dans la résolution. En effet, parmi les propriétés géométriques de symétrie orthogonale qui existent (par exemple, milieu, équidistance, isométrie, etc.), seule la propriété d'orthogonalité (AA' ⊥ *d*) est choisie ou privilégiée pour la résolution. Autrement dit, bien que d'autres propriétés soient disponibles pour la symétrie, l'orthogonalité est exigée dans une situation donnée. Nous considérons ainsi que l'exigence d'une déduction soulevé à l'étape 2 permet de choisir la propriété d'orthogonalité, c'est-à-dire l'opérateur (P-r3), dans la résolution. C'est le contrôle inhérent à la résolution d'un micro problème dans lequel la validité d'orthogonalité est à prouver et le symétrique est donné comme hypothèse.

En ce qui concerne le contrôle qui valide le résultat obtenu, comme le résultat est une preuve écrite, la validation porte sur la nature de la preuve écrite telle que l'enchaînement d'énoncés, la validité d'énoncés, la forme linguistique de la preuve, la validité de mobilisation de certains opérateurs, etc. Premièrement, le contrôle mobilisé serait celui de la conception sur la preuve (voir, par exemple, Healy & Hoyles, 2000). En effet, si la preuve construite ne satisfait pas de certains critères qui permettent une preuve, la construction sera refaite : par exemple, la rupture entre les énoncés, la valeur logique des énoncés, etc. Deuxièmement, en ce qui concerne la validité de mobilisation d'opérateurs, nous considérons que le fait que certains énoncés sont bien prouvés est un contrôle. En effet, lorsqu'un opérateur est choisi dans l'argumentation, la pertinence de cette mobilisation n'est pas encore connue. Par exemple, dans l'étape 1, la règle ③ modifie le problème de preuve du trapèze à celle du parallélisme. Or, à ce moment là, la pertinence de mobilisation de la règle ③, c'est-à-dire la possibilité de prouver le parallélisme, n'est pas encore connue. La pertinence sera établie lorsqu'il est bien prouvé à partir des hypothèses admises au départ. C'est un contrôle général qui est lié plutôt à la preuve qu'à la symétrie orthogonale. Et le jugement de preuve est effectué par le premier contrôle de la conception de preuve.

Au-delà du trapèze, pour démontrer la propriété « isocèle » du trapèze, « AB = A'B' » doit être démontré. Dans ce cas, la propriété de la conservation de longueur sur la symétrie serait mobilisée, c'est-à-dire la règle de propriété « si Sym (*vw*, *xy*, *d*), alors *vw* = *xy* ».

Le schéma contient un implicite. Etant donné que les hypothèses « Sym (A, A', *d*) » et « Sym

(B, B’, *d*) » ne sont pas données dans les énoncés du problème 1, elles doivent être déduites de quelque part. Ce serait à partir de « Sym (AB, A’B’, *d*) », c’est-à-dire qu’une autre règle d’héritage de la symétrie (dans ce cas, « si Sym (*vw*, *xy*, *d*), alors Sym (*v*, *x*, *d*) et Sym (*w*, *y*, *d*) ») est mobilisée pour avoir les énoncés « Sym (A, A’, *d*) » et « Sym (B, B’, *d*) ». L’obligation de la règle de propriété n’empêche donc pas la mise en œuvre d’autres types de règles.

Dans le problème que nous avons proposé, une figure est donnée. Cependant, le problème sans figure peut être aussi possible. Le rôle de la figure dans ce problème est une restriction du travail de la résolution. Si la figure n’est pas donnée, la nature du problème est modifiée. La première étape de la résolution serait la construction de figures symétriques reposant sur le contrôle perceptif ou analytique de la symétrie orthogonale. Si la construction n’était pas correctement réalisée, l’énoncé à prouver serait différent. En outre, puisque la figure est donnée comme symétrique, les élèves l’accepteraient sans contestation. Autrement dit, le contrat didactique tel que « la figure doit être symétrique, parce que c’est l’énoncé du problème qui le propose » existe ici. Dans ce cas, la configuration et la reconnaissance de symétries sont forcées par le problème, et le problème ne met pas en question la reconnaissance de figures symétriques par les élèves, ni la construction de figures symétriques.

2.3 Synthèse de la preuve

Nous avons théoriquement analysé deux problèmes de preuve. Nous avons remarqué les points suivants.

1. Les règles fonctionnent en tant qu’opérateur qui permet de passer de certaines propriétés géométriques à une autre. Cette transformation est effectuée dans le registre géométrique ou discursif.
2. La définition et le théorème peuvent être des contrôles qui valide l’opérateur choisi. L’étiquette ou le statut est aussi une partie importante du contrôle.
3. Le contrôle de *constructivité* qui repose sur la reconnaissance est aussi possible pour la validation de l’opérateur choisi. Dans ce cas, la perception globale de figures symétriques ou le pliage peut être mise en œuvre pour la validation.
4. Une exigence de la déduction par la situation dans laquelle certaines propriétés sont proposées et par les énoncés à démontrer peut être un contrôle qui désigne un opérateur. Le contrôle est donc inhérent à la situation d’argumentation.
5. Le contrôle pour le résultat obtenu (la preuve construite) dans le problème de preuve est plutôt lié à la connaissance de la preuve qu’à la symétrie orthogonale.

3 PROBLEMES DE RECONNAISSANCE

Les problèmes de reconnaissance de la figure symétrique se rencontrent très souvent dans les manuels scolaires de 6e. Citons d'abord des exemples de ce type de problèmes. Plusieurs dessins sont proposés pour les problèmes de reconnaissances dans le manuel *Triangle 6e*. Deux parmi eux sont donnés dans la Figure IV.1. Dans les autres manuels, les problèmes de reconnaissance ne sont pas si différents de ceux qui sont présentés ici.

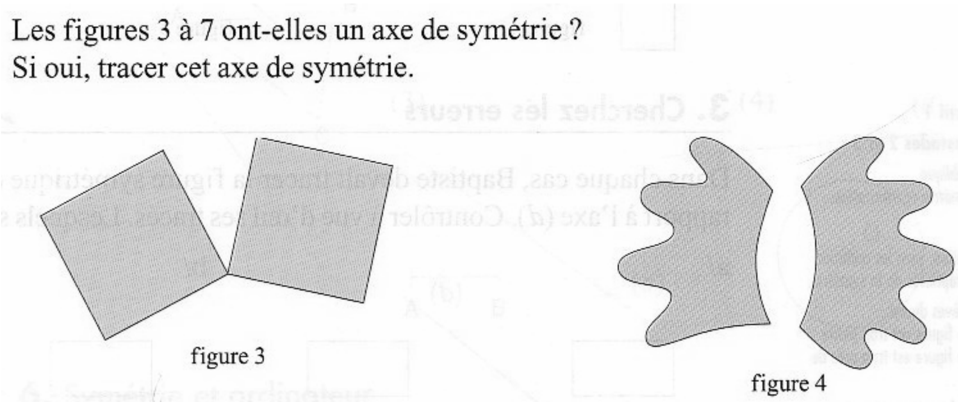


Figure IV.1 : *Triangle 6e*, p.199

Le problème de reconnaissance est de temps en temps aussi le problème de la construction de l'axe de symétrie. Comme l'exemple ci-dessus ne donne pas d'axes, les activités de résolution sont d'abord d'identifier des figures symétriques, puis de tracer des axes. Les figures qui ne sont pas symétriques sont aussi données, c'est-à-dire il s'agit d'identifier les figures non symétriques par rapport à une droite donnée. Le problème qui se situe à droite de Figure IV.1 est un problème de ce type de.

Pour résoudre le problème de reconnaissance, nous considérons que quatre types d'approches sont possibles du point de vue de la connaissance mobilisée dans le processus de résolution : reconnaissance par pliage, reconnaissance perceptive, et reconnaissance analytique, reconnaissance semi-analytique. Nous analysons ici les éléments de conceptions a priori repérés dans différents types d'approches en relation avec la règle. Dans tous les cas, le problème suivant est initialement abordé.

p : les figures données sont-elles symétriques par rapport à une droite donnée ?

3.1 Reconnaissance par pliage

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent (Chapitre III, §1.2.2), la première rencontre avec la symétrie orthogonale s'appuie souvent sur la symétrie-pliage d'un objet familier dans la vie courante. La définition proposée dans le manuel scolaire repose de temps en temps sur le pliage et la superposition. Le premier type d'approche, la reconnaissance par le pliage effectif, s'appuie sur cette définition : vérifier la superposition de deux figures ou dessins en pliant une feuille suivant une droite ou un axe. Nous mettons aussi dans cette approche la reconnaissance par le pliage mental qui vérifie la superposition en imaginant le pliage d'une feuille.

Analysons l'approche de reconnaissance par pliage avec le modèle cK¢. Un exemple est pris à partir du manuel scolaire Dimathème 6e (p. 237). Cet exercice est proposé dans le manuel, après l'introduction de la symétrie orthogonale et a pour objectif de « visualiser un axe de symétrie ». Les énoncés de cette activité sont :

> *2. Voici plusieurs figures.*
> *Parmi les trois figures tracées en noir, quelle est celle qui est la symétrique de la figure tracée en rouge ? Quel est l'axe de symétrie : (AB), (BC) ou (CD) ?*[3]

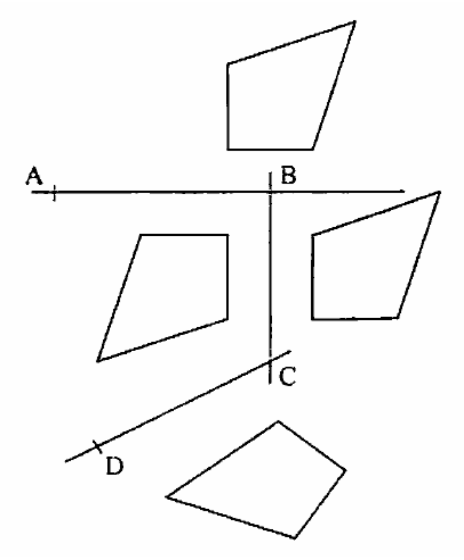


Figure IV.2 : *Dimathème 6e*, p. 237

Les procédures pour résoudre ce problème par pliage est assez simple : plier la feuille selon une droite ; vérifier la superposition de deux quadrilatères ; deux figures superposables sont reconnues comme symétriques. Etant donné qu'avec cette approche les figures symétriques ne sont caractérisées que par le pliage et la superposition, trois pliages seront exigés pour résoudre le problème. L'opérateur suivant est donc identifiés du point de vue du modèle cK¢.

R-r1 : plier suivant une droite et vérifier visuellement la superposition de deux figures

Nous avons repéré un opérateur (R-r1). Deux actions effectives (pliage et superposition) sont

[3] La figure tracée en rouge n'est pas lisible sur le diagramme. C'est le quadrilatère qui est au milieu et à gauche.

effectuées sur le dessin donné. Il produit une nouvelle information de la superposition de deux figures, l'état initial de représentation graphique est transformé par l'opérateur (R-r1) en un état suivant comme la Figure IV.3.

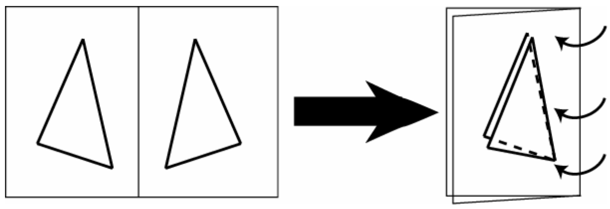


Figure IV.3 l'opérateur (R-r1) transforme l'état initiale en état suivant

Analysons les contrôles auteur de cet opérateur (R-r1) de trois points de vue différents. En ce qui concerne le contrôle qui choisit l'opérateur (R-r1), nous considérons le contrôle (R-σ1)[4] suivant.

R-σ1 : si Pliage (*x*, *y*, *d*) alors Sym (*x*, *y*, *d*)

En effet, comme deux figures superposables lors du pliage sont symétriques, le pliage et la superposition sont provoqués. A la suite des actions impliquées par l'opérateur (R-r1), la superposition en tant que nouvelle information est obtenue. Or, la superposition en soi n'a rien à voir avec le problème posé (p). Elle n'est pas la réponse du problème, mais juste un résultat des actions. Une autre étape de la résolution qui transforme une information ou un fait « superposable » dans un registre spatio-graphique en réponse ou énoncé « Sym (F, F', *d*) » dans un registre géométrique doit exister. C'est le contrôle (R-σ1) qui joue un rôle d'opérateur dans cette transformation. En effet, il est bien opératoire au sens de la transformation et de la production d'un énoncé. La règle (R-σ1) a ainsi deux rôles différents : contrôle pour le choix d'opérateurs et opérateur qui produit un énoncé à partir d'un fait.

En ce qui concerne le contrôle qui assure la validité d'opérateur, étant donné que l'opérateur (R-r1) est immédiatement dérivé du contrôle (R-σ1), la validité du contrôle porte sur celle de l'opérateur. Elle est donc un contrôle de l'opérateur (R-r1). Ce type de contrôle nous conduit considérer encore le support qui assure la validité du contrôle (σ1). Par exemple, la définition de la symétrie orthogonale par pliage « Pliage (F, F', *d*) $\Leftrightarrow$ Sym (F, F', *d*) » qui introduit souvent la symétrie au collège serait un support.

Le résultat obtenu par la résolution de problème est une réponse « oui, symétrique ». En ce qui concerne le contrôle qui valide le résultat, la vérification ou la justification peut jouer un rôle de contrôle. Nous l'aborderons plus loin avec d'autres approches de la reconnaissance. D'ailleurs, il existe aussi un contrôle qui valide le résultat d'actions de la première étape. Le

[4] La notation « Pliage (*a*, *b*, *c*) » signifie dans notre travail « deux figures *a et b* se superposent par pliage au long d'une droite *c* ».

contrôle spatio-graphique ou visuel de la superposition serait mobilisé. Mais, comme celui-ci est plutôt pour la superposition que pour la symétrie orthogonale, nous ne l'aborderons pas ici.

Le processus de la résolution est ainsi résumé avec des éléments de la conception comme le schéma suivant (Figure IV.4).

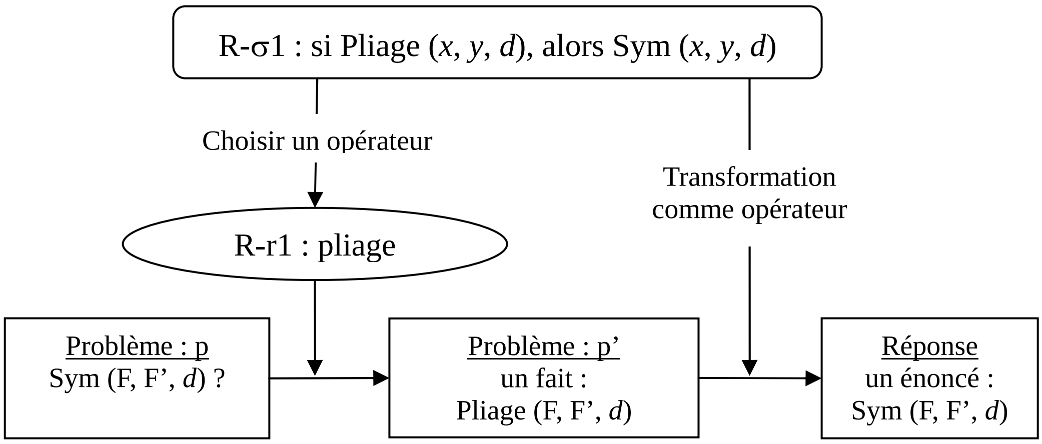


Figure IV.4 : Schéma du processus de reconnaissance par pliage

Nous pouvons plus précisément modéliser le processus de la résolution. L'analyse peut être détaillée autant que l'on veut. En effet, comme les actions de pliage peuvent être décomposées en deux étapes (le pliage et la vérification de superposition), les opérateurs et les contrôles plus précis peuvent être attribués à la résolution. Une telle façon de faire la modélisation pose la question de la granularité de modèle. Etant donné que notre intérêt est la règle concernant la symétrie orthogonale et son fonctionnement, nous essayons de décomposer une résolution en étapes qui explicitent le fonctionnement de règle de la symétrie orthogonale.

Lorsque le pliage effectif est interdit ou que les élèves pensent que le pliage effectif n'est pas très économique, l'approche de la reconnaissance en imaginant l'endroit d'images par pliage est aussi possible. Nous l'appelons, « *la reconnaissance par pliage mental* ». Dans ce cas, l'action ou l'opérateur est implicite. Nous ne l'analyserons pas en détail, puisque les éléments mis en œuvre sont les mêmes que ceux de la reconnaissance par pliage effectif. Cette position est prise tout au long de notre analyse, aussi pour la construction.

3.2 Reconnaissance par la perception globale

La deuxième approche est la reconnaissance par la perception globale. Les élèves qui connaissent déjà les figures symétriques par rapport à l'axe n'effectuent pas forcément une réalisation effective de pliage et superposition. Dans ces cas, nous considérons que soit la reconnaissance par pliage mental que nous avons précédemment mentionnée, soit la reconnaissance par la perception globale est effectuée. Cette dernière ne recourt pas au pliage, mais à la perception spatio-graphique de figures symétriques qui est acquise à partir de certaines expériences ou activités de la reconnaissance d'objets symétriques dans et hors classe. Dans la psychologie cognitive, ce type de reconnaissance, qui utilise des informations des stimuli sensori-physique, est appelé « bottom-up processing » de la reconnaissance visuelle de pattern (Barsalou, 1992 ; cf. Gal & Linchevski, 2002).

Le même problème que celui de l'approche précédente (Figure IV.2) est utilisé pour l'analyse ici. Le processus de résolution est immédiat. La reconnaissance est effectuée au coup d'œil sans critère explicite. Dans ce processus, l'opérateur ou l'action sont implicite. Si nous osons proposer un opérateur, l'opérateur suivant est considéré.

R-r2 : jeter un coup d'œil et appréhender perceptivement la figure proposée

L'appréhension perceptive de figures symétriques est effectuée. Bien que l'opérateur soit implicite, il doit exister un contrôle qui est prédicatif au choix d'un opérateur. Nous considérons le contrôle suivant (R-σ2)[5] qui implique naturellement l'opérateur (R-r2) au problème posé.

R-σ2 : si Perception (x, y, d) alors Sym (x, y, d)

Comme l'appréhension de figures est perceptive, les utilités figurales du registre géométriques prises en compte (x, y et d dans « Perception (x, y, d) ») seraient variés selon le résultat d'appréhension.

Par ailleurs, comme l'appréhension est perceptive, la perception globale de figures symétriques permet directement de reconnaître la symétrie. Autrement dit, la perception globale ou la règle (R-σ2) transforme en tant qu'opérateur le dessin donné dans le registre spatio-graphique (un fait) en énoncé « Sym (F, F', d) » du registre géométrique qui est la réponse au problème posé.

L'enjeu de cette approche du point de vue de la connaissance de la symétrie orthogonale est la perception globale. Nous considérons qu'il existe les critères de la perception globale, bien qu'ils soient implicites pour les élèves eux-mêmes, c'est-à-dire que les élèves ne soient pas conscients. Si nous osons expliquer ou décrire les éléments de ce contrôle perceptif en langue naturelle du point de vue de l'observation, cela doit être comme ce qui suit :

R-s1 : si Sym (F, F', d), F' est l'autre côté de l'axe de F ;
R-s2 : si Sym (F, F', d), F' est au même endroit que F par rapport à l'axe ;
R-s3 : si Sym (F, F', d), la forme de F' est la même que celle de F ;

[5] La notation « Perception (x, y, d) » signifie dans notre travail « deux figures x et y sont acceptées comme symétriques par rapport à la droite d par la perception globale de figures symétriques ».

R-s4 : si Sym (F, F', *d*), F' est inverse de F' ;
R-s5 : si Sym (F, F', *d*), l'axe *d* passe entre F et F'

Certains de ces critères pourraient être mobilisés ensemble. La perception ne serait pas souvent réduite à un seul critère. Par exemple, un élève conscient de sa perception de la taille de figures et de l'inclinaison de segments, un autre conscient de l'inclinaison et de l'endroit de segments par rapport à l'axe.

3.3 Reconnaissance analytique

La troisième approche est la reconnaissance analytique. Par « reconnaissance analytique », nous entendons une approche mobilisant des propriétés géométriques explicites, les éléments analytiques, de la symétrie orthogonale. Pour qu'une approche de la reconnaissance soit complètement analytique, les critères nécessaires sont les propriétés caractéristiques qui satisfont la définition de symétrie orthogonale. Dans la psychologie cognitive, ce type de reconnaissance qui est dirigée par le contexte ou la connaissance explicite, est appelé « top-down processing » de la reconnaissance visuelle de pattern (Barsalou, 1992 ; cf. Gal & Linchevski, 2002), au contraire de la reconnaissance de « bottom-up processing ».

Analysons maintenant l'approche analytique. La procédure de cette reconnaissance est de reconnaître le symétrique en identifiant sur la figure donnée les propriétés géométriques suffisantes pour la symétrie orthogonale. Considérons le problème qui demande si deux points sont symétriques par rapport à une droite donnée ou non. Le problème suivant est posé.

p : deux points données sont-ils symétriques par rapport à une droite ?

Par exemple, le résultat d'un mesurage de distance entre les points symétriques et l'axe et la vérification de l'orthogonalité fait reconnaître les deux points symétriques. Nous avons premièrement repéré comme opérateur (R-r3) deux actions effectives du mesurage de distance et d'orthogonalité sur la figure donnée.

R-r3 : mesurer la distance et vérifier l'orthogonalité.

Cet opérateur produit deux nouveaux énoncés (équidistance et orthogonalité) qui étaient implicites dans le problème posé (p). Autrement dit, l'opérateur (R-r3) permet de transformer le dessin donné du registre spatio-graphique en deux énoncés significatifs du registre géométrique pour la reconnaissance. Nous considérons le contrôle prédicatif suivant qui choisit l'opérateur (R-r3).

R-σ3 : si $xy \perp d$ et $x\mathrm{M} = \mathrm{M}y$ ($\mathrm{M} = xy \cap d$) alors Sym (x, y, d)   (x et y : points)

En effet, ce qui fait mesurer la longueur et l'angle est le contrôle (R-σ3) qui caractérise le symétrique par l'orthogonalité et le milieu. Sans celle-ci, les objets à mesurer n'existent pas.

En même temps, il assure la validité de l'opérateur (R-r3). En effet, étant donné que le contrôle (R-σ3) assure que deux points ayant deux propriétés géométriques sont symétriques, celles-ci sont cherchées sur la figure donnée.

Les propriétés obtenues sont l'orthogonalité et le milieu après avoir mobilisé l'opérateur (R-r3). Il s'agit encore d'une étape qui produit une réponse au problème posé, parce que les actions de l'opérateur (R-r3) ne donne que deux énoncés qui ne sont pas encore la réponse. La règle (R-σ3) joue un autre rôle. Il permet en tant qu'opérateur de transformer les deux énoncés (orthogonalité et milieu) en un autre énoncé (symétrie) dans le registre géométrique. Cette étape est effectuée comme un raisonnement déductif qui est requis dans la construction d'une démonstration.

Ainsi, le processus de résolution peut être structuré comme le schéma ci-dessous (Figure IV.5). La structure de ce schéma est proche de celle pour la reconnaissance par pliage. La différence à part de l'opérateur et le contrôle est d'une part le résultat d'action à la première étape et le transformation à la deuxième : les énoncés sont obtenus à la première et un raisonnement déductif est effectué à la deuxième étape.

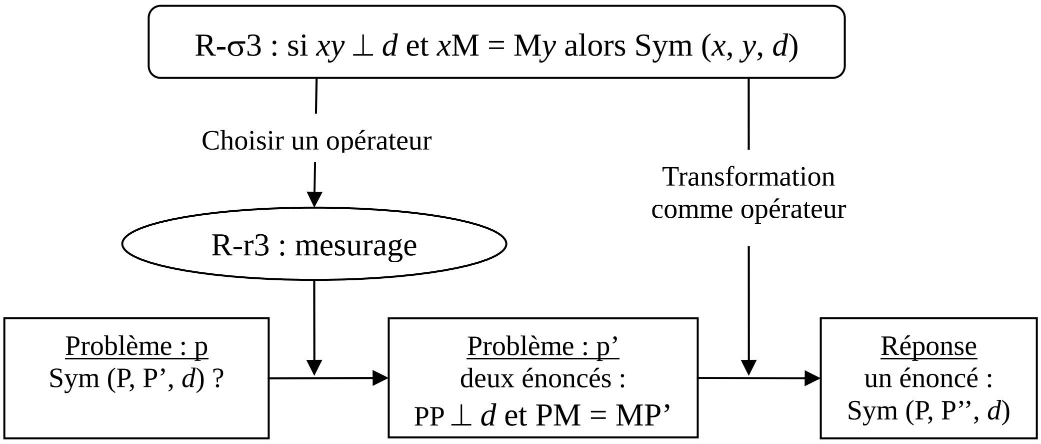


Figure IV.5 : Schéma du processus de la résolution analytique

Comme la validité et le choix de l'opérateur (R-r3) sont dirigés par le contrôle (R-σ3), nous pouvons aussi considérer la validité et le choix de ce contrôle. En ce qui concerne la validité, du point de vue mathématique, nous considérons la définition de la symétrie orthogonale.

R-D1 : $P_1P_2 \perp d$ et $P_1M = MP_2$ ($M = d \cap P_1P_2$) $\Leftrightarrow$ Sym (P_1, P_2, d)

En effet, elle implique naturellement le contrôle (R-σ3). La définition peut jouer un rôle du support de contrôle. Bien entendu, lorsque la définition est autrement proposée, il s'agit d'un autre support qui implique le contrôle (R-σ3).

A part la procédure présentée ci-dessus, nous pouvons considérer plusieurs procédures analytiques. Comme la règle (R-σ3) est celle de caractérisation de la symétrie, d'autres règles de la même nature sont aussi disponibles pour la reconnaissance. Par exemple :

R-σ4 : si $xy \perp d$ et xM = My (M $\in d$) alors Sym (x, y, d)   (x et y : les points)

R-σ5 : si xM = My et xN = Ny alors Sym (x, y, MN)   (x et y : les points)

Puisque plusieurs contrôles analytiques sont possibles, le contrôle ayant le rôle de choix d'un contrôle peut être considéré. Nous considérons qu'il est l'exigence de la situation dans laquelle est posé le problème avec certaines propriétés géométriques disponibles. Par exemple, lorsque la situation demande une reconnaissance analytique et les propriétés d'orthogonalité et de milieu sont faciles d'identifier, le contrôle (R-σ3) serait mobilisé. En revanche, lorsque la propriété d'orthogonalité n'est pas facile d'identifier, tandis que deux équidistances le sont, le contrôle (R-σ5) serait mobilisé. Le choix de contrôle est inhérent à la situation proposée.

Les contrôles et les opérateurs qui précèdent sont ceux pour la reconnaissance de deux points symétriques. Ceux qui sont mobilisés pour la reconnaissance de symétrique pour les figures plus complexes seraient différents, puisque d'une part la complexité de la figure est une variable didactique (cf. Chapitre III), et d'autre part plusieurs propriétés géométriques apparaissent sur la figure plus complexe et une telle figure élargit les choix de contrôles. Dans ce cas, il s'agit ainsi d'étapes supplémentaires. Considérons le problème de reconnaissance pour deux segments.

Tous d'abord, pour la reconnaissance analytique de figures symétriques, l'appréhension ponctuelle de figures est requise. Il s'agit d'identifier deux points qui sont prévus comme symétriques. L'opérateur suivant est donc mobilisé.

R-r4 : identifier deux points qui paraissent symétriques

Le contrôle prédicatif de cet opérateur est celui qui indique l'existence de deux points symétriques, c'est-à-dire la règle suivante.

R-σ6 : si Sym (x, y, d) alors $\forall$P $\in x$, $\exists$P' $\in y$ tel que Sym (P, P', d)

Après reconnaître les points symétriques, supposons que deux énoncés « Sym (P, P', d) » et « Sym (Q, Q', d) » sont obtenus. A ce moment, il doit encore exister une autre étape qui permet d'impliquer deux segments symétriques que demande le problème posé. Nous considérons l'opérateur suivant qui permet d'associer les points symétriques et transférer la symétrie de points en symétrie de deux segments.

R-r5 : si Sym (P, P', d) et Sym (Q, Q', d) alors Sym (PQ, P'Q', d)

C'est une règle de héritage de la symétrie. En outre, la transformation de cette étape est un pas de raisonnement déductif dans le registre de géométrie.

3.4 Reconnaissance semi-analytique

Les propriétés géométriques sont de temps en temps mises en œuvre avec la perception globale lors de la reconnaissance. Par exemple, lorsque l'on reconnaît un symétrique par la perception, le niveau de certitude n'est pas très haut. Dans ce cas, on vérifie les propriétés géométriques attachées à la symétrie orthogonale et on constate que la figure donnée est symétrique par rapport à une droite. Analysons ici cette approche appelée « *reconnaissance semi-analytique* ». Utilisons le problème de reconnaissance de deux segments symétriques.

Lorsqu'il existe deux segments, la propriété géométrique de même longueur peut souvent être considérée. Supposons qu'un élève répond au problème de reconnaissance de deux segments symétriques comme « La symétrie conserve la longueur. Donc, le segment ayant la même longueur que le segment objet doit être symétrique du segment objet ». A partir de ce discours, la propriété explicitement mise en œuvre est seulement celle d'égalité de longueur. Nous identifions ainsi qu'il mobilise l'opérateur de mesurage suivant pour la reconnaissance.

R-r6 : mesurer les longueurs de deux segments et vérifier la même longueur

Du point de vue du contrôle prédicatif qui permet de choisir cet opérateur, il s'agit de considérer le contrôle ayant une propriété d'égalité de longueur. Néanmoins, l'égalité de longueur ne permet pas de caractériser deux segments symétriques. Un contrôle qui la concerne est celui de propriété isométrie de la symétrie :

R-σ7 : si Sym (x, y, d) alors $x = y$ (x et y : segment)

Or, en premier lieu, il ne permet pas de caractériser ou de reconnaître la symétrie. En outre, deux segments qui se positionnent aux distances très différentes de l'axe et qui forment les angles ayant des mesures très différentes ne seraient pas reconnus comme symétriques. Lorsque le contrôle (R-σ7), ou d'autre contrôle du type de propriété de la symétrie, est mobilisé, certains implicites ou d'autres contrôles devraient donc être pris en compte. Dans la plupart des cas, c'est la perception globale de figures symétriques qui sont mise en œuvre ensemble avec d'autres contrôles.

Dans les manuels scolaires, plusieurs propriétés de la symétrie orthogonale apparaissent et sont à apprendre. Mais les propriétés qui permettent de reconnaître la symétrie sont celles caractéristiques. Pour cela, l'approche de reconnaissance semi-analytique peut être souvent mobilisée par les élèves.

3.5 Vérification et justification de reconnaissance

Dans l'analyse ci-dessus, nous n'avons pas explicitement analysé la phase de la validation qui se constitue de la vérification et de la justification. Du point de vue du modèle cK¢, il s'agit du contrôle ayant le rôle de validation. Notre analyse porte ici sur deux questions de la validation et de la justification. Ces deux questions ne pourraient pas être nettement dissociées, parce que la justification peut fonctionner comme une vérification de la réponse produite. Toutefois, comme ces deux termes sont explicitement séparés dans la problématique de preuve, nous les analysons ici séparément.

La question posée lors de la vérification est « la figure reconnue comme symétrique est-elle vraiment symétrique ? » Cette question demande encore une reconnaissance. En effet, la question posée lors de la reconnaissance était « la figure donnée est-elle symétrique ? » La procédure de reconnaissance peut être différente de celle qui est mise en œuvre pour la reconnaissance initiale.

D'autre part, la question posée lors de la justification est « pourquoi la figure reconnue comme symétrique est-elle symétrique ? » Le problème posé est différent de celui qui est posé lors de la reconnaissance ou de la vérification. La justification est, comme nous l'avons mentionné dans le Chapitre II, « *l'activité de persuader l'interlocuteur* ». Elle exige le point de vue extérieur et avance l'activité vers la preuve. En outre, le problème de la justification est de temps en temps abordé en tant que problème de preuve ou de démonstration (voir plus haut, §3).

Pour avoir une réponse au problème de la justification, deux moyens sont possibles du point de vue de la nature de la justification que nous avons vue dans le Chapitre II. D'une part, il peut être une explication descriptive du processus de reconnaissance qui explicite comment la figure est reconnue comme symétrique, c'est-à-dire la réponse porte dans ce cas sur l'explicitation de la procédure de reconnaissance (la réponse à la question « *de re* » appelé par Duval (1992, pp.38-39)). Par exemple, « parce qu'on a trouvé un angle droit par l'équerre et une équidistance par la règle graduée », « parce qu'on a plié une feuille au long d'une droite et que deux figures sont superposables », etc. Dans ce cas, la description des opérateurs mobilisés lors de la reconnaissance serait une réponse. D'autre part, il peut être une preuve qui explique pourquoi la figure est reconnue comme symétrique, c'est-à-dire la réponse porte dans ce cas sur la raison du choix de la procédure (la réponse à la question « *de dicto* » appelé par Duval (1992, pp.38-39)). Par exemple, « parce que deux points ayant un angle droit et une équidistance sont symétriques », « parce que deux dessins superposables sont symétriques », etc. Dans ce cas, une explicitation du contrôle mobilisé lors de la reconnaissance serait une réponse.

Du point de vue du processus global d'activités de la reconnaissance, il peut être résumé comme le schéma suivant.

Reconnaissance (vérification) $\rightarrow$ Justification (explication descriptive ou preuve)

3.6 Synthèse de la reconnaissance

Nous avons analysé quatre types d’approches de la résolution de problème de reconnaissance. Les analyses sont synthétisées ici en prenant en compte le fonctionnement et la nature de règles.

Dans la plupart des approches, nous avons trouvé qu’il existe deux étapes principales. La première étape est effectuée par l’opérateur ou l’action et produit à partir de la figure donnée des informations (un fait ou des énoncés) : deux dessins superposables, l’équidistance et l’orthogonalité, etc. La deuxième étape est une transformation des informations obtenues à la première étape en la réponse « symétrique » par une règle, c’est-à-dire un opérateur transforme un fait du registre spatio-graphique ou des énoncés du registre géométrique en un énoncé du registre géométrique. Enfin, la réponse ne contient pas les informations obtenues à partir de la première étape, mais juste un énoncé « symétrique » ou « non » est produit à partir de la deuxième étape. Nous avons aussi vu que la règle qui fonctionne comme contrôle de choix d’opérateur à la première étape fonctionne comme opérateur à la deuxième étape.

Du point de vue de la nature de règles, celles qui sont exigées et opératoires dans la reconnaissance de figures symétriques sont de caractérisation « si propriétés alors symétrie » qui caractérise le symétrique. Par exemple, « si deux figures sont superposables, alors elles sont symétriques », « si deux figures possèdent telle ou telle propriété, alors elles sont symétriques », etc. En effet, la règle doit permettre de transformer un fait ou des propriétés en un énoncé « symétrique ». Or, ce n’est pas le cas dans l’approche de reconnaissance perceptive et dans l’approche de reconnaissance semi-analytique. En particulier, pour celle-ci, les règles de propriété « si symétrie alors propriété » sont susceptibles d’être mobilisées avec la perception globale.

Pour la résolution des problèmes de reconnaissance, plusieurs approches étaient possibles. La perception globale de figures symétriques peut intervenir à plusieurs endroits. En particulier, la reconnaissance perceptive serait très souvent effectuée lorsque la reconnaissance non précise est demandée. Le choix d’une approche de reconnaissance est donc déterminé par la situation.

4 PROBLEMES DE CONSTRUCTION DE SYMETRIQUES

Les problèmes de la construction d'images sont très souvent abordés dans les activités de manuels scolaires. L'activité de constructions est une activité de réalisation effective de figures sur le papier ou sur l'écran, éventuellement avec des instruments. Dans cette section, nous analysons le processus de la construction du point de vue du modèle cK¢, en explicitant théoriquement les opérateurs et les contrôles possibles et nécessaires pour résoudre ce type de problèmes. Cette analyse nous permettra de comprendre a priori la nature des connaissances engagées dans la construction du point de vue de la règle, qui apporte une analyse comparative des connaissances dans la reconnaissance et dans la preuve.

Comme nous l'avons vu dans le Chapitre III, le problème de construction est bien étudié par les travaux antérieurs. Les variables didactiques sont identifiées, et plusieurs types de procédures de la construction sont identifiés. Les approches à analyser sont la construction par pliage, la construction par perception globale, la construction analytique et la construction semi-analytique. Toutes ces approches résolvent le problème suivant à l'état initial.

P(X) : construire le symétrique d'une figure X par rapport à une droite donnée

4.1 Construction par pliage

L'approche de construction par pliage est souvent utilisée lorsque la symétrie orthogonale est introduite dans le manuel scolaire. Le symétrique est tracé en pliant effectivement une feuille selon l'axe et en décalquant le dessin. Un exemple suivant de cette approche est pris de la partie Activité du manuel *Cinq sur Cinq 6^e^*.

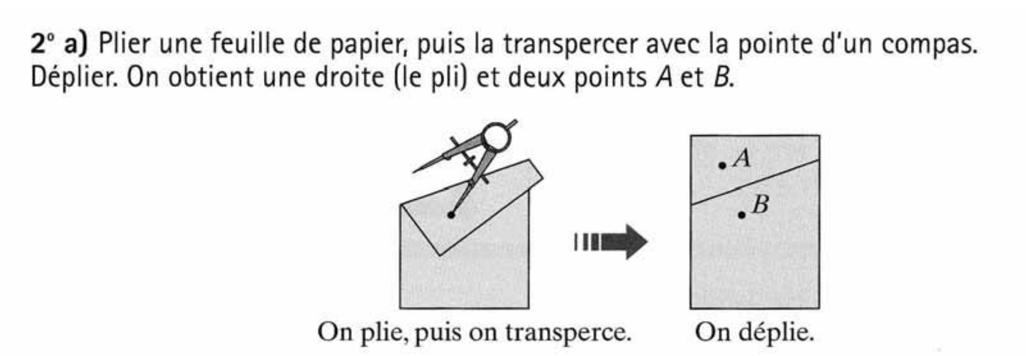


Figure IV.6 : *Cinq sur Cinq 6^e^*, p.210

La procédure de construction est explicitement indiquée dans le manuel (plier, transpercer, et déplier). Du point de vue du modèle cK¢, l'opérateur suivant est identifiés :

I-r1 : plier suivant une droite, transpercer les objets et déplier.

Nous avons repéré un opérateur (I-r1). Il conduit trois actions effectives (plier, transpercer et déplier) sur le dessin donné. Ces actions transforment le problème initial « P(F) » en un nouvel état ayant deux points sur la feuille. Analysons les contrôles auteur de l'opérateur (I-r1) de trois points de vue (le choix de l'opérateur, la validité de l'opérateur, la validité du résultat obtenu). En ce qui concerne le contrôle qui désigne l'opérateur (I-r1), nous considérons le contrôle suivant.

I-σ1 : si Pliage (F, *x*, *d*), alors Sym (F, *x*, *d*)

En effet, comme deux figures superposables lors du pliage sont considérées symétriques, le pliage et le transperçage sont provoqués. Autrement dit, le contrôle (I-σ1) permet de choisir pour la construction d'un point symétrique l'opérateur (I-r1). Le contrôle (I-σ1) est une règle qui caractérise la symétrie orthogonale par le pliage et la superposition. A la suite des actions impliquées par l'opérateur (I-r1), un dessin (un point) est réalisé sur la feuille. Or, à ce moment, le tracé est juste un point ou une tache sur un papier qui est superposable au point donné, mais qui n'a pas de rapport avec la symétrie. La superposition est une propriété visuelle ou spatio-graphique, c'est-à-dire un fait dans le registre spatio-graphique. Il doit donc exister une autre étape.

A partir d'un fait « superposition de deux points », la réponse « deux points symétriques » serait produite. Elle consiste en un point tracé et un énoncé (symétriques) du registre géométrique. En d'autres termes, elle est une figure composée par un signifiant et un signifié (voir Laborde & Capponi, 1991). Ce qui permet cette transformation, c'est-à-dire l'opérateur, est la règle (I-σ1) qui a joué un rôle de contrôle dans l'étape précédente. La règle (I-σ1) fonctionne donc à la fois comme contrôle et comme opérateur dans une résolution de problème.

Par ailleurs, il semble que la résolution de la deuxième étape est une reconnaissance de deux points symétriques. En effet, après que deux points superposables sont tracés, il s'agit de les accepter comme figures symétriques. Pour cela, une transformation est effectuée à la deuxième étape. En outre, cette transformation est très proche de celle effectuée lors de la reconnaissance par pliage. L'énoncé (symétrique) est produit à partir du fait (superposition) par la même règle que celle dans la reconnaissance par pliage (la règle (R-σ1) dans § 3.1).

Le résultat obtenu par la résolution de problème de construction est une réponse composée d'un dessin réalisé dans le registre spatio-graphique à la première étape et d'un énoncé obtenu dans le registre géométrique à la deuxième étape.

Le contrôle qui valide le résultat obtenu sera abordé plus loin dans la section « vérification et justification ». Résumons maintenant le processus de la résolution dans le schéma ci-dessus

(Figure IV.7).

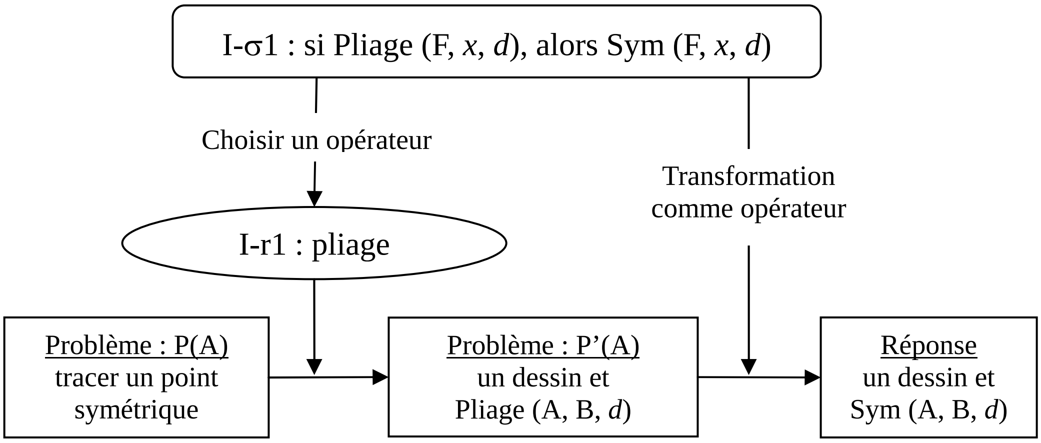


Figure IV.7 : le schéma de la construction par pliage

4.2 Construction par perception globale

La deuxième approche est la construction par la perception globale. Elle ne recourt pas au pliage, mais à la perception globale de figures symétriques qui est acquise à partir de plusieurs expériences ou activités sur la reconnaissance d'objets symétriques dans et hors classe. La façon du recours à la perception est proche de la reconnaissance par la perception que nous avons vue plus haut.

Comme l'approche s'appuie sur la perception qui ne peut pas être explicité, le manuel ne propose pas la procédure détaillée de cette approche. Nous en citons un exemple de problèmes qui demande des constructions par perception globale.

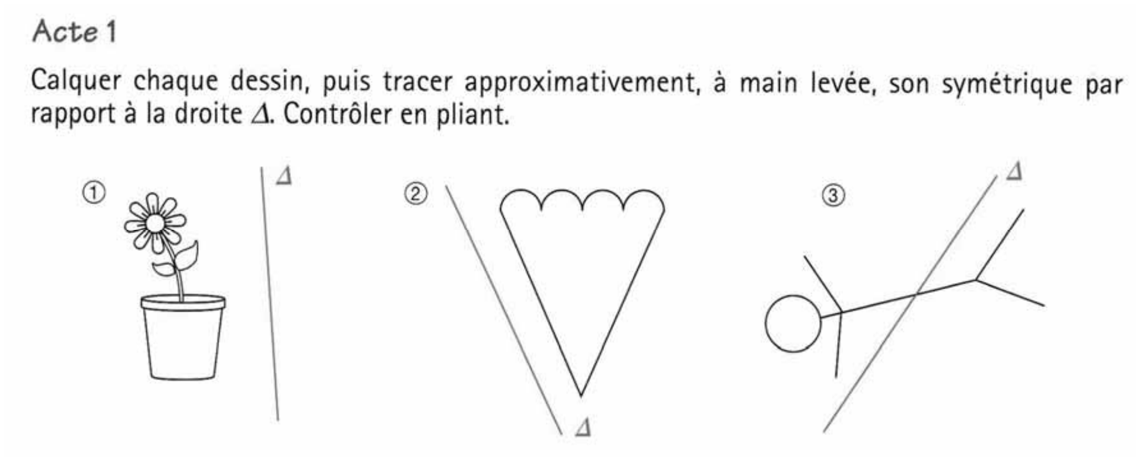


Figure IV.8 : *Cinq sur Cinq 6^e*, p.211

La procédure serait de tracer à main levée un dessin pour que le contrôle perceptif ou la reconnaissance perceptive l'accepte comme symétrique. La tâche de la Figure IV.8 demande à la fin de l'énoncé la vérification par pliage. Nous l'aborderons à la section de validation. Du point de vue du modèle cK¢, la résolution de ce problème par la construction perceptive est effectuée par l'opérateur suivant.

I-r2 : tracer un dessin pour que la perception l'accepte comme symétrique.

L'opérateur (I-r2) implique des actions qui produisent un dessin. Le processus de résolution est implicite. Un dessin est tracé en s'appuyant sur des critères implicites de la perception globale. Analysons les contrôles autour de l'opérateur (I-r2). En ce qui concerne le contrôle qui permet de le choisir, nous considérons le contrôle suivant qui implique naturellement l'opérateur (I-r2).

I-σ2 : si deux figures F, *x* et une droite *d* correspondent à la perception globale de figures symétriques, alors Sym (F, *x*, *d*)

En effet, si la figure inconnue (*x*) est tracée par la condition proposée de la perception, elle est bien symétrique de la figure donnée. Le contrôle (I-σ2) est une règle qui caractérise un symétrique. Et c'est pour cela que le dessin tracé est reconnu comme symétrique. Comme la perception globale apparue dans le contrôle ne serait pas explicitement déterminée, ce contrôle ne permet pas une seule construction, mais des constructions diverses en fonction de la perception mobilisée.

Comme l'approche précédente, le contrôle (I-σ2) prédit la mobilisation d'un opérateur et transforme le dessin tracé en énoncé « symétrique », c'est-à-dire il fonctionne à la fois comme contrôle et comme opérateur. Le processus de construction est semblable à la construction par pliage. Ce qui est différent est le fait que l'action de trace et l'attribution d'un sens ne peuvent pas être explicitement dissociés. En effet, l'opérateur (I-r2) contient déjà une attribution de sens comme « pour que la perception l'accepte comme symétrique ».

Les conceptions mobilisées lors de la reconnaissance perceptive jouent un rôle crucial dans la construction perceptive. Parce que le dessin tracé doit être toujours acceptable par la reconnaissance perceptive. Les rapports très étroits entre les conceptions mobilisées dans la reconnaissance perceptive et dans la construction perceptive sont trouvés : le contrôle (I-σ2) est aussi mobilisé dans la reconnaissance perceptive.

4.3 Construction analytique : pour un point

L'approche du type « la construction analytique » est celle dont la procédure repose sur les propriétés géométriques lors d'un choix parmi plusieurs possibilités.

Les exemples de la construction analytique sont souvent trouvés dans la partie « Méthodes » ou « Savoir faire » de manuels scolaires. Dans les manuels, cette approche apparaît en tant que construction avec instruments. En effet, les instruments (équerre, compas, etc.) portent du point de vue mathématique les propriétés géométriques telles que l'orthogonalité à l'équerre, l'équidistance au compas, etc. Les manuels proposent plusieurs procédures de construction. Nous analysons ici deux exemples qui sont typiques dans les manuels, la procédure avec l'équerre et la règle graduée et la procédure juste avec le compas, pour le problème de la construction d'un point symétrique. Puis, nous aborderons dans la section suivante (§4.4) le cas de la figure plus complexe.

4.3.1 Approche avec l'équerre et la règle graduée

Le premier exemple est pris de *Triangle 6^e^*. Cette approche est explicitement proposée dans tous les manuels sauf *Le Nouveau Pythagole 6^e^*.

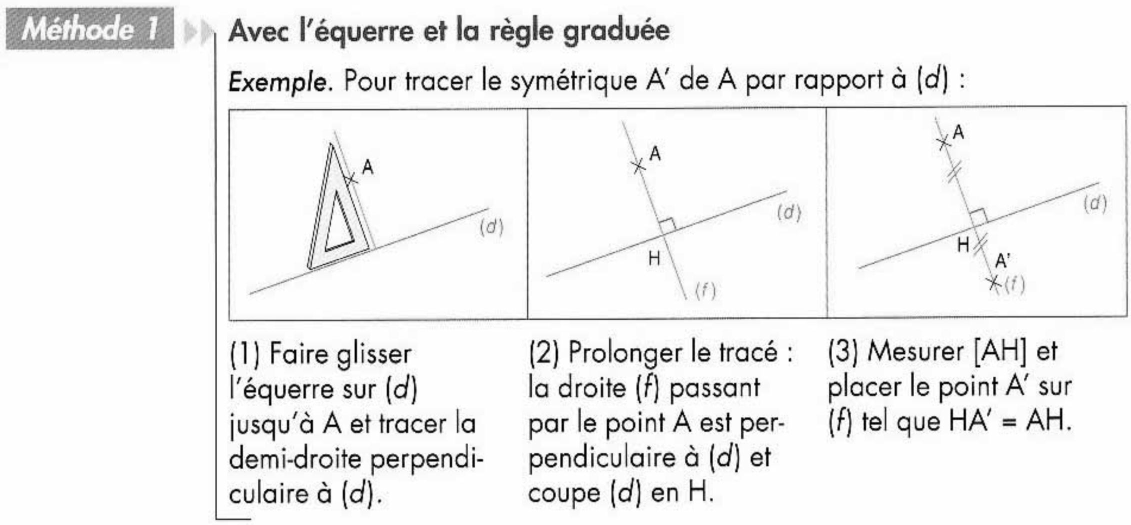


Figure IV.9 : *Triangle 6^e^*, p.205

Le problème abordé ici est la construction d'un point symétrique. Les activités qui permettent une construction sont données dans la Figure IV.9. Le processus de construction est, comme il est indiqué au-dessous des dessins, de tracer une droite perpendiculaire et de reporter la distance avec la règle graduée. Nous pouvons repérer un opérateur de construction à partir de ce processus[6] :

> I-r3 : tracer la droite (f) passant par le point A et perpendiculaire à l'axe : elle coupe (d) en H, puis mesurer [AH] et placer le point A' sur (f) tel que HA' = AH.

Nous avons formulé l'opérateur (I-r3) qui implique toutes les actions. Pour cela, il est un peu long. Il peut être décomposé en trois opérateurs pour chaque action : « tracer la droite

[6] Nous avons mis en œuvre pour mieux comprendre les correspondances des objets sur la figure et sur la formulation les étiquettes « A, M, (f), (d), etc. » proposées dans le manuel (Figure IV.9). Mais, nous entendons par là le cas général de l'expression.

perpendiculaire » ; « mesurer la distance » ; « placer le point symétrique sur la droite perpendiculaire à la position de la même distance mesurée ». Dans ce cas, le problème est transformé ou modifié à un prochain problème avec les résultats des actions. Or un seul opérateur est proposé ici, parce que nous considérons qu'un seul contrôle concernant la symétrie est mobilisé. Le contrôle qui désigne l'opérateur (I-r3) de réalisation serait trouvé dans la réponse aux questions « pourquoi trace-t-on une droite perpendiculaire ? » et « pourquoi reporte-t-on la distance ? » Du point de vue mathématique, deux propriétés géométriques sont mises en œuvre : orthogonalité et milieu. Le contrôle est donc la règle suivant qui les requit et caractérise l'objet symétrique.

I-σ3 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$), alors Sym (P, x, d)   (x : point)

En effet, parce que deux points ayant les propriétés, perpendiculaire et milieu, sont symétriques par rapport à cette droite, un point inconnu (x) est tracé pour qu'il satisfasse les conditions proposées par le contrôle (I-σ3). Pour la construction d'une image symétrique, les propriétés suffisantes sont celles qui définissent ou caractérisent l'objet en jeu. Autrement dit, la mobilisation comme contrôle d'une des règles de caractérisation sous la forme de « si Propriétés alors Symétrie » est requise.

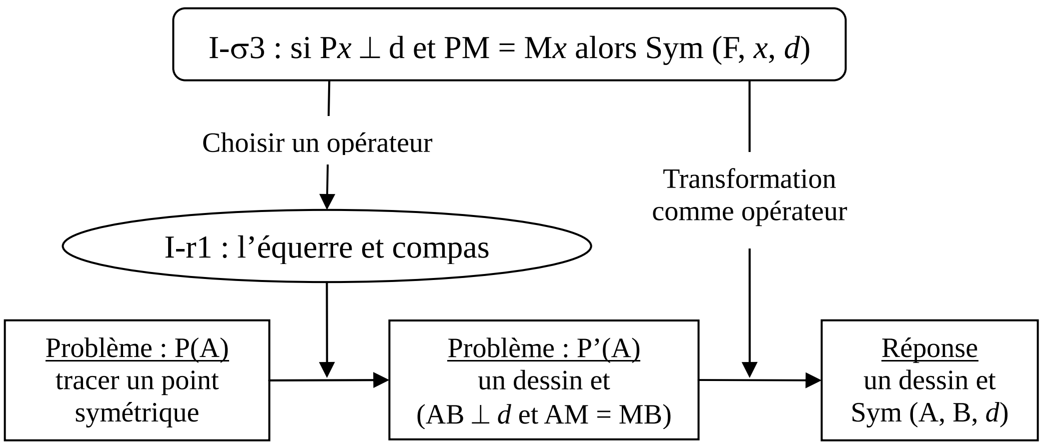


Figure IV.10 Le schéma pour la construction analytique

Nous pouvons aussi considérer, comme dans le cas de la reconnaissance analytique (§3.3, p.88), l'origine du contrôle (I-σ3). Par exemple, du point de vue mathématique, la définition suivante peut être un support du contrôle.

I-D1 : $P_1P_2 \perp$ d et $P_1M = MP_2$ (M = d $\cap P_1P_2$) $\Leftrightarrow$ Sym (P_1, P_2, d)

Le contrôle (I-σ3) est une règle qui est aussi remarquée dans la reconnaissance analytique. De même que d'autres approches de construction, le contrôle (I-σ3) fonctionne aussi en tant qu'opérateur qui produit un énoncé à partir d'un dessin tracé. La réponse au problème posé « P(F) » est donc un dessin (un point) et un énoncé. En outre, l'action d'attribution d'un sens peut être considérée comme la reconnaissance de la symétrie orthogonale, puisque deux objets sont déjà tracés sur la feuille et reconnus comme symétriques.

4.3.2 Approche avec le compas

Le deuxième exemple d'approche est pris du manuel *Le nouveau Pythagore 6e* (Figure IV.11). Cette approche est proposée dans les manuels scolaires suivants : *Dimathème, Triangle, Cinq sur Cinq, Pythagore, Nouveau Décimal*. L'exemple emploie les procédures utilisant les longueurs différentes de rayons de deux arcs. Dans certains manuels, la procédure de deux rayons égaux est proposée.

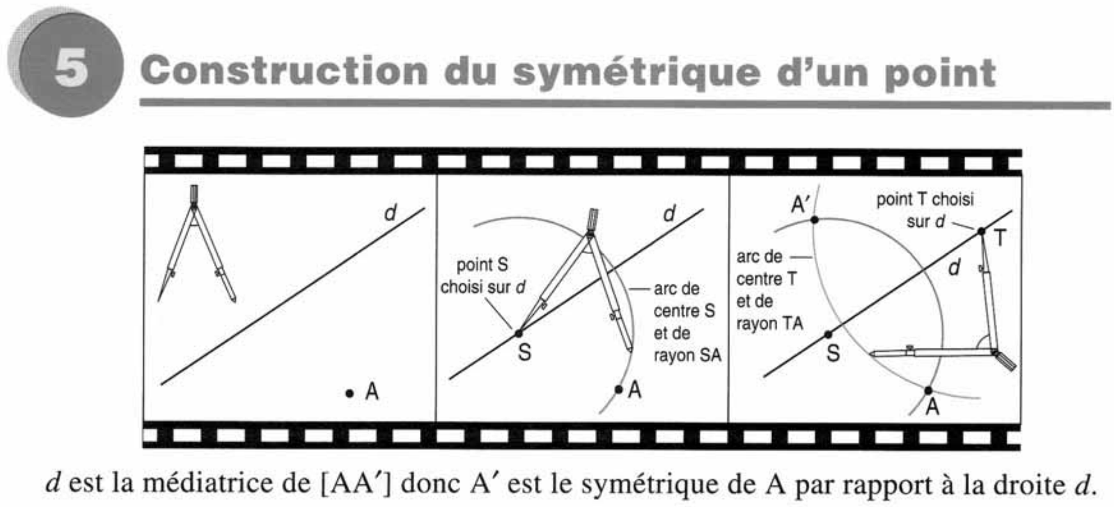


Figure IV.11 : *Pythagore 6e*, p.147

Le problème est le même que l'exemple précédent. Nous pouvons repérer le processus de construction et les formuler comme opérateur.

> I-r4 : choisir un point S sur l'axe et tracer un arc de cercle S passant par A, puis choisir un autre point T sur l'axe et tracer un arc de cercle de centre T passant par A : les deux arcs de cercle se coupent en A'.[7]

Comme les points symétriques sont équidistants de tout point sur l'axe, deux points différents quelconques sur l'axe déterminent deux points symétriques. La propriété d'équidistance est deux fois mise en œuvre. Le contrôle suivant est donc identifié du point de vue mathématique pour le choix d'un opérateur.

> I-σ4 : si PM = Mx et PN = Nx, alors Sym (P, x, MN) (x : point)

Le produit à cette étape est un point réalisé (A') et les énoncés (AS = SA' et AT = TA'). Mais, la réponse au problème posé « P(F) » est, de même que les autres approches de construction,

[7] Pour la notation, les mêmes lettres de la Figure IV.11 sont employées afin de mieux indiquer les objets en jeu, bien que nous supposions le cas général de la règle.

le dessin tracé par les actions effectives de l'opérateur et un énoncé « symétrique ». Une autre étape, la transformation des deux points ayant une propriété d'équidistance aux deux points symétriques, doit donc être effectuée. Comme le dessin n'est pas modifié à cette étape, ce qui est transformé est l'énoncé. Les énoncés « AS = SA' » et « AT = TA' » sont transformés à un énoncé « Sym (A, A', ST) ». Nous considérons que le contrôle (I-σ4) fonctionne ici comme opérateur que permet cette transformation.

Par ailleurs, nous pouvons considérer encore l'origine de la règle (I-σ4). La question « pourquoi deux équidistances permettent-ils de caractériser deux points symétriques ? » peut se poser. En mathématiques, ce type de question nous amène jusqu'à la définition qui est admise au départ. Lorsque l'énoncé suivant (D2) est reconnu comme définition de la symétrie orthogonale, le contrôle (I-σ4) en est directement dérivé, c'est-à-dire l'énoncé (D2) est un support du contrôle (I-σ4).

I-D2 : PM = MP' et PN = NP' ⇔ Sym (P, P', MN)

La Figure IV.11 ci-dessus du manuel amène à un autre contrôle. Au dessous du diagramme, un énoncé mentionnant la médiatrice se trouve : « *d* est la médiatrice de [AA'] donc A' est le symétrique de A par rapport à la droite *d* ». Nous formulons une règle suivant à partir de cet énoncé.

I-s1 : si d est la médiatrice de [PP'] alors Sym (P, P', d)

Cette règle peut être un contrôle pour l'opérateur (I-r4). C'est une règle qui caractérise l'objet symétrique par la médiatrice et qui peut être mis en œuvre pour la reconnaissance de symétrique. Il mène à une idée de tracer un segment [AA'] pour que la droite soit une médiatrice de [AA']. Cette règle est directement impliquée à partir de la définition suivante de la symétrie orthogonale de temps en temps proposée dans les manuels scolaires (cf. *Dimathème 6^{e}*).

I-D3 : « *d* est la médiatrice de [PP'] ⇔ Sym (P, P', *d*) »

Cependant, il ne permet pas directement une réalisation de construction. En effet, étant donné que les objets « fondamentaux », qui peuvent être tracés par les instruments comme la droite perpendiculaire, les points équidistants, etc., ne sont pas indiqués par cette règle, la procédure de construction n'est pas évidente.

4.3.3 D'autres procédures pour un point symétrique

D'autres procédures sont aussi possibles pour un point symétrique, bien qu'elles ne soient pas présentées dans les manuels scolaires. Nous ne les analysons pas ici, mais proposons juste les opérateurs et les contrôles qui sont créés par les combinaisons possibles de propriétés géométriques pour la construction du symétrique d'un point. Une procédure avec le compas et l'équerre est la suivante :

I-r5 : tracer la droite passant par le point A et perpendiculaire à l'axe, tracer un arc de cercle passant par A à partir d'un point quelconque sur la droite (d), prendre le point d'intersection comme A'.

I-σ5 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M $\in$ d) alors Sym (P, x, d)   (x : point)

Une procédure suivante remarquant sur l'angle par rapport à l'axe est aussi possible. Les instruments utilisés sont le rapporteur et le compas (ou la règle graduée).

I-r6 : choisir un point P sur l'axe ; tracer un segment AP ; mesurer l'angle $\angle$Apd ; reporter cette mesure à l'autre côté de l'axe et tracer une droite ; mesurer la longueur du segment AP ; prendre le point P' à l'équidistance du point P sur la droite tracée.

I-σ6 : si $\angle$PMd = $\angle x$Md et PM = Mx (M $\in$ d) alors Sym (P, x, d)   (x : point)

4.4 Construction analytique : pour une figure complexe

Les procédures de la construction analytique qui précèdent sont celles pour la construction d'un point symétrique. La construction d'une figure symétrique plus complexe peut prendre d'autres procédures. Nous l'analysons de la même façon que la construction d'un point symétrique. Citons trois procédures analytiques suivantes (Figure IV.12) qui se trouvent souvent dans les manuels scolaires.

Dans tous les cas de la Figure IV.12, la première démarche est la construction de symétriques des « points caractéristiques »[8] d'une figure donnée : pour le premier exemple (1), les extrémités A et B du segment ; pour le deuxième (2), deux points différents quelconques sur la droite ; pour le troisième (3), le centre du cercle et un point sur le cercle. Ensuite, associer les points construits comme symétriques ou tracer un cercle passant par les points symétriques construits en respectant la figure initiale. Nous pouvons y repérer au moins deux étapes, c'est-à-dire deux problèmes consécutifs sont abordés. Analysons le cas de la procédure (1) de la Figure IV.12. Deux problèmes successifs suivants sont abordés :

P([AB]) : tracer le symétrique d'une figure (le segment AB)
P'([AB]) : tracer le symétrique de la figure dont les symétriques des points caractéristiques (A' et B') sont déjà tracés

[8] Nous entendons par « points caractéristiques » les points qui déterminent une figure. Par exemple, deux extrémités pour un segment, trois sommets pour un triangle, quatre sommets pour un quadrilatère, le centre et un point pour un cercle, etc.

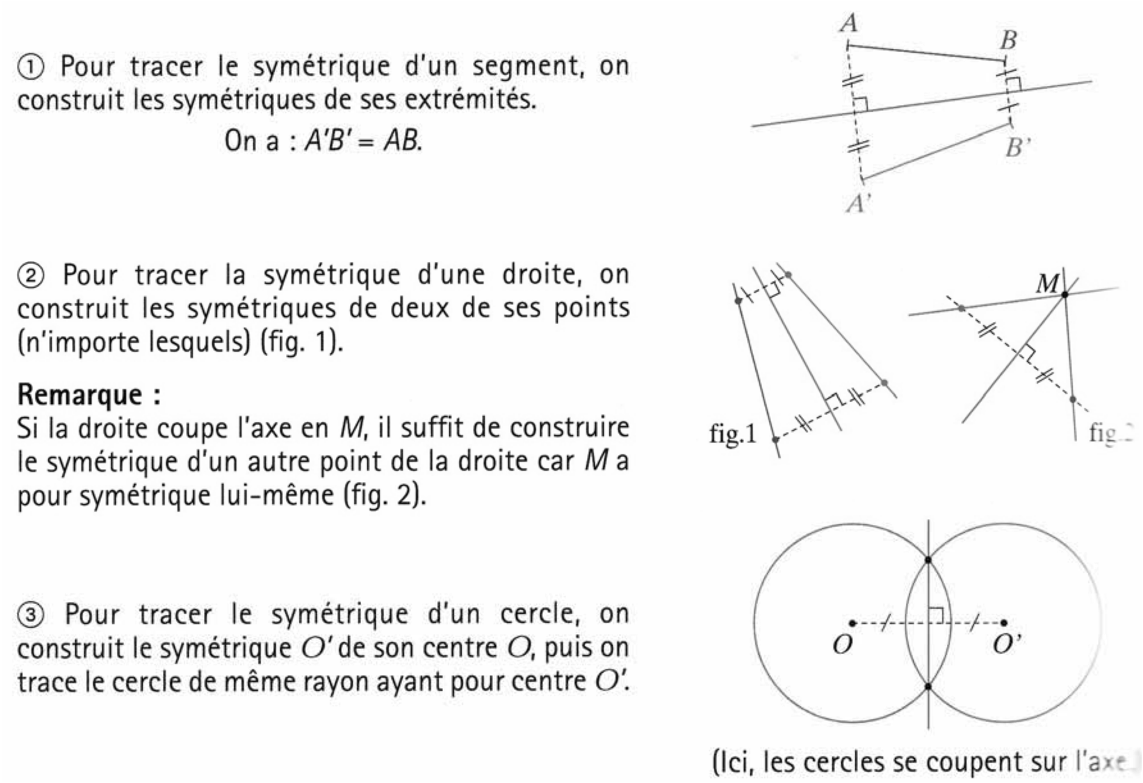


Figure IV.12 : *Cinq sur Cinq 6*[e], p.214

Le problème « P([AB]) » est commun pour les tâches de la construction de symétriques. Le problème « P'([AB]) » est celui qui est abordé après la construction de symétriques de points caractéristiques et donc qui disposent un produit de la construction. La construction de points symétriques transforme le problème « P([AB]) » en problème « P'([AB]) ». Elle est donc un sous problème lors de cette transformation. Pour le symétrique du segment AB, deux sous problèmes « P(A) » et « P(B) » seront abordés. La structure de processus de résolution du problème « P([AB]) » est exprimée comme le schéma suivant (Figure IV.13).

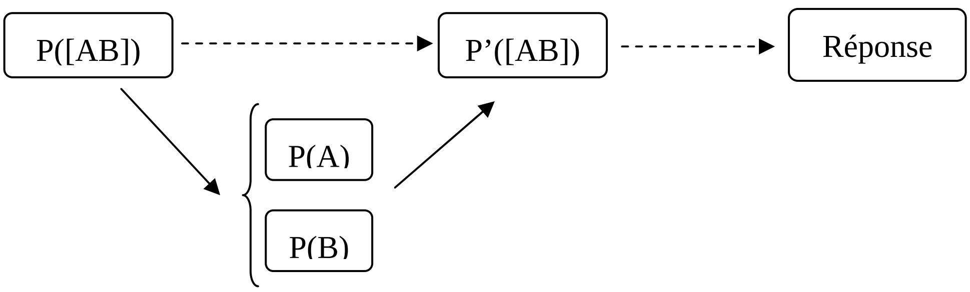


Figure IV.13 Le processus de résolution du problème « P([AB]) »

Dans la transformation du problème « P([AB] » au problème « P'([AB] », le choix des points à transformer et la résolution de sous problème sont effectués. La construction de points symétriques, la résolution de sous problèmes, est déjà analysée plus haut. Nous analysons ici deux processus : d'une part le choix des points et d'autre part la résolution du problème « P'([AB]) ».

Choix des points

Dans le processus de transformation du problème « P([AB] » aux sous problèmes « P(A) » et « P(B) », les points caractéristiques sont choisis. Nous identifions l'opérateur suivant qui y est mobilisé.

I-r7 : identifier les points caractéristiques de la figure donnée

Le contrôle qui permet de choisir l'opérateur (I-r7) est celui qui implique une décomposition de la figure donnée ([AB]) aux points et une identification des points caractéristiques (A et B) lors de la construction du symétrique. Nous considérons en premier lieu *le contrôle de la dissociation* d'un segment symétrique (I-σ7).

I-σ7 : si Sym (PQ, x, d) alors $\exists u$ et $v \in x$ tel que Sym (P, u, d) et Sym (Q, v, d)

Ce contrôle (I-σ7) permet de dissocier les segments symétriques aux points ou extrémités symétriques et d'assurer l'existence des points symétriques lors de la décomposition. D'une façon plus précise, il permet d'impliquer qu'un objet inconnu x qui est symétrique au segment PQ possède deux points u et v qui sont respectivement symétriques aux points P et Q. Le segment AB est décomposé en points A et B et deux symétriques A' et B' sont tracés. Pour le contrôle (I-σ7), nous pouvons aussi considérer une règle plus générale de la décomposition d'une figure symétrique.

I-σ7' : si Sym (F, F', d) alors $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', d)

D'ailleurs, le contrôle (I-σ7) permet de décomposer aux points (A et B) des extrémités du segment (AB). Grâce à celui-ci, le fait qu'il existe deux points symétriques aux extrémités du segment initial est connu. Or, « pourquoi les points A et B sont-ils choisis en tant que candidats des points à transformer ? » En effet, tous points sur le segment AB peuvent avoir les symétriques correspondants (P_i et P_i') selon la règle s4. Il doit donc encore exister une raison ou un contrôle que certains points (points caractéristiques) sont privilégiés parmi les points du nombre infini sur la figure. Nous considérons un contrôle suivant (I-σ8) qui implique la partie identification des points caractéristiques (P et Q).

I-σ8 : les points caractéristiques d'une figure à construire permettent de la tracer

L'énoncé « Les points caractéristiques » du contrôle (I-σ8) évoque les points de la figure à construire. Mais, l'identification de points caractéristiques est effectuée sur la figure donnée, le segment AB. Autrement dit, une autre question « pourquoi les points (u) et (v) à réaliser sont-ils caractéristiques ? » peut se poser. Il se peut que même si les points tracés sont caractéristiques, les points initiaux ne soient pas caractéristiques. Il doit exister un contrôle ou support qui permet de supposer que les symétriques des points identifiés comme symétrique sont aussi caractéristiques de la figure à construire. En effet, si les points transformés (u) et (v) ne sont pas des points caractéristiques de la figure à construire ([P'Q']), la construction du symétrique des points caractéristiques (P) et (Q) de la figure donnée ([PQ]) ne serait pas effectuée. *La règle de la conservation de propriété géométrique* (I-σ8) de la symétrie orthogonale est ainsi nécessaire. Bien entendu, toutes les propriétés géométriques de la figure initiale n'est pas nécessairement conservée à la figure transformée. Dans cette étape, la propriété est « le point caractéristique ».

I-σ9 : les objets transformés possèdent certaines propriétés de la figure initiale
Si Sym (F, F', *d*) alors Pro (F) = Pro (F')

Ainsi, l'opérateur (I-r7) s'appuyant sur ces contrôles (I-σ7, I-σ8 et I-σ9) implique deux sous problèmes « P(A) » et « P(B) » à partir du problème initial « P([AB] ». La résolution de ces deux problèmes transforme le problème « P([AB] » en autre problème « P'([AB] ».

Résolution du problème P'([AB])

La réalisation d'un segment permet de le résoudre le problème « P'([AB]) » dans lequel les points symétriques « A' et B' » sont déjà réalisés. Nous identifions un opérateur suivant.

I-r8 : tracer un segment qui a pour extrémités deux points

L'opérateur (I-r8) implique une réalisation effective de la figure par l'association des points construits pour que deux figures (figure initiale et figure transformée) puissent être symétriques, et transforme le problème « P'([AB]) » en réponse. Il est simple par rapport à l'opérateur (r7). C'est une action qui amène à tracer un segment dont les extrémités sont déjà réalisées comme symétriques. Les questions qui se posent pour expliciter les contrôles sont « Qu'est-ce qui permet alors cet opérateur ? », « Pourquoi un segment est-il tracé ? ». Nous considérons premièrement pour le choix de l'opérateur (I-r8) le *contrôle de l'association* des points (σ9).

I-σ10 : si Sym (P, *x*, *d*) et Sym (Q, *y*, *d*) alors Sym (PQ, *xy*, *d*)

Le contrôle (σ9) permet d'affirmer que le segment tracé (*xy*) à partir de deux points (*x*) et (*y*) qui sont respectivement symétrique de deux points donnés (P) et (Q) est symétrique du segment ([PQ]). Grâce à cela, l'opérateur permet de tracer un segment.

D'ailleurs, la figure tracée est un segment. En effet, si la configuration de figure n'est pas connue, juste deux points caractéristiques ne permettent pas de tracer un segment. Par exemple, deux points étant donnés, la figure peut être soit un segment, soit une droite, soit un cercle. La question qui se pose ici est « pourquoi un segment est-il tracé ? » Nous considérons qu'une règle de *la conservation de propriété géométrique* (I-σ9) est en même temps mobilisée. Dans ce cas, la propriété est un segment.

I-σ9' : le symétrique d'un segment est un segment
Si Sym (F, F', *d*) alors Pro (F) = Pro (F')

Puisque le fait que la symétrie orthogonale conserve la nature d'objet géométrique est connu, l'opérateur (I-r8) qui permet un segment est choisit. Les propriétés géométriques qui sont conservées par la symétrie orthogonale sont celles de l'isométrie. Par exemple, les propriétés quantitatives qui sont conservées sont la mesure de longueur, d'aire, d'angle, etc. ; les natures d'objet sont le sommet, le centre, l'extrémité, etc. Pour la construction d'une figure plus complexe, la règle de la conservation de propriété est très souvent implicitement ou explicitement mobilisée. Par exemple, lors de tracer deux segments connectés par un somment, c'est-à-dire ayant un seul sommet pour trois points donnés, trois figures différentes sont possibles. Dans ce cas, pour construire analytiquement son symétrique, il s'agit de bien reconnaître la nature de chaque point qui est conservée.

4.5 Vérification et justification de construction

Dans l'analyse ci-dessus, nous n'avons pas abordé l'activité de validation. La validation se compose par la vérification et la justification. Du point de vue du modèle cK¢, ces deux activités proposent les questions différentes : d'une part pour la vérification, la question « la figure construite est-elle vraiment symétrique ? » et d'autre part pour la justification, « pourquoi le dessin tracé est-il symétrique ? ». De temps en temps, ces deux activités ne sont pas explicitement dissociées dans une activité de résolution. Par exemple, une justification peut être une vérification qui permet d'argumenter la valeur épistémique d'un énoncé. Mais nous les analysons ici séparément.

La question pour la vérification est ressemble à celle de reconnaissance : « la figure donnée est-elle symétrique ? » Lorsque la phase de vérification est effectuée, la figure qui n'est pas reconnue comme symétrique ne serait pas donnée comme réponse, c'est-à-dire une démarche de reconnaissance de figures symétriques est investie. Le problème de reconnaissance est abordé[9]. Le processus de construction est donc exprimé comme le schéma suivant.

Construction $\rightarrow$ Reconnaissance (vérification)

La construction et la reconnaissance sont dissociées entre elles dans le schéma ci-dessus, mais elles sont de temps en temps effectuées ensemble dans la pratique de construction. En effet, nous avons vu dans le processus de résolution de construction l'activité de transformation d'un fait ou des propriétés mises en œuvre dans la réalisation effective en un énoncé « symétrie ». L'attribution d'une signification au dessin produit est effectuée. Elle était aussi une activité de reconnaissance. En outre, dans la construction globale, la réalisation est conduite avec la reconnaissance perceptive. La reconnaissance joue donc très souvent un rôle crucial dans la construction et dans la vérification.

[9] L'analyse est donnée dans la section précédente (§3).

Le problème de construction dans l'enseignement de la géométrie demande de temps en temps une justification de construction, pour que l'enseignant puisse savoir quelles propriétés géométriques sont mises en œuvre par les élèves et pour que les élèves puissent être conscients des propriétés mobilisées. Nous avançons ici une réflexion sur les connaissances engagées dans la justification, surtout après la vérification de la construction. La justification désigne dans notre travail, comme nous l'avons mentionné quelquefois, « l'activité de persuader l'interlocuteur ». Nous supposons donc que la véracité de construction est déjà plus ou moins établie par les élèves. Si nous ajoutons « la justification » au schéma précédent, le processus de construction est élargit comme ce qui suit :

Construction $\rightarrow$ Reconnaissance (vérification) $\rightarrow$ Justification

Le problème qui sera posé lors de la justification est « justifier ou expliquer pourquoi la construction réalisée est valide ? ».

Nous considérons que deux approches principales sont possibles pour la justification d'une construction du point de vue du problème abordé. D'une part, c'est la justification qui repose sur une reconnaissance de la figure construite comme symétrique (justification indirecte), et d'autre part c'est la justification qui repose sur des procédures mises en œuvre lors de la construction (justification directe). La première justification est effectuée en explicitant les procédures et/ou les critères de reconnaissance qui ne sont pas liés à la procédure de construction, c'est-à-dire la conception lors de la reconnaissance qui serait différente de celle lors de la construction est mobilisée. La deuxième justification est effectuée en explicitant les procédures et/ou des propriétés mobilisées dans la construction, c'est-à-dire la conception lors de la construction est mobilisée. Dans tous les cas, soit les conceptions lors de la reconnaissance ou soit les conceptions lors de la construction sont mobilisées pour la justification, du point de vue théorique.

Dans les deux cas, le niveau de justification dépend des élèves et aussi de la modalité de la question posée. La justification peut être, comme nous l'avons vu plus haut pour la reconnaissance (§3.5), d'une part une explication descriptive tel que « j'ai tracé une droite perpendiculaire avec l'équerre, et puis reporté la distance à l'autre côté de l'axe. Donc c'est un symétrique (ou un axe de symétrie) », et d'autre part, l'explicitation argumentative des raisons de nécessités des propriétés géométriques attachées aux procédures tel que « j'ai tracé une droite perpendiculaire au support de deux points symétriques passant par le milieu de ces deux points. Parce qu'une droite perpendiculaire qui passe par le milieu est une médiatrice et que la médiatrice est l'axe de symétrie ».

4.6 Synthèse de la construction

Nous synthétisons les résultats obtenus du point de vue théorique pour la construction de figures symétriques.

Deux étapes de la construction

Dans toutes les approches sauf la construction par la perception globale, nous avons trouvé qu'il existe deux étapes principales afin de produire une réponse. D'abord, c'est une étape de l'activité de réalisation effective d'un dessin n'ayant pas encore de signification du point de vue du problème posé. Ensuite une étape de production d'une figure qui consiste en un dessin tracé et sa signification est effectuée. Plus précisément, un fait ou des propriétés attaché à la procédure de construction est transformé en un énoncé « symétrique ». Lors de la transformation d'un fait (superposition, par exemple), le changement de registre à partir du celui spatio-graphique à celui géométrique est provoqué par un opérateur.

Le fonctionnement de la règle

Nous avons aussi vu qu'une règle qui fonctionne comme contrôle pour le choix d'opérateur fonctionne aussi comme opérateur pour la production d'un énoncé. Ce point est aussi vu dans la reconnaissance de figures symétriques.

Le rôle de la reconnaissance

Nous avons aussi vu que la conception mobilisée lors de la reconnaissance joue souvent un rôle crucial dans la construction. La transformation d'un énoncé est aussi vue dans la reconnaissance. La construction par la perception globale est effectuée par la reconnaissance perceptive. En outre, à la phase de vérification ou de justification, la reconnaissance est une activité principale.

La nature de la règle

En ce qui concerne la nature de la règle, celles qui sont exigées et opératoires dans la construction de figures symétriques sont plutôt de caractérisation de la symétrie « si Propriétés, alors symétrie ». Les propriétés nécessaires pour la construction sont celles de l'hypothèse ou prémisse de ce type de règle.

5 PROBLEME DE CONSTRUCTION D'AXES

Le troisième type de problèmes est la construction d'axes. Ce type de problèmes est souvent trouvé dans les manuels scolaires comme les autres types de problèmes. Le problème propose une ou deux figures qui sont symétriques ou non, et demande de tracer un ou des axes aux figures symétriques. Les exemples que nous avons proposés comme exemples du problème de reconnaissance sont ce type de problèmes (Figure IV.1 de p.83). Figure IV.1 est un problème qui demande de tracer un axe pour deux figures symétriques. Comme ces exemples, il s'agit premièrement d'une reconnaissance de figures symétriques pour résoudre le problème, c'est-à-dire une conception lors de la reconnaissance est mobilisée. Même si le problème manifeste le symétrique dans ses énoncés, une vérification du symétrique, c'est-à-dire la reconnaissance, serait effectuée. Les énoncés de problèmes seront souvent comme ce qui suit :

> « Indiquer celles qui admettent un ou plusieurs axes de symétrie et dessiner ces figures à main levée. Tracer ensuite le ou les axes de symétrie sur les dessins réalisés à main levée» (Figure IV.14 : *Dimathème 6^e^*, pp.236-237) ;

Figure IV.14 : *Dimathème 6e*, pp.236-237

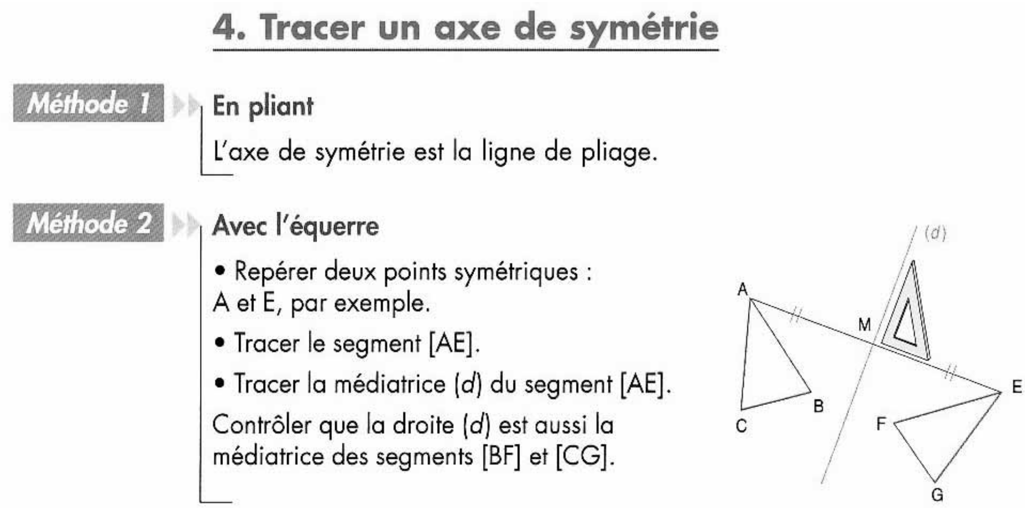
Comme nous avons déjà analysé le problème de reconnaissance dans la section précédente, notre analyse porte ici sur la construction d'un axe après la reconnaissance, c'est-à-dire l'activité au moment où les figures sont déjà reconnues comme symétriques. Le problème posé pour ce type serait donc l'énoncé suivant.

> p : Les figures données sont symétriques par rapport à un axe. Tracer l' axe de symétrie

Nous analysons maintenant les approches pour résoudre ce problème du point de vue de la conception, en séparant, de même que les analyses pour la reconnaissance et la construction du symétrique, les approches de construction par pliage, construction perceptive et construction analytique.

5.1 Construction par pliage

La première approche est la construction par pliage. La procédure est de plier une feuille pour que les figures symétriques se superposent. Et le pli est l'axe de symétrie. Le manuel scolaire propose de temps en temps cette approche, mais le détail n'est pas explicité, puisque le pli est immédiatement réalisé après le pliage. La Figure IV.15 qui est prise du manuel *Triangle 6^e* propose pour la première méthode une construction par pliage. Nous analysons ici cet exemple.


4. Tracer un axe de symétrie

Méthode 1 **En pliant**
L'axe de symétrie est la ligne de pliage.

Méthode 2 **Avec l'équerre**
• Repérer deux points symétriques : A et E, par exemple.
• Tracer le segment [AE].
• Tracer la médiatrice (*d*) du segment [AE].
Contrôler que la droite (*d*) est aussi la médiatrice des segments [BF] et [CG].

Figure IV.15 : *Triangle 6^e*, p. 206

Comme nous avons supposé que la reconnaissance était déjà effectuée, les deux dessins qui sont reconnus comme symétriques sont déjà identifiés. La procédure de construction est juste plier la feuille pour que deux figures symétriques se superposent. Nous identifions l'opérateur suivant qui provoque un premier pas de résolution de ce problème.

A-r1 : plier la feuille pour que les figures symétriques se superposent

Cet opérateur amène une action du pliage avec la superposition de figures symétriques. Le résultat de pliage est un pli. Le contrôle qui choisit l'opérateur (A-r1) serait celui qui permet de passer la construction d'un axe à la construction d'un pli. La réponse à la question « pourquoi le pli doit-il être tracé pour la construction d'un axe ? » serait un contrôle mobilisé pour le choix d'un opérateur. En effet, il s'agit dans l'action d'un pli, mais non pas d'un axe. Nous considérons le contrôle suivant. Il caractérise l'axe de symétrie par le pliage.

A-σ1 : si Pliage (F, F', x) alors Sym (F, F', x)

L'action de l'opérateur (A-r1) est la construction d'un pli par la superposition d'une feuille. Après cette action, ce qui est produit est juste un pli ou une droite tracé sur la feuille par le pli. Il n'a rien à voir avec un axe de symétrie. Il doit donc y avoir un opérateur qui transforme le pli du registre spatio-graphique en axe du registre géométrique. Nous considérons que c'est encore un contrôle (A-σ1) qui caractérise l'axe de symétrie à partir d'un pli. Or, il joue dans ce cas un rôle de l'opérateur.

Grâce à ces opérateurs, la réponse au problème posé est produite. Elle se compose d'une droite tracée par pliage et d'un énoncé « l'axe de symétrie ». Nous exprimons maintenant ce processus de production dans le schéma suivant.

Lorsque le pliage effectif est interdit ou que les élèves pensent que le pliage effectif n'est pas très économique, l'approche de la reconnaissance en imaginant l'endroit d'images par pliage est aussi possible. Nous l'appelons, « *la reconnaissance par pliage mental* ». Dans ce cas, l'action ou l'opérateur est implicite.

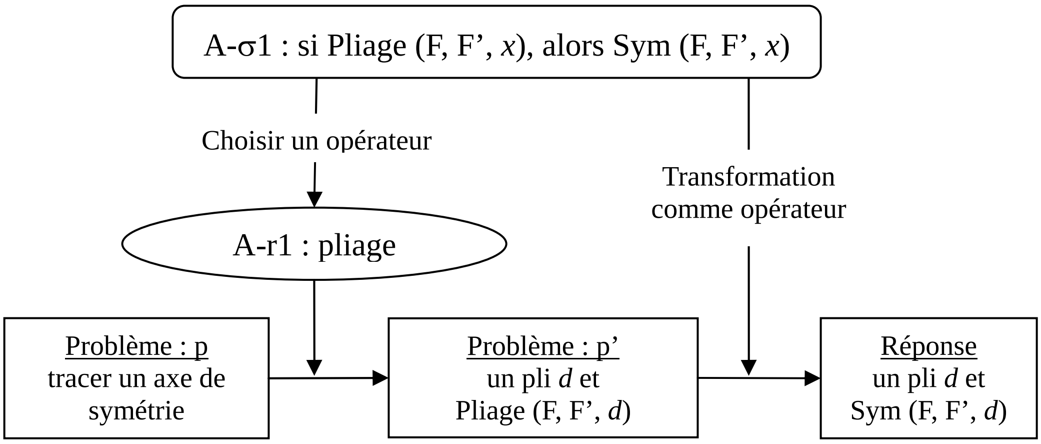


Figure IV.16 : schéma de la construction d'axe par pliage

5.2 Construction par la perception globale

La deuxième approche est celle de la construction par la perception globale. La procédure ne s'appuie sur aucune propriété géométrique précise, mais sur la perception globale de figures symétriques. De même que la construction par pliage, nous supposons ici que deux figures données sont déjà reconnues comme symétriques. L'activité conduite pour la construction d'un axe est de tracer une droite pour qu'elle puisse être un axe accepté par la perception globale pour les figures symétriques proposées. Le problème initial (p) est le même que celui de l'approche par pliage. A partir de l'action conduite dans la procédure de construction, nous considérons que l'opérateur suivant (A-r2) est mobilisé :

A-r2 : tracer une droite pour que la perception l'accepte comme axe de symétrie

L'opérateur (A-r2) n'implique pas une action précise. Si nous osons la préciser, elle serait tracer une droite au milieu entre deux figures ou d'autre action de réalisation s'appuyant sur la propriété spatio-graphique. L'appui de cette action est la perception globale qui est implicite. En ce qui concerne le contrôle mobilisé pour le choisir, il doit exister un contrôle qui permet de passer la construction d'un axe à la méthode particulière avec la perception. Comme les autres analyses, la réponse à la question « pourquoi la droite correspondant à la perception doit-elle être tracée pour la construction d'un axe ? » serait le contrôle mobilisé. Nous considérons que c'est le contrôle suivant (A-σ2) qui supporte la mobilisation de l'opérateur (A-r2).

A-σ2 : si Perception (F, F', *x*) alors Sym (F, F', *x*)

C'est ce contrôle qui permet de remarquer pour la construction d'un axe de symétrie une idée de l'utilisation de la perception globale. D'ailleurs, le contrôle (σ2) est pour choisir un opérateur. La droite construite par l'action conduite par l'opérateur (r2) est juste une droite et elle n'a pas de rapport avec l'axe à construire. Elle peut être un axe des autres figures. Il doit exister un opérateur qui transforme la droite en l'axe. Nous considérons qu'elle est encore un contrôle (A-σ2). Cette transformation ne serait pas explicitement dissociée de la construction d'une droite. La perception globale joue un rôle important tout au long du processus de la construction. Comme la droite est construite pour qu'elle soit acceptée comme axe de symétrie des figures données, le contrôle perceptif pour la reconnaissance de figures symétriques intervient très souvent dans le processus de construction. Autrement dit, la reconnaissance de symétriques et la construction d'une droite sont effectuées ensemble.

5.3 Construction analytique

L'approche de la construction analytique d'axes est, de même que la construction analytique d'images symétriques, celle dont les procédures reposent sur les propriétés explicites, c'est-à-dire sur les contrôles analytiques. Dans le processus de la construction, comme d'autres approches de la construction d'axes, l'activité de la reconnaissance des figures symétriques est d'abord exigée. Nous présentons les procédures et contrôles nécessaires pour la construction analytique en dissociant les problèmes de la construction pour deux points symétriques et pour les figures complexes symétriques, car les procédures et les contrôles exigés ou disponibles peuvent être largement différents.

5.3.1 Pour deux points symétriques

Le problème de la construction analytique juste pour deux points symétriques n'est pas souvent posé dans le manuel scolaire de 6^{e}, mais plutôt celui pour deux figures symétriques est posé.

La procédure de construction analytique qui est proposée dans les manuels scolaires est l'utilisation de médiatrice. Tous les manuels que nous avons consultés mentionnent le rapport entre l'axe de symétrie et la médiatrice comme « La médiatrice d'un segment est un axe de symétrie de ce segment » (*Dimathème 6^{e}*, p.242). Comme la médiatrice devient directement l'axe de symétrie, la procédure de construction d'un axe est passée à celle d'une médiatrice. Par exemple, le manuel *Triangle 6^e* propose la procédure de construction par médiatrice présentée dans la Figure IV.15. La méthode proposée (Méthode 2 de la Figure IV.15) est celle pour deux points symétriques, alors que deux figures symétriques sont données. Nous analysons les éléments de conceptions pour cette procédure.

Le processus de construction est détaillé dans la Figure IV.15. Nous le reprenons ici[10].

1. Repérer deux points symétriques : A et E par exemple ;
2. Tracer le segment [AE] ;
3. Tracer la médiatrice (d) du segment [AE] ;
4. Contrôler que la droite (d) est aussi la médiatrice des segments [BF] et [CG].

La procédure 1 est une activité de reconnaissance. Deux points sont reconnus comme symétriques. La procédure 4 est une activité pour la construction d'un axe pour la figure plus complexe. Nous analysons ici du point de vue du modèle cK¢ surtout les procédures 2 et 3. Le problème que nous aborderons ici est le même que celui des constructions par le pliage et par la perception globale (Tracer un axe de symétrie à deux points symétriques données). A partir de deux actions effectuées (étapes 2 et 3) dans le processus de construction, l'opérateur suivant (r3) serait formulé.

> A-r3 : tracer un segment ayant pour extrémités deux points symétriques et tracer une médiatrice à ce segment.

L'opérateur (r3) implique deux actions effectives, la construction d'un segment et la construction d'une médiatrice. En ce qui concerne le contrôle mobilisé, il doit exister celui qui permet de passer de la construction d'un axe à la construction d'une médiatrice. La réponse à la question « pourquoi la médiatrice doit-elle être tracée pour construire un axe de symétrie ? » serait le contrôle mobilisé. En effet, il s'agit dans ce processus de la construction d'une médiatrice et non pas d'un axe. Il doit y avoir une raison de la construction d'une médiatrice. Nous considérons que c'est le contrôle suivant (σ3) qui permet de choisir l'opérateur (r3). Il caractérise l'axe de symétrie à partir de la médiatrice.

> A-σ3 : si une droite x est médiatrice de [PP'] alors Sym (P, P', x)

Comme la droite est une médiatrice, elle est aussi l'axe. C'est le contrôle (A-σ3) qui transforme la construction d'un axe en celle d'une médiatrice.

Après la réalisation, ce qui est produit est une médiatrice, et non pas un axe de symétrie. Autrement dit, pour que le produit (une médiatrice) devienne une réponse (un axe), il doit y avoir une étape de transformation de la médiatrice à l'axe. C'est une activité de la

[10] Nous avons ajouté les numéros à chaque étape.

reconnaissance qui identifie l'axe à la médiatrice. C'est encore le contrôle (A-σ3) qui le fait. Dans ce cas, il joue plutôt le rôle d'un opérateur que celui d'un contrôle. En effet, bien que l'opération soit implicite, c'est le contrôle (A-σ3) qui transforme le statut de la droite à partir de la médiatrice en axe, et il est bien opératoire du point de vue de la transformation ou l'attribution d'un sens.

Ainsi, la réponse obtenue est la combinaison de la droite tracée et son statut. Résumons maintenant ce processus de la construction dans le schéma suivant (Figure IV.17).

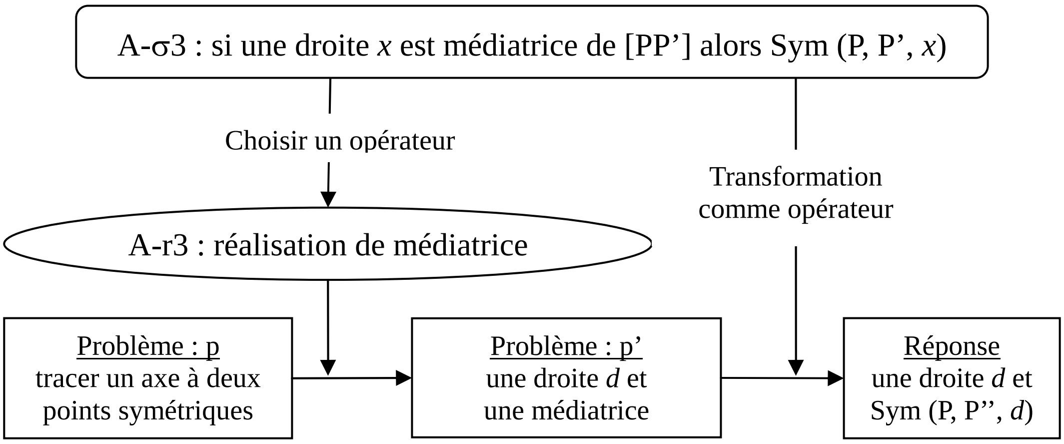


Figure IV.17 : le schéma de processus de la construction analytique

Or, la médiatrice qui est apparue dans ce processus de la construction n'est pas un objet géométrique élémentaire comme un point, une droite, un cercle, etc. Elle est une droite ayant une propriété géométrique par rapport à un segment. En effet, dans les instruments usuels dans une classe de mathématiques à l'école, l'instrument qui permet de tracer immédiatement une médiatrice n'existe pas. Nous considérons donc qu'il existe d'autres procédures de construction qui ne mobilisent pas la propriété « médiatrice ». Par exemple, la procédure juste à partir des propriétés de l'orthogonalité et du milieu (équidistance) est possible. Dans ce cas, le contrôle suivant serait plutôt mobilisé.

A-σ4 : si PP' $\perp$ *x* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *x*), alors Sym (P, P', *x*)   (*x* : droite)

5.3.2 Pour les figures complexes

Le problème de la construction d'axe n'est pas souvent posé pour deux points symétriques, mais plutôt pour deux figures plus complexes. L'exemple que nous avons cité du manuel *Triangle 6^e^* (Figure IV.15) était déjà le problème de la construction d'un axe pour deux triangles symétriques. Le problème suivant est posé dans ce cas.

p : Tracer un axe de symétrie à deux figures symétriques données

Certaines procédures sont possibles afin de construire un axe de symétrie pour les figures complexes. Présentons quatre approches différentes.

A partir d'une paire de deux points symétriques

La première approche est la construction d'un axe à partir de deux points symétriques sur les figures. L'axe de deux figures symétriques est aussi l'axe de deux points des figures qui se correspondent par la même symétrie. Réciproquement, l'axe de deux points symétrique des figures symétriques est aussi l'axe de symétrie de ces figures. La construction d'un axe à partir de deux points symétriques suffit pour la construction d'un axe pour les figures symétriques. L'approche que nous présentons ici repose sur cette idée.

La première étape de construction de cette approche est de trouver deux points qui semblent symétriques. En effet, n'importe quels points ne peuvent pas être symétriques. Dans la Figure IV.18, les sommets A et E de deux triangles sont identifiés en tant que candidats de deux points symétriques. Ensuite, l'axe de symétrie pour les deux points identifiés est tracé.

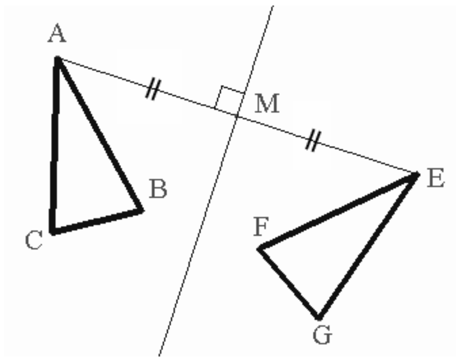


Figure IV.18 : à partir de deux points symétriques

Du point de vue du modèle cK¢, l'opérateur à chaque étape est identifié. L'opérateur (A-r4) est pour la première étape et l'opérateur (A-r5) est pour la deuxième.

A-r4 : identifier deux points symétriques sur les figures données

A-r5 : tracer un axe de symétrie pour ces points.

L'opérateur (A-r4) implique d'abord une action de reconnaissance, puis l'opérateur (A-r5) implique une action de construction d'un axe de symétrie. L'identification de deux points symétrique par l'opérateur (A-r4) est une reconnaissance de deux points symétriques que nous avons déjà analysée. Mais, lorsque deux figures sont déjà reconnues comme symétriques, la reconnaissance par perception globale est souvent suffisante pour l'identification de deux points symétriques.

Par l'opérateur (A-r4), deux figures symétriques sont réduites à deux points symétriques, c'est-à-dire il existe un postulat que la symétrie pour deux figures et la symétrie pour deux points sont identiques ou que l'axe est commun. Alors, qu'est-ce qui permet de postuler que deux transformations sont les mêmes ? Nous considérons premièrement le contrôle suivant (A-σ5).

A-σ5 : si Sym (F, F', x) alors $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', x)

Il permet d'affirmer que l'axe inconnu (x) de deux figures symétriques (F et F') est aussi l'axe de deux points symétriques (P et P') par la même transformation. C'est pour cela que la construction de l'axe pour deux figures est réduite à celle pour deux points.

Ensuite, l'opérateur (A-r5) implique une action de construction d'un axe pour deux points symétriques identifiés, au lieu de la construction pour deux figures symétriques. La construction d'un axe pour deux points symétriques est déjà analysée plus haut. Ce qui nous intéresse ici est le contrôle ou la règle qui permet de transformer l'axe pour deux points en celui pour deux figures. Nous considérons un contrôle suivant qui est la réciproque du contrôle (A-σ5).

A-σ6 : si $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', x) alors Sym (F, F', x)

Il permet de caractériser l'axe de symétrie pour deux figures à partir de celui pour deux points. Sans ce contrôle, l'idée du repérage de points symétriques effectué par l'opérateur (A-r4) ne sert à rien, c'est-à-dire il provoque aussi l'opérateur (A-r4).

Donc, le contrôle (A-σ5) est celui qui assure l'existence de deux points symétriques sur deux figures données et qui conduit à une identification de points, alors que le contrôle (A-σ6) provoque une idée de la construction d'un axe à partir d'une paire de deux points symétriques identifiés, dans la plupart des cas, perceptivement.

A partir de deux paires de deux points symétriques

Si deux figures sont symétriques par rapport à une droite, tous les points sur une figure sont transformés par la même symétrie aux points sur l'autre figure, ou il existe des paires de points qui sont symétriques par rapport à cette même droite. Autrement dit, toutes les paires des points ont un axe de symétrie commun. Dans ce cas, comme l'axe de symétrie passe par le milieu de deux points symétrique, il passe aussi par tous les milieux de deux points. En outre, du point de vue de la construction d'un axe de symétrie, puisque deux points caractérisent une droite dans la géométrie euclidienne, deux milieux permettent de caractériser et tracer l'axe de symétrie. L'approche que nous analysons ici s'appuie sur cette idée. Utilisons encore le problème de la Figure IV.15.

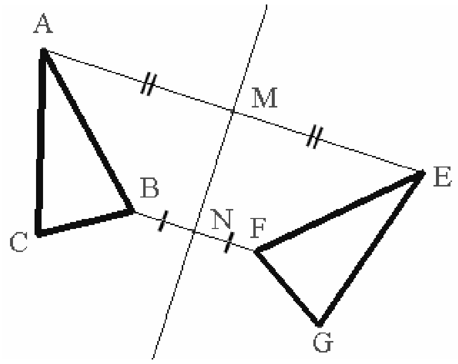


Figure IV.19 : deux milieux

1. prendre le milieu de deux points symétriques (les points A et E) ;
2. prendre le milieu de deux autres points symétriques (par exemple les points B et F) ;
3. tracer une droite passant par ces deux milieux.

Avant de prendre un milieu dans les processus 1 et 2, l'identification de deux points symétriques est effectuée, c'est-à-dire le contrôle (A-σ5) qui est abordé dans l'approche précédente est mobilisé au départ. En effet, lors de l'identification de points symétriques, il est supposé que deux paires de deux points et deux figures sont symétriques par la même transformation et que l'axe est commun. Nous mettrons ici au point sur l'activité après l'identification.

Les procédures ne mobilisent que la propriété du milieu. La propriété de l'orthogonalité qui se trouve souvent sur la symétrie orthogonale n'intervient pas. A partir des procédures mobilisées, l'opérateur suivant implique les trois actions ci-dessus peut être identifié.

> A-r6 : prendre le milieu de deux points symétriques, prendre le milieu de deux autres points symétriques et tracer une droite passant par ces deux milieux.

Pour la réalisation de milieux le compas ou d'autre instrument serait utilisé. En ce qui concerne le contrôle, c'est celui qui permet de choisir l'opérateur (A-r6) ou celui qui permet de remarquer aux milieux des segments reliant deux points symétriques. Autrement dit, la réponse à la question « pourquoi deux milieux doivent-ils être construits et pourquoi la droite passant par eux est-elle tracée ? » serait le contrôle mobilisé pour désigner l'opérateur (A-r6). Nous considérons que la propriété de symétrie orthogonale concernant le milieu est premièrement mobilisée comme contrôle (A-σ7).

> A-σ7 : si Sym (P, P', x) alors $\exists$M $\in x$ tel que M : milieu de [PP']

En mobilisant deux fois le contrôle (A-σ7), on trouve que la droite à construire passe par les milieux des segment [AE] et [BF] : par le contrôle (A-σ7), les énoncés « M $\in x$ » et « N $\in x$ » sont obtenus à partir des deux symétriques. C'est celui-ci qui permet de remarquer les milieux de deux points symétriques. Ensuite comme deux points qui seront sur la droite à construire sont connus, une droite est tracée. C'est le contrôle suivant qui est mobilisé.

A-σ8 : si M et N $\in$ *x*, Sym (P, P', *x*) et Sym (Q, Q', *x*) alors Sym (F, F', *x*)

Le contrôle (A-σ8) caractérise l'axe à partir de deux milieux de deux paires des points symétriques ayant la même l'axe de symétrie. Il permet de produire un énoncé tel que la droite inconnue qui passe par deux milieux est l'axe de symétrie à construire. Pour la mobilisation de ce contrôle, nous considérons une règle qui le supporte. En effet, c'est une règle complexe et une question « pourquoi deux points ? mais pas trois points ?, etc. » peuvent être posée. Ce qui permet de valider que deux points sont suffisants pour tracer une droite unique est la nature du plan dans la géométrie euclidienne. Le support est donc lié à la nature générale de la géométrie euclidienne plutôt qu'à la symétrie orthogonale.

D'autres approches

Nous pouvons aussi trouver d'autres approches de construction d'un axe. Nous ne les analysons pas ici le détail, mais présentons simplement les idées de construction.

L'approche de la construction à partir de deux intersections de deux droites symétriques est aussi présentée dans la Figure IV.15. La propriété de symétrie mobilisée est un théorème que deux droites symétriques se croisent sur l'axe de symétrie.

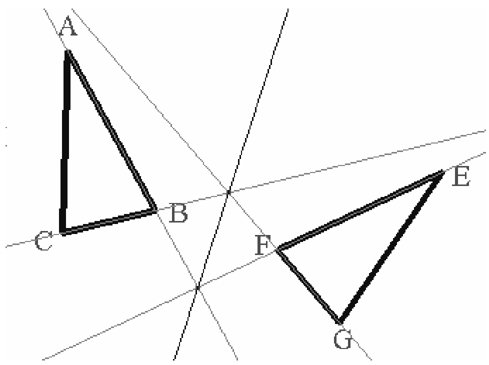


Figure IV.20 : prolonger les segments

Une approche de la construction d'un axe à partir des intersections de deux droites ou segments est présentée dans la Figure IV.21. Dans ce cas, il s'agit de trouver deux segments symétriques qui a une interaction. Puis, la propriété de symétrie mobilisée est encore un théorème que deux droites symétriques se croisent sur l'axe de symétrie.

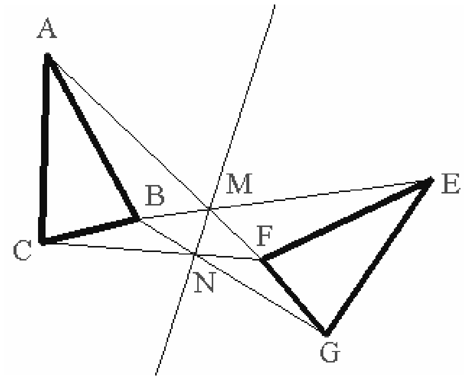


Figure IV.21 : les intersections des diagonales

5.4 Synthèse de la construction d'axes

Du point de vue des activités effectuées au long de plusieurs approches de la construction d'axes, dans tous les cas, la reconnaissance ou identification joue un rôle crucial. D'une part, elle est indispensable avant la construction d'axe afin de repérer des points ou des objets qui correspondent comme symétriques. Le processus s'exprime comme le schéma suivant.

Reconnaissance → Construction d'axes

D'autre part, comme la construction d'axes est une activité de la réalisation, nous considérons, de même que la construction d'images symétriques, que le contrôle pour la validation de produit est mobilisé. Dans ce cas, c'est encore la reconnaissance qui est en jeu. En effet, si la droite construite ne peut pas être acceptée comme l'axe de symétrie par la reconnaissance, la construction sera refaite. Nous n'avons pas abordé ce point dans notre analyse, puisque l'état après la réalisation d'un axe est le même que celui de la construction d'une image symétrique. Le schéma du processus de construction peut donc être exprimé comme ce qui suit.

Reconnaissance → Construction d'axes → Reconnaissance (validation)

Bien entendu, ce schéma est une explicitation théorique du processus. Dans l'activité pratique, le processus ne serait pas explicitement dissocié d'une phase à l'autre.

En ce qui concerne la construction analytique, les propriétés géométriques mises en œuvre varient en fonction des approches. Deux approches principales sont mobilisées : construction à partir de deux points symétriques et construction à partir de deux points sur la droite à construire. La première exigeant les propriétés caractéristiques de la symétrie est disponible pour deux points symétriques et aussi pour deux figures symétriques. La deuxième exigeant les propriétés concernant les points sur l'axe est disponible pour deux figures symétriques. La variation des propriétés géométriques dans les approches différentes indique une variation de contrôles mobilisés dans la construction.

Dans les diverses règles surtout analytiques que nous avons repérées, nous trouvons que l'orthogonalité ou l'angle qui est souvent mobilisée dans la construction d'images symétriques n'apparaît pas nécessairement. Particulièrement l'approche à partir de deux points sur l'axe pour les figures plus complexes, sans prendre en compte la propriété d'orthogonalité ou d'angle de la symétrie orthogonale, l'axe peut être tracé. Autrement dit, la propriété de l'orthogonalité peut être détournée par une mobilisation du contrôle (A-σ8) s'appuyant sur la géométrie euclidienne. Du point de vue des instruments nécessaires, les approches n'exigeant pas la propriété d'orthogonalité réalisent, bien entendu, une construction sans l'équerre et ne nécessitent que la règle. Du point de vue inverse, la contrainte par la limitation d'instruments peut être une variable didactique pour les élèves (voir l'analyse de Grenier (1988, pp.187-221)).

En ce qui concerne la perception globale, comme la reconnaissance doit être souvent effectuée, la mobilisation de perception est utile, voire nécessaire, en particulier pour les figures complexes. En effet, l'identification de points symétriques dans deux figures, nous ne pouvons pas essayer la réalisation d'axes pour tous les points susceptibles de correspondre.

En ce qui concerne le type de règles, plusieurs types sont mobilisés : règle de caractérisation de la symétrie, règle de propriété de la symétrie, règle d'héritage de la symétrie. En particulier, les règles étaient plus complexes que celles de la reconnaissance ou de la construction de symétrique.

6 ANALYSE COMPARATIVE

Nous faisons une synthèse d'analyse des éléments de conceptions mobilisées dans la construction de preuves et dans les approches usuelles de reconnaissance, construction d'images et construction d'axes. Nous proposons dans ce qui suit une analyse comparative des éléments de conception dans les problèmes sauf celui de la preuve, et puis discutons leurs rapports avec les éléments dans la construction de la preuve.

6.1 Problèmes de la reconnaissance, de la construction de symétriques et de la construction d'axes

Nous proposons premièrement une synthèse d'analyse pour les trois types problèmes excepte le problème de preuve.

6.1.1 Explicitation des éléments de conceptions

Nos analyses du point de vue du modèle cK¢ focalisent principalement sur l'explicitation des éléments de conception mobilisés dans la résolution de problème. Nous avons dégagé les opérateurs à partir des actions effectuées lors de la résolution. A partir de l'opérateur identifié, nous avons dégagé des contrôles mobilisés en adoptant trois points de vue : le contrôle pour le choix d'un opérateur ; le contrôle pour la validation de l'opérateur ; le contrôle pour la validation du résultat obtenu. Tout au long de l'analyse théorique présentée ici, les questions « pourquoi ? » à chaque étape des constructions et actions sont un fil de conducteur afin de dégager les contrôles qui soutiennent les opérateurs et certains supports qui soutiennent les contrôles.

Nous donnons sous forme de liste les règles identifiées dans les analyses des trois types de problèmes. La liste ne serait pas exhaustive, parce que les approches que nous avons analysées ne sont pas non plus exhaustives. Dans la liste, la règle ayant l'étiquette (σ) est celle qui est repérée à partir de l'opérateur, en tant que contrôle qui le désigne. Certaines entre elles exigent, nous semble-t-il, afin de les mobiliser, encore d'autres règles ou supports qui assurent leurs validités. Dans ce cas, nous y avons attribué l'étiquette (s).

Reconnaissance de deux figures symétriques

R-σ1 : si Pliage (x, y, d) alors Sym (x, y, d)

R-σ2 : si Perception (x, y, d) alors Sym (x, y, d)

  R-s1 : si Sym (F, F', d), F' est l'autre côté de l'axe de F ;

R-s2 : si Sym (F, F', *d*), F' est au même endroit que F par rapport à l'axe ;

R-s3 : si Sym (F, F', *d*), la forme de F' est la même que celle de F ;

R-s4 : si Sym (F, F', *d*), F' est inverse de F' ;

R-s5 : si Sym (F, F', *d*), l'axe *d* passe entre F et F'

R-σ3 : si $xy \perp d$ et xM = My (M = $xy \cap d$) alors Sym (x, y, d)   (x et y : points)

R-σ4 : si $xy \perp d$ et xM = My (M $\in d$) alors Sym (x, y, d)   (x et y : les points)

R-σ5 : si xM = My et xN = Ny alors Sym (x, y, MN)   (x et y : les points)

R-σ6 : si Sym (x, y, d) alors $\forall$P $\in x$, $\exists$P' $\in y$ tel que Sym (P, P', d)

R-σ7 : si Sym (x, y, d) alors $x = y$ (x et y : segment)

Construction d'image

I-σ1 : si Pliage (F, x, d), alors Sym (F, x, d)

I-σ2 : si Perception (F, x, d), alors Sym (F, x, d)

I-σ3 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$), alors Sym (P, x, d)   (x : point)

I-σ4 : si PM = Mx et PN = Nx, alors Sym (P, x, MN)   (x : point)

I-s1 : si d est la médiatrice de [PP'] alors Sym (P, P', d)

I-σ5 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M $\in$ d) alors Sym (P, x, d)

I-σ6 : si $\angle$PMd = $\angle x$Md et PM = Mx (M $\in$ d) alors Sym (P, x, d)

I-σ7 : si Sym (PQ, x, d) alors $\exists u$ et $v \in x$ tel que Sym (P, u, d) et Sym (Q, v, d)

I-σ7' : si Sym (F, F', d) alors $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', d)

I-σ8 : les points caractéristiques d'une figure à construire permettent de la tracer

I-σ9 : les objets transformés possèdent certaines propriétés de la figure initiale

Si Sym (F, F', d) alors Pro (F) = Pro (F')

I-σ10 : si Sym (P, x, d) et Sym (Q, y, d) alors Sym (PQ, xy, d)

I-σ9' : le symétrique d'un segment est un segment

Si Sym (F, F', d) alors Pro (F) = Pro (F')

Construction d'axe

A-σ1 : si Pliage (F, F', x) alors Sym (F, F', x)

A-σ2 : si Perception (F, F', x) alors Sym (F, F', x)

A-σ3 : si une droite x est médiatrice de [PP'] alors Sym (P, P', x)

A-σ4 : si PP' $\perp x$ et PM = MP' (M = PP' $\cap x$), alors Sym (P, P', x)

A-σ5 : si Sym (F, F', x) alors $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', x)

A-σ6 : si $\forall$P $\in$ F, $\exists$P' $\in$ F' tel que Sym (P, P', x) alors Sym (F, F', x)

A-σ7 : si Sym (P, P', x) alors $\exists$M $\in x$ tel que M : milieu de [PP']

A-σ8 : si M et N $\in x$, Sym (P, P', x) et Sym (Q, Q', x) alors Sym (F, F', x)

6.1.2 Fonctionnements de l'opérateur et du contrôle

Les fonctionnements de l'opérateur et du contrôle sont grosso modo communs dans la résolution de trois types de problèmes. Nous avons repérés dans la résolution les opérateurs qui impliquent des actions effectives telles que tracer une droite, mesurer la distance, etc. Les actions produisent de nouvelles informations (un fait ou des propriétés) sur la figure initiale. Autrement dit, l'opérateur transforme l'état initial du problème en état prochain avec une information ou un dessin réalisé. Dans le cas de la reconnaissance, les informations sont obtenues, puis elles sont soumises aux critères de jugement de la symétrie orthogonale. Dans le cas des constructions de symétriques et d'axes, l'objet, un point, une droite, etc. est réalisé par les actions. Ensuite il est reconnu comme une partie de la réponse au problème posé, puisque la figure consiste en dessin et sa signification géométrique. Nous avons ainsi identifié deux phases d'activité dans la résolution de trois types de problèmes : la réalisation effective d'un objet ou la production d'informations ; la transformation d'un fait ou des propriétés en un énoncé. L'action en tant qu'opérateur fonctionne ainsi juste pour la première phase.

Ces deux phases d'activité impliquent un fonctionnement différent d'une même règle. Dans l'analyse, nous avons repéré qu'une règle joue un rôle différent dans deux phases du processus de résolution. D'une part, elle joue un rôle du contrôle pour la *désignation d'un opérateur* qui répond à la question « pourquoi un tel opérateur est-il mobilisé ? ». D'autre part, elle joue un rôle de l'opérateur pour *l'attribution d'une signification* par rapport au problème posé à l'information obtenue par les actions effectuées. Elle permet de répondre à la question « pourquoi le produit est-il une réponse ? » dans le cas de la construction et à la question « pourquoi l'information obtenue permet-elle une réponse ? » dans le cas de la reconnaissance. La règle identifiée comme contrôle de choix d'un opérateur fonctionne donc aussi comme opérateur pour la transformation.

Du point de vue de la représentation sur laquelle est effectuée la résolution, le changement de registre doit être aussi effectué quelque part par une transformation. Parce que le registre spatio-graphique est toujours présent par un dessin. D'une part, l'attribution d'une signification à la deuxième phase ci-dessus correspond de temps en temps à un changement de registre. En effet, comme nous l'avons vu, lors de l'approche par pliage, l'information obtenue est un fait, superposition, et un dessin du registre spatio-graphique. C'est l'opérateur mobilisé à la deuxième phase qui permet de transformer un fait en énoncé « symétrique » du registre géométrique. Lors de la construction analytique, l'utilisation d'un instrument doit permet d'un changement de registre. En effet, c'est l'instrument qui porte une propriété géométrique telle que l'orthogonalité, le milieu et l'équidistance. Nous considérons que si l'instrument est utilisé sans prendre en compte la propriété attachée, la réalisation est effectuée seulement sur un registre spatio-graphique.

Nous avons aussi remarqué le support de contrôle, en particulier le support d'une règle qui fonctionne à la fois comme contrôle et opérateur. La question qui peut se poser est « qu'est-ce qui permet de choisir une règle ? ». Le choix d'une règle est de temps en temps le choix d'une approche de reconnaissance ou de construction : par exemple, lorsqu'une règle de pliage « si Pliage (F, F', *d*) alors Sym (F, F', *d*) » est choisi pour la reconnaissance, l'approche par pliage est directement adopté. Ce qui permet de choisir une approche serait souvent l'exigence de la situation qui est inhérent à la résolution de problème. Lorsque la reconnaissance très précise n'est pas nécessaire dans la résolution de problème, par exemple lors de la vérification de construction, l'approche de pliage ou de perception globale serait mobilisée. En revanche, lorsqu'elle est exigée, l'un parmi les contrôles qui satisfont l'exigence de la situation est adopté. Encore, le choix d'un contrôle analytique est effectué selon l'état de problème dans lequel certaines propriétés géométriques sont disponibles ou faciles à identifiées. La nature de la situation est donc cruciale pour le choix d'un support du contrôle.

6.1.3 Nature des règles : rapport entre trois types de problèmes

Nous adoptons pour l'analyse comparative de toutes les règles identifiées comme contrôle deux points de vue : d'une part, le sujet ou le(s) variable(s) dans la règle ; d'autre part, la direction de règle par rapport à la symétrie. La règle d'action identifiée comme opérateur ne sera pas abordée.

Dans les trois types de problèmes, certaines règles identifiées sont semblables entre elles. Par exemple, la règle (R-σ1) de la reconnaissance et la règle (I-σ1) de la construction d'image, la règle (R-σ3) de la reconnaissance et la règle (I-σ3) de la construction d'image, etc. Sans prise en compte du sujet ou de(s) variables des règles, les règles communes sont mobilisées pour résoudre des problèmes. Pour (R-σ3) de la reconnaissance et (I-σ3) de la construction d'image, par exemple, la règle sous-jacente est « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP', alors Sym (P, P', *d*) (M = PP' $\cap$ *d*) ». Certaines approches pour les problèmes des types différents peuvent donc être caractérisées par la règle commune : l'approche par pliage par « si deux figures F et F' se superposent par le pliage au long d'une droite *d* alors Sym (F, F', *d*) » ; l'approche par la perception globale par « si deux figures F, F' et une droite *d* correspondent à la perception globale de la symétrie orthogonale alors Sym (F, F', *d*) » ; l'approche par l'orthogonalité et l'équidistance par « si PP' $\perp$ d et PM = MP', alors Sym (P, P', d) (M = PP' $\cap$ *d*) » ; etc. Ainsi, au niveau juste du type de règle, les mêmes règles peuvent être mobilisées dans ces trois types de problèmes.

6.2 Rapport entre le problème de la preuve et les autres

L'analyse comparative des règles et des éléments de conceptions est proposée ici. Les points de vue adoptés sont le niveau de fonctionnement de la règle. Parce qu'il nous semble qu'une même règle fonctionne différemment dans la construction de preuves et dans la résolution des autres types de problèmes.

Les opérateurs identifiés à partir des procédures de la reconnaissance et des constructions sont des actions. Elles permettent une réalisation effective de la construction ou du mesurage sur un papier, c'est-à-dire dans un registre spatio-graphique. Les actions effectives transforment un état du problème en autre état dans une représentation graphique. Par ailleurs, dans la construction d'une preuve, les opérateurs identifiés à partir des permis d'inférer dans des raisonnements sont des règles qui transforment une proposition en autre proposition dans un registre géométrique ou discursif. L'action provoquée par une règle est la production d'un nouvel énoncé ou de sa validité.

Le contrôle de la désignation d'un opérateur et de sa validation, identifié à partir des action dans les problèmes de la reconnaissance et de la construction, est une règle de la symétrie orthogonale qui est bien exprimée sous la forme telle que « si ... alors Sym (F, F', *d*) » ou « si Sym (F, F', *d*) alors ... ». Or, elle est identifiée en tant qu'opérateur ayant un rôle de la transformation d'énoncés dans la construction de preuves. Toutes les règles peuvent être mobilisées en tant qu'opérateur dans le problème de la preuve. Une même règle serait ainsi identifiée avec des étiquettes différentes en fonction du problème abordé, soit comme opérateur soit comme contrôle. Autrement dit, elle fonctionne à un niveau différent selon la nature de l'activité de la résolution.

6.3 Synthèse

Nous synthétisons par la suite les résultats obtenus dans ce chapitre à partir des analyses théoriques de la résolution de différents types de problèmes du point de vue du modèle cK¢.

1) Dans les problèmes de reconnaissance et de constructions, deux phases de l'activité sont identifiées : la phase de réalisation effective et la phase d'attribution d'une signification.
2) Les règles mobilisées comme contrôles sont grosso modo communes dans la résolution de problèmes de reconnaissance et de construction.
3) La règle de caractérisation de la symétrie orthogonale (si propriétés alors Sym (F, F', *d*)) est souvent exigée dans la résolution de problèmes de reconnaissance et de construction.
4) L'opérateur dans la résolution de problèmes de reconnaissance et de construction est une action qui transforme un état du problème en un autre par des actions effectives sur un objet spatio-graphique.
5) Les niveaux différents de fonctionnement d'une règle : une règle est mobilisée à la fois comme opérateur et comme contrôle.

6) L'activité de reconnaissance pour laquelle la perception globale est souvent utile ou nécessaire joue un rôle crucial pour les constructions d'images symétriques et d'axes, alors qu'elle n'est pas nécessairement importante pour la validation d'une preuve.
7) Le changement de registre, de celui spatio-graphique à celui géométrique, est souvent effectué dans les problèmes de reconnaissance et de construction. Par ailleurs, dans la preuve, les opérateurs mobilisés sont toujours dans un registre géométrique ou discursif.

A partir du chapitre suivant, nous voyons effectivement ce qui résulte de ces points et comment ils apparaissent dans la production et le comportement des élèves.

Chapitre V

INTRODUCTION AUX SITUATIONS EXPERIMENTALES

1 INTRODUCTION

Nos questions de recherche principales étaient :

Q2. *Quelle connaissance ou quel aspect de la connaissance sur la symétrie orthogonale est mobilisé par les élèves lors de la construction d'une preuve ?*

Q3. *Quelles différences de connaissance peuvent être trouvées dans la construction d'une preuve et dans la construction géométrique et la reconnaissance de la symétrie orthogonale ?*

Pour répondre à ces questions, nous avons théoriquement analysé dans le chapitre IV les processus usuels de résolutions des problèmes concernant la symétrie orthogonale par la méthode développée (règle et son support) pour la modélisation de la connaissance dans la preuve. Cette analyse théorique nous a permis une anticipation des fonctionnements différents et communs de la connaissance. La place de la règle est différente, du point de vue du modèle cK¢, dans la preuve et dans la construction. D'une part, elle est placée au niveau de l'opérateur qui est plus ou moins explicite, et d'autre part au niveau du contrôle, qui est dans la plupart des cas implicite. Du point de vue de la règle, il s'agit d'une analyse du support de contrôles dans la construction, et du support d'opérateurs dans la preuve. En revanche, les règles mobilisées dans la résolution de différents types de problèmes doivent être communes du point de vue mathématique.

A la suite de ces analyses théoriques, nous proposons des expérimentations afin d'obtenir les éléments de discussion pour répondre à nos questions. L'objectif principal de l'expérimentation est donc « *Etudier la nature des règles effectivement mobilisées par les élèves dans différents types de problèmes afin de spécifier le rapport entre connaissance et preuve* ».

Nous réalisons des expérimentations non seulement avec des problèmes de preuve, mais aussi avec des problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques. Nous espérons que la méthode développée permet de rendre en particulier possible la distinction classique entre la géométrie pragmatique et la géométrie théorique selon la règle et son support.

Au cours de ce chapitre, nous présentons en premier lieu certains choix pour construire un dispositif expérimental en fonction de nos objectifs. Nous considérons que le dispositif expérimental donne l'occasion de répondre à certaines questions que nous avons posées autour des conceptions effectives des élèves dans le processus de résolution. Ensuite, nous présentons la première expérimentation. Cette expérimentation a pour objectif de recueillir suffisamment de données et d'effectuer la première analyse des règles effectivement mobilisées dans la preuve afin de bien situer la seconde expérimentation par rapport à notre objectif. Elle a donc un caractère de tentative. Le type de problème proposé est seulement celui de preuve. Ce choix était retenu pour la raison que la symétrie orthogonale n'est pas suffisamment analysée dans le contexte de la construction de preuve, contrairement à la construction géométrique et à la reconnaissance.

2 CHOIX EXPERIMENTAL

Nous présentons ici certains choix de notre dispositif expérimental. La question qui se pose est « Quel dispositif expérimental doit être mis en place pour nos objectifs ? ».

2.1 Elèves à analyser

Premièrement, nous faisons un choix des élèves à observer. Nous avons deux critères principaux pour ce faire. Le premier est les élèves doivent avoir déjà appris la symétrie orthogonale. La raison de cette sélection est que notre intérêt est l'explicitation de la mobilisation de la connaissance déjà acquise d'une façon pertinente ou non, dans la construction d'une preuve. Le deuxième critère est les élèves doivent avoir déjà appris plus ou moins la démonstration en mathématiques. En effet, puisque l'activité de la construction d'une preuve est centrale et que notre intérêt n'est pas de voir la naissance de la nécessité de la démonstration, les élèves n'ayant jamais rencontré la démonstration sont hors de notre choix. Par ailleurs, les élèves n'ayant aucune difficulté, ni dans la construction de preuves, ni avec la notion de symétrie orthogonale ne nous intéressent pas non plus, car notre travail de thèse est provoqué en premier lieu par la problématique de l'apprentissage de la preuve en mathématiques. Nous avons ainsi choisi des élèves de classe de troisième au collège.

2.2 Deux expérimentations

Les expérimentations proposées n'ont pas pour objectif de provoquer un apprentissage, mais de faire apparaître des éléments observables concernant la connaissance dans la résolution de problèmes. Nous avons réalisé deux expérimentations. La première a pour objectif de recueillir suffisamment de données, de preuves, afin de réaliser une première analyse des règles effectivement mobilisées par les élèves dans la construction de la preuve. Une expérimentation sous forme papier, c'est-à-dire avec questionnaire, a été choisie. Les données recueillies sont ainsi des productions écrites par les élèves. La première expérimentation a un caractère de test, avant la deuxième expérimentation plus précise.

La deuxième expérimentation a pour objectif de réaliser une analyse plus approfondie de la connaissance, des règles et de leurs supports, non seulement dans les preuves comme produits, mais aussi dans le processus de la construction de preuves, c'est-à-dire l'argumentation. Une modalité d'expérimentation de type clinique a été adoptée : construction de protocoles du processus de résolution des élèves. Les données recueillies sont ainsi des productions écrites par les élèves et des protocoles des activités de résolution. Dans la deuxième expérimentation, nous avons aussi proposé un problème de construction de figures symétriques.

2.3 Problèmes à proposer

Le dispositif expérimental doit offrir des données permettant de modéliser la connaissance sur la symétrie orthogonale dans la preuve et dans la construction de symétrique, ainsi que d'analyser le fonctionnement de la connaissance dans la preuve. Il consiste en problèmes qui demandent implicitement ou explicitement la connaissance de la symétrie orthogonale.

2.3.1 Types de problèmes

Les règles sont classifiées en trois types à partir de leurs natures : la règle de propriété de la symétrie « si symétrique alors propriété », la règle de caractérisation de la symétrie « si propriétés alors symétrique », la règle d'héritage de la symétrie « si symétrique alors symétrique ». Selon l'analyse théorique effectuée dans le chapitre qui précède (Chapitre IV), les problèmes de preuves peuvent être configurés pour exiger un type spécifique de règles. Les problèmes de preuves sont ainsi aussi classés en trois types, en fonction de la règle exigée. Par ailleurs, selon l'analyse théorique, les résolutions des problèmes de construction et de reconnaissance de figures symétriques exigent tous les deux surtout la mobilisation de la règle de caractérisation de la symétrie.

Nous avons choisi deux types d'exercices pour les problèmes de preuves : un qui demande une ou des règles du type « propriétés de la symétrie » et un autre qui demande une règle de caractérisation de la symétrie orthogonale. Du point de vue du rapport entre les connaissances engagées dans différents types de problèmes, notre intérêt porte en particulier sur ce dernier, puisque le type de règles exigées dans la construction de symétrique est, du point de vue mathématique, aussi requise à ce deuxième type de problèmes de preuves.

Dans la première expérimentation, nous proposons des problèmes de preuve qui exigent les règles de propriétés de la symétrie.

Dans la deuxième expérimentation, nous proposons un problème de construction et des problèmes de preuve qui exigent tous les deux surtout les règles de caractérisation de la symétrie. Les problèmes de preuves sont des problèmes de reconnaissance de figures symétriques, puisque les problèmes demandent en premier lieu une identification de symétrie.

2.3.2 Nature des problèmes

Les problèmes à proposer aux élèves ne doivent pas être compliqués, mais au contraire assez simples. Puisque seule la connaissance concernant la symétrie orthogonale est ciblée, il se peut que les problèmes exigeant plusieurs notions mathématiques occultent l'apparition des éléments observables concernant la symétrie. Plusieurs problèmes assez simples sont préparés afin d'obtenir des données mettant en jeu différents aspects et règles de la connaissance.

En ce qui concerne les variables, les types de règles exigées sont déjà une variable globale. Les problèmes à proposer prennent en compte les variables identifiées dans les travaux précédents sur la symétrie orthogonale.

2.3.3 Ordre des problèmes

Lorsque plusieurs problèmes sont proposés, les activités peuvent être influencées les unes par rapport aux autres. Il faut prêter attention à l'ordre des problèmes proposés. Lorsqu'un problème de preuve demande en même temps une reconnaissance de figure symétrique, le problème possédant et indiquant une figure symétrique ne doit pas être proposé avant, car la figure peut être une référence à la figure symétrique. Le problème qui exige de remarquer une ou des propriété particulières de symétrie doit être après celui qui n'en exige pas. En effet, notre objectif n'est pas de provoquer un apprentissage. Les problèmes doivent être abordés en vue de nous informer de l'état de connaissance des élèves.

3 PREMIERE EXPERIMENTATION

Par la suite, nous présentons la première expérimentation, son analyse a priori et son analyse a posteriori. Comme nous l'avons mentionné, l'expérimentation a pour objectif de recueillir suffisamment de données concernant la connaissance de la symétrie orthogonale. L'analyse porte sur les preuves écrites. Nous espérons que plusieurs règles acceptables ou non du point de vue mathématique pourraient être identifiées, et que les données permettront d'analyser certaines natures de règles du point de vue de la connaissance pragmatique/théorique, même dans la preuve écrite. L'analyse du processus plus dynamique de la mobilisation de connaissances dans la preuve est effectuée lors de la seconde expérimentation.

En ce qui concerne le choix de problèmes, comme nous l'avons mentionné, nous proposons des problèmes de preuve exigeant des règles de propriétés de la symétrie.

Nous avons choisi comme modalité d'expérimentation la forme de questionnaire. Le questionnaire est distribué aux élèves de deux classes de troisième en France. Cette tâche individuelle est proposée comme un travail à effectuer chez eux. Nous avons informé les élèves que le questionnaire ne fait pas partie d'un contrôle, et ne sera jamais pris en compte pour une évaluation. Une feuille de questionnaire consiste en un problème et un espace suffisamment grand pour écrire la réponse.

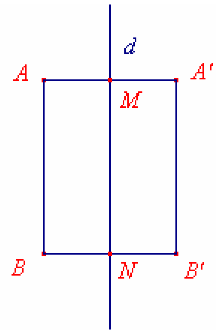
3.1 Analyse a priori des problèmes proposés

Nous présentons ici une analyse a priori des problèmes proposés lors de la première expérimentation. Tout comme nous avons déjà analysé dans le chapitre précédent (Chapitre IV), l'analyse porte ici simplement sur des règles susceptibles d'être mobilisées dans la résolution.

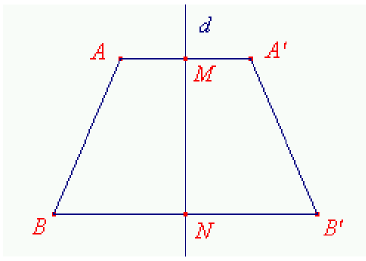
3.1.1 Deux problèmes

Nous avons choisi les deux problèmes suivants pour l'expérimentation. Tous les deux exigent, selon l'analyse théorique, la mobilisation de règles de « propriété de symétrie ». La figure associée à chaque problème est aussi donnée à côté des énoncés.

Problème 1 : Soit le segment [AB] parallèle à la droite *d*. Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à *d*. Ni A, ni B ne sont sur *d*. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.



Problème 2 : Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à la droite *d*. Le segment AB n'a pas d'intersection avec *d*. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.



3.1.1.1 Justification de ce choix des problèmes

Nous présentons les raisons du choix de ces problèmes. La première est due à la simplicité de ceux-ci. Les objets géométriques ne sont pas nombreux ; seuls un rectangle et un trapèze sont abordés. Les propriétés qui interviennent dans la résolution sont limitées. Notre intérêt est centré sur la notion de la symétrie orthogonale. Nous ne voulons pas que plusieurs notions géométriques entrent en jeu dans la résolution. En outre, les problèmes et les énoncés sont faciles à saisir pour les élèves ; ils peuvent ainsi facilement s'engager dans la résolution.

La deuxième raison est due à la facilité d'obtention d'une conjecture. Puisque nous nous intéressons aux règles mobilisées dans le processus de construction d'une preuve, et que l'expérimentation sous la forme de questionnaire n'observe pas le processus de conjecture, nous ne voulons pas que les élèves prennent du temps et fassent des conjectures différentes.

La troisième raison concerne les variables didactiques identifiées par les travaux précédents. Les problèmes sont ouverts à plusieurs conceptions. La figure du problème 1 pose la propriété du parallélisme, qui n'est pas forcément attachée à la symétrie orthogonale. Les figures des deux problèmes disposent l'axe vertical, situé à une position particulière du point de vue spatio-graphique. Ces propriétés, qui ne sont pas de la symétrie orthogonale, peuvent être abordées par les élèves comme si elles l'étaient. Autrement dit, la règle où le rapport entre les hypothèses et la conclusion est établi d'une façon perceptive est mobilisable.

3.1.1.2 Rôle des figures associées

Les problèmes proposent des figures déjà construites à partir de leurs énoncés. L'existence de la figure change largement les activités de résolution. En effet, sans figure construite, les problèmes comportent en premier lieu une construction de figures, qui comprend de symétriques. En fonction de la figure obtenue dans l'activité de construction, la conjecture sera établie. Or, notre intérêt n'est pas le processus d'établissement d'une conjecture, mais surtout ce qui se passe après celui-ci. Nous ne voulons pas gêner les élèves avec une autre résolution. En outre, nous ne voulons pas que l'activité préalable (construction) dans un même problème soulève une connaissance de symétrie orthogonale. Il y aurait une influence forte de la connaissance mobilisée dans la construction d'une preuve. C'est pour ces raisons que nous avons proposé des figures construites.

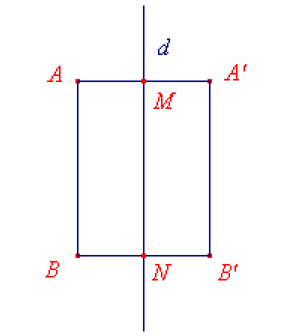
Du point de vue du processus de résolution, voire de la règle ou conception mobilisées, ces problèmes ne demandent pas explicitement la reconnaissance d'une figure symétrique, mais seulement une confirmation. Il est possible que les symétriques tracés dans les énoncés des problèmes provoquent un contrat didactique. En effet, comme ce sont les énoncés des problèmes qui énoncent la symétrie, très peu d'élèves le contestent. La reconnaissance à partir de l'identification des propriétés caractéristiques sur la figure donnée ne serait pas effectuée par les élèves. Autrement dit, selon l'analyse effectuée dans le chapitre IV à propos de la règle exigée dans différents types de problèmes, nous anticipons que la règle de caractérisation de la symétrie (si propriétés alors symétrique) n'est pas mobilisée. Ces problèmes sont donc ciblés sur la règle de propriété de la symétrie.

3.1.2 Analyse a priori

3.1.2.1 Analyse du problème 1

La conjecture pour le problème 1 serait « rectangle ». Nous considérons que les élèves peuvent facilement parvenir à cette conjecture à partir de la figure donnée et éventuellement à partir d'une expérience mentale du déplacement du segment AB parallèle à *d* et à son image symétrique. Le problème posé est ainsi transformé à « démontrer que le quadrilatère ABB'A' est un rectangle ». C'est un problème de caractérisation d'un rectangle. Une propriété de la symétrie orthogonale sera mise en œuvre comme un outil pour cette caractérisation.

Problème 1 : Soit le segment [AB] parallèle à la droite *d*. Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à *d*. Ni A, ni B ne sont sur *d*. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.



Plusieurs approches de résolution sont possibles en fonction du choix de propriétés caractéristiques du rectangle. Par exemple, le parallélogramme ayant un angle droit (« parallélogramme » peut être remplacé par les propriétés caractéristiques du parallélogramme.), trois angles droits, etc. Comme notre intérêt n'est pas la connaissance du rectangle, mais celui de la symétrie orthogonale, nous limitons notre analyse ici aux propriétés géométriques qui peuvent apparaître afin de démontrer l'existence d'un rectangle.

Tous d'abord, les propriétés suivantes sont admises comme hypothèses par les énoncés du problème posé.

- H1 : (AB) // *d*
- H2 : Sym (AB, A'B', d)

La figure associée propose implicitement les hypothèses par les notations M et N comme intersections entre les segments AA' et BB' et la droite *d*.

Les propriétés géométriques qui peuvent être déduites sont présentées avec des hypothèses et des règles associées dans la Table V.1. Celles qui sont déduites par le même opérateur sont groupées. Dans la case « Hypothèses », une ligne de propriétés consécutives présente les conditions dans un pas de raisonnement, d'où se déduit la propriété correspondante dans la case de « Propriétés déduites ».

Certaines de ces propriétés permettent de démontrer que le quadrilatère AA'B'B est un rectangle. Le choix des propriétés mises en œuvre est déterminé par le choix des propriétés caractéristiques du rectangle. Par exemple, la preuve avec la propriété caractéristique « parallélogramme ayant un angle droit » prend le chemin de la Figure V.1 suivant. Dans la figure, le numéro de « P » correspond à un pas de raisonnement dans la Table V.1.

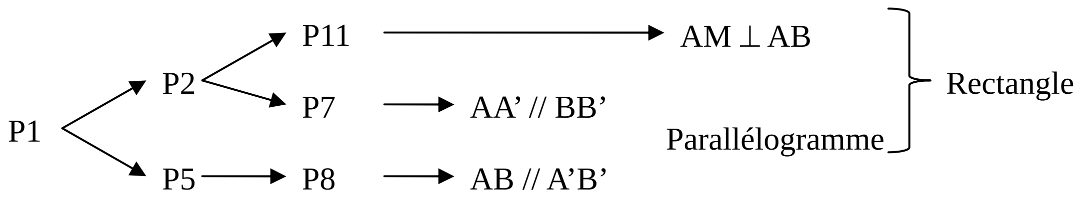


Figure V.1 le chemin d'une preuve

Expliquons un peu le schéma du chemin dans la Figure V.1. Le pas (P2) ci-dessus correspond à celui de la Table V.1. La symétrie est transformée en propriété d'orthogonalité. L'orthogonalité obtenue et le parallélisme admis par hypothèse sont transformés, dans le pas (P11), en une autre orthogonalité (AM ⊥ AB) par une règle (r11) comme opérateur. De même, certains pas de la Table V.1 permettent d'impliquer les propriétés nécessaires pour la caractérisation d'un rectangle.

Table V.1 Les propriétés déduites et les règles mobilisables pour le problème 1

	Hypothèses	**Propriétés déduites**
	Règles mobilisables comme opérateurs	
P1	Sym (AB, A'B', d)	Sym (A, A', d) Sym (B, B', d)
	r1 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors Sym (P, P', d)	
P2	Sym (A, A', d) Sym (B, B', d)	AA' ⊥ d BB' ⊥ d
	r2 : si Sym (P, P', d) alors PP' ⊥ d	
P3	Sym (A, A', d) Sym (B, B', d)	d médiatrice de [AA'] d médiatrice de [BB']
	r3 : si Sym (P, P', d) alors d médiatrice de [PP']	
P4	Sym (AB, A'B', d)	AB = A'B'
	r4 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ = P'Q'	
P5	Sym (AB, A'B', d), AB // d	d // A'B'
	r5 : si Sym (PQ, P'Q', d) et PQ // d alors P'Q' // d	
P6	Sym (A, A', d) Sym (B, B', d)	AM = MA' (M = d ∩ AA') BN = NB' (M = d ∩ BB')
	r6 : si Sym (P, P', d) alors PM = MP' (M = d ∩ PP')	
P7	AA' ⊥ d, BB' ⊥ d	AA' // BB'
	r7 : si PP' ⊥ d, QQ' ⊥ d alors PP' // QQ'	
P8	AB // d, d // A'B'	AB // A'B'
	r8 : si d1 // d2 et d2 // d3 alors d1 // d3	
P9	AB // MN, AM ⊥ MN, BN ⊥ MN A'B' // MN, A'M ⊥ MN, B'N ⊥ MN	AM = BN A'M = B'N
	r9 : si PQ // MN, PM ⊥ MN et QN ⊥ MN alors PM = QN	
P10	AM = MA', BN = NB', AM = BN, M ∈ AA', N ∈ BB'	AA' = BB'
	r10 : si PM = MP', QN = NQ', PM = QN, M ∈ PP' et N ∈ QQ' alors PP' = QQ'	
P11	AB // MN, AM ⊥ MN A'B' // MN, A'M ⊥ MN AB // MN, BM ⊥ MN A'B' // MN, B'M ⊥ MN	AM ⊥ AB MA' ⊥ A'B' BN ⊥ AB NB' ⊥ A'B'
	r11 : si PQ // MN et PM ⊥ MN alors PQ ⊥ PM	

Certaines propriétés géométriques sont déduites à partir de la symétrie avec des règles de propriété de la symétrie « si symétrique alors propriété » (r2, r3, r4, r5 et r6). La règle de caractérisation de la symétrie « si propriétés alors symétrique » ne serait pas nécessaire, donc ne serait pas mobilisée. La règle d'héritage de la symétrie « si symétrique alors symétrique » (r1) doit être mobilisée afin de dissocier les symétriques de points de celui d'un segment.

Comme nous l'avons mentionné dans l'analyse théorique du chapitre précédent, le choix d'un opérateur concernant la symétrie orthogonale est lié à l'exigence provoquée par les propriétés caractéristiques du rectangle. Le contrôle pour le choix d'opérateurs est une exigence de la validation de certaines propriétés auparavant évoquées afin de démontrer la conclusion. Dans l'exemple de preuve donné plus haut, la nécessité de la preuve pour un parallélogramme sollicite la propriété du parallélisme des côtés opposés, pour laquelle les propriétés associées à la symétrie sont mobilisées. Il ne requiert donc pas forcément la connaissance de la symétrie orthogonale.

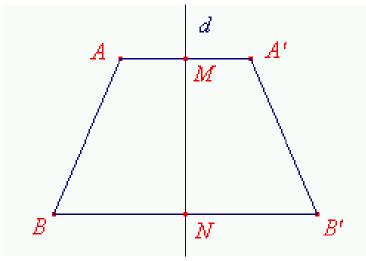
Les élèves qui disposent des propriétés de la symétrie orthogonale telles que l'orthogonalité et le milieu, mobilisent en tant qu'opérateur les règles de propriété de la symétrie : les règles r1, r2, r3, r4, r5 et r6 dans le tableau. Or, il se peut aussi que le rapport entre la symétrie orthogonale et certaines propriétés ne soit pas bien établi chez les élèves, comme l'indiquent les travaux précédents (l'orthogonalité, par exemple : Grenier, 1988). Dans ce cas, elles sont mobilisées indépendamment de la symétrie orthogonale, ou des propriétés qui ne sont pas liées à la symétrie sont associées à la symétrie. Ce qui permet de relier des propriétés à la symétrie est le contrôle qui assure la validité d'un opérateur, en d'autres termes le support de la règle. Il serait la théorie, perception globale de figures symétriques, les figures associée aux problèmes, etc.

Concernant le contrôle qui assure la validité du résultat obtenu (la preuve), nous avons considéré dans le Chapitre IV qu'il relève en particulier de la connaissance de la preuve, et non pas forcément de la symétrie orthogonale. Bien entendu, la validité du résultat obtenu comporte aussi de temps en temps celle des opérateurs mobilisés. Bien que cela ne soit pas le cas ici, nous la dissocions du contrôle de la validité du résultat obtenu, parce qu'elle sera abordée dans le contrôle de la validité des opérateurs.

3.1.2.2 Analyse du problème 2

Le problème 2 est déjà analysé dans la section §2.2 du chapitre IV, *Analyse de Conception dans Différents Types de Problèmes*. La nature du problème est presque la même que celle problème précédent. Le seul point qui diffère dans les énoncés est le segment [AB], qui n'est pas forcément parallèle à la droite d. Le dessin associé illustre ce changement de manière exacte. Les propriétés et les règles disponibles pour ce problème sont une partie de celles qui sont montrées dans la Table V.1 plus haut.

Problème 2 : Soit [A'B'] le symétrique de [AB] par rapport à la droite *d*. Le segment AB n'a pas d'intersection avec *d*. Quelle est la nature du quadrilatère ABB'A' ? Démontrez-le.



L'intention de ce problème est seulement de mobiliser une perception globale par rapport au problème 1. En effet, les propriétés géométriques en jeu concernant la symétrie orthogonale sont une partie de celles évoquées au problème 1 : l'orthogonalité et la conservation de la longueur. La figure associée au problème ne comporte pas de parallélisme, mais une orientation particulière des segments par rapport à l'axe, qui n'est pas facile à exprimer avec les propriétés géométriques. Pour celle-ci, est attendue l'explicitation de la perception globale de figures symétriques.

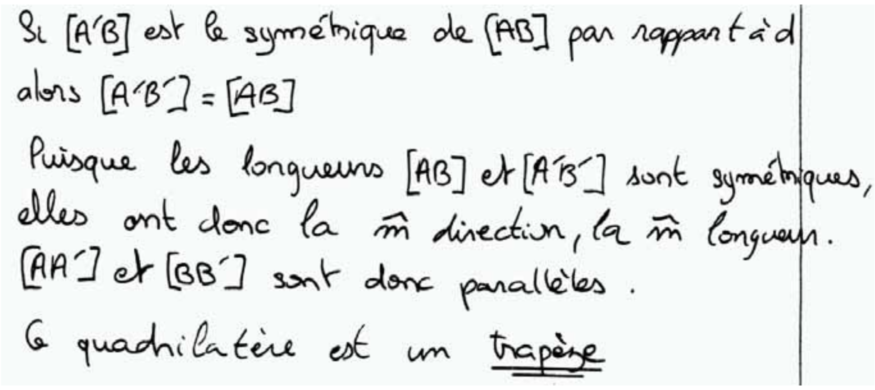
3.2 Analyse a posteriori de la première expérimentation

Nous avons eu trente-six copies d'élèves, dix-sept de la classe 3B (troisième B) et dix-neuf de la classe 3D (troisième D), provenant d'un collège de la banlieue grenobloise en France. Nous analysons ici les preuves données par les élèves, en identifiant les règles mobilisées comme opérateurs du raisonnement et leurs supports. L'analyse porte uniquement sur les preuves présentes dans les réponses au questionnaire. Elle permettra aussi une explicitation de la limite de l'analyse de la preuve, décrite dans l'analyse de la nature de connaissance engagée.

3.2.1 Explicitation de règles dans une preuve

Nous avons analysé toutes les preuves construites, c'est-à-dire trente-six preuves. La méthodologie d'analyse est d'identifier des pas de la preuve, en mettant en évidence les hypothèses et la conclusion, et d'identifier ou attribuer une règle qui associe les deux.

Nous présentons ici une analyse de la preuve décrite pour le problème 2, afin de présenter concrètement la méthode d'analyse que nous avons mise en œuvre. La preuve ci-dessous est celle de Marion, de la classe 3D. Nous l'avons transcrite avec les numéros des lignes pour faciliter notre explication.


Si [A'B] est le symétrique de [AB] par rapport à d
alors [A'B'] = [AB]
Puisque les longueurs [AB] et [A'B'] sont symétriques,
elles ont donc la m̄ direction, la m̄ longueur.
[AA'] et [BB'] sont donc parallèles.
Ce quadrilatère est un trapèze

1 : Si [A’B] est le symétrique de [AB] par rapport à d
2 : alors [A’B’] = [AB]
3 : Puisque les longueurs [AB] et [A’B’] sont symétriques,
4 : elles ont donc la même direction, la même longueur.
5 : [AA’] et [BB’] sont donc parallèles.
6 : Le quadrilatère est un <u>trapèze</u>

Figure V.2 La preuve de Marion pour le problème 2[1]

A partir de deux premières lignes (1 et 2), nous pouvons identifier un pas de la preuve. Le mot « si » est l'indice de l’hypothèse d’un pas, et le mot « alors » est celui de la conclusion. L’hypothèse est « Sym (A’B’, AB, d) » et la conclusion est « A’B’ = AB ». L’égalité de la longueur des deux segments est déduite de la propriété de la symétrie orthogonale. A partir de ces énoncés, la règle suivante peut être identifiée.

M-r1 : si Sym (PQ, P’Q’, d) alors PQ = P’Q’

Elle est à la fois un permis d’inférer du point de vue de la preuve et un opérateur du point de vue du modèle cK¢. Nous faisons un schéma d’un pas de la preuve, exprimé selon la figure suivante. Le permis d’inférer, qui est une règle de notre point de vue, permet d’établir une relation entre hypothèse et conclusion.

<u>Hypothèse</u> → <u>Conclusion</u>
Sym (AB, A’B’, d) → AB = A’B’

<u>Permis d’inférer</u>
M-r1 : si Sym (PQ, P’Q’, d) alors PQ = P’Q’

Figure V.3 Le schéma d’un pas de la preuve

Le deuxième pas de la preuve se trouve aux deux lignes suivantes (3 et 4). Le terme

[1] A la première ligne de la preuve, « [A’B] » est écrit en tant qu'objet symétrique. Cependant, nous l’interprétons comme « [A’B’] » parce que les énoncés du problème l’expriment clairement. L’élève a probablement oublié la prime à la lettre « B ».

« puisque » est un indice d'hypothèse. Le terme « donc » est par contre celui de la conclusion. « Sym (PQ, P'Q', d) » de la ligne 3 est une hypothèse et « même direction et même longueur » de la ligne 4 représente la conclusion de ce pas de la preuve. La règle suivante est donc identifiée :

> M-r2 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ et P'Q' ont la même direction et la même longueur

Or, cette règle implique deux propriétés (même direction et même longueur). Nous pouvons les dissocier en deux règles. Comme la deuxième propriété est déjà déduite dans le premier pas de la preuve, nous considérons que la propriété est répétée afin de la mobiliser dans un pas suivant. La règle M-r2 fonctionne donc ici comme la règle suivante.

> M-r2' : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ et P'Q' ont « la même direction »

En géométrie euclidienne, lorsque deux segments ont la même direction, ils sont parallèles. Or, le dessin associé aux énoncés de problème est un trapèze et les segments AB et A'B' sont deux côtés opposés non parallèles. Dans la preuve, nous considérons qu'elle ne signifie pas « parallèle » mais que l'inclinaison de chaque segment par rapport à l'axe ou à la droite particulière est la même, c'est-à-dire deux segments ne sont pas comme la Figure V.4 mais comme le trapèze isocèle.

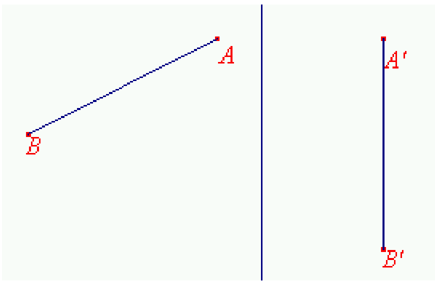


Figure V.4 Deux segments qui n'ont pas la même direction pour Marion

Nous voyons ici une apparition de la perception globale de figures symétriques. La propriété non géométrique « la même direction » pour Marion est un moyen qui explique le rapport directionnel entre deux segments AB et A'B'. La validité de la règle n'est pas donc assurée par la géométrie théorique, mais par la perception globale de figures symétriques.

La ligne 5 comporte un indice de conclusion « donc », bien que la phrase de l'hypothèse soit implicite. Le parallélisme est déduit. Il s'agit de supposer dans ce cas que les propriétés précédemment mentionnées sont utilisées comme hypothèses d'un pas de preuve. Ainsi, nous interprétons qu'à partir des deux propriétés de la ligne 4, la propriété de parallélisme est déduite. La règle suivante est donc identifiée.

> M-r3 : si PQ et P'Q' ont « la même direction » et la même longueur alors PP' // QQ'

La validité de la règle ne peut pas être assurée par la géométrie, puisque la propriété perceptive (la même direction) est déjà mobilisée dans les hypothèses de règle. Nous considérons que certaines implicites à part de « la même direction » et « la même longueur » sont prises en compte dans cette règle. En effet, si deux segments AB et A'B' sont à la position des deux côtés opposés non parallèles du trapèze isocèle, ils sont toujours parallèles. L'énoncé « AA' // BB' » serait donc obtenue à partir de la figure donnée ou de la perception globale de figures symétriques.

La ligne 6 ne comporte aucun mot qui implique le statut de l'énoncé. Cependant, comme c'est la dernière ligne dans la preuve entière que le mot « trapèze » est souligné par deux lignes, nous interprétons que l'énoncé de cette ligne est la conclusion d'un pas de la preuve, et aussi celle de la preuve. L'hypothèse est aussi implicite, puisque aucun indice n'est explicité. De la même façon que le pas précédent, la propriété mentionnée dans la ligne précédente est considérée. En outre, comme la définition du trapèze mobilise souvent la propriété de parallélisme, nous considérons que celle-ci est utilisée comme hypothèse. Ainsi, à partir des deux dernières lignes (5 et 6), nous identifions comme permis d'inférer un pas de la preuve, de même que la règle de caractérisation du trapèze suivante.

M-r4 : si PQ // P'Q' alors le quadrilatère PP'Q'Q est un trapèze

C'est de cette manière que nous avons avancé l'analyse de trente-six copies des élèves, et identifié des pas de la preuve et des règles mobilisées.

3.2.2 Règles identifiées concernant la symétrie orthogonale

Nous avons analysé les trente-six copies des élèves, et identifié des règles grâce à la méthode systématique présentée ci-dessus. Celles qui sont liées à la symétrie orthogonale sont présentées dans la liste suivante. Nous avons aussi indiqué dans la colonne de gauche la fréquence d'apparition de chaque règle.

Table V.2 Les règles identifiées dans les preuves des copies d'élèves de 3ème

Fréq.	**Règles identifiées concernant la symétrie orthogonale**
24	r1 : Si Sym (P, P', d) alors PP' ⊥ d
14	r2 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ = P'Q'
8	r3 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PP' // QQ' r4 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors Sym (P, P', d)
6	r5 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ // P'Q' r6 : Si Sym (PQ, P'Q', d) et PQ // d alors P'Q' // d
4	r7 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PM = MP'
3	r8 : si Sym (PQ, P'Q', d) et PQ // d alors PQ // P'Q'
2	r9 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PP' ⊥ d r10 : si Sym (P, P', d) alors d : médiatrice de PP' r11 : Si Sym (P, P', d) alors P ⊥ d, P' ⊥ d
1	r12 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ non // P'Q' r13 : si Sym (P, P', d) et Sym (Q, Q', d) alors PQ // d // P'Q' r14 : si Sym (P, P', d) et Sym (Q, Q', d) alors PP' // d // QQ' r15 : Si Sym (P, P', d) et Sym (Q, Q', d) (et PP' = QQ') alors PQQ'P' parallélogramme r16 : si Sym (P, P', d) alors d : axe de symétrie de [PP'] r17 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors dist (P, d) = dist (P', d) = dist (Q, d) = dist (Q', d) r18 : si Sym (P, P', d) et PQ // d alors QPP' est droit r19 : si Sym (P, P', d) et Sym (Q, Q', d) alors PQQ'P est un rectangle r20 : si Sym (P, P', d) alors M milieu de PP' r21 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ et P'Q' ont la même direction r22 : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PP' = QQ' r23 : si Sym (PQ, P'Q', d), PQ // d // P'Q' alors PM = MP' et QN = NQ' r24 : si d : axe de symétrie de [PP'] alors d : médiatrice de [PP']

La plupart des règles identifiées sont les règle de propriétés de la symétrie, sont exprimées comme « si symétrie alors propriété ». La règle d'héritage de la symétrie (r4, par exemple), est implicitement ou explicitement mobilisée. En revanche, les règles de caractérisation de la symétrie, qui sont exprimées comme « si propriétés alors symétrie », n'apparaissent jamais dans les preuves décrites. Ainsi, nous voyons bien que la nature du problème posé exige certains types spécifiques de règles.

3.2.3 Contrôle de la validation des opérateurs

Nous analysons ici le contrôle pour la validation d'opérateurs mobilisés dans les preuves. Du point de vue de la règle, l'analyse du support des règles identifiées dans la preuve est effectuée. Nous présentons en premier lieu les différentes natures de règles que nous avons trouvées à partir des données recueillies, puis l'analyse de certaines règles et de leurs supports.

3.2.3.1 Différentes natures de règles

Nous avons identifié différentes natures des règles du point de vue du support de règles – c'est-à-dire du contrôle de la validation de l'opérateur choisi – et du point de vue des propriétés mises en œuvre dans une règle.

Du point de vue du support, il existe d'une part des règles qui peuvent être acceptées par la théorie, autrement dit, dont le support est théorique. C'est une communauté ou une institution qui détermine les règles utilisables. Nous les appelons *règles théoriques*. Dans la liste ci-dessous, celles qui paraissent acceptables du point de vue de la géométrie au collège appartiennent à ce genre de règles. Par exemple, celles qui impliquent des propriétés géométriques attachées aux points symétriques : r1, r10, r20. La propriété de l'isométrie de la symétrie orthogonale (r2) serait aussi acceptée. Bien entendu, comme le support n'est pas accessible seulement à partir de la règle écrite dans la liste, nous ne pouvons pas savoir si elle est vraiment théorique chez l'élève qui la mobilise.

D'autre part, il existe des règles qui ne peuvent pas être acceptées par la théorie; leur support réside alors dans le résultat de la perception globale de figures symétriques, ou dans l'exploration, l'expérience mentale, voire dans le dessin tracé de l'objet en jeu. Le lien entre deux énoncés (l'hypothèse et la conclusion) est établi par ce résultat ou par une causalité. Nous les appelons dans ce cas *règles pragmatiques*. Par exemple, la règle « r3 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PP' // QQ' » dans la liste serait de ce type de règles, si sa mobilisation par l'élève est la suivante : la règle est valide, ou le raisonnement avec cette règle peut être faisable, parce qu'une propriété est « toujours » identifiée aux objets symétriques. Lorsque la règle est bien démontrée en mobilisant des règles théoriques, elle devient théorique et est appelé un théorème.

Ce point de vue, une validité potentielle de règle dans la géométrie théorique, provoque encore une distinction de la règle pragmatique. En effet, parmi les règles pragmatiques, la validité de certaines ne peut pas être démontré. Dans la liste de règles ci-dessus, certaines sont susceptibles d'être démontrées, et certaines ne le sont pas. Nous utiliserons ainsi les terme *la règles valide* pour la règle pragmatique qui peut être validée par une démonstration et *la règle invalide* pour la règle pragmatique qui peut être invalidée par une démonstration. Par exemple, les règles « r3 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PP' // QQ' » et « r6 : Si Sym (PQ, P'Q', d) et PQ // d alors P'Q' // d » sont valides, et elles sont donc des règles valides. Par contre, la règle « r5 : Si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ // P'Q' » ne peut pas être démontrée. Elle peut être invalidé par un contre-exemple dans le cadre de la géométrie euclidienne : le contre-exemple dans lequel

PQ n'est pas parallèle à la droite d. La classification de ces deux types de règles est significative seulement pour les règles analytiques et pragmatiques. La règle perceptive n'est ni valide ni invalide. En effet, elle ne peut être ni invalidée ni validée. En outre, les règles théoriques sont toujours valides, puisque c'est la théorie qui les admet. La distance entre la règle théorique et la règle valide était dans le support, en particulier l'acceptabilité par l'institution et l'existence de la démonstration. Cette distinction est importante, parce que cette distance représente la distance entre la géométrie théorique et la géométrie pratique du point de vue de la règle.

Du point de vue de la propriété mise en œuvre dans une règle, il existe d'une part des règles qui mobilisent, en tant qu'énoncés de l'hypothèse et de la conclusion d'une règle, les propriétés géométriques ou mathématiques qui sont admises dans une communauté ou une institution (« parallèle », « orthogonale », « symétrique », etc.). Nous les appelons *règles analytiques*. La plupart des règles présentées dans la liste sont de ce type. En prenant en compte les autres natures de règles ci-dessus, on peut dégager que la règle théorique ne mobilisant que des propriétés analytiques, elle est en même temps toujours analytique. Par contre, la règle analytique n'est pas toujours théorique. Elle peut être théorique si et seulement si elle est admise par la théorie ou démontrée en mobilisant les règles théoriques.

D'autre part, il existe aussi des règles qui mobilisent des propriétés qui ne sont pas géométriques ou mathématiques, pour l'hypothèse ou pour la conclusion. Nous les appelons dans ce cas *règles perceptives.* Nous avons déjà vu un exemple de ce genre de règles dans la preuve de Marion analysée plus haut : la règle « M-r2' : si Sym (PQ, P'Q', d) alors PQ et P'Q' ont la même direction ». La propriété « la même direction » pour Marion n'était pas géométrique, mais identifiée sur la figure donnée ou par la perception globale de figures symétriques. Du point de vue du support, ce type de règles est toujours pragmatique. Ceci est dû au fait que le rapport entre l'hypothèse et la conclusion, lesquelles contiennent au moins une propriété perceptive, ne peut pas être établi par la théorie. Les règles théoriques ne mobilisent que des propriétés analytiques. Le rapport entre des propriétés doit toujours s'appuyer sur la perception globale des figures en jeu.

Pour résumer les différentes natures de règles identifiées à partir du support de règles, des propriétés mises en œuvre et de la validité potentielle dans la géométrie euclidienne, nous avons classé des règles de la liste dans la Table V.3 suivante. Dans la classification, le jugement des règles entre théoriques et pragmatiques/valides n'est pas évident. C'est l'institution qui le décide. Nous avons quand même classé les règles de notre point de vue.

Table V.3 Classification de règles identifiées

<table>
<tr><th></th><th>Analytique</th><th>Perceptive</th></tr>
<tr><td>Théorique</td><td>r1, r2, r4, r7, r10, r16, r20, r24</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Pragmatique</td><td>Valide
r3, r6, r8, r9, r15, r18, r23</td><td rowspan="2">r11, r21</td></tr>
<tr><td>Invalide
r5, r12, r13, r14, r17, r19, r22</td></tr>
</table>

3.2.3.2 Distance entre règles valides et invalides

Nous analysons ici la distance entre la règle valide et la règle invalide. Comme nous l’avons présenté dans la liste de règles ci-dessus et dans le tableau, plusieurs règles invalides sont mobilisées dans la preuve. Notre intérêt est le support de ces règles invalides, parce que d’une façon générale, il semble que les règles qui peuvent être facilement invalidées ne sont pas mobilisées.

Analysons la nature de la règle invalide avec un exemple, « r5 : Si Sym (PQ, P’Q’, d) alors PQ // P’Q’ ». Comme nous l’avons déjà vu, elle peut être invalidée par un contre-exemple. Le support qui permet d’établir le rapport entre l’hypothèse et la conclusion serait en premier lieu, puisque c'est une règle pragmatique, le résultat de la perception globale ou le dessin tracé de l’objet en jeu. Or, comme elle est invalide du point de vue de la géométrie, du point de vue de l’observateur, il doit exister certaines conditions implicites ou perceptives de figures sous lesquelles la règle est valide. En d’autres termes, le domaine de validité de la règle est limité à un champ plus restreint avec certaines conditions. En effet, nous ne considérons pas qu’un sujet rationnel mobilise une règle qui lui est invalide. Par exemple, il se peut que le domaine soit limité simplement à un cas particulier du dessin donné, ou qu’une propriété géométrique implicite limite ce domaine en tant que condition de la figure. Du point de vue de la règle, il manque une ou des condition(s) nécessaire(s) afin de rendre possible la démonstration. Dans tous les cas, les conditions supplémentaires permettent de passer d'une règle invalide à la règle valide. Pour l’exemple donné, la règle (r5), une propriété « PQ // d » le permet. Ainsi, nous considérons que la plupart des règles invalides identifiées dans la liste sont générées de cette façon, c’est-à-dire avec des conditions implicites. D’ailleurs, même si une règle invalide devient valide, elle est toujours pragmatique. L’acceptation par la théorie est une autre chose.

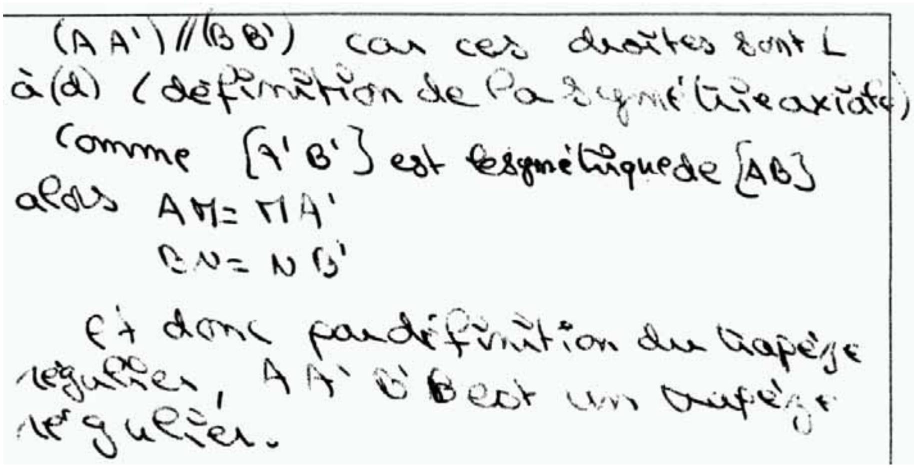
Or, en plus de la mobilisation de la règle invalide, nous considérons aussi une autre raison pour la caractérisation de figures symétriques. Si les figures symétriques sont définies ou caractérisées d'une façon différente, les propriétés attachées ou dérivées de la symétrie peuvent ne pas être de la symétrie du point de vue de la géométrie. Par exemple, la preuve de Thomas donnée dans la prochaine section (§3.2.3.3) mobilise la règle « R-r1 : si Sym (PQ, *x*,

d) alors PQ // *x* (*x* : segment) », parce que sa définition du segment symétrique est « R-D1 : Sym (PQ, PQ, d) ⇔ PQ // P'Q' et PQ = P'Q' ». La règle (R-r1) est invalide, mais la condition de la règle de définition utilisée par l'élève est satisfaite..

3.2.3.3 Apparition du support dans la preuve écrite

Les preuves écrites sur les copies d'élèves ne dégagent pas suffisamment d'information sur les supports de règles. Néanmoins, certaines preuves expriment les origines des règles, c'est-à-dire le support de leurs mobilisations. Nous présentons ici deux analyses de ce type de preuves.

La première preuve est celle d'Eric de la classe de 3B (Figure V.5). L'énoncé « définition de la symétrie axiale » peut éventuellement constituer l'indice d'un support. Analysons cette partie.



1 : (AA') // (BB') car ces droites sont ⊥
2 : à (d) (définition de la symétrie axiale)
3 : Comme [A'B'] est le symétrique de [AB]
4 : alors AM = MA'
5 : BN = NB'
6 : et donc par définition du trapèze
7 : régulier, AA'B'B est un trapèze
8 : régulier.

Figure V.5 la preuve de Eric pour le problème 2

Les deux premières lignes (1 et 2) comportent deux pas de preuve. Le mot « car » est un indice pour l'explicitation d'arguments. La phrase avant « car » est une conclusion et celle après est une hypothèse. Le premier pas est donc la conclusion « AA' // BB' » est obtenue à partir des deux propositions « AA' ⊥ d » et « BB' ⊥ d » qui sont traduites de la phrase « ces droites sont ⊥ ». La règle mobilisée dans ce pas n'est pas directement liée à la symétrie, mais au théorème de parallélisme (si une droite est perpendiculaire à deux droites, ces deux droites sont parallèles entre elles). Un autre pas est identifié à la ligne (2), la phrase entre parenthèses « définition de la symétrie axiale ». Comme l'orthogonalité n'est pas proposée dans les énoncés du problème, nous considérons que cette phrase porte sur cette propriété. La phrase n'explicite pas une règle, ni l'hypothèse, mais indique la mise en œuvre d'une ou de plusieurs règles liées à la symétrie axiale qui impliquent l'orthogonalité. A partir de cette considération et des règles tenant à la définition de la symétrie axiale, nous identifions deux propriétés « Sym (A, A', d) » et « Sym (B, B', d) » à partir desquelles l'orthogonalité est impliquée, et la règle « E-r1 : si Sym (P, P', d) alors PP' ⊥ d » qui sont implicites sur la preuve donnée.

Du point de vue du support de la règle, la phrase indique que la propriété d'orthogonalité réside dans la définition de la symétrie axiale. Autrement dit, l'existence d'une orthogonalité dans la symétrie orthogonale est assurée par sa définition. La définition est un support de mobilisation de la règle, tandis que nous ne pouvons pas savoir de quelle définition il s'agit. Nous pouvons exprimer ce pas de preuve comme le schéma suivant. Dans ce schéma, le support est identifié sur la preuve écrite.

Hypothèse — Conclusion

Sym (A, A', d) → AA' ⊥ d

Permis d'inférer

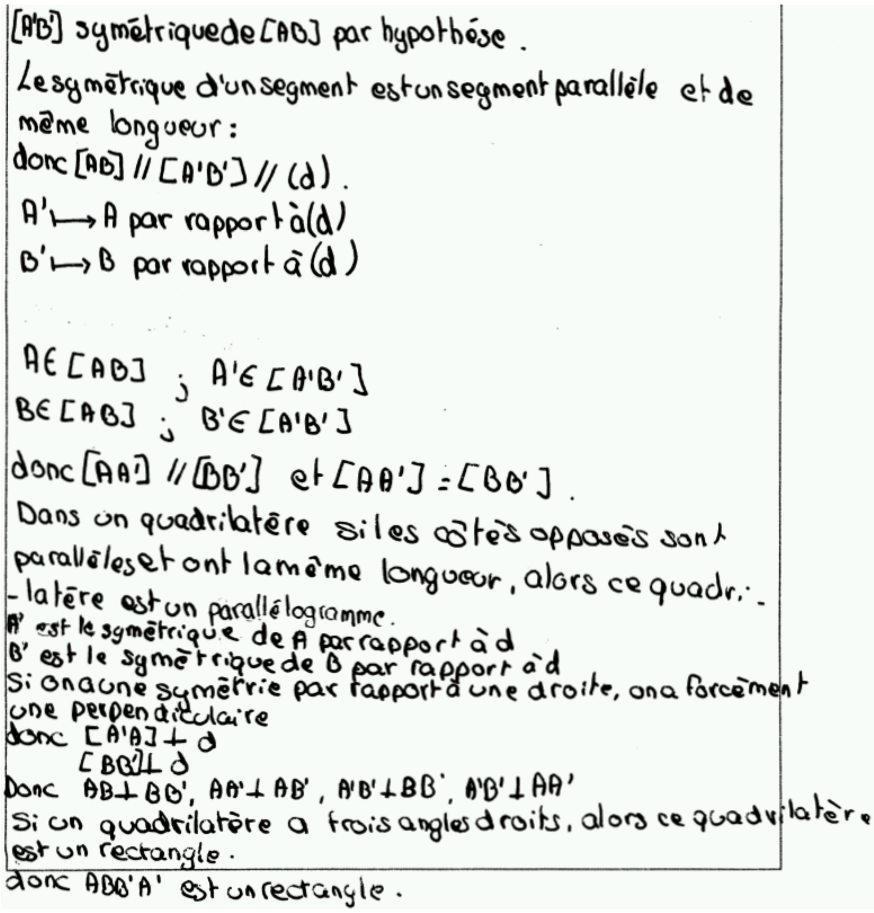
E-r1 : si Sym (P, P', d) alors PP' ⊥ d

Support

La définition de la symétrie axiale

Figure V.6 Le schéma d'un pas de la preuve d'Eric

Ensuite analysons une autre preuve, celle de Thomas de la classe 3D (Figure V.7) dans laquelle se trouve aussi un indice du support. La transcription est donnée juste pour les quatre premières lignes qui concernent le support.



[A'B'] symétriquede [AB] par hypothèse.
Lesymétrique d'unsegment estunsegment parallèle et de
même longueur :
donc [AB] // [A'B'] // (d).
A' ⟼ A par rapport à (d)
B' ⟼ B par rapport à (d)
A ∈ [AB] ; A' ∈ [A'B']
B ∈ [AB] ; B' ∈ [A'B']
donc [AA'] // [BB'] et [AA'] = [BB'].
Dans un quadrilatère si les côtés opposés sont
parallèleset ont lamême longueur, alors ce quadri-
-latère estun parallélogramme.
A' est le symétrique de A par rapport à d
B' est le symétrique de B par rapport à d
Si onaune symétrie par rapport à une droite, ona forcément
une perpendiculaire
donc [A'A] ⊥ d
[BB'] ⊥ d
Donc AB ⊥ BB', AA' ⊥ AB', A'B' ⊥ BB', A'B' ⊥ AA'
Si un quadrilatère a trois angles droits, alors ce quadrilatère
est un rectangle.
donc ABB'A' est unrectangle.

1 : [A'B'] symétrique de [AB] par hypothèse
2 : Le symétrique d'un segment est un segment parallèle et de
3 : même longueur :
4 : donc [AB] // [A'B'] // (d)

Figure V.7 La preuve de Thomas pour le problème 1

La phrase des lignes (2 et 3) en langage naturel « Le symétrique d'un segment est un segment parallèle et de même longueur » peut être interprétée comme une définition ou un théorème concernant deux segments symétriques sous la forme symbolique[2].

T-D1 : Sym (PQ, P'Q', d) ⇔ PQ // P'Q' et PQ = P'Q'

A partir de cette définition, les trois règles suivantes peuvent être dégagées, et donc disponibles pour la résolution.

T-r1 : si Sym (PQ, *x*, d) alors PQ // *x*   (*x* : segment)

Rr2 : si Sym (PQ, *x*, d) alors PQ = *x*   (*x* : segment)

---

[2] La définition (RD1) relèverait de la conception du « parallélisme » dans les travaux précédents (Tahri, 1994), alors que celle-ci a été identifiée surtout dans la construction d'une figure symétrique.

Rr3 : si PQ // *x* et PQ = *x* alors Sym (PQ, *x*, d)   (*x* : segment)

Dans la preuve, comme la propriété déduite de la symétrie est un parallélisme « AB // A'B' // d » à la ligne 4, la règle (T-r1) invalide est mobilisée pour un pas de la preuve. La définition (T-D1) fonctionne ici comme un support de la règle (T-r1). Nous présentons dans la Figure V.8 le schéma de ce pas de la preuve.

Hypothèse
Sym (AB, A'B', d) $\longrightarrow$ Conclusion
A'B' // d

Permis d'inférer
T-r1 : si Sym (PQ, *x*, d) alors PQ // *x*

Support
T-D1 : Sym (PQ, P'Q', d) $\Leftrightarrow$ PQ // P'Q' et PQ = P'Q'

Figure V.8 Le schéma d'un pas de la preuve de Thomas

Nous avons classé la règle (T-r1) en règle pragmatique/invalide, parce qu'il nous semble qu'elle est générée à partir de la propriété spatio-graphique lue sur le dessin donné. Cependant, si elle est impliquée par la définition, bien que celle-ci ne soit pas valide, nous pouvons la classer en règle « quasi » théorique.

Or, cette interprétation n'est pas évidente. Nous avons interprété la phrase comme définition parce que deux propriétés sont abordées ensemble, et que la phrase en langue naturelle ne nous permet pas explicitement le positionnement de la symétrie et des propriétés dans la règle. Il se peut aussi que la phrase des lignes (2 et 3) indique uniquement deux propriétés attachées à la symétrie, c'est-à-dire les règles (T-r1) et (T-r2). Dans ce cas, nous ne pouvons pas connaître le support de la règle (T-r1) à partir de la preuve écrite. Il se peut encore, comme nous l'avons vu, qu'une propriété « PQ // d » soit juste manquée dans une explicitation de la perception globale, mais prise en compte implicitement.

3.2.3.4 Génération d'une règle

En analysant plusieurs natures de règles, nous constatons que *certaines règles sont générées de façon pragmatique, voire temporaire*. La liste de règles identifiées nous permet d'expliciter l'existence de règles pragmatiques ou bricolées par les élèves. En effet, puisque la règle pragmatique est caractérisée par le support non théorique, sa génération doit s'appuyer sur un support pragmatique, tel que la perception globale ou la propriété spatio-graphique dans laquelle les objets ayant une propriété de la conclusion illustrent la symétrie orthogonale. Autrement dit, le rapport entre les hypothèses et la conclusion d'une règle est établi chez les élèves à partir du support pragmatique. Il est plus explicite pour la règle perceptive. En effet, comme la propriété mise en œuvre est déjà obtenue à partir de la perception globale de figures symétriques ou des propriétés spatio-graphiques, son lien avec la symétrie orthogonale doit être généré de façon pragmatique, voire temporaire.

Dans la liste de règles identifiées plus haut, diverses propriétés géométriques ou non apparaissent à la place de la conclusion d'une règle. Toutes peuvent être identifiées sur le dessin donné, alors que le sens de quelques unes (par exemple, r12 : Si Sym (P, P', d) alors P ⊥ d, P' ⊥ d) sont incertaines. De plus, les propriétés géométriques qui n'apparaissent pas sur la figure donnée ne sont jamais mentionnées. Nous considérons donc comme hypothèse que lorsqu'une règle est générée, les propriétés géométriques ou non repérées sur la figure sont mises en œuvre en tant qu'énoncé d'une règle. La combinaison de propriétés génère une règle. Cette hypothèse sera examinée dans la seconde expérimentation.

Dans les analyses ci-dessus, nous sommes arrivés, par l'identification de règles et par l'analyse de leurs validations, au fait que le support pragmatique doit être mis en œuvre pour la validation de certaines règles ou le contrôle de la validation d'opérateurs. En revanche, les analyses de preuves écrites ne nous permettent pas d'une façon concrète ou approfondie l'explicitation du support effectif, puisque il n'est pas souvent rédigé dans la preuve. Nous proposons dans le chapitre suivant une analyse plus détaillée à la seconde expérimentation. Une analyse du processus dynamique de la construction d'une preuve – c'est-à-dire l'argumentation – sera effectuée à partir du protocole de la résolution de problème par les élèves.

4 CONCLUSION

Dans la première expérimentation, nous avons recueilli des données pour une première analyse des preuves effectivement réalisées par les élèves. Nous avons analysé trente-six copies d'élèves. Nous avons remarqué certains points suivants dans l'analyse de ce chapitre.

1) Les problèmes choisis étaient, selon notre analyse théorique, ceux qui exigent la règle de propriété de la symétrie « si symétrique alors propriété ». La plupart des règles identifiées dans l'analyse des données recueillies appartiennent aussi à ce type de règle.

2) Nous avons analysé en particulier le support de règles, en d'autres termes, le contrôle de la validation d'opérateurs choisis. L'analyse de la liste des règles identifiées permet de mettre en évidence la nature différente des règles du point de vue de la validation et de la propriété mise en œuvre. A partir de cette analyse, nous avons considéré leur génération d'une façon pragmatique, voire temporaire.

3) En ce qui concerne l'apparition de la connaissance de la symétrie orthogonale dans la preuve, nous avons remarqué la formalisation de la propriété énoncée dans une règle. La propriété repérée sur la figure symétrique ou par la perception globale de figures symétriques est de temps en temps formulée dans une règle (la preuve de Marion ; M-r2).

Du point de vue de la connaissance de la preuve, nous nous intéressons au support d'une règle ou au processus de génération d'une règle, dans lequel la connaissance de la notion abordée interviendrait fortement. L'analyse plus détaillée du processus de résolution des élèves par la seconde expérimentation nous permettra d'aller plus loin sur ce point.

Chapitre VI

SECONDE EXPERIMENTATION

1 INTRODUCTION

Nous présentons ici les modalités de l'expérimentation, l'analyse a priori des problèmes choisis et la description des données recueillies. A la suite de l'introduction, nous proposons une analyse des données obtenues.

1.1 Situation expérimentale

1.1.1 Modalité de tâches et d'observation

Les élèves choisis pour l'expérimentation sont comme pour la première expérimentation de la classe de troisième du collège en France. La raison de ce choix est la même que celle de la première expérimentation. Nous avons choisie pour l'expérimentation la modalité du travail en binôme. Deux élèves travaillent ensemble et produisent une réponse à un problème posé. Sur chaque feuille, un seul problème est proposé et un espace libre suffisamment grand est laissé pour la rédaction. La feuille est donnée à chaque binôme au début de l'expérimentation. Nous avons choisi de proposer une seule feuille par binôme, pour obliger les élèves à travailler ensemble à une réponse commune et ainsi à discuter de leur résolution. En conséquence, cela nous permet d'analyser des données sur la connaissance, en particulier le contrôle dans la plupart des cas implicite peut apparaître par besoin d'explication du choix retenu par un élève à son collègue. Les élèves peuvent, s'ils le demandent, avoir une autre feuille blanche au cas où ils voudraient un brouillon ou que l'espace libre de la feuille ne leur suffise pas.

Pendant l'activité, un observateur est présent auprès de chaque binôme, mais il n'intervient pas, sauf pour répondre aux questions des élèves relatives à la modalité de la tâche ou à un manque éventuel de compréhension du texte. Les binômes ne peuvent pas interagir entre eux. Ils doivent travailler sans interférer avec les autres binômes. L'observateur prend des notes sur l'activité des élèves. Nous avons demandé aux observateurs de décrire le processus global de la résolution et l'activité afin de faciliter l'analyse des échanges verbaux enregistrées avec un magnétophone. Les notes détaillées, par exemple concernant la conception, ne sont pas demandées, parce que les points de vue de l'observation dépendent de la connaissance de l'observateur. Nous avons demandé aux observateurs de détailler le processus de construction d'une figure, parce qu'il est parfois difficile de l'identifier à partir des données enregistrées.

Lorsque les élèves d'un binôme déclarent qu'ils ont bien fini ou qu'ils ne peuvent rien faire de plus, l'observateur récupère la feuille et le brouillon éventuel et propose une nouvelle feuille de problème. Les problèmes sont successivement proposés par l'observateur. Nous ne laissons pas les feuilles aux élèves et les empêchons de revenir au problème précédent. Ce choix a été retenu pour la raison suivante : comme la conception est spécifique à une situation problème, il se peut que la présence des autres problèmes et figures provoque une autre conception qui n'est pas spécifique au problème proposé. Cela les empêche aussi de réviser la réponse donnée au problème terminé avec la conception mobilisée dans la résolution du problème suivant.

Dans la situation expérimentale, la consigne qui introduit les problèmes doit permettre aux élèves d'entrer rapidement dans la résolution de problème. La situation doit permettre de dégager autant que possible des données à analyser. La durée de l'expérimentation est d'environ une heure. Elle est suffisamment longue pour que les élèves puissent être engagés profondément dans une activité de construction d'une preuve. Si la durée est courte, les élèves risquent de ne pas avoir suffisamment d'interactions entre eux et en conséquence de ne pas faire apparaître les éléments concernant la connaissance. En outre, nous informons les élèves que leurs travaux ne seront pas évalués. Nous essayons de les laisser libres de travailler et discuter autant que possible, sans contraintes.

Comme nous avons mentionné, l'échange verbal entre les binômes est observé et enregistré avec un magnétophone. Nous disposons donc, comme données, des enregistrements du travail complet des binômes, de la rédaction écrite de la preuve et de la construction et quelque fois de la rédaction écrite aux bouillons et des notes des observateurs.

1.1.2 Types de problèmes proposés

La situation que nous proposerons aux élèves est une situation problème. Comme nous voulons précisément analyser des comportements d'élèves engagés dans une activité de construction d'une preuve ou d'une argumentation, la solution ne doit pas être obtenue d'une façon immédiate.

Nous proposons deux problèmes de construction de preuves et une autre de construction d'une figure symétrique. Comme le problème de preuve peut être abordé avec d'autres types de problèmes, le problème de reconnaissance est aussi posé avec les problèmes de preuves. Ce choix est retenu d'une part afin de comparer la nature de règles ou conceptions mobilisées dans des problèmes différents, et d'autre part le problème de reconnaissance avec la justification exige une mobilisation du même type de règle que celle de construction (voir l'analyse du Chapitre IV ou de la section suivante).

En ce qui concerne les problèmes de preuve, nous avons décidé de les proposer avec un dessin associé aux énoncés. Le problème ayant déjà une figure symétrique permet directement une activité de reconnaissance de la figure, c'est-à-dire un problème peut tenir à la fois de la preuve et de la reconnaissance. En outre, nous proposerons les problèmes abordant les figures dont la réalisation ne soulève pas de difficulté aux élèves de troisième. Nous ne voulons pas que les élèves gaspillent le temps en construction de figures. En effet, la construction de figures dans le problème de reconnaissance ne demande pas de connaissance de la symétrie orthogonale, mais celle de figures élémentaires dans la géométrie (voir les problèmes 2 et 3 plus loin).

1.2 Analyse a priori des problèmes proposés

Nous présentons par la suite les problèmes choisis pour l'expérimentation et leurs analyses a priori par rapport à notre problématique de recherche.

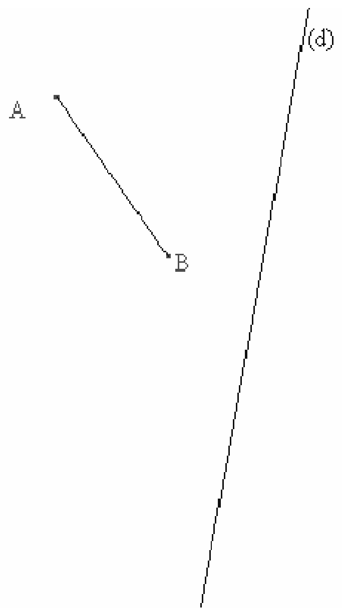
1.2.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le premier problème est celui de la réalisation d'une construction. Nous avons choisi la construction d'un segment symétrique qui est souvent abordée au collège. Nous demandons une construction avec des instruments qui force les élèves à mobiliser une procédure plutôt analytique. Ce problème a pour objectif de recueillir des données sur la conception mobilisée lors de la construction effective de symétriques qui seront analysées par rapport à celle mobilisée lors de la reconnaissance et de la preuve. Pour cela, la construction ne doit pas être particulière, mais plutôt banale.

Les variables didactiques identifiées dans les travaux antérieurs sont prises en comptes. La direction d'axe n'est pas horizontale ou verticale pour que la mise en œuvre de la procédure ayant une direction privilégiée (surtout la direction horizontale) soit explicitée. L'angle formé entre le segment et l'axe est de 45° ce qui est le plus banal pour la construction. L'intersection entre le segment et l'axe est vide, parce que nous n'attendons pas la procédure particulière de réalisation dans une situation particulière. Nous laissons suffisamment d'espace à droite et en bas de la feuille, pour que la procédure de « prolongement » soit possible à mettre en œuvre.

En outre, tous les instruments dont l'utilisation est familière aux élèves – la règle graduée, le compas, l'équerre et le rapporteur – sont disponibles pour la résolution. La raison de ce choix réside dans le fait que nous ne voulons pas soulever de difficulté lors de la réalisation d'une propriété géométrique. Notre intérêt ne porte pas sur l'utilisation d'instruments, mais sur les propriétés géométriques mises en œuvre lors de la construction de symétriques.

Problème 1 *: Construire le symétrique du segment [AB] par rapport à l'axe (d) avec les instruments (la règle graduée, le compas, l'équerre, rapporteur, etc.). Si vous n'arrivez pas à le construire avec les instruments, vous pouvez tracer sans instrument.*



Selon notre analyse théorique effectuée dans le chapitre IV (§4.4), le processus de la réalisation peut être structuré suivant l'enchaînement ci-dessous de problèmes du point de vue du modèle cK¢. La notation (P) dans le schéma indique le problème abordé suivant.

P(X) : tracer le symétrique de l'objet X (dans la résolution du problème 1, il s'agit du segment [AB] et des points A et B)

P'(X) : tracer le symétrique de l'objet X ayant certains symétriques déjà réalisés (dans la résolution du problème 1, il s'agit du segment [AB] dont les symétriques des extrémités sont déjà réalisés)

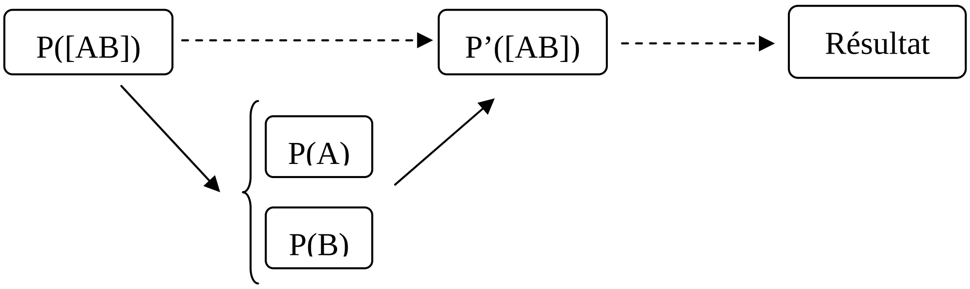


Figure VI.1 : Enchaînement de problèmes

Dans la résolution des problèmes P(A) et P(B), comme nous l’avons vue dans le chapitre IV, une règle de la caractérisation de la symétrie orthogonale est exigée afin de réaliser une construction avec la procédure théorique. L’une des règles suivantes doit être mobilisée comme contrôle qui désigne les opérateurs de réalisation.

R1 : si PP’ $\perp$ *d* et PM = MP’ (M = PP’ $\cap$ *d*) alors Sym (P, P’, *d*)

R2 : si PP’ $\perp$ *d* et PM = MP’ ($\forall$M $\in$ *d*) alors Sym (P, P’, *d*)

R3 : si PM = MP’ et PN = NP’ ($\forall$M et N $\in$ *d*) alors Sym (P, P’, *d*)

La propriété d’orthogonalité apparue dans les règles R1 et R2 (PP’ $\perp$ *d*) amènerait l’utilisation d’équerre dans un opérateur. La propriété de milieu dans la règle R1 amènerait l’utilisation de compas ou de règle graduée qui permet de reporter la longueur. La propriété d’équidistance dans les règles R2 et R3 amènerait l’utilisation de compas.

Lorsque la procédure perceptive est mise en œuvre, certaines propriétés dans ces règles seront remplacées par des propriétés perceptives. Par exemple, lorsqu’une direction est considérée perceptivement, c’est-à-dire sans critère explicite, privilégiée pour la réalisation d’un support, nous considérons que la règle suivante est mobilisée.

R4 : si PP’ (perceptif) et PM = MP’ (M = PP’ $\cap$ *d*) alors Sym (P, P’, *d*)

Dans la résolution du problème 1, les problèmes P(A) et P(B) sont les sous-problèmes. Lors de la transformation du problème P([AB]) à P’([AB]), la règle qui permet de poser les sous-problèmes est celle d’héritage de la symétrie orthogonale, en particulier, de la dissociation de la symétrie. C’est la règle suivante.

R5 : si Sym (PQ, P’Q’, *d*) alors Sym (P, P’, *d*) et Sym (Q, Q’, *d*)

Au contraire, lors de la résolution du problème P’([AB]), la règle exigée serait celle d’héritage de la symétrie orthogonale, mais de l’association de la symétrie. C’est celle-ci qui désigne un opérateur de la réalisation d’un segment à partir de deux points symétriques déjà tracés.

R6 : si Sym (P, P’, *d*) et Sym (Q, Q’, *d*) alors Sym (PQ, P’Q’, *d*)

Ainsi, pour la résolution du problème 1, la règle de caractérisation de la symétrie orthogonale et les règles d’héritage de la symétrie orthogonale doivent être mobilisées comme contrôles.

En ce qui concerne la validation du résultat obtenu, c'est-à-dire le segment symétrique A'B', une reconnaissance de figures symétriques sera effectuée. Comme le problème ne demande pas précisément la validation ou son explicitation, la reconnaissance sera effectuée surtout par le pliage ou par la perception globale de figures symétriques. Celle-ci doit accepter comme symétrique les côtés de dessin formant un trapèze. Dans ce cas, les règles suivantes seront mobilisées comme contrôle de la reconnaissance.

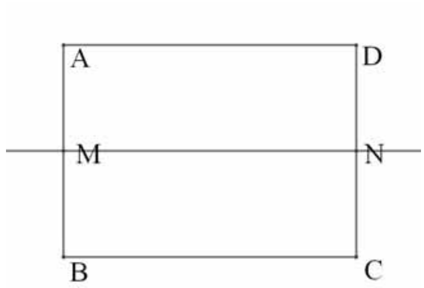
R7 : si Pliage (PQ, P'Q', *d*) alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

R8 : si Perception (PQ, P'Q', *d*) alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

1.2.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Le deuxième problème est celui de la reconnaissance de segments symétriques et de la preuve. Le problème suivant est posé.

Problème 2 : *Le quadrilatère ABCD est un rectangle. Soit M, N les milieux des côtés opposés AB et DC. Les segments [AD] et [BC] sont-ils symétriques par rapport à la droite (MN) ? Répondre « oui », « non », ou « pas toujours », et démontrer.*



La reconnaissance porte sur deux segments qui sont les côtés opposés d'un rectangle par rapport à une droite. La réponse correcte de la reconnaissance est « oui, symétrique ». Le problème de reconnaissance sur un rectangle ne provoquera pas de difficulté chez les élèves de collège. Selon les travaux précédents (Grenier, 1988, p.185), les élèves de sixième trouvent une droite de symétrie sans pliage effectif. Nous considérons donc que la reconnaissance par pliage mental ou la reconnaissance perceptive sera effectuée. Après la reconnaissance, le problème posé pour les élèves est une preuve qui permet une caractérisation de symétriques à partir des propriétés proposées par les énoncés du problème. Le problème 2 focalise ce deuxième problème, une preuve de caractérisation. Il a ainsi pour objectif de recueillir des données en vue de comparer les règles mobilisées dans la construction et dans la caractérisation de symétriques (preuve).

La raison de ce choix de problème tient d'une part au type de règles exigées. Selon notre analyse théorique effectuée dans le chapitre IV (§2.2), une règle de caractérisation de la symétrie orthogonale et une règle d'héritage de la symétrie orthogonale sont exigées pour la résolution. Cela veut dire que les mêmes types de règles que celles du problème 1 sont exigés pour la résolution. La règle suivante est la règle principale que nous anticipons à partir de l'analyse théorique.

R1 : si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*)

Dans la résolution du problème 1, elle fonctionne comme contrôle qui désigne les opérateurs réalisant le support perpendiculaire avec l'équerre ainsi que le report de la distance au compas ou à la règle graduée. Dans la résolution du problème 2, elle permet, en tant qu'opérateur ou permis d'inférer, de déduire deux points symétriques à partir de deux propriétés géométriques (orthogonalité et milieu).

La deuxième raison tient aux propriétés disponibles sur le rectangle. Lorsque les deux côtés sont reconnus comme symétriques sans prise en compte de l'orthogonalité, les propriétés qui paraissent significatives pour la caractérisation de la symétrie seront mises en œuvre par les élèves. Dans ce cas, nous voulons laisser aux élèves une liberté de choix de propriétés. Dans le rectangle que nous proposerons, à part l'orthogonalité, le parallélisme, l'égalité de longueur de deux côtés et les milieux sont disponibles. En outre, ces propriétés sont communes à celles du problème 3 qui sera posé après le problème 2. Nous anticipons ainsi que, lorsque l'orthogonalité n'est pas mise en œuvre, les règles qui ne la comportent pas, comme les règles suivantes, seront mobilisées.

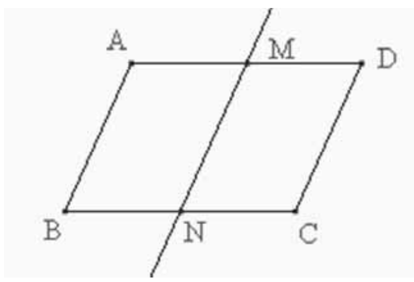
R9 : si PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*)

R10 : si PQ = P'Q' et PQ // P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

1.2.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Nous avons choisi le troisième problème qui demande une reconnaissance de figures non symétriques et sa justification. Le problème suivant est posé.

Problème 3 : *Le quadrilatère ABCD est un parallélogramme. Soit M, N les milieux des côtés opposés AD et BC. Les segments [AB] et [DC] sont-ils symétriques par rapport à la droite (MN) ? Répondre « oui », « non », ou « pas toujours », et démontrer.*



La reconnaissance porte sur deux segments qui sont les côtés opposés d'un parallélogramme, par rapport à une droite. La réponse correcte de la reconnaissance est « pas toujours », parce que si le parallélogramme est un rectangle ou un carré, les segments AB et DC sont symétriques par rapport à la droite MN et si le parallélogramme ne l'est pas, les segments ne le sont pas.

La raison de ce choix de problème consiste d'une part au fait que les travaux précédents rapportent que le taux de réussite d'élèves pour la reconnaissance perceptive de la droite de symétrie sur cette figure est faible par rapport à d'autres figures (Grenier, 1988, p.133). D'autre part, ce problème est pertinent du point de vue de l'observation de la mise en œuvre de la propriété d'orthogonalité dans la reconnaissance de symétriques. En effet, la propriété qui manque pour que D et C soient symétriques des deux points A et B est seulement l'orthogonalité. La figure porte la propriété de milieux qui sont souvent remarqués lors de la reconnaissance (Grenier, 1988, pp. 152-153). En outre, les propriétés disponibles sur la figure sont communes, sauf l'orthogonalité, avec le problème 2 : les côtés parallèles et de même longueur ; les milieux ; la droite parallèle aux deux segments en jeu.

Ce problème a ainsi pour objectif d'observer la mise en œuvre de la propriété d'orthogonalité dans la reconnaissance de symétriques. Selon l'hypothèse du modèle cK¢, la mobilisation de contrôle est spécifique au problème abordé. Le problème 1 a pour objectif d'observer la mise en œuvre de l'orthogonalité à l'utilisation d'équerre. Il se peut ainsi que l'orthogonalité qui est mise en œuvre dans la résolution de construction (problème 1) ne soit pas mobilisée dans la résolution de reconnaissance (problème 3).

Pour la reconnaissance, plusieurs moyens sont possibles : la perception globale de figures symétriques ; le pliage effectif ou mental ; la reconnaissance analytique indiquant le manque d'orthogonalité, Selon le résultat de la reconnaissance, les règles exigées dans la preuve sont différentes.

<u>La réponse « non symétrique » ou « pas toujours »</u>

Pour la reconnaissance pertinente, la réponse « non » ou « pas toujours », la prise en compte de l'orthogonalité de la symétrie orthogonale ou du pliage est exigée. Lorsque le manque d'orthogonalité est remarqué, la règle suivante peut être mobilisée.

R11 : si non PP' $\perp$ *d* alors non Sym (P, P', *d*)

Cette règle est équivalente à la suivante qui est une règle de propriété de la symétrie orthogonale

R11' : si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d*

Par ailleurs, lorsque le pliage est mobilisé pour la reconnaissance, les règles suivantes peuvent être nécessaires. La première concerne les points non symétriques et la deuxième les segments symétriques.

R12 : si non Pliage (P, P', *d*) alors non Sym (P, P', *d*)

R13 : si non Pliage (PQ, P'Q', *d*) alors non Sym (PQ, P'Q', *d*)

Le problème abordé après la reconnaissance n'est pas une caractérisation de symétrique, mais celle de non symétrique. Ce point différentie le problème 3 du problème 2 qui demande une caractérisation de symétrique. Comme la négation est mobilisée pour nier le symétrique, la nature de règle exigée pour la preuve est différente de celle du problème 2. Le type de règle exigé est plutôt la règle de la propriété de la symétrie orthogonale telle que « si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d* », alors que le problème 2 exige une règle de la caractérisation de la symétrie orthogonale telle que « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*) ».

La réponse « oui, symétrique »

Pour la reconnaissance non pertinente, la réponse « oui symétrique », l'orthogonalité doit être négligée pour la reconnaissance. Les propriétés géométriques disponibles pour la reconnaissance de symétriques sont les mêmes que celles de la preuve du problème 2. En effet, les milieux de deux côtés opposés sont donnés par les énoncés du problème ; deux parties égales peuvent être produites par la droite ; les côtés opposés parallèles et de même longueur. Les règles suivantes qui ne comportent pas l'orthogonalité sont prévues pour la reconnaissance.

R14 : si PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*)

R15 : si PQ = P'Q' et PQ // P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

Le problème posé après la reconnaissance est une caractérisation de la symétrie orthogonale. La résolution de ce problème exige une ou des règles de caractérisation de la symétrie orthogonale. Or, dans tous les cas, les règles mobilisées doivent être perceptives ou invalides, puisque les figures proposées sont non symétriques par rapport à la droite donnée.

Par ailleurs, les arguments pour la symétrie peuvent être proposés les uns aux autres comme l'argumentation au sens de Duval (1991).

1.3 Expérimentation et données recueillies

L'expérimentation a été conduite en France. Sa description est comme ce qui suit.

- Elèves : vingt-deux élèves de la classe de 3$^{\text{ème}}$ au collège (onze binômes)
- Collège : à la banlieue grenobloise en France
- Date : le 15 octobre 2002

Les données suivantes sont recueillies dans l'expérimentation

- Les copies et les brouillons d'élèves pour trois problèmes
- La discussion d'élèves enregistrée par magnétophone qui est décrite comme protocole.
- Les notes d'observateurs

Nous présentons par la suite l'aperçu du protocole obtenu pour chaque problème.

Problème 1 : construction d'un segment symétrique

La plupart des élèves, dix binômes sur onze, réalisent une construction perceptivement correcte. La réponse d'un binôme qui reste n'est pas très loin de cette construction (voir Aurélie & Elliot (2) ci-dessous). La plupart, les élèves utilisent, pour la construction d'orthogonalité et d'équidistance, deux ou trois instruments parmi l'équerre, la règle graduée ou non et le compas. Nous présentons par la suite toutes les constructions des élèves et les processus de leurs réalisations identifiées à partir des produits des élèves, des notes d'observateurs et des protocoles. Les outils utilisés pour la construction sont indiqués au début d'un processus.

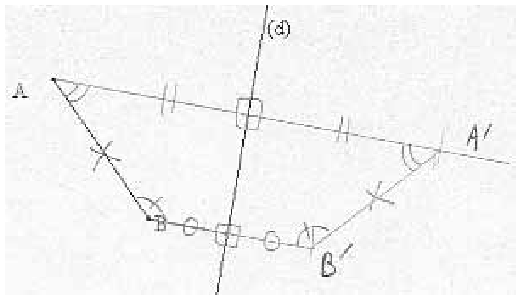
<table>
<tr><td colspan="2">Delphine & Baptiste (1)[1]</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Tracer avec l'équerre et la règle, une droite perpendiculaire à l'axe d passant par le point B. Prolonger cette droite de l'autre côté de l'axe.
2. Tracer un arc, dont le centre est l'intersection de la droite et l'axe (pour facilité, on l'appelle N) avec le rayon BN, sur cette droite de l'autre côté de l'axe. L'intersection est le symétrique B' du point B.
3. La même procédure pour construire le symétrique (A') de A.
4. Tracer le segment A'B'.
5. Mettre des codes de l'équidistance, l'orthogonalité, etc.</td><td>

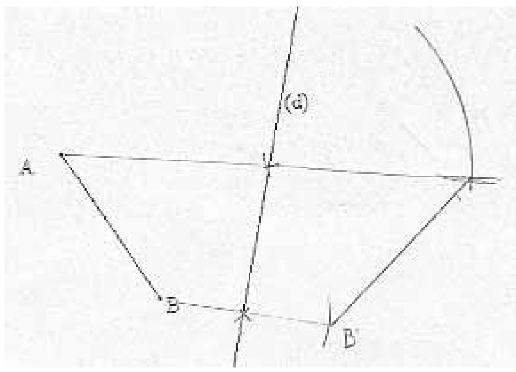
Figure VI.2</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aurélie & Elliot (2)</td></tr>
<tr><td>Instruments : compas, règle
1. Prendre un point sur l'axe d (la croix en bas par lequel passe la droite passant par B).
2. Reporter au compas la distance entre B et le point pris à l'étape précédente de l'autre côté de l'axe.
3. Tracer avec la règle une droite passant par B et prendre l'intersection B'.
4. Prendre un deuxième point sur d et même procédure pour le point A
5. Tracer un segment entre A' et B'.</td><td>

Figure VI.3</td></tr>
</table>

[1] L'observateur a donné par erreur deux feuilles de l'exercice. Mais, le binôme a travaillé ensemble et construit presque le même dessin de la même manière.

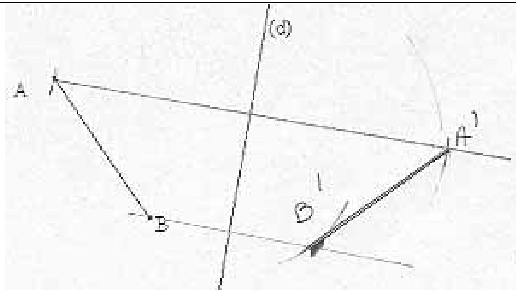
<table>
<tr><td colspan="2">Pauline & Agathe (3)</td></tr>
<tr><td>Instruments : compas, équerre, règle
1. Tracer avec le compas un arc dont le centre (M) est un point quelconque sur l’axe et le rayon est jusqu’à A.
2. Tracer avec le compas un arc dont le centre est le même point (M) et le rayon est [MB].
3. Tracer une droite perpendiculaire passant par A avec l’équerre et la règle.
4. Recommence le report de mesure avec compas (le centre est l’intersection entre l’axe et la perpendiculaire).
5. Effacer la première trace d’arc.
6. Tracer une droite perpendiculaire passant par B avec l’équerre et la règle.
7. Tracer un segment entre A’ et B’.</td><td>

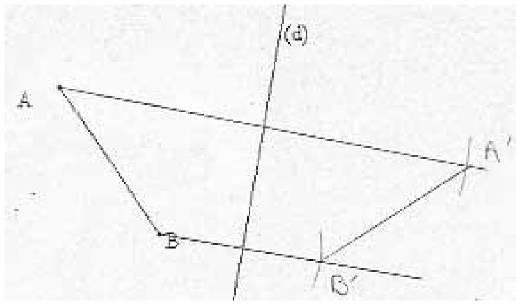
Figure VI.4</td></tr>
<tr><td colspan="2">Marion & Manon (4)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Tracer avec l’équerre une droite perpendiculaire à d passant par A. Prolonger cette droite de l’autre côté.
2. Prendre avec le compas la distance entre A et l’intersection. Reporter cette distance de l’autre côté de l’axe à partir de l’intersection en traçant un petit arc. Prendre l’intersection A’ comme symétrique.
3. Idem 1-5 pour B’.
4. Tracer un segment entre A’ et B’.</td><td>

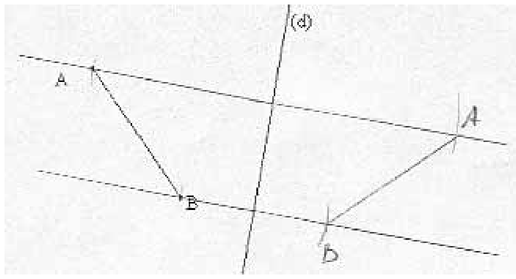
Figure VI.5</td></tr>
<tr><td colspan="2">Charlotte & Vanessa (5)</td></tr>
<tr><td>Instruments : règle, compas
1. Tracer perceptivement la droite perpendiculaire à d passant par B avec la règle (sans équerre)
2. Tracer, de l’autre côté, avec le compas, un arc du cercle dont le centre est l’intersection entre d et la droite tracée.
3. La même chose pour le point A.
4. Tracer un segment entre A’ et B’.</td><td>

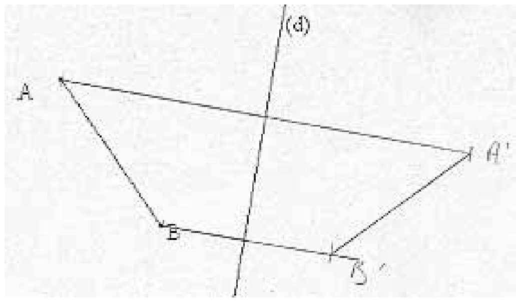
Figure VI.6</td></tr>
<tr><td colspan="2">Salomé & Karen (6)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Tracer avec l’équerre une droite perpendiculaire à d passant par B. Prolonger cette droite de l’autre côté.
2. Prendre avec le compas la distance entre B et l’intersection. Reporter cette distance de l’autre côté de d à partir de l’intersection en traçant un petit arc. Prendre l’intersection comme symétrique B’ sur la droite tracée.
3. Idem 1-5 pour A’.
4. Tracer un segment entre A’ et B’.</td><td>

Figure VI.7</td></tr>
</table>

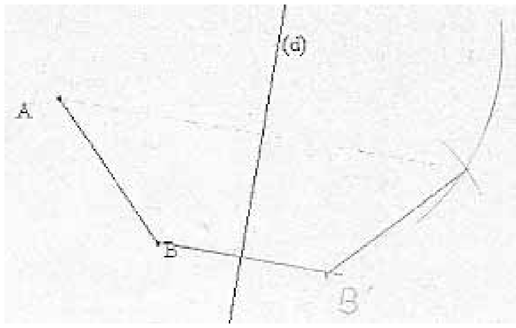
<table>
<tr><td colspan="2">Estelle & Mélodie (7)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Tracer une droite perpendiculaire passant par B avec l’équerre.
2. Reporter au compas la distance entre B et l’intersection (N) de l’autre côté de l’axe.
3. Reporter de l’autre côté de l’axe au compas une distance d’un point sur l’axe à côté de la marque (d) au point P
4. Reporter la longueur AB au compas à partir du point B’
5. Tracer un segment à partir de cette intersection (A’) jusqu’à B’.
6. Tracer un segment pointé entre A et A’.</td><td>

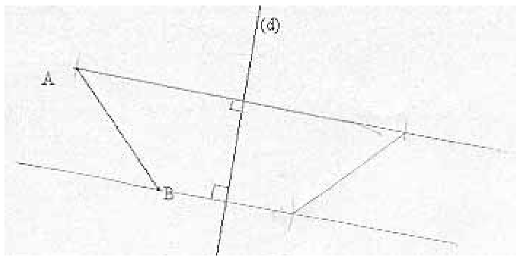
Figure VI.8</td></tr>
<tr><td colspan="2">Laura & Justine (8)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Mettre l’équerre et la règle à l’axe. Tracer une droite perpendiculaire à l’axe passant par B, la prolonger et marquer le code de l’angle droit.
2. La même pour le point A.
3. Reporter de l’autre côté de d au compas la distance entre B et l’intersection.
4. La même pour le point A.
5. Tracer un segment entre A’ et B’.
6. Vérifier avec le pliage (mais pas vrai pliage, quasi-pliage effectif).</td><td>

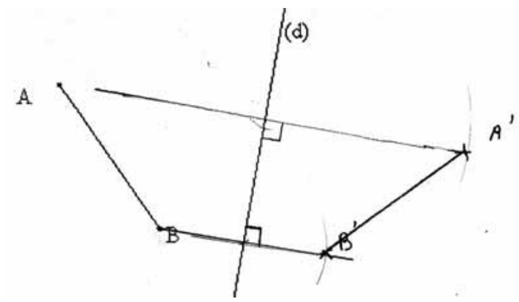
Figure VI.9</td></tr>
<tr><td colspan="2">Julien & Steven (9)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle, compas
1. Mettre l’équerre et la règle à l’axe. Tracer une droite perpendiculaire passant par B
2. Reporter au compas la distance entre B et l’intersection.
3. La même pour le point A.
4. Tracer un segment entre A’ et B’.
5. Mettre deux codes de l’angle droit. Vérifier avec le pliage (mais pas vrai pliage, quasi-pliage effectif).</td><td>

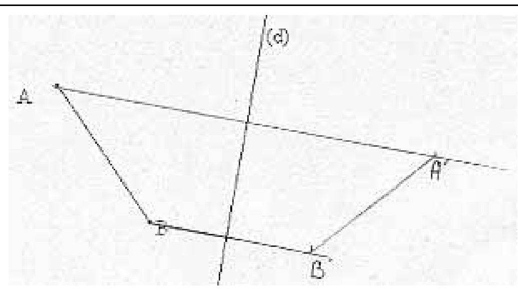
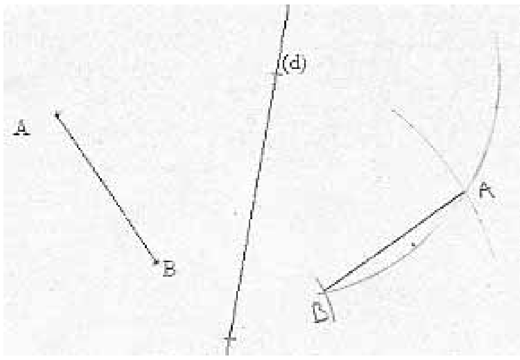
Figure VI.10</td></tr>
<tr><td colspan="2">Mathieu & Pierre (10)</td></tr>
<tr><td>Instruments : équerre, règle graduée
1. Tracer la droite perpendiculaire avec l’équerre et la règle. Prolonger cette droite de l’autre côté
2. Mesurer la distance de l’axe avec la règle graduée. Reporter la cette droite l’autre côté. Prendre l’intersection comme le symétrique de B.
3. La même pour le point A
4. Tracer le segment symétrique A’B’</td><td>

Figure VI.11</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Lola & Laura (11)</td></tr>
<tr><td>Instruments : règle, compas
1. Tracer avec le compas des arcs à partir de deux points quelconques sur l’axe (l’un à côté de la marque (d)) passant par A et B, c’est-à-dire elles ont tracé quatre arcs.
2. Prendre les intersections comme A’ et B’.
3. Tracer un segment entre A’ et B’.
4. Vérifier le symétrique avec le quasi pliage.</td><td>
Figure VI.12</td></tr>
</table>

Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Le problème 2 demande une reconnaissance de figures symétriques et une preuve qui justifie le résultat de reconnaissance. Les réponses de tous les binômes sont « oui symétrique » pour la reconnaissance comme la table suivante. Cependant un seul binôme (Julien & Steven (9)) caractérise le symétrique par les propriétés d’orthogonalité et d’équidistance.

Table VI.1 Les réponses des binômes pour le problème 2

Binômes	**Réponses**
1 : Delphine & Baptiste	Oui.
2 : Aurélie & Elliot	Oui.
3 : Pauline & Agathe	Oui.
4 : Marion & Manon	Oui.
5 : Charlotte & Vanessa	Oui.
6 : Salomé & Karen	Oui.
7 : Estelle & Mélodie	Oui.
8 : Laura & Justine	Oui.
9 : Julien & Steven	Oui.
10 : Mathieu & Pierre	Oui.
11 : Lola & Laura	Oui.

Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Le problème 3 demande une reconnaissance de figures non symétriques et une preuve qui justifie le résultat de reconnaissance. Sept binômes parmi onze reconnaissent les figures non symétriques comme « oui symétrique ». Et quatre binômes remarquent au moins non symétrique au dessin associé au problème : la réponse est donc « non » ou « pas toujours ». Ils remarquent aussi le manque d’orthogonalité dans la figure.

Table VI.2 Les réponses des binômes pour le problème 3

Binômes	Réponses
1 : Delphine & Baptiste	Pas toujours.
2 : Aurélie & Elliot	Oui.
3 : Pauline & Agathe	Oui.
4 : Marion & Manon	Non.
5 : Charlotte & Vanessa	Oui.
6 : Salomé & Karen	Pas toujours.
7 : Estelle & Mélodie	Oui.
8 : Laura & Justine	Oui.
9 : Julien & Steven	Pas toujours.
10 : Mathieu & Pierre	Oui.
11 : Lola & Laura	Oui.

Examiner ces données d'un point de vue global nous amène à remarquer que certains binômes qui réalisent un segment symétrique acceptable au collège avec l'équerre ou/et le compas reconnaissent les figures non symétriques comme symétriques. Par exemple, les binômes Estelle & Mélodie (7), Laura & Justine (8), etc.

D'une manière générale, on pourrait penser que si les élèves éprouvent la nécessité d'orthogonalité pour l'utilisation d'une équerre, ils l'éprouvent aussi pour la reconnaissance. Il se peut que l'utilisation d'instruments ne porte pas de propriétés géométriques (contrôle perceptif instrumenté au sens de Rolet (1996)). Il se peut aussi que les propriétés géométriques soient attachées aux types de problèmes et que la construction et la reconnaissance soient bien différenciées.

1.4 Méthodologie d'analyse

Les analyses des données recueillies seront effectuées en dissociant deux groupes de binômes. Onze binômes sont classés en deux groupes. Le critère est l'instrument utilisé pour le problème de la construction d'un segment symétrique (problème 1). Le premier groupe se compose des binômes qui utilisent l'équerre au moins une fois pour tracer un support qui relie deux points symétriques (binômes 1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10[2]). L'autre se compose de ceux qui ne l'ont pas utilisée (binômes 2, 5, 11). C'est pour cette raison que la propriété d'orthogonalité joue un rôle crucial dans l'expérimentation, comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori.

L'analyse sera effectuée par ordre des problèmes de chaque binôme. Les données des

[2] Les numéros correspondent à ceux des binômes.

résolutions, en particulier concernant la symétrie orthogonale, seront analysées en mettant en évidence les règles mobilisées dans la résolution.

L'analyse de la résolution du problème 1 porte surtout sur l'utilisation d'instruments et sur l'explicitation de propriétés géométriques prises en compte. Lorsque les procédures mises en œuvre pour la réalisation de deux points symétriques (A' et B') sont les mêmes, une seule procédure est analysée. Les données pour les problèmes 2 et 3 seront analysées en trois phases différentes : la phase de conjecture (reconnaissance), la phase d'argumentation et la phase de rédaction. La dissociation de ces trois phases n'est pas absolue. Nous les identifions par le discours des élèves. Dans tous les cas, nous essayons au maximum d'expliciter les opérateurs et les contrôles sur la symétrie orthogonale mobilisés par les élèves.

2 SUPPORT AVEC EQUERRE

Huit binômes sur onze (1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10) utilisent l'équerre. Son rôle est commun à toutes les réalisations : tracer le support qui relie deux points symétriques (A et A', ou B et B'). Pourtant, nous ne sachons pas encore la propriété géométrique ou non attachée au support. Autrement dit, l'utilisation de l'équerre impliquerait la mise en œuvre de la propriété d'orthogonalité dans la construction ou non. Nous analysons les résolutions de ces binômes pour trois problèmes différents.

2.1 Delphine & Baptiste (1)

2.1.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Delphine & Baptiste (1) réalise les supports avec l'équerre et le report de la distance avec le compas. Cette procédure est prévue dans l'analyse a priori. Analysons la production et le protocole avec le modèle cK¢. Le processus de la réalisation par le binôme Delphine & Baptiste (1) était le suivant.

1. Tracer avec l'équerre et la règle, une droite perpendiculaire à l'axe d passant par le point B. Prolonger cette droite de l'autre côté de l'axe. (Figure VI.13)
2. tracer un arc, dont le centre est l'intersection de la droite et l'axe (pour facilité, on l'appelle N) avec le rayon BN, sur cette droite de l'autre côté de l'axe. L'intersection est le symétrique B' du point B. (Figure VI.14)
3. la même procédure pour construire le symétrique (A') de A. (Figure VI.15)
4. tracer le segment A'B'. (Figure VI.16)
5. mettre des codes de l'équidistance, l'orthogonalité, etc.

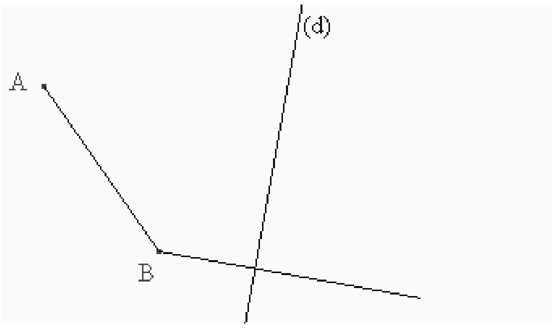


Figure VI.13 Première étape

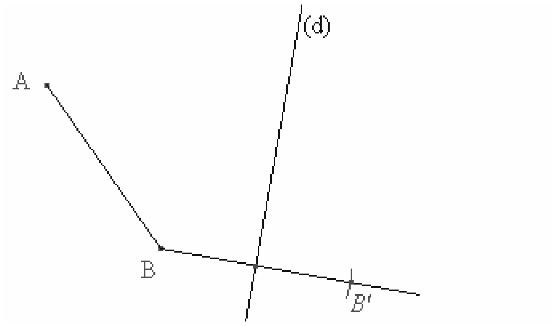


Figure VI.14 Deuxième étape

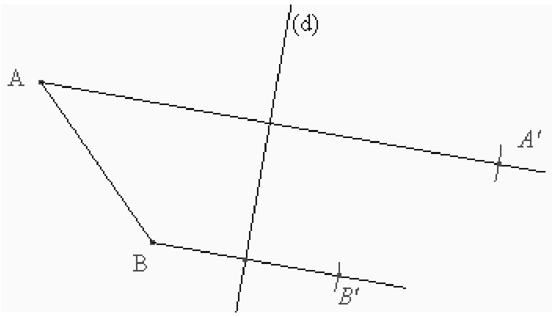


Figure VI.15 Troisième étape

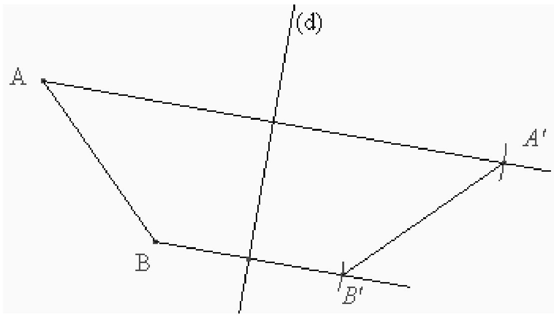


Figure VI.16 Quatrième étape

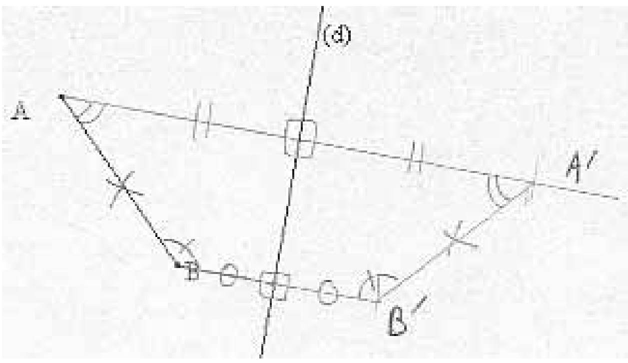


Figure VI.17 Réalisation par le binôme Delphine & Baptiste (1)

Le binôme construit avec la même procédure les symétriques du point A et du point B. Ils utilisent l’équerre et la règle pour tracer un support qui relie deux points symétriques, et le compas pour tracer un point sur la perpendiculaire qui se trouve équidistant de l’intersection. Ils construisent séparément deux points symétriques A’ et B’ qui sont après reliés comme un segment symétrique de AB. L’enchaînement de problèmes peut, comme nous l’avons vue dans l’analyse a priori, être comme la Figure VI.18.

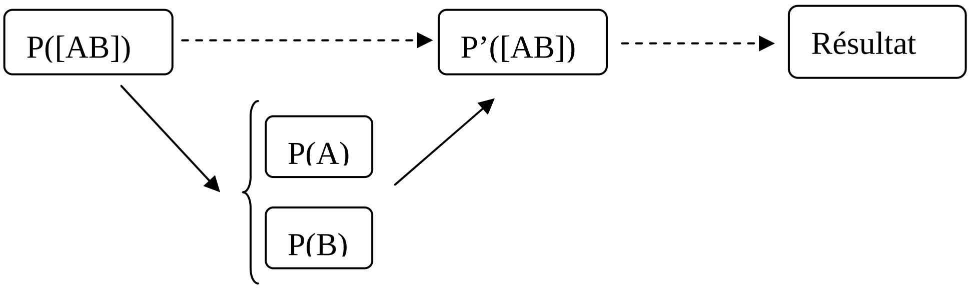


Figure VI.18 : Enchaînement de problèmes

Nous analysons ici la résolution des problèmes P(A) et P(B). Leur résolution permet d'avancer la transformation du problème P([AB]) à P([A'B']). Les procédures mobilisées pour les résolutions des problèmes P(A) et P(B) sont les mêmes. Nous l'identifions dans le processus de la résolution et aussi dans le discours des élèves : « tu fais la même chose pour le segment A » [20].

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 1
3. B : avec quoi je vais travailler ?
4. D : ben, moi, **je te propose l'équerre**, et le compas.
(…)
11. B : ça, il faut faire la symétrie.
12. D : ouais. **Tu traces perpendiculaire**, le segment, à la droite d, qui passe par B. **Après avec ton compas**,
13. B : avec le compas, tu fais …
…
19. B : ouais.
20. D : **tu fais la même chose pour le segment A**. un point …
…

La procédure de la résolution du problème P(B) est, comme nous l'avons vue plus haut, constituée par la réalisation d'un support avec l'équerre et d'un report de la distance avec le compas. A partir des activités des élèves et les instruments utilisés, deux règles suivantes sont identifiées.

DB-Cr3 : tracer avec l'équerre le support

DB-Cr4 : reporter au compas la distance à partir de l'intersection

Dans le discours des élèves, nous identifions que l'utilisation d'équerre porte la propriété d'orthogonalité. Delphine verbalise explicitement « tu traces perpendiculaire » [12]. La propriété attachée à l'utilisation du compas n'est pas explicitée dans le discours, mais nous l'identifions sur le dessin tracé ayant le code de la même longueur (Figure VI.17). Ainsi, nous considérons, du point de vue de l'observateur, que le contrôle pour le choix des opérateurs est, selon nos analyses théoriques, une règle théorique suivante qui permet de choisir à la fois ces deux opérateurs.

DB-Cσ3 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)

Or, les analyses du discours des élèves permettent d'indiquer que la mobilisation de la règle DB-Cσ3 comme contrôle n'est pas toujours le cas. Dans le discours, il semble que Baptiste ne remarque pas la perpendiculaire et ne s'aperçoit pas de sa nécessité lorsqu'il trace un support [24-29]. Delphine tente d'expliquer sa nécessité [34].

Delphine & Baptiste (1) pour Problème 1

24. D : après tu fais la même chose pour …, là c'est pas **perpend … tu fais n'importe quoi là**.
25. B : quoi ? je trace
26. D : non ! **il faut que ce soit l'angle droit là**.
27. B : **c'est perpendiculaire**.
28. D : **ce soit perpendiculaire**.
29. B : hummmm,
30. D : **c'est pas perpendiculaire. Tu comprends pourquoi ce soit perpendiculaire ou pas ?**
31. B : hum, en principe. **Comment tu traces la perpendiculaire ?** ça m'énerve.
32. D : tu vois, c'est parce que t'as …
33. B : oui.
34. D : ben, j'sais pas comment …, **il faut que j'arrive à t'expliquer.** Sinon, c'est pas …
35. B : tu …
36. D : tu vois, en fait, **ça doit être le même segment, quand on voit devant glace**.
37. B : hum.
38. D : **ça nous fait à l'inverse**. En fait, **c'est inverse**. Donc, **il faut que tous, c'est la même inclinaison par rapport à la droite d**.
39. B : OK, d'accord.
40. D : **pour que la même inclinaison, ben il faut que ce soit perpendiculaire**

A partir de l'analyse du discours de Delphine, nous identifions que la nécessité de l'orthogonalité provient de la perception globale de figures symétriques. En effet, l'explication proposée est « ça doit être le même segment, quand on voit devant glace » [36] qui s'appuie sur l'effet de miroir, « c'est l'inverse » [38] et « la même inclinaison par rapport à la droite » [38] qui présentent bien les propriétés perceptives, mais qui ne permettent pas facilement la nécessité de l'orthogonalité. Ces indices nous permettent de considérer qu'elle dispose d'une perception globale qui est proche des figures symétriques correctement réalisées du point de vue mathématique.

En même temps, nous considérons que Delphine ne mobilise pas la règle DB-Cσ3 comme contrôle pour le choix, mais la perception globale des figures symétriques. Pour cette raison l'explication de Delphine porte surtout sur sa perception globale et elle ne conduit pas directement à désigner les opérateurs DB-Cr3 et DB-Cr4. Il doit exister un contrôle qui permet le choix des opérateurs.

Par ailleurs, le lien entre les utilisations de l'équerre et du compas est très étroit chez Delphine. En effet, au départ de la réalisation, elle propose à la fois l'utilisation d'une équerre et l'utilisation d'un compas [4]. Après avoir tracé une droite perpendiculaire, elle propose tout de suite le compas [12]. De plus, elle dispose d'une perception globale plus ou moins favorable prenant en compte aussi l'effet de miroir. A partir de cela, nous considérons que le contrôle mobilisé pour le choix des opérateurs est plutôt la constructibilité de figures symétriques.

> DB-Cσ4 : l’orthogonalité et l’équidistance sont nécessaires pour la construction d’un point symétrique, parce qu’ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par la reconnaissance mobilisant d’autres moyens (la perception globale, le pliage, la propriété de conservation de longueur, etc.)

Le produit de la réalisation est un segment. Analysons maintenant le contrôle de la validation du résultat obtenu (le segment A’B’ comme symétrique du segment AB). Selon l’analyse théorique, le processus de la validation qui se compose de la vérification et de la justification exige premièrement une reconnaissance. Pour cela, la perception globale de deux segments symétriques décrite par Delphine [36-40] afin d’expliquer à Baptiste la nécessité de la droite perpendiculaire est au moins mobilisé pour la vérification de leur réalisation.

En outre, nous avons identifié dans le protocole du binôme Delphine et Baptise (1) un indice de leurs apparitions. Delphine & Baptiste (1) mettent des codes de l’orthogonalité, l’équidistance, et l’égalité d’angles [45-49]. Nous considérons que ces critères sont aussi mobilisés pour reconnaissance ou validation de produits. Parce que les codes seraient attachés aux propriétés géométriques de la symétrie.

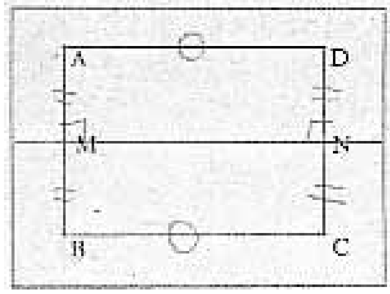
Delphine & Baptiste (1) pour Problème 1

45. B : c’est quoi les petits
46. D : tu vois, c’est les trucs en géométrie.
47. B : ah oui, pour montrer que c’est égal.
48. D : ouais. Ca, **c’est l’angle droit**. Tu peux même tracer pour les angles.
49. B : voilà. Tu veux aussi mettre **angle droit**.

2.1.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

Dans la phase de conjecture, le problème posé est de reconnaître si la figure donnée est symétrique ou non. Delphine met d’abord les codes de propriétés qui sont reconnues : $AB \perp MN$, $DC \perp MN$, $AD = BC$, $AM = MB$, $DN = NC$. La reconnaissance de Delphine ne repose pas seulement sur la perception globale mais aussi sur le raisonnement. En effet, le parallélisme et l’égalité des côtés AD et BC sont impliqués du rectangle [58]. Et la conjecture de Delphine est « oui » [62].

<table>
<tr>
<td>Delphine & Baptiste (1) pour le problème 2
56. D : …, les segments AD et BC sont-ils symétriques, … AD …, ah donc, comme ça rectangle, …, ça c'est égal à ça. T'es d'accord ?
57. B : j'sais pas tout, j'sais pas tout.
58. D : tu vois ? Dans un rectangle, les côtés opposés sont parallèles et égaux.
59. B : hum.
60. D : donc, on peut mettre ça.
61. B : ben, ABCD est un rectangle. Soit M, N les milieux des côtés AB et DC. Les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN.
62. D : Moi, je pense que oui. Je t'explique pourquoi. Parce que tu vois là, il y a un angle droit par rapport à cette droite</td>
<td>
Les codes données sur le dessin.</td>
</tr>
</table>

<u>Phase d'argumentation</u>

Le premier argument que remarque Delphine pour la conjecture « oui » est « angle droit » [62] qui signifie « AB $\perp$ MN » et « DC $\perp$ MN »[3]. Nous pouvons repérer l'importance attachée à l'angle droit par Delphine. Mais pour le moment, son rapport avec la symétrie n'est pas explicité. Ensuite, elle propose « parallèle » [64]. L'équidistance « MA c'est égal à MB » [68] est remarqué à partir du milieu qui est énoncé par Baptiste [67].

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 2
63. B : ils sont égaux.
64. D : oui, et **un angle droit**, là. **C'est parallèle**.
65. B : ahhh oui, parce que t'as …, M qui …
66. D : perpendiculaire.
67. B : M est le milieu de AB. Et **comme c'est le milieu**, ben deux …, M et B, on dit …
68. D : ouais, en fait, tu vois, **MA c'est égal à MB**. T'es d'accord.
69. B : oui, oui, oui, j'ai compris ça.
70. D : donc, comme ils sont tous les deux, **tous les deux est des segments perpendiculaires**.
71. B : après, **c'est égaux aussi, M, N c'est le milieu de DC et de AB**. **Comme ça, les milieux, AD est symétrique de BC**.
72. D : ouais, ça c'est vite.
73. B : oui, mais c'est bon.
74. D : oui, en fait, c'est …, on peut dire que c'est une droite AB, d'accord.
75. B : hum.
76. D : et **la droite AB est perpendiculaire à la droite MN**.
77. B : hum.
78. D : et **la droite DC est perpendiculaire à la droite MN**. **Ils sont tous les deux perpendiculaires à la même droite, et MA est égal à MB**. **Donc, AD est parallèle à MN**.
79. B : hum. Si, si, j'ai compris.
80. D : par contre, comment on va marquer ? J'sais pas.

A partir de ces propriétés identifiées, nous voyons le raisonnement suivant qui est proposé par

---

[3] L'angle droit est abordé comme hypothèse, alors que les énoncés du problème ne le mentionnent pas, c'est-à-dire que Delphine attribue un statut d'« hypothèse » à partir de son identification sur la figure donnée. Mais, comme ce statut d'hypothèse ne concerne pas la symétrie, nous ne le discutons pas ici.

Delphine [76, 78].

$AB \perp MN$, $DC \perp MN$, et $MA = MB \rightarrow AD \,//\, MN$

DB-Sr1 : si $PP' \perp MN$, $QQ' \perp MN$, et $PM = QN$ alors $PQ \,//\, MN$

La règle DB-Sr1 est pragmatique et invalide. La proposition prise en compte par Delphine serait « AM = DN » à la place de « MA = MB ». En effet, comme « MA = MB » n'a rien à voir avec « AD // MN ». La règle DB-Sr1 que nous avons proposée est déjà modifiée. De plus, les propriétés « $A \neq D$ » et « A et D sont du même côté de l'axe » doivent être aussi prises en compte. Il manque encore des conditions. Sans ces propriétés, deux segments AD et MN ne peuvent pas être parallèle. Autrement dit, le contrôle perceptif admet implicitement ces propriétés.

Par ailleurs, la reconnaissance par Baptiste désigne aussi la réponse positive « oui, symétrique ». Il évoque souvent les milieux [67 ; 71]. Baptiste verbalise explicitement sa caractérisation de la symétrie orthogonale : « Comme ça, les milieux, AD est symétrique de BC » [71] qui peut être décrit comme règle pragmatique et invalide.

DB-Sr2 : si $PM = MP'$ ($M \in PP'$) et $QN = NQ'$ ($N \in PP'$) alors Sym (PQ, $P'Q'$, MN)

Dans le discours, le binôme commence à rédiger une preuve [80]. Jusqu'à ce moment là, la symétrie orthogonale n'est pas explicitement abordée par Delphine avec les propriétés apparues dans la phase d'argumentation. Résumons les arguments évoqués à cette phase dans le schéma suivant (Figure VI.19).

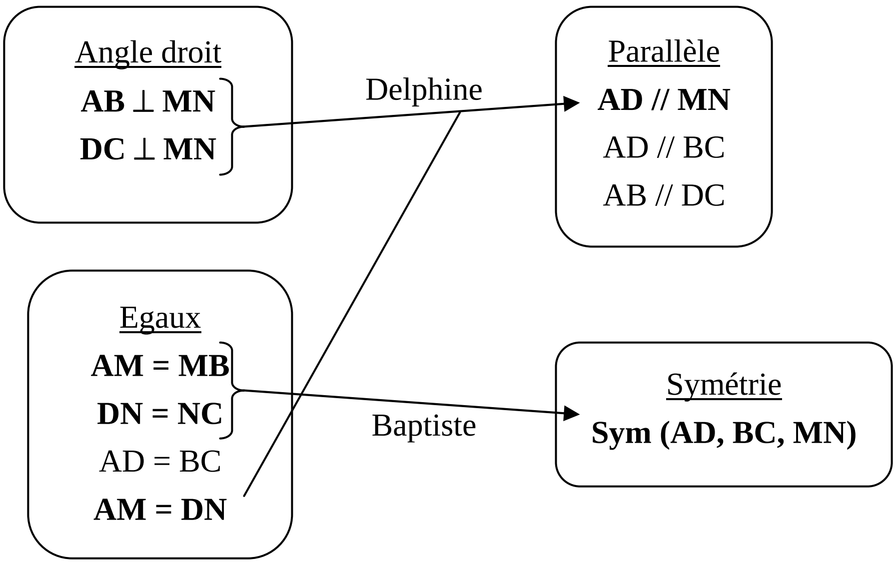


Figure VI.19 La phase d'argumentation de Delphine & Baptiste (1)

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve donnée par Delphine & Baptiste (1) est suivante. Nous analysons la structure de raisonnements pour identifier les opérateurs mobilisés et les contrôles mobilisés dans la preuve.

1 : oui
2 : (AM) ⊥ (MN)
3 : (DN) ⊥ (MN)
4 : [AM] = [DN]
5 : donc (AD) // (MN)
6 : (BM) ⊥ (MN)
7 : (NC) ⊥ (MN)
8 : [BM] = [NC]
9 : donc (BC) // (MN)
10 : Comme les segments [BC] et [AD] sont parallèles à
11 : (MN) et qu'ils sont la même longueur alors ils sont
12 : symétriques à la droite (MN).

La structure de la preuve donnée par Delphine & Baptiste (1) est très claire. Nous pouvons identifier trois pas suivants :

i : (AM) ⊥ (MN), (DN) ⊥ (MN), [AM] = [DN] → (AD) // (MN)

ii : (BM) ⊥ (MN), (NC) ⊥ (MN), [BM] = [NC] → (BC) // (MN)

iii : (AD) // (MN), (BC) // (MN), AD = BC → Sym(AD, BC, MN)

Le premier pas (i) qui est identifié de la ligne 2 à 5 et le deuxième (ii) qui est identifié de la ligne 6 à 9 sont de même nature du point de vue de l'opérateur mobilisé. Le premier était identifié dans la phase d'argumentation. Le pas auquel intervient fortement la symétrie orthogonale est le troisième (iii) qui est identifié de la ligne 10 à 12 (Figure VI.20). Dans le protocole de la phase de rédaction, le binôme commence à rédiger le raisonnement provoqué à la phase d'argumentation. La règle mobilisée pour ce pas comme permis d'inférer ou opérateur est exprimée en langage courant [92].

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 2

90. D : AM perpendiculaire à MN. Après DN perpendiculaire à MN. AM, là, c'est … cette fois, c'est un segment. Egal à DN. Donc, à partir de là, tu vois, quand tu sais que … t'as deux droites qui sont, deux droites parallèles, parce que celle-là, ils sont parallèles.
91. B : oui, oui.
92. D : donc, **t'as deux droites parallèles qui sont perpendiculaires à une droite**. **Comme c'est …, les segments ils ont la même longueur, tu sais, elles sont parallèles**.
93. B : oui, oui, j'ai compris.
94. D : **donc, AD parallèle MN**. Ca va, là ?
95. B : oui, je pense.

96. D : maintenant, il faut prouver pour l'autre côté. Tu vois, pour BC. Tu sais, la même démonstration.

Analysons ici le troisième raisonnement. Dans la phase de conjecture, la discussion s'est arrêtée lorsqu'ils arrivent au parallélisme de AD et MN. Pour cela, nous n'avons pas pu savoir le lien entre le parallélisme et le symétrique. Cependant, dans la preuve rédigée, ce lien est plus explicite. Comme ils rédigent « comme …, alors … », nous pouvons identifier les hypothèses qui viennent après « comme » et la conclusion après « alors ». Delphine & Baptiste (1) caractérisent le symétrique d'un segment à partir du parallélisme et de la même longueur. La règle suivante est mobilisée ici comme permis d'inférer ou opérateur.

DB-Sr2 : si PQ // MN, P'Q' // MN et PQ = P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

La structure de ce raisonnement peut être exprimée dans la Figure VI.20.

Hypothèse		Conclusion
(AD) // (MN)	→	Sym(AD, BC, MN)
(BC) // (MN)		
AD = BC		

Permis d'inférer

DB-Sr2 : si PQ // MN, P'Q' // MN et PQ = P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Figure VI.20 Un pas de la preuve de Delphine & Baptiste (1)

Dans le discours des élèves, l'apparition de la règle DB-Sr2 est due à Baptiste. Après avoir rédigé jusqu'à la ligne (9) de la preuve, Delphine arrive tout de suite à la conclusion « ils sont symétriques » [114]. Son argument porte seulement sur le parallélisme déduit des pas précédents : « ils sont tous les deux parallèles » [116]. L'égalité de longueur n'est même pas énoncée. C'est Baptiste qui propose la règle de caractérisation « parallèles et égaux. C'est symétrique » [117]. Et Delphine s'accorde avec cette règle [118]. Sa mobilisation relève plutôt de Baptiste que de Delphine, alors que les pas précédents sont conduits surtout par Delphine.

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 2
113. B : MN.
114. D : **donc, ils sont symétriques**.
115. B : ils sont symétriques. Parce que si c'est égal à …, si les deux côtés sont …
116. D : **ils sont tous les deux parallèles.**
117. B : **parallèles et égaux. C'est symétrique.**
118. D : **voilà.** Je te laisse marquer un peu.
119. B : Je mets quoi déjà ?
120. D : donc, comme … les segments BC et AD
…
130. D : à la droite MN. On pouvait même faire plus simple, je crois.
131. B : non, c'est pas grave.

Analysons la validité de la règle DB-Sr2. Du point de vue de la géométrie euclidienne, la règle DB-Sr2 est invalide. On peut démontrer son invalidité par un contre exemple. En outre, du point de vue des hypothèses manquantes qui permettent de la transformer en règle valide, elles ne sont pas évidentes. Si l'on ajoute une orthogonalité, par exemple « PP' $\perp$ d », ce n'est pas encore suffisant, parce que si les distances des droites PQ et P'Q' à l'axe sont différentes, ils ne sont pas symétriques. On peut ajouter l'équidistance. Ce n'est pas encore suffisant pour autant. En effet, si deux segments PP' et QQ' se croisent, ce n'est pas encore symétrique. Il faut donc ajouter non intersection entre deux segments « PP' $\cap$ QQ' = $\varnothing$ ». En ajoutant les hypothèses manquantes, la règle devient très complexe. Nous ne considérons donc pas que ces élèves oublient de les ajouter. Mais la validité de l'opérateur choisi serait admise par la perception globale de deux segments symétriques dans un cas où deux segments symétriques sont parallèles ou dans un cas du rectangle. Autrement dit, l'opérateur mobilisé porte sur les cas particuliers ayant plusieurs implicites du point de vue de l'observateur.

La règle DB-Sr2 est pragmatique. Nous ne pouvons pas savoir explicitement le contrôle pour la validation de l'opérateur choisi, parce que les informations concernant la règle DB-Sr2 dans le discours sont très rares. Tout ce qui est énoncé est écrit dans la preuve.

Par ailleurs, l'opérateur DB-Sr2 n'est pas prévu par Delphine au début de la rédaction. Après avoir rédigé deux parallélismes, elle l'a reconnu à partir de la discussion avec Baptiste [118]. Dans le protocole, cet opérateur n'est jamais provoqué par Delphine avant Baptiste [117]. Le contrôle pour le choix de l'opérateur DB-Sr2 doit donc être mobilisé à ce moment là. Nous considérons que l'un des contrôles est l'état de la preuve dans laquelle les parallélismes sont déjà déduits et à utiliser. Le choix est pris pour que la preuve prenne en compte une cohérence.

Ce qui est remarquable tout au long de la rédaction de la preuve est que le choix d'une règle prise pour caractériser le symétrique n'est pas pertinent, alors que les propriétés géométriques comme éléments nécessaires pour la démonstration apparaissent dans la discussion et dans la preuve. Il semble que les élèves ne disposent pas de la règle « si PP' $\perp$ d et PM = MP' (M = PP' $\cap$ d) alors Sym (P, P', d) » qui est aussi exigée dans la réalisation de la construction pour le problème 1.

2.1.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance) et d'argumentation</u>

Dans le protocole, la séparation entre la phase de conjecture et la phase de démonstration n'est pas évidente. Nous délimitons la phase de conjecture jusqu'au moment où ils ont une réponse commune. Delphine remarque tout de suite que la figure donnée ne comporte pas d'angle droit [144 ; 146], c'est-à-dire non symétrique. Elle remarque aussi que la réponse est

« pas toujours » en prenant en compte le cas du rectangle [164]. Par contre, la première réponse de Baptiste est « symétrique » [145].

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 3

144. D : ben, à ton avis, c'est quoi la réponse à la question.
145. B : moi, **je pense qu'ils sont symétriques**. Non, non, non, attends. Si, je croyais que c'était symétrique.
146. D : est-ce que là, t'as un angle droit ?
147. B : **non**.
148. D : non ? Alors, comment tu peux dire qu'ils sont symétriques ?
149. B : oui, **non, non, ils sont pas symétriques**. C'est un parallélogramme.
150. D : ouais.
151. B : c'est pour ça. **Le parallélogramme n'a pas quatre côtés égaux**. Donc.
152. D : si ! il y a quatre côtés égaux.
153. B : oui mais, quatre côtés égaux, je veux dire …
154. D : pas parallèle.
155. B : pas … **pas perpendiculaire**.
156. D : ouais. Les côtés opposés sont parallèles.
157. B : oui. Ils sont parallèles, ils sont, ils sont …
158. D : oui mais …,
159. B : pas **d'angle droi**t. Oui, c'est pas perpendiculaire.

…

164. D : **on compte ça un rectangle**, ben … en faisant voir avec l'autre fiche, c'est vrai.
165. B : hum.
166. D : donc, **c'est pas toujours**. … après, comment on va démontrer ? C'est toujours là.
169. B : il faut réfléchir. … est-ce qu'on peut mettre le …, je vais mettre **non**.
170. D : non, pas toujours.
171. B : pas toujours ?
172. D : parce que comme c'est un …
173. B : moi, je vais mettre **non** aussi. **Pour ce dessin**, …
174. D : oui mais …,
175. B : même si c'est pas toujours.
176. D : si tu mets « pas toujours ». Parce que **comme c'est un rectangle**,
177. B : ouais, c'est pas, **c'est symétrique**.

Du côté Delphine, à partir de la remarque du manque d'angle droit, nous considérons que la négation de la règle « DB-Nr2 : si Sym (P, P', d) alors PP' $\perp$ *d* » qui est plus tard identifiée dans la preuve écrite est mobilisée. Nous voyons dans le discours plus tard qu'elle manifeste explicitement la nécessité de l'orthogonalité à la symétrie orthogonale [182 ; 216]. Le support de cette règle serait le pliage qui est plus tard mentionné pour expliquer la nécessité de l'orthogonalité à Baptiste [218-220].

Dans la discussion, c'est Delphine qui a de l'initiative pour la résolution et Baptiste la suit. En effet, il est arrivé à la réponse « non » [150 ; 168] et remarqué aussi le manque d'angle droit ou perpendiculaire [156 ; 160]. Mais à partir de la phrase « Le parallélogramme n'a pas quatre côtés égaux » [151] dont le terme « égaux » est plutôt « perpendiculaire » ou « angle droit » [155 ; 159], nous diagnostiquons que le manque d'angle droit n'indique pas celui entre la droite MN et les côtés AD et BC, mais les angles du parallélogramme. Parce que Baptiste parle de « quatre » objets du parallélogramme. Par contre, Delphine parle du manque d'angle droit à la droite MN [182]. Le rapport entre la symétrie orthogonale et le manque d'angle droit du parallélogramme n'est pas explicité par Baptiste. A part de cela, aucun argument n'est proposé pour la réponse. Nous considérons que même la réponse « non » est douteuse, c'est-à-dire il se peut que la réponse de Baptiste soit due à la proposition de Delphine.

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 3
179. B : non, je marque pas.
180. D : **les côtés AB et DC sont parallèles et égaux**.
181. B : ouais, ils sont parallèles et égaux.
182. D : **mais …, la droite MN n'est pas perpendiculaire à …, donc au segment BC et AD**. Donc,
183. B : donc, **c'est pas symétrique**.
184. D : ouais, **ils sont pas symétriques**.

Delphine verbalise explicitement le manque de l'angle droit à la droite MN comme « la droite MN n'est pas perpendiculaire » [182]. Or, il semble que Baptiste ne peut pas encore établir un lien avec la symétrie orthogonale, pour la raison de son discours « même si c'est symétrique » [191]. A partir du discours [192] de Delphine, elle explique une autre droite qui peut être un axe dans le parallélogramme, mais elle remarque tout de suite qu'il n'y a pas d'axes.

Delphine & Baptiste (1) pour le problème 3
189 B : ouais, on va dire aussi, **parce que c'est pas perpendiculaire**.
190. D : quoi ?
191. B : **c'est pas perpendiculaire ?** aussi, **même si c'est symétrique**.
192. D : ouais, non ! **Parce que tu pourrais faire que ce soit perpendiculaire, ben ce soit symétrique**. Ben, si tu fais ça, … après si tu mets … à un endroit, j'sais pas où. Mais, si tu mets une droite.

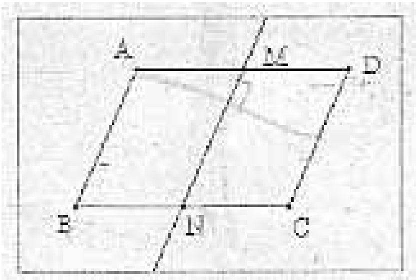
Delphine propose un pliage pour vérifier le symétrique. Baptiste, dans ce cas, accepte la réponse « non superposable » [202-210]. Delphine énonce que deux segments se superposent [204], mais nous interprétons qu'elle teste Baptiste sur le pliage et la superposition. En effet, elle accorde tout de suite après la réponse « non superposable » [206 ; 208]. Ici, ils ne plient pas effectivement la feuille. C'est plutôt le pliage mental qui permet de reconnaître le symétrique. Nous identifions ainsi la règle suivante pour la reconnaissance de la symétrie orthogonale.

DB-Nr1 : si non Pliage (F, F', *d*) alors non Sym (F, F', *d*)

Or, Baptiste considère qu'il existe un axe de symétrie même dans le parallélogramme [211].

202. D : dans la symétrie axiale, …, **si tu fermes comme ça**.
203. B : ça marche pas.
204. D : **si tu plies, ça va se superposer** …
205. B : non, je pense pas.
206. D : **t'es sûr ?**
207. B : mais oui. Quand on a un côté qui part comme ça, c'est pas possible.
208. D : **oui, oui, je suis d'accord avec toi**.
209. B : c'est pas possible de se super …, regarde, le point qui est ver haut, il faudrait plier, rejoins comme ça, ça marchera pas.
210. D : ouais, dans un parallélogramme,
211. B : parallélogramme, **ça dépend où est la symétrie, non ?**

212. D : il n'y a pas d'axe de symétrie. Ouais, mais, ça démontre pas.
213. B : ça démontre pas, non.
214. D : …, dans la symétrie axiale,
215. B : marques.
216. D : non, non, non, **dans la symétrie axiale, un point est symétrique d'un autre, quand le segment qui passe entre ces deux points est parallèle à l'axe de symétrie**. T'es d'accord.
217. B : hum, oui.
218. D : c'est, ça veut dire quand, tu vois, **t'as un point A, t'as un point B. Ben, c'est à peu près là**.
219. B : le premier.
220. D : non, non, non, ça, tu t'en fous. Si tu fais ça, **il faut que ce soit** parallèle, là, ben **perpendiculaire**. Qu'est-ce que je raconte la parallèle.
221. B : OK.
222. D : donc, ça, tu peux marquer ? Dans la symétrie axiale,



Dans le protocole, Delphine explique à Baptiste la nécessité de l'orthogonalité en construisant deux ponts symétriques et remarquant l'orthogonalité sur un dessin [216 ; 218 ; 220]. Il semble que l'orthogonalité est attachée surtout au pliage, mais non pas à la symétrie orthogonale. Ensuite, Delphine commence à rédiger une preuve et Baptiste parle très peu et n'explicite aucune idée liée à la preuve.

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve donnée par Delphine & Baptiste (1) est suivante. La conjecture donnée dans la phase de reconnaissance était la réponse « pas toujours » qui est attendue.

1 : Pas toujours :
2 : Dans la symétrie axiale le segment qui
3 : passe par un point et son symétrique
4 : est perpendiculaire à l'axe de symétrie
5 : Dans le parallélogramme ABCD le
6 : segment [AD] n'est pas perpendiculaire
7 : à l'axe de symétrie (MN)
8 : Dans le parallélogramme ABCD le segment
9 : [BC] n'est pas perpendiculaire à l'axe de
10 : symétrie (MN)
11 : Comme le point A n'est pas symétrique du
12 : point D par rapport à la droite (MN) et que
13 : le point B n'est pas symétrique du point
14 : C par rapport à la droite (MN) alors le
15 : segment [AB] n'est pas symétrique de la
16 : droite (MN).

17 : Dans un rectangle ABCD qui est un parallélogramme
18 : particulier les côtés opposés [AB] et [CD] sont
19 : symétriques par rapport à la droite (MN)

Analysons la structure de la preuve. Delphine & Baptiste (1) présente aux lignes (2, 3 et 4) explicitement un opérateur (DB-Nr2) sur la symétrie orthogonale, qui sera mis en œuvre aux prochains raisonnements. C'est une règle de propriété de la symétrie orthogonale qui implique la propriété d'orthogonalité.

DB-Nr2 : si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d*

Dans le protocole, le pliage est identifié comme support de cette règle. Delphine explique à Baptiste la nécessité d'orthogonalité à la symétrie orthogonale [216 ; 218 ; 220].

Nous interprétons les lignes (5, 6 et 7) et les lignes (8, 9 et 10) comme les deux pas suivants (i) et (ii) de la preuve. Ces deux pas sont de même nature du point de vue de l'opérateur mobilisé.

i : ABCD parallélogramme $\rightarrow$ AD non $\perp$ MN

ii : ABCD parallélogramme $\rightarrow$ BC non $\perp$ MN

Puis encore deux pas suivants (iii) et (iv) ayant la même nature peuvent être identifiés. Les hypothèses de ces pas ne sont pas explicitement indiquées. A partir de la règle présentée au début de la preuve et des deux pas précédents qui indiquent deux propriétés ayant la même nature, nous interprétons que ces deux propriétés sont respectivement utilisées comme hypothèse.

iii : AD non $\perp$ MN $\rightarrow$ non Sym (A, D, MN)

iv : BC non $\perp$ MN $\rightarrow$ non Sym (B, C, MN)

Le binôme Delphine & Baptiste (1) avait rédigé au départ une règle « DB-Nr2 : si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d* ». Mais, de notre point de vue, l'opérateur mobilisé dans les pas (iii) et (iv) est plutôt la contraposition « DB-Nr2' : si non PP' $\perp$ *d* alors non Sym (P, P', *d*) » qui est équivalente à la règle (DB-Nr2). En même temps, le contrôle de la contraposition qui permet de transformer « si A alors B » à « si $\neg$B alors $\neg$A » doit être mobilisé.

Puis, à partir d'un connecteur « comme », un autre pas suivant qui fusionne deux propriétés obtenues est identifié (v).

v : non Sym (A, D, MN) et non Sym (B, C, MN) $\rightarrow$ non Sym (AB, DC, MN)

A la fin, le cas exceptionnel qui peut être symétrique est donné : le rectangle qui est aussi un parallélogramme est symétrique par rapport à la droite passant par les milieux des côtés opposés comme le problème 2.

vi : ABCD rectangle $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

A partir des conclusions du pas (v) et du pas (vi), la conclusion du problème est obtenue.

La preuve est toute rédigée par Delphine. Baptiste écoute et suit. Les conceptions mobilisées par ce binôme sont largement différentes. Delphine remarque la nécessité d'une orthogonalité par rapport à l'axe, alors que Baptiste ne l'a pas. Le support de sa nécessité repose sur le pliage. Celui-ci a permis de montrer que l'orthogonalité est une condition nécessaire du symétrique. Cependant, ce problème n'exige que la règle de la propriété de la symétrie orthogonale et non pas celle de la caractérisation de la symétrie comme le problème 2. Nous ne pouvons pas savoir si Delphine reconnaît l'orthogonalité et l'équidistance comme les conditions suffisantes pour la symétrie orthogonale.

Par rapport à la résolution du problème 2, Delphine et Baptiste parlent des propriétés « parallèles et égaux » qui sont mobilisées pour caractériser le symétrique dans la résolution précédente. Surtout Delphine remarque qu'elles ne suffisent pas pour la caractérisation [180-184]. Néanmoins, ils ne rappellent pas l'argument mobilisé pour la résolution du problème 2. Il se peut que certains arguments y soient pris en comptes.

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- La même règle de la caractérisation de la symétrie orthogonale est exigée par les problèmes 1 et 2. Cependant, elle n'est pas mobilisée dans la preuve écrite pour le problème 2, malgré que la construction soit réalisée d'une façon favorable en explicitant les propriétés attachées aux utilisations d'instruments.
- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire. La propriété d'orthogonalité est explicitée par Delphine. Cependant, l'orthogonalité n'est mise en œuvre ni pour la preuve, ni pour la reconnaissance dans la résolution du problème 2. Il semble que le support de la mise en œuvre de la propriété d'orthogonalité sont le pliage.
- La règle qui est contradictoire à la réponse « non, symétrique » pour le problème 3 est mobilisée pour le problème 2 : « DB-Sr2 : si PQ // MN, P'Q' // MN et PQ = P'Q' alors Sym(PQ, P'Q', MN) ».

2.2 Pauline & Agathe (3)

2.2.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Pauline & Agathe (3) réalise le segment symétrique pour le problème de construction avec l'équerre et le compas. Le processus suivant est identifié.

1. tracer avec le compas un arc dont le centre est un point quelconque sur l'axe et le rayon est jusqu'à A. (Figure VI.21)
2. tracer avec le compas un arc dont le centre est le même point et le rayon est jusqu'à B. (Figure VI.21)
3. tracer une droite passant par A avec l'équerre et la règle. (Figure VI.22)
4. recommence le report de mesure avec compas (le centre est l'intersection entre l'axe et la perpendiculaire). (Figure VI.23)
5. effacer la première trace d'arc.
6. tracer une droite passant par B avec l'équerre et la règle. (Figure VI.24)
7. tracer un segment entre A' et B'.

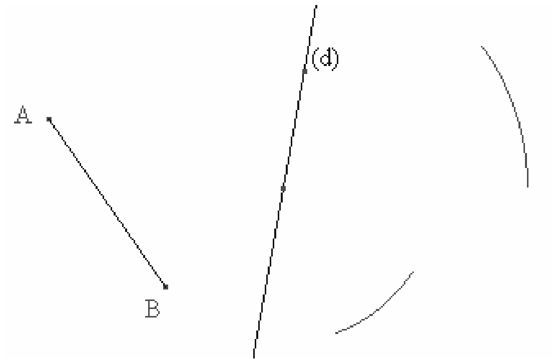


Figure VI.21 Première étape

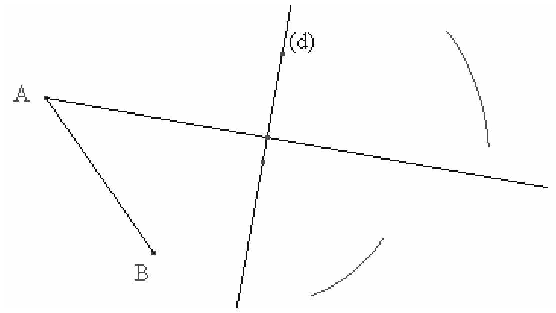


Figure VI.22 Deuxième étape

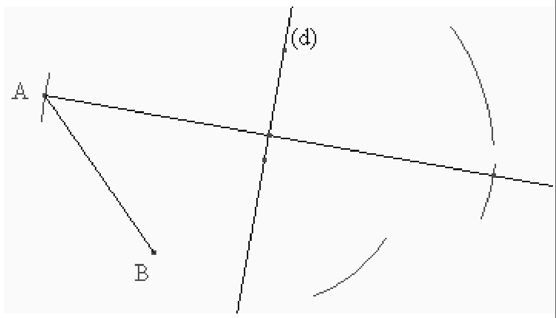


Figure VI.23 Troisième étape

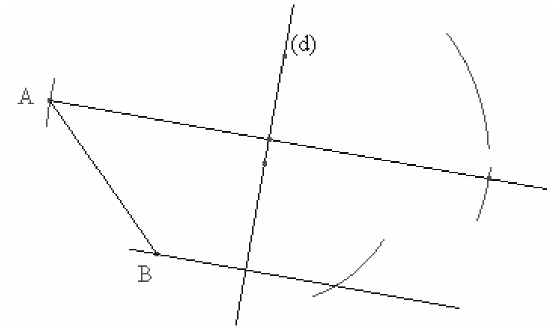


Figure VI.24 Quatrième étape

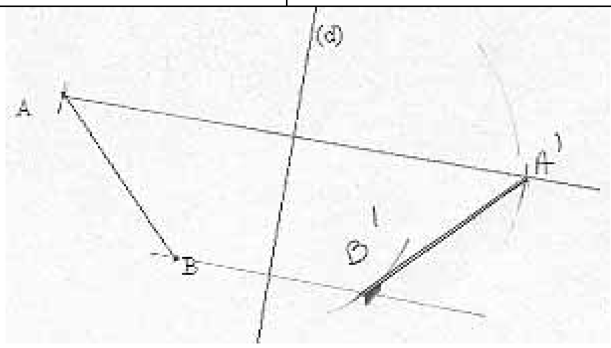


Figure VI.25 Réalisation par le binôme Pauline & Agathe (3)

Dans le processus de la résolution, les procédures pour le problème P(A) et le problème P(B) sont différentes, alors que la première étape est envisagée à la fois pour les deux problèmes (Figure VI.21). En effet, l’arc tracé avec le compas qui permet de reporter la distance n’est pas utilisé pour la réalisation du point symétrique A’. A la troisième étape, le report de la distance est encore effectué, parce que le support et l’arc ne produit pas une intersection. En revanche, pour la réalisation du point symétrique B’, le deuxième report de la distance n’est pas effectué, parce que l’intersection est produite entre le support et l’arc initial. Cette différence du processus implique la nature différente de la résolution du point de vue de la connaissance engagée.

Pour la résolution du problème P(A), nous diagnostiquons les opérateurs suivants qui réalisent une droite et un report de la distance. Comme les utilisation d'équerre et de compas sont les mêmes que celles du binôme Delphine & Baptiste (1), le contrôle suivant (PA-Cσ1) est considéré pour leur choix.

PA-Cr1 : tracer avec l'équerre le support

PA-Cr2 : reporter au compas la distance à partir de l'intersection

PA-Cσ1 : si P$x \perp d$ et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)

Pour la résolution du problème P(B), le report de la distance est effectué à partir d'un point quelconque sur l'axe. Cette procédure de réalisation n'est pas souvent trouvée dans les manuels scolaires. L'opérateur suivant est identifié à partir de la procédure.

PA-Cr3 : reporter au compas la distance à partir d'un point sur l'axe

PA-Cr4 : tracer avec l'équerre le support

L'utilisation d'équerre est la même que celle pour le problème P(A). Par contre, l'utilisation d'un compas à partir d'un point sur l'axe nous indique une propriété de l'équidistance. Le contrôle suivant est donc considéré pour le choix des opérateurs.

PA-Cσ2 : si PM = Mx ($\forall$M $\in d$) et P$x \perp d$ alors Sym (P, x, d)

Analysons maintenant à partir du discours des élèves l'apparition de propriétés géométriques attachées aux utilisation d'instruments et le contrôle de la validation du résultat obtenu. En effet, il se peut que l'utilisation d'instruments ne porte pas les propriétés géométriques. Nous identifions, dans le discours au début de la réalisation, que Pauline anticipe la position du segment symétrique A'B' [8-9] : « trapèze » [8]. Nous y voyons une mobilisation de la perception globale des segments symétriques. Par contre, l'information significative de la mobilisation de propriétés géométriques à part cette perception globale n'est pas apparue dans le protocole. Le discours des élèves est une explication qui décrit le processus de la réalisation : « il faut atteindre A » [12], « tu le fais de l'autre côté » [13], « avec l'équerre …, comme ça. Par rapport à la droite » [20], etc.

Pauline & Agathe (3) pour le problème 1

7. A : etc. … sans instrument. Donc, en fait, il faut faire le segment AB, à son symétrique.
8. P : **trapèze, on fait comme ça**.
9. A : oui, oui comme ça.
10. P : on prend par rapport à la droite d.
11. A : oui.
12. P : **il faut atteindre A**
13. A : A. Non, mais non, ah, **tu le fais de l'autre côté**.
14. P : oui, … comme ça,
15. A : **on fait la même chose**.
16. P : point est B.

…

20. P : et **avec l'équerre …, comme ça. Par rapport à la droite d**. Tu te souviens pas ?

21. A : ah oui ! Je me souviens.
22. P : …

…

36. P : voilà. **Je trace la droite comme ça**. Et …
37. A : là, **il y a un point B**.
38. P : J'ai point B. Et j'ai mis tout, et j'ai la symétrie. Donc, on va faire après B et B'. Voilà.
39. A : tu traces en rouge ?
40. P : … on a déjà fini celle-là.

En ce qui concerne le contrôle pour la validation du résultat, son indice n'est pas non plus identifié dans le discours après la réalisation. Après la nomination des points [38], la réalisation est terminée.

A partir de la production des élèves et du protocole, les propriétés attachées à l'utilisation d'instruments ne sont pas claires : l'équidistance, l'orthogonalité et le milieu. Nous ne pouvons donc pas savoir si les élèves mobilisent les contrôles (PA-Cσ1 et PA-Cσ2) ou si les utilisations d'instruments ne portent pas de propriétés géométriques.

2.2.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Analysons ici la résolution du problème 2 par le binôme Pauline & Agathe (3).

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

Dans la phase de conjecture, le problème posé est de reconnaître si la figure proposée est symétrique ou non. Pauline et Agathe proposent la réponse « oui, symétrique » sans expliciter d'arguments [44 ; 46 ; 47]. La perception globale de figures symétriques est mobilisée.

Pauline & Agathe (3) pour le problème 2

43. A : AB et DC sont-ils symétriques par rapport …
44. P : **ben oui, oui, c'est symétrique**.
45. A : Répondre oui, non, ou pas toujours, et démontrer.
46. P : ben, **je dis « oui »**.
47. A : **c'est obligé**.
48. P : Pourquoi mettre faux ? Ben, non, il faut démontrer. **On sait que M est le milieu de AB** …
49. A : ah, il faut démontrer comme ça.
50. P : **N est le milieu de DC**.

<u>Phase d'argumentation</u>

Après la proposition de la conjecture, Pauline commence à remarquer les propriétés géométriques [48 ; 50]. Dans le discours des élèves, plusieurs propriétés sont évoquées. Pauline remarque surtout le parallélisme entre trois segments « AD // MN // BC » [58 ; 60] à partir des milieux et des égalités de longueurs [56]. Agathe remarque aussi le parallélisme et les milieux. La symétrie orthogonale n'est jamais évoquée à partir des propriétés repérées. Pourtant, Pauline commence à rédiger [66].

Pauline & Agathe (3) pour le problème 2

54. P : […] Parce que, **on sait que ABCD est un rectangle**, donc **donc les segments**

AD … AB = DC, d’accord ?

55. A : hum.
56. P : **on sait que M est le milieu de AB et que N est le milieu de DC**. Et **on sait que AD est parallèle à BC**, **c’est un rectangle**.
57. A : oui, **ça c’est sûr c’est parallèle**. Mais, comme les autres, **ils sont aux milieux. Ben, les autres sont aussi parallèles**.
58. P : Donc, **vu que AM est égal à MB et que DN est égal à NC**, et ben, MN est parallèle, **donc MN est parallèle à BC**, et **BC est parallèle à AD**, et **donc, MN est parallèle à AD**. T’as compris ?
59. A : non, j’ai pas très bien compris. Mais, comme ils sont parallèles, **comme AD et BC sont parallèles**, et **que M, et N sont les milieux respectifs de AB et DC**, et **ben, le truc est le milieu**. C’est ça, non ?
60. P : ben oui. **De toute façon c’est parallèle**.
61. A : De toute façon, c’est milieu donc …,
62. P : **parce que ça c’est égal à ça. AD est égal à BC**.
63. A : ah non, **AB est égal à DC**.
64. P : **AB est égal à DC**. Et **AM est égal à MB. DN est égal à NC**. T’as compris ?
65. A : ouais …,
66. P : donc, comme …je peux mettre ? oui, donc comme …

A cette phase, il semble que les arguments sont évoqués les uns aux autres comme l’argumentation au sens de Duval (1991). Les arguments ou propriétés qui sont évoqués jusqu’ici peuvent être schématisés comme la figure suivante (Figure VI.26).

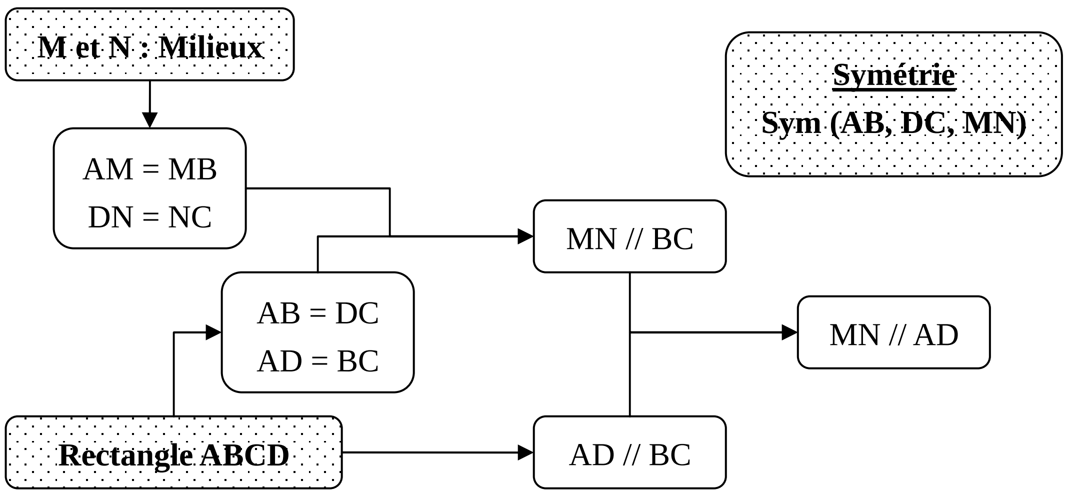


Figure VI.26 L’enchaînement des propriétés dans la phase d’argumentation

Le schéma est réalisé surtout en respectant le discours de Pauline. L’enchaînement pour le parallélisme « MN // BC » est identifié dans ses discours [60 ; 62 ; 64]. L’enchaînement entre les parallélismes est identifié dans les discours [58].

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve suivante est rédigée par Pauline.

1 : Oui, on sait que ABCD est un rectangle
2 : donc AD // BC et AD = BC ;
3 : AB // DC et AB = DC ;

4 : on sait aussi que M est le milieu
5 : de [AB] et que N est le milieu
6 : de [DC] donc AM = MB = DN = NC
7 : donc MN // AD // BC.
8 : D est le symétrique de C par rapport
9 : à N et A est le symétrique de B par
10 : rapport à M et vu que AM = DN = MB = NC
11 : donc la droite (AD) est le symétrique de (BC)
12 : par rapport à (MN)

Analysons la structure de cette preuve en dissociant des pas de preuve.

i : ADCB rectangle $\rightarrow$ AD // BC, AB // DC, AD = BC, AB = DC

ii : M et N : milieux de [AB] et de [DC] $\rightarrow$ AM = MB = DN = NC

iii : AM = MB = DN = NC $\rightarrow$ MN // AD // BC

iv : Sym (C, D, N), Sym (A, B, M), AM = DN = MB = NC $\rightarrow$ Sym (AD, BC, MN)

Le premier pas (i) est identifié aux lignes (1, 2 et 3). Les propriétés du rectangle (les côtés opposés parallèles et de même longueur) sont mobilisées. Le deuxième pas (ii) est identifié aux lignes (4, 5 et 6). Les propriétés de milieu ne permettent pas l'égalité « MB = DN ». Il manque une hypothèse. Un implicite doit donc être prise en compte dans ce pas de preuve. Nous considérons que l'égalité de longueurs de deux segments « AB = DC » qui est déduite au pas précédent et qui est évoquée dans la phase d'argumentation est prise en compte. Dans le discours, ce pas est immédiat. Aucune information n'est repérée. Nous avons identifié le troisième pas (iii) aux lignes (6 et 7). Pour avoir le parallélisme entre trois segments « MN // AD // BC », l'hypothèse « AM = MB = DN = NC » ne suffit pas. Dans le discours, l'hypothèse mise en œuvre pour le parallélisme peut être identifiée. Pauline verbalise dans son discours « on a dit que MN est à la même distance que AD et BC » [100] après la rédaction de la ligne (6). Nous l'interprétons que la phrase « AM = MB = DN = NC » signifie pour elle les mêmes distances entre MN et AD et entre MN et BC. La propriété d'équidistance entre deux segments implique donc le parallélisme. Dans le discours, le symétrique est lié à l'équidistance de segments [102]. Mais, comme la preuve écrite à la ligne (7), le parallélisme est impliqué à partir de l'équidistance : « c'est parallèle » [102].

Pauline & Agathe (3) pour le problème 2

99. A : on peut mettre que ça est symétrique par rapport à ça.
100. P : attends …, de toute façon, **on a dit que MN est à la même distance que AD et BC** …
101. A : oui,
102. P : **donc du coup, c'est évident que c'est symétrie, c'est parallèle**. Voilà.
103. A : c'est évident.

Aux lignes (8, 9 et 10) de la preuve écrite, la symétrie centrale est mise en œuvre au pas suivant de preuve (iv). Dans le protocole, Pauline remarque que le symétrique n'est pas encore démontré alors que le parallélisme l'est [110] et elle cherche des arguments pour la symétrie [114].

Pauline & Agathe (3) pour le problème 2

109. A : non, il y a BC. … c'est bon.
110. P : non, non, **c'est pas bon. On a dit que c'était parallèle, mais on a pas dit que c'était symétrique**.
111. A : **ah oui, c'était symétrique**.
112. P : hum, …, **ça et ça a à la même mesure**. Tu vois ?
113. A : ben oui, d'accord.
114. P : **donc, ces objets, c'est symétrique**. J'sais pas comment on dit. **Les côtés symétriques**.

Dans le discours de Pauline, les arguments pour la symétrie « Sym (A, B, M) » ne sont pas clairs. La symétrie centrale apparaît brusquement « Sym (C, D, N) » [118 ; 119]. L'écart entre les arguments proposés auparavant et la symétrie est identifié. Il se peut que certains arguments soient implicitement mobilisés ou que les symétriques soient reconnus sur le dessin associé. Mais, nous ne pouvons pas le savoir à partir du discours des élèves.

Pauline & Agathe (3) pour le problème 2

115. A : AD … symétrique à BC …, ça on le sait.
116. P : ben, en fait, on va dire ça. Donc,
117. A : ben, c'est la même chose qu'on parle de …
118. P : **D le symétrique de C par rapport à N**.
119. A : **et la même chose pour A et B**.

Pour le dernier pas de preuve, un autre énoncé « AM = DN = MB = NC » qui est obtenu au pas précédent (ii) est mis en œuvre comme hypothèse. Nous pouvons attribuer une règle suivante comme permis d'inférer à ce pas.

> PA-Sr1 : si Sym (P, P', M), Sym (Q, Q', N), PM = QN = MP' = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

C'est une règle analytique mais invalide. En effet, les propriétés mises en œuvre dans la règle sont géométriques. Or, nous ne considérons pas qu'une telle règle soit mobilisée. Nous l'interprétons qu'une règle est générée temporairement en ajoutant les arguments pour la symétrie les uns aux autres. Autrement dit, les propriétés qui paraissent pour les élèves être des arguments sont écrites comme hypothèses. Pourtant, les propriétés que les élèves considèrent inutiles pour la symétrie ne sont pas mises en œuvre. En effet, les propriétés concernant l'angle ou la diagonale du rectangle ne sont pas évoquées par Pauline. Nous considérons que les milieux et les parallélismes sont ainsi privilégiés par les élèves.

Dans le protocole, nous ne pouvons pas obtenir plus d'information que celles repérées sur la preuve écrite. La résolution est effectuée surtout par Pauline. Les éléments identifiés ici relève donc de Pauline.

Tout au long de la résolution, Pauline et Agathe ne remarquent jamais l'orthogonalité, alors que l'équerre est utilisée pour tracer un support perpendiculaire à l'axe dans la résolution du problème 1.

2.2.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Analysons ici la résolution du problème 3 par le binôme Pauline & Agathe (3).

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans la phase de conjecture, le problème posé est de reconnaître si la figure proposée est symétrique ou non. Pauline propose tout de suite après la lecture des énoncés la réponse « oui, symétrique » et remarque « dans un parallélogramme, c'est pareil » [142]. En revanche, Agathe propose « pas toujours » [141], mais elle suit tout de suite Pauline [145].

Pauline & Agathe (3) pour le problème 3
140. P : **ben oui, mais c'était toujours**.
141. A : là, **c'est pas toujours, par contre ?**
142. P : **ben si, dans un parallélogramme, c'est pareil.**
143. A : …

Phase d'argumentation

Tout de suite après avoir proposé une conjecture « oui, symétrique », Pauline propose des arguments, milieux et parallèle [144]. Dans ce cas, le symétrique est impliqué du parallélisme : « c'est obligé, parce que c'est parallèle à ça » [144].

Pauline & Agathe (3) pour le problème 3
144. P : si, **parce qu'on dit que M et N sont les milieux, donc c'est obligé, parce que c'est parallèle à ça**.
145. A : **ouais**.

Puis, Pauline commence à écrire une preuve. Les phrases de la conjecture et de l'argumentation sont courtes.

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par Pauline.

1 : On sait que ABCD est un parallélogramme
2 : donc AD // BC et AD = BC
3 : AB // DC et AB = DC
4 : on sait que M est le milieu de AD
5 : et N est le milieu de BC
6 : donc AM = MD = BN = NC
7 : donc A est le symétrique de D par
8 : rapport à M et B est le symétrique de
9 : C par rapport à N.
10 : donc AB // MN // DC

11 : donc la droite AB est le symétrique 12 : de (DC) par rapport à (MN).

La structure de preuve est très ressemble à celle pour le problème 2. La partie différente est à partir de la ligne (7). Présentons les pas de preuve à partir de ce point.

i : AM = MD = BN = NC → Sym (A, D, M) et Sym (B, C, N)

ii : Sym (A, D, M) et Sym (B, C, N) → AB // MN // DC

iii : AB // MN // DC → Sym (AB, DC, MN)

Dans la preuve, la conjonction « donc » est souvent utilisée. Nous l'interprétons que l'énoncé avant cette conjonction est une hypothèse et celui après est une conclusion. Tandis que l'argument pour la symétrie centrale était implicite dans la preuve du problème 2, la conjonction « donc » est explicitée dans la preuve pour le problème 3. Pour cela, nous avons identifié le pas (i). Le pas (ii) est identifié aux lignes (7, 8, 9 et 10). Encore la conjonction « donc » permet d'identifier l'hypothèse et la conclusion de pas. De même, le pas (iii) est identifié aux lignes (10, 11 et 12). Pour le dernier pas, nous interprétons que la règle suivante est mobilisée comme permis d'inférer.

PA-Nr1 : si PQ // MN // P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Dans le discours des élèves, Pauline rédige toute seule et ne discute pas suffisamment avec Agathe pour que nous puissions recueillir des informations sur la règle et son support.

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- Les élèves réalisent le segment symétrique respectant la forme « trapèze » [8] pour le problème 1. En même temps, elles reconnaissent comme symétriques deux segments parallèles formant « parallélogramme » pour le problème 3. Autrement dit, la perception globale de ces élèves accepte les deux figures comme symétriques.
- Les élèves utilisent l'équerre pour tracer un support sans expliciter la propriété attachée. Elles reconnaissent comme symétriques les figures non symétriques n'ayant pas l'orthogonalité (problème 3). La propriété d'orthogonalité n'est jamais évoquée tout au long des résolutions des trois problèmes. L'utilisation d'équerre ne porte pas sur la propriété d'orthogonalité ou la propriété d'orthogonalité est spécifique au problème de la construction et non pas à celui de la reconnaissance.
- Les propriétés géométriques remarquées dans les résolutions des deux derniers problèmes 2 et 3 sont les mêmes. Les élèves considèrent que la preuve est aussi la même [142]. Cependant, les règles mobilisées pour la caractérisation des symétriques sont différentes. En outre, les arguments s'ajoutent les uns aux autres dans la phase d'argumentation du

problème 2. Nous considérons ainsi que la règle est temporairement générée en juxtaposant les propriétés concernées.

2.3 Marion & Manon (4)

2.3.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Marion & Manon (4) trace le support perpendiculaire à l'équerre et reporte la distance au compas. Dans le protocole, les informations qui peuvent être acquises sur le processus concernant la réalisation et les instruments utilisés sont les propriétés attachées à l'utilisation d'équerre et de compas. Manon verbalise explicitement la mobilisation de l'orthogonalité par « tu mets perpendiculaire au segment »[4] [8] et du milieu par « comment on fait pour savoir la distance » [16].

Marion & Manon (4) pour le problème 1
8. Manon : ça, tu prends, **tu mets perpendiculaire au segment**.
9. Marion : ah oui, c'est comme ça.
…
16. Manon : après, comment on fait pour savoir … à quel endroit on va tracer. … **comment on fait pour savoir la distance**, tu sais, là, comme ça, de là ?
17. Marion : hum ?
18. Manon : avec le compas ?
19. Marion : ouais

Nous pouvons ainsi diagnostiquer que Manon mobilise le contrôle MMσ1 ou MMσ2 pour le choix des opérateurs. Mais, nous ne pouvons pas savoir quel contrôle de ces deux mobilise Manon.

MMσ1 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)

MMσ2 : l'orthogonalité et l'équidistance sont nécessaires pour la construction d'un point symétrique, parce qu'ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par la reconnaissance mobilisant d'autres moyens (la perception globale, le pliage, la propriété de conservation de longueur, etc.)

[4] Manon énonce « segment », mais ce serait plutôt « droite » ou « axe » qu'elle indique.

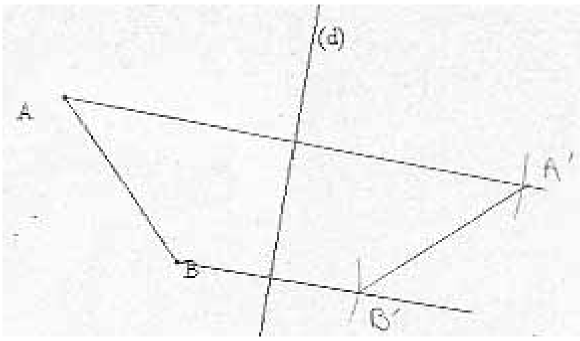


Figure VI.27 Réalisation par Marion & Manon (4)

2.3.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Marion & Manon (4), la phase de conjecture est très courte. Marion & Manon (4) proposent la réponse « oui » tout de suite après la lecture des énoncés [26-27]. A ce moment là, comme d'autres éléments ne sont pas mentionnés, la reconnaissance par la perception globale est effectuée et ainsi la perception globale de figures symétriques est mobilisée comme contrôle.

Marion & Manon (4) pour le problème 2
24. Manon : attends, soit M, N. …
25. Marion : …
26. Manon : ben, **c'est oui**, la réponse, non ? AD et BC … par rapport à MN. Ben, oui.
27. Marion : **ben oui**, mais, il faut démontrer.
28. Manon : répondre oui, non, ou pas toujours, et démontrer.

Phase d'argumentation

Dans la phase d'argumentation, Marion et Manon proposent les premiers arguments « milieu » et « la même longueur » [31 ; 32 ; 34]. Nous considérons ici que l'énoncé « la même longueur » signifie l'égalité « AM = MB », parce que c'est « le milieu » [31] qui le déduit. Puis, Manon arrive à énoncer « c'est pareil » [34] qui parait confirmer le symétrique et finir la preuve [36, 37], alors que la signification de « c'est pareil » n'est pas évidente. L'égalité de longueur serait donc un argument pour le symétrique, bien que le rapport avec la symétrie ne soit pas explicite dans le protocole.

Marion & Manon (4) pour le problème 2
29. Marion : j'sais pas démontrer. J'ai pas …
30. Manon : si ! parce que, attends,
31. Marion : ben, si … **si AB c'est le milieu**
32. Manon : oui
33. Marion : **c'est le milieu**.
34. Manon : ben, oui, ça veut dire là, là et là, **ils ont la même longueur.** Ça veut dire que **c'est pareil**.
35. Marion : ouais.
36. Manon : **j'écris ou t'écrits ?**
37. Marion : **vas-y. écris.**

D'autres éléments, à part des milieux et de l'égalité de longueur, les propriétés géométriques qui concernent le symétrique, par exemple l'orthogonalité, n'apparaissent pas dans le protocole. Les rapports des propriétés apparues dans la phase d'argumentation peuvent être exprimés comme le schéma de la Figure VI.28.

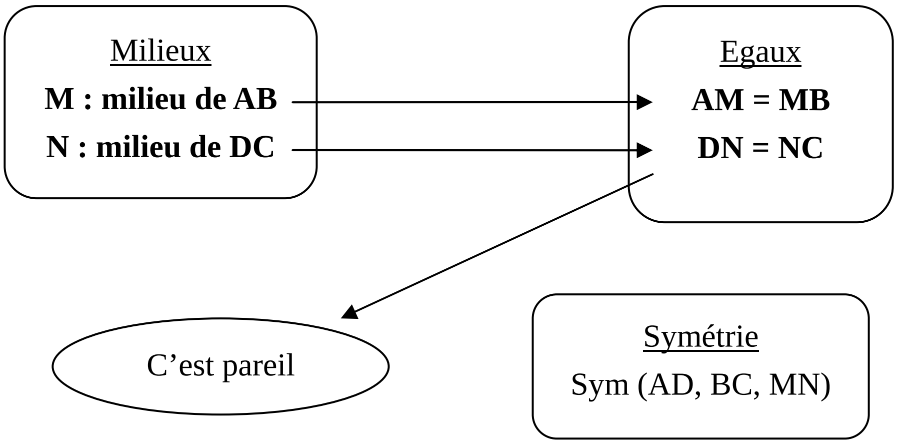


Figure VI.28 La phase d'argumentation de Marion & Manon (4)

Phase de rédaction

La preuve suivante est écrite par Manon & Marion (4). La conjecture proposé dans la phase de reconnaissance était la réponse « oui symétrique ».

1 : Oui [AD] et [BC] sont symétrique par
2 : rapport à la droite (MN).
3 : Démonstration :
4 : M milieu de [AB] donc AM = MB
5 : N milieu de [DC] donc DN = NC
6 : Donc (MN) coupe [AB] et [DC] en leur
7 : milieux, donc [AD] et [BC] sont symétrique
8 : par rapport à la droite (MN).

Analysons la structure de la preuve donnée par Manon & Marion (4). Les pas suivants de la preuve peuvent être identifiés.

i : M milieu de [AB] $\rightarrow$ AM = MB

ii : N milieu de [DC] $\rightarrow$ DN = NC

iii : $\rightarrow$ (MN) coupe [AB] et [DC] en leurs milieux

iv : (MN) coupe [AB] et [DC] en leurs milieux $\rightarrow$ Sym(AD, BC, MN)

La ligne (4) exprime un pas (i) et la ligne (5) exprime un autre pas (ii). Tous les deux utilise le permis d'inférer commun sur le milieu qui s'appuie sur la définition du milieu. Le terme

« donc » de la ligne (6) indique un pas de la preuve. Les propriétés « M milieu de [AB] et N milieu de [DC] » ou « AM = MB et DN = NC » des lignes (4 et 5) sont mises en œuvre pour les hypothèse du pas (iii). Enfin, la phrase de la ligne (6) à (8) nous permet d'identifier un pas qui propose la conclusion de la preuve et qui mentionne la symétrie. Nous identifions ici la règle suivante comme permis d'inférer.

> MM-Sr1 : si la droite MN coupe deux segments PP' et QQ' en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Analysons surtout le rapport entre la symétrie et d'autres propriétés dans le protocole. Au début de la rédaction, Manon propose un argument pour la réponse tel que « parce que c'est les milieux de chaque côté » [43] et « la distance est la même entre A et M et B » [45]. Nous voyons ici le rapport étroit entre les milieux et le symétrique pour Manon. Puis Marion propose la propriété « parallèle » à partir des égalités [49 ; 52]. Mais, Manon n'est pas intéressé et explicite qu'elle ne s'intéresse pas à la symétrie [53 ; 59]. Elle privilégie seulement les milieux.

Marion & Manon (4) pour le problème 2

43. Manon : ah, d'accord. OK. …, oui, parce que, attends, oui, je vais mettre là. Oui, AD … et BC sont … par rapport à la droite MN. Et ben, **parce que c'est les milieux de chaque côté**.
44. Marion : hum.
45. Manon : ben, **la distance est la même entre A et M et B**.
46. Marion : …
47. Manon : je mets démonstration, tu crois ?
48. Marion : oui.
49. Manon : … M … **M milieu de AB. Donc, AM est égal à MB. N milieu de DC donc, DN et NC, ça c'est pareil. DN est égal à NC**. Après, ben …, voilà.
50. Marion : donc.
51. Manon : donc, MN
52. Marion : **est parallèle**.
53. Manon : attends, **ça suffit, il faut pas dire autre chose**. … ben, oui, c'est toujours la même

…

58. Marion : sont symétriques, on cherche un symétrique, non ? Donc, le machin et là, ils sont symétriques.
59. Manon : déjà, **ils sont parallèles. Ben, on s'en fout ça, il me semble**. …, je crois que …
60. Marion : ben regarde, si tu veux. **Si ça par la droite … tu coupes en deux**,
61. Manon : pour nous, c'est logique. Oui, oui, je sais bien, pour nous c'est logique. Mais, il faut expliquer.

…

67. Manon : **MN coupe AB et DC en leurs milieux**. C'est ça ?
68. Marion : oui.
69. Manon : ça, déjà, **on a pas démontré**.
70. Marion : si ! on a mis là.
71. Manon : non, ce que j'ai mis, moi, j'ai mis, M est machin et …, donc maintenant, MN coupe AB et DC en leurs milieux.
72. Marion : …
73. Manon : donc, AD et BC sont symétriques par rapport à …

Or, Manon considère aussi que les milieux ne permettent pas de démontrer le symétrique. Elle manifeste « il faut expliquer » [61] et « on n'a pas démontré » [69]. Cet état de son raisonnement peut être exprimé comme le schéma suivant (Figure VI.29). Elle a identifié les hypothèses qui seront concernées et la conclusion, mais ne trouve pas de permis d'inférer qui les relie. L'enchaînement de propriétés n'est donc pas établi pour Manon. A partir de cela, nous considérons que la règle identifiée dans la preuve écrite n'est pas mobilisé comme permis d'inférer dans le raisonnement de Manon.

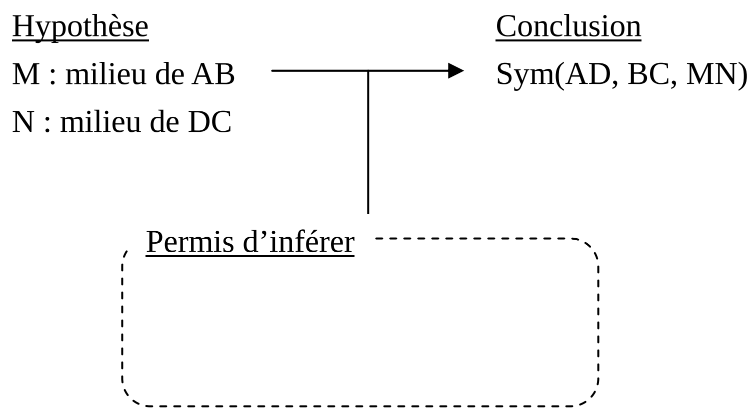


Figure VI.29 L'état de raisonnement de Manon

Par ailleurs, la conception de Marion sur la caractérisation d'un symétrique est différente de celle de Manon. Marion évoque premièrement le parallèle [52]. Puis, pour caractériser le symétrique, elle énonce « Si ça par la droite … tu coupes en deux » [60] qui est une propriété globale de l'axe de symétrie orthogonale (« l'axe de symétrie coupe la figure en deux parties égales »). Nous y identifions la règle suivante qui est pragmatique et invalide.

> MM-Sr2 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F' et F'') par une droite *d* alors Sym (F', F'', *d*)

Cette règle est souvent mobilisée par les élèves de collège comme contrôle du problème de reconnaissance (Grenier, 1988).

En ce qui concerne l'orthogonalité, Manon & Marion (4) ne la remarque pas tout au long de la résolution du problème 2, alors que Manon trace explicitement une droite perpendiculaire pour la résolution du problème 1, la construction d'un segment symétrique (§2.3.1, p.192). Nous voyons ici que *la propriété d'orthogonalité est attachée à la résolution de la construction, mais non pas forcément à d'autres problèmes de la symétrie orthogonale*.

2.3.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Manon & Marion (4), la première conjecture de Manon et Marion toutes les deux est « oui, symétrique » [79-80]. Elles étaient aussi d'accord pour

« oui » par rapport au problème précédent (problème 2) [82-83]. Puis, Manon mentionne un argument « si parallèle et de la même longueur » [85] qui peut être formulé comme une règle « si PQ // P'Q' et PQ = P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', *d*) » et qui justifie la réponse « oui, symétrique ». D'autre argument n'est pas encore posé pour le jugement du dessin, pour le moment.

Manon & Marion (4) pour le problème 3

79. Manon : … M, N les milieux des côtés opposés … les segments AB et DC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. Répondre oui, non, ou pas toujours. Ben, si, **c'est oui déjà toujours**.
80. Marion : ben, **oui**.
81. Manon : mais …, attend.
82. Marion : ben **c'est pareil que pour le carré, hein**.
83. Manon : **milieux des côtés opposés**. … ben oui, **c'est pareil**.
84. Marion : …
85. Manon : oui, non, mais non, en fait. **ben oui, si c'est AB et DC qui sont parallèles et de la même longueur**

Or, Manon remarque les segments AM et MD et propose qu'ils ne sont pas symétrique [89]. Marion le conteste [90 ; 92]. La phrase « ça et ça c'est pas symétrique » de Marion [96] signifie que les segments AD et BC ne sont pas symétriques. Manon propose le pliage en expliquant que les segments AM et MD ne sont pas superposable [97], alors que Marion pense que ces segments se superposent [98]. Finalement, Marion coupe effectivement un parallélogramme sur un brouillon, le plie et s'en convainc [106]. Manon et Marion arrivent à la conjecture « non symétrique » par le pliage effectif [106-110].

Manon & Marion (4) pour le problème 3

89. Manon : **C'est AM et MD, ils sont pas symétriques**.
90. Marion : **ah si**,
91. Manon : non, attend.
92. Marion : si, si, c'est un symétrique.
93. Manon : non.
94. Marion : attend, si tu passes là, attends,
95. Manon : **mais non !**
96. Marion : mais si ! ça et ça c'est symétrique, mais **ça et ça c'est pas symétrique**.
97. Manon : non, parce que regarde. Non, ça, ça monte où ? **ça va monter plus en haut**, ça.
98. Marion : **ça se superpose**
99. Manon : mais c'est pas symétrique
100. Marion : **je vais couper** là … ben oui.
101. Manon : tu vois ?
102. Marion : hum. … oui,
103. Manon : ça fait que le segment B …
104. Marion : ça se superpose, mais ils sont pas …
105. Manon : c'est pas la symétrie.
106. Marion : le segment D …, regarde-le. Ils sont même pas. Regarde, **ça se superpose même pas**.
107. Manon : non.

Du côté Manon, le pliage est un contrôle pour la reconnaissance de la symétrie orthogonale. La règle suivante mobilisée ici peut être identifiée.

MM-Nr1 : si non Pliage (F, F’, *d*) alors non Sym (F, F’, *d*)

La remarque des segments AM et MD non symétriques nous permet de considérer qu’elle prend en compte le rôle de l’axe lors du pliage. En effet, sans prise en compte de l’axe, ces deux segments sont superposables par rapport à une droite (la médiatrice du segment) qui n’est pas la droite MN. Dans cette phase de conjecture, l’argument est le pliage et la propriété d’orthogonalité n’apparaît pas chez Manon. L’orthogonalité n’est donc pas mobilisée ou attachée à la reconnaissance de figures symétriques.

Du côté Marion, elle considère que les deux segments AB et DC sont symétriques. Même après la proposition du pliage par Manon, elle anticipe que deux segments sont superposables avant le pliage effectif. Nous pouvons ici remarquer d’une part le fait que le pliage est bien partagé par les élèves comme moyen de la reconnaissance de symétriques et d’autre part le fait que le pliage mental est moins fiable que le pliage effectif.

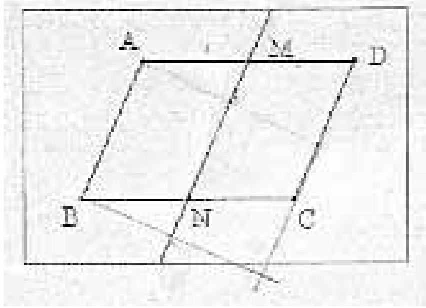
La phase de conjecture montre d’ailleurs que les élèves considèrent pour les symétriques non seulement les deux segments qui sont demandés de juger, mais aussi le support de deux points symétriques pour la reconnaissance de symétriques.

<u>Phase d’argumentation</u>

Les élèves commencent à rédiger une preuve, mais nous analysons comme phase de l’argumentation la discussion avant la partie « démonstration » dans sa rédaction (voir leur preuve plus loin). Dans la discussion, Manon remarque le manque d’orthogonalité [139 ; 141 ; 143 ; 145] et trouve aussi que le quadrilatère doit être un carré ou un rectangle pour que deux segments AB et DC soient symétriques par rapport à la droite MN [147 ; 149]. Manon l’explique en réalisant le cas ayant l’orthogonalité sur le dessin donné par les énoncés [149 ; 155] (voir la figure ci-dessous).

Manon & Marion (4) pour le problème 3

138. Marion : …
139. Manon : ah regarde, **parce que la droite AD et la droite BC ne sont pas parallèles à MN. Ça peut pas être parallèles**.
140. Marion : à la droite quoi t’as dit ?
141. Manon : regarde. Tu vois, pour que ce soient parallèles, **il faudrait que ça soit là, perpendiculaire**, qu’est-ce que je parle parallèle, perpendiculaire à ça. Regarde. Il faudrait que AB …, non attends, **il faut que AD soit perpendiculaire à la droite MN. Le segment AD est perpendiculaire à MN**.
142. Marion : hum.
143. Manon : **il faudrait qu’ils soient perpendiculaires**.
144. Marion : hum.
145. Manon : de toute façon, **il faut que ça soit comme ça**.
146. Marion : hum.
147. Manon : Ben, il faut que **ce soit un carré, quoi**.
148. Marion : ouais. ouais.
149. Manon : parce que forcément, … comme ça, après



ça, ça va glisser comme ça, ça ça va être comme ça, ça peut être un quadrilatère comme ça. … **c'est un rectangle**.

Par ailleurs, Marion écoute Manon et s'accorde à ce qu'elle propose [152]. En effet, elle verbalise aussi explicitement le manque d'orthogonalité comme « elles sont parallèles mais que ça devrait être perpendiculaire à » [158] et le cas qui peut être symétrique comme « ou un carré » [162]. Ainsi, le manque d'orthogonalité est aussi remarqué par Marion.

Manon & Marion (4) pour le problème 3

150. Marion : hum …, parce que, en plus, regarde, MN, regarde. AB, MN, et DC, elles sont parallèles.
151. Manon : AB, MN, ben oui, justement dans ce cas, c'est nickel, mais maintenant on a juste ça. Tu vois, il faut que tu fasses comme ça, ce soit comme ça.
152. Marion : il faudrait que …, en gros, tu dis que **AD devrait être perpendiculaire à MN**. Hein ?
153. Manon : attend.
154. Marion : hein, tu dis ça ?
155. Manon : attend. …, oui ça va comme ça. … voilà, … comme ça et comme ça … voilà, … ben **il faut que ça soit un rectangle quoi**.
156. Marion : hum.
157. Manon : bon, c'est comme ça. … alors, je mets …
158. Marion : ben, tu dis que machin et machin là **elles sont parallèles mais que ça devrait être perpendiculaire à**
159. Manon : oui, c'est forcément, si c'est perpendiculaire à ça, l'angle serait ben 90°.
160. Marion : oui.
161. Manon : ben, il faut que ce soit un rectangle quoi.
162. Marion : ben oui, **ou un carré**.

Comme nous l'avons vue dans la phase de conjecture, le pliage serait aussi pris en compte pour la reconnaissance de symétriques. Le rapport des arguments ou propriétés qui apparaissent jusqu'ici peut être exprimé comme le schéma suivant (Figure VI.30).

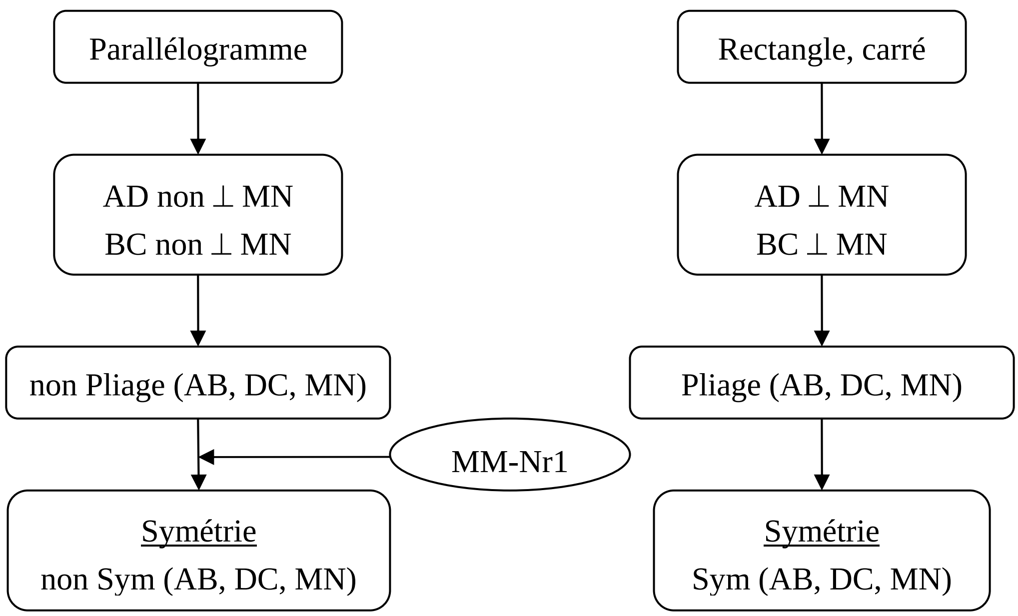


Figure VI.30 La phase d'argumentation de Manon & Marion (4)

Nous avons identifié une seule règle dans la phase de conjecture. Et les places de « rectangle, carré » et « AD $\perp$ MN et BC $\perp$ MN » peuvent être inversées, parce que Manon trouve que le quadrilatère est un rectangle ou un carré lorsque le segment AD est perpendiculaire à la droite MN [147 ; 149].

Phase de rédaction

La preuve suivante est écrite par Manon & Marion (4). La conjecture proposée est la réponse « non », alors qu'elles reconnaissent les symétriques dans les cas de rectangle et carré.

1 : ~~Non, le quadrilatère ABCD n'est pas~~
2 : Non, [AB] et [CD] ne sont pas symétrique
3 : par rapport à la droite (MN)
4 : Démonstration :
5 : [AD] n'est pas perpendiculaire à (MN)
6 : [BC] n'est pas perpendiculaire à (MN)
7 : Donc [DC] et [AB] ne sont pas
8 : symétrique par rapport à (MN)
9 : Il faudrait que :
10 : [AD] soit perpendiculaire à (MN)
11 : [BC] soit perpendiculaire à (MN)
12 : (ce serai un rectangle)
13 : pour que [AB] et [DC] soit
14 : perpendiculaire à (MN)[5]

Nous analysons la structure de la preuve pour identifier des opérateurs mobilisés et les contrôles mobilisés dans la preuve. Deux pas suivants de la preuve sont principalement rédigés. Le premier pas est identifié aux lignes (5, 6, 7 et 8) et le deuxième aux lignes (9, 10, 11, 12, 13 et 14).

i : AD non $\perp$ MN et BC non $\perp$ MN $\rightarrow$ non Sym (AB, DC, MN)

ii : AD $\perp$ MN et BC $\perp$ MN $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Pour le premier pas, l'origine de deux propositions données comme hypothèses n'est pas explicité. Elles seraient repérées à partir de la figure donnée par la perception globale de l'orthogonalité. La règle suivante est mobilisée comme opérateur ou permis d'inférer ici.

MM-Nr2 : si PP' non $\perp$ d et QQ' non $\perp$ d alors non Sym (PQ, P'Q', d)

C'est une règle valide et analytique. Mais, sans parler du symétrique de points, la conclusion sur le symétrique de segments est proposée. Cela peut être un théorème qui demande une

[5] Le terme « perpendiculaire » qui est utilisé à la ligne (4) signifie probablement « symétrique ».

démonstration. Dans le discours, après avoir écrit les lignes (5 et 6), Manon cherche à expliquer, sans le pliage, pourquoi les deux segments ne sont pas symétriques [171]. En effet, elle n'accepte pas les arguments de Marion s'appuyant sur le pliage avec un dessin tracé : « quand on écrit un dessin » [172] et « ne se superpose pas » [176]. Nous interprétons ces discours comme les orthogonalités de deux côtés (AD et BC) ne sont pas suffisantes pour valider la conclusion, symétrique de deux segments (AB et DC). Autrement dit, le rapport entre l'orthogonalité et la symétrie orthogonale n'est pas établi pour Manon sauf de façon pragmatique et elle s'aperçoit la nécessité d'une preuve. Enfin, Manon rédige le deuxième pas qui complète, pour elle, la valeur épistémique du premier pas ou la conclusion du pas (i) [179 ; 181]. Ainsi, la règle est pragmatique pour Manon.

Manon & Marion (4) pour le problème 3

169. Manon : BC n'est pas … perpendiculaire à MN. … donc, … donc, … et … on met quoi ?
170. Marion : ben, à ce moment, on met donc, voilà, c'est bon.
171. Manon : donc, oui mais, ça va pas. **Il faudrait expliquer**.
172. Marion : ben, mais, tu vas pas dire que, **quand on écrit un dessin**, ça
173. Manon : **mais non, mais non**, justement. … il faut mettre A 90°, mais …
174. Marion : j'aime pas la géométrie.
175. Manon : BC n'est pas perpendiculaire à MN. … donc, DC
176. Marion : **ne se superpose pas**,
177. Manon : **non, ben non, on met pas ça**. Donc, DC, ben c'est bon. On revient.
178. Marion : …
179. Manon : AB ne sont pas symétriques par rapport à …, **on mets il faudrait que**
180. Marion : que ça fasse un angle droit.
181. Manon : attend, **il faudrait que, d'accord. … AD soit perpendiculaire à MN. BC soit … MN**. Et … ça fera un rectangle ? … tu lis, Marion ?

Par ailleurs, nous pouvons bien diagnostiquer que le support de la validation de la règle (MM-Nr2) pour Marion est le pliage sur un dessin tracé à partir des propositions [172 ; 176]. Comme elle ne trouve pas explicitement d'argument qui le valide cet opérateur, Manon aussi mobilise surtout le même support que Marion pour la validation d'opérateur.

Le raisonnement de Manon peut être décrit comme le schéma suivant (Figure VI.31). Nous avons mis dans le support le deuxième pas de la preuve, car Manon rédige le deuxième pas de preuve (ii) afin d'augmenter la validité du premier pas (i).

<u>Hypothèses</u>
AD non ⊥ MN
BC non ⊥ MN

<u>Conclusion</u>
non Sym(AB, DC, MN)

<u>Permis d'inférer</u>
MM-Nr2 : si PP' non ⊥ *d* et QQ' non ⊥ *d*
alors non Sym (PQ, P'Q', *d*)

<u>Support</u>
non Pliage (PQ, P'Q', *d*)
ii : AD ⊥ MN et BC ⊥ MN → Sym (AB, DC, MN)

Figure VI.31 Le schéma d'un pas de la preuve de Manon

Dans le deuxième pas de la preuve, la règle suivante peut être identifiée.

MM-Nr3 : si PP' ⊥ *d* et QQ' ⊥ *d* alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

La règle est invalide. Les implicites doivent être prises en compte comme hypothèses pour qu'elle devienne valide. Nous considérons que les milieux sont implicitement pris en compte, c'est-à-dire les énoncés « M : milieu de AD » et « M : milieu de AD » qui sont proposés par les énoncés du problème 3. Dans la preuve écrite, la phrase « il faudrait que » (ligne 9) peut être interprétée comme elle présente une ou deux conditions nécessaires pour la conclusion après « pour que … » (ligne 13). Autrement dit, la phrase implique la prise en compte d'implicites.

Nous considérons que la validation de la conclusion du deuxième pas (ii), le symétrique, est apportée par le pliage. Manon considère que le pliage ne suffit pas ou ne doit pas utiliser dans la preuve dans le pas précédent [172-177]. Mais, Manon et Marion toutes les deux ne trouvent pas à part le pliage un moyen qui permet de caractériser le symétrique. Dans le protocole, la discussion ne porte pas à ce pas de la preuve.

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- La même règle de la caractérisation de la symétrie orthogonale est exigée par les problèmes 1 et 2. Cependant, elle n'est pas mobilisée dans la preuve écrite pour le problème 2, malgré que la construction soit réalisée d'une façon favorable en explicitant les propriétés attachées aux utilisations d'instruments.
- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire. La propriété d'orthogonalité est explicitée par Manon. Cependant, l'orthogonalité n'est mise en œuvre

ni pour la preuve, ni pour la reconnaissance dans la résolution du problème 2.

- La nécessité d'orthogonalité est remarquée pour la reconnaissance de figures non symétriques dans la résolution du problème 3. Le manque d'orthogonalité est trouvé à partir du pliage. Cependant, Manon considère que la mise en œuvre de l'orthogonalité n'était pas suffisante pour la preuve, c'est-à-dire cette propriété est attachée au pliage, c'est-à-dire au problème de la reconnaissance, ou au problème de construction plutôt qu'au problème de preuve.

2.4 Salomé & Karen (6)

2.4.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Salomé & Karen (6) trace le support perpendiculaire à l'équerre et reporte la distance au compas. Les opérateurs mobilisés sont les mêmes que ceux des binômes Delphine & Baptiste (1) et Marion & Manon (4). Dans le protocole, les informations concernant les utilisations des instruments sont « perpendiculaire » [22, 26] attachée à la règle et « reporte » [24] attaché au compas.

Salomé & Karen (6) pour le problème 1

20. S : le symétrique, **ça veut dire que si tu plies**, ben,
21. K : ouais.
22. S : et ben, ça doit être simple. Regarde, **je vais faire un truc, perpendiculaire, par rapport à la droite**. … regarde, voilà, tu prolonges après.
23. K : t'es sûr ?
24. S : hum. On va voir si ça marche ou pas …, houp, là, **tu prends un compas**, **tu … reportes la** … là. Non ! c'est de …
25. K : c'est, ça me dit quelque chose. Mais, j'suis pas sûr comme ça, en fait. On voit bien la …, attends, il y a pas de mine.
26. S : après, je fais une autre perpendiculaire. … **quand c'est symétrique, il faut que ça se plie, les deux côtés.**

Les propriétés explicitées par les élèves dans le discours nous permet de considérer le contrôle (SK-Cσ1) ou (SK-Cσ2) pour le choix des opérateurs, comme Delphine & Baptiste (1) et Marion & Manon (4). Comme c'est surtout Salomé qui les remarque, le contrôle relève de Salomé.

> SK-Cσ1 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)
>
> SK-Cσ2 : l'orthogonalité et l'équidistance sont nécessaires pour la construction d'un point symétrique, parce qu'ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par par la reconnaissance mobilisant d'autres moyens (la perception globale, le pliage, la propriété de conservation de longueur, etc.)

Dans le protocole, Salomé provoque aussi l'idée de pliage au début de la réalisation [20] et aussi une définition de la symétrie orthogonale par pliage et superposition telle que « quand c’est symétrique, il faut que ça se plie, les deux côtés » [26] pendant la réalisation. La définition peut être formulée comme ce qui suit.

SKD : Sym (PQ, P’Q’, d) ⇔ PQ et PQ’ se plie

De même que Delphine (Delphine & Baptiste (1)), cette définition ne permet pas directement la désignation des opérateurs R1 et R2. Nous considérons que le contrôle (SK-Cσ2) qui repose sur une reconnaissance par le pliage est mobilisé par Salomé pour le choix des opérateurs.

Dans le protocole du binôme Salomé & Karen (6), la phase de validation du résultat produit n’est pas explicite. Cependant, le pliage évoqué auparavant serait mobilisé comme contrôle de la validation du résultat. Dans le discours des élèves, l’action de réalisation d’un segment symétrique sont exprimés comme « mets un trait » [31] et « un segment » [34].

Salomé & Karen (6) pour le problème 1
30. S : houp, c’est A’ …, houp, B’, … voilà. On a tout écrit.
31. K : mets un trait.
32. S : non, mais non.
33. K : ah si,
34. S : ah si, ça fait un segment
35. K : ben oui.
36. S : A’B’.

Nous considérons que la phrase « ça fait un segment » [34] indique la mobilisation d’un contrôle qui permet de prédire que le symétrique à construire n’est un bipoint mais un segment. Ce serait le contrôle de la conservation de la nature d’objets géométriques (SK-Cσ3).

SK-Cσ3 : la symétrie conserve la nature des objets à transformer aux objets transformés « si Sym (F, F’, *d*) alors Nat (F) = Nat (F’) » (Nat : nature)

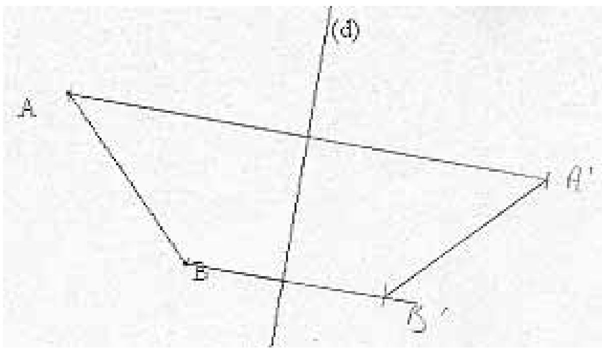


Figure VI.32 Réalisation par Salomé & Karen (6)

2.4.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans la phase de conjecture, le binôme Salomé & Karen (6) propose la réponse « oui » tout de suite après la lecture des énoncés [52 :53]. Lorsque Karen établit une conjecture, elle propose un premier argument « milieu » [53] à partir des énoncés donnés.

Salomé & Karen (6) pour le problème 2

52. S : Soit M et N les milieux des côtés opposés … Les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN ? Répondre oui, non, ou pas toujours, et démontrer. **Ah, oui, je pense**. Et toi ?
53. K : rectangle ? Les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. **Ben oui !** parce que, regarde, ça c'est le **milieu** comme …, M et N, c'est **milieu**. Ben, c'est **forcément** … symétrique.
54. S : oui, mais … il faut démontrer.
55. K : ben, on répond déjà **oui**.

Par ailleurs, Salomé ne mentionne aucun élément qui serait un argument. La perception globale de figures symétriques serait mobilisée pour reconnaître le symétrique.

Phase d'argumentation

Après avoir trouvé une conjecture « oui », Salomé considère la longueur de deux côtés opposés à partir du rectangle [62]. Les deux côtés opposés ayant la même longueur sont « AD = BC » et « AB = DC ». Puis, elles commencent à rédiger [64]. C'est Salomé qui rédige.

Salomé & Karen (6) pour le problème 2

60. S : attends.
61. K : à mon avis, c'est oui.
62. S : attends, déjà, on va mettre que, **comme ça, rectangle**, ben …, et là, **deux côtés opposés ont la même longueur**. OK ?
63. K : ouais.
64. S : j'écris ?

Pour le moment, bien que le binôme commence à rédiger une preuve, le rapport entre les propriétés évoquées et la symétrie n'est pas explicite. Les propriétés remarquées jusqu'ici sont : rectangle ; milieux ; la même longueur.

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par Salomé & Karen (6). La conjecture donnée dans la phase de reconnaissance était la réponse « symétrique ».

1 : Démonstration :
2 : ABCD rectangle : les droites (AB) et (DC) sont parallèles et de même
3 : longueurs
4 : MN milieux de AB et DC :
5 : AM = MB = DN = NC
6 : Donc les segments [AD] et [BC] sont symétriques
7 : par rapport à la droite [MN]

Analysons la structure de la preuve donnée par Salomé & Karen (6). Les pas suivants de la preuve peuvent être identifiés.

i : ABCD rectangle $\rightarrow$ AB // DC et AB = DC

ii : MN milieu de AB et DC $\rightarrow$ AM = MB = DN = NC

iii : $\rightarrow$ Sym (AD, BC, MN)

Le premier pas est identifié aux lignes (2) et (3) de la transcription. Deux propriétés (parallèle et la même longueur) sont déduites du rectangle (i). Ce raisonnement est identifié à la phase d'argumentation. Les règles de propriétés du rectangle seraient mobilisées comme opérateurs. Le deuxième pas est identifié aux lignes (4) et (5). Il utilise comme hypothèse l'énoncé « MN milieu de AB et DC » qui n'a pas de sens en mathématiques. Dans le discours, Salomé explicite « comme il coupe en moitié » [76]. Nous pouvons interpréter que l'énoncé « MN milieu de AB et DC » signifie « la droite MN coupe les segments AB et DC en leurs milieux ». Or, du point de vue mathématique, celui-ci ne déduit pas l'égalité « MB = DN », mais celles de « AM = MB » et « DN = NC ». A cet égard, nous identifions un autre pas implicite suivant (iv).

iv : AM = MB, DN = NC et AB = DC $\rightarrow$ AM = MB = DN = NC

Nous avons ajouté comme hypothèse un énoncé « AB = DC » qui est identifié dans le protocole : « parce qu'ils sont de même longueur » [76]. En outre, l'alignement est aussi nécessaire. La règle mobilisée comme opérateur ici est la transitivité de l'égalité.

Salomé & Karen (6) pour le problème 2

72. S : attends, alors, attends …, les droites …
73. K : AD et BC.
74. S : ouais, DC … sont parallèle
75. K : et de même longueur.
76. S : et de même longueur. Et comme **il coupe en moitié, ça fait deux moitiés, parce qu'ils sont de même longueur.**

…

79. K : et déjà, **MN, ça coupe le rectangle en deux.**
80. S : attends, attends.
81. K : **c'est forcément symétrique**. Je suis désolée, moi, c'est …
82. S : attends, ABCD rectangle, on va mettre, deux points. Les droites AB et DC sont parallèles et de même longueur. Ouais, et après, soit M, N les milieux des côtés

opposés … [Salomé lit les énoncés du problème]
83. K : mais, **si c'est les milieux des côtés opposés,**
84. S : ben, c'est un peu normal que c'est symétrique.
85. K : … attends, on va mettre, MN milieux
…
90. S : milieux …, non, j'ai mis comme ça …, s'ils sont, si elles sont de même longueur, **si il coupe … par les milieux**, ben …, **ce sera la même longueur AM et MB** et
91. K : ah ouais, comme c'est un rectangle.
92. S : DN et NC. … MN … je vais marquer quoi ? … MN est milieu

Le troisième pas est identifié à partir de trois dernières lignes (6 et 7) dans la transcription. C'est un pas qui caractérise le symétrique et produit une conclusion. Les hypothèses mobilisées dans la troisième phase de raisonnements ne sont pas explicites. Si elle est la propriété évoquée juste avant la conclusion, l'hypothèse serait « AM = MB = DN = NC ». Mais, le parallélisme déduit au premier pas n'est pas encore utilisé dans la preuve. Si une telle propriété est aussi prise en compte, l'hypothèse serait « AM = MB = DN = NC et AB // DC ». Or, dans le protocole, Salomé ne précise pas ce point. Et ni le rapport entre les propriétés évoquées et la symétrie, mais plutôt de revenir de temps en temps aux énoncés du problème posé [82 ; 102 ; 108]. Enfin, elle s'accorde avec une justification verbale de Karen [103] et rédige la conclusion. Nous considérons donc que Salomé ne trouve pas une règle ou opérateur qui lui permet d'aboutir explicitement à la conclusion, comme le cas de Manon précédemment analysé (Figure VI.29, p.196).

Salomé & Karen (6) pour le problème 2
101. K : égal DN égal NC.
102. S : NC. Et les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. Ben oui, du coup …,
103. K : ben donc, **c'est bien symétrique. Parce … parce que tous les côtés AM, MB, DN, NC, c'est de même longueur, et que AD et BC, c'est de même longueur.**
104. S : ouais.
105. K : et que
106. S : ouais, c'est de même …bon, on va mettre donc,
107. K : donc, AD symétrique à BC.
108. S : ah attends, ils disent, en fait …, sont-ils symétriques par rapport à la droite MN ? Et après, ils disent, hum, ben, je crois qu'ils veulent savoir si c'est toujours. Ben oui, c'est toujours, de toute façon.
109. K : ouais.
110. S : vu que … vu que, toujours si tu prends le … le milieu de chaque côté, c'est un rectangle. Donc, il faut dire oui.
111. K : ouais.

Par contre, Karen propose une caractérisation de la symétrie orthogonale par les milieux [81 ; 83], par la coupe de rectangle. « ça coupe le rectangle en deux » [79] et par les propriétés énoncés dans la preuve [103]. Les arguments s'ajoutent les uns aux autres comme l'argumentation dans le sens de Duval (1991). Du point de vue de la règle, les propriétés s'ajoutent les unes aux autres à l'antécédent d'une règle qui caractérise la symétrie. L'argument « ça coupe le rectangle en deux » est aussi identifié chez Marion du binôme Manon & Marion (4). La règle suivante est donc mobilisée par Karen.

SK-Sr1 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F' et F'') par une droite *d* alors Sym (F', F'', *d*)

En ce qui concerne l'orthogonalité, Salomé & Karen (6) ne la remarque pas tout au long de la résolution du problème 2, alors que Salomé trace une droite perpendiculaire en l'explicitant pour la résolution du problème 1, la construction d'un segment symétrique. Nous voyons encore ici, comme l'analyse du binôme Manon & Marion (4), que *la propriété d'orthogonalité est attachée à la résolution de la construction, mais non pas forcément à d'autres problèmes de la symétrie orthogonale*.

2.4.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Salomé & Karen (6), la première conjecture de Karen est « oui, symétrique » [125]. Cependant, Salomé réagit tout de suite « je suis pas sûre » et propose un pliage « si tu plies » [126]. Salomé considère la non superposition de deux segments : « ça n'a pas sur l'autre côté » [126]. Nous diagnostiquons chez Salomé une reconnaissance par le pliage mental. En effet, elle ne plie pas effectivement. Karen conteste la réponse de Salomé [127], mais elle l'accepte tout de suite [129]. A ce moment là, les élèves toutes les deux effectuent la reconnaissance par le pliage mental. Puis, Salomé remarque aussi que les segments sont symétriques lorsque le parallélogramme est un rectangle ou un carré [132 : 134]. Ainsi, leur conjecture est arrivée à « pas toujours ».

Salomé & Karen (6) pour le problème 3

125. K : les segments AB …, c'est symétrique AB, c'est où, AB ? AB, et ben … **oui**.
126. S : non, **je suis pas sûr,** regarde, **si tu plies, ben, ça n'a pas sur l'autre côté.**
127. K : **si !**
128. S : ben **non, ça va pas**.
129. K : ah **oui ?** … donc **non**.
130. S : non, mais attends.
131. K : …
132. S : **c'est pas toujours. Si c'est un rectangle, ça ira.**
133. K : ouais.
134. S : ou **si c'est un carré, aussi ça ira**. Tu vois ?
135. K : mais c'est marqué parallélogramme.
136. S : oui mais, un carré et un rectangle, c'est un parallélogramme.
137. K : ah oui.

Nous identifions dans les phases de la conjecture et de l'argumentation la règle suivante sur le pliage qui est aussi identifiée dans la résolution par le binôme Manon & Marion (4).

SK-Nr1 : si non Pliage (F, F', *d*) alors non Sym (F, F', *d*)

Phase d'argumentation

Avant commencer à rédiger une preuve, Salomé & Karen (6) cherchent des arguments pour démontrer « non symétrique ». Salomé propose de tracer le symétrique [148]. Tout de suite après, avant qu'elle trace un dessin, elle aperçoit de la nécessité des orthogonalités « il faut qu'elle soit perpendiculaire au segment AB et DC » [150]. L'orthogonalité est remarquée par la construction de symétriques.

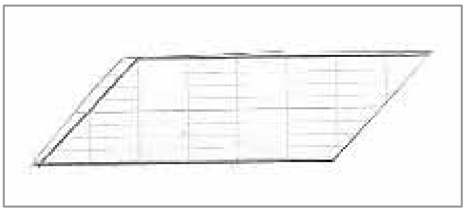
Salomé & Karen (6) pour le problème 3
148 : S : attends, si on plie, c'est rapide, voilà .... Attends, normalement, on avait un truc pour … attends, **on va essayer de tracer le symétrique de celui-là**. Ben, tu vois ?
149 : K : ouais.
150 : S : pour que …, **parce que en fait, il faut que ce soit, la droite MN, il faut qu'elle soit perpendiculaire au segment AB et DC.**
151 : K : On dit ça ?
152 : S : pour ça marche.
153 : K : ouais.
154 : S : non, non, ça marchera pas, mais … on essaie. On essaie de tracer un truc.
155 : K : parallélogramme.

Salomé commence à tracer un parallélogramme sur la feuille du problème dont une partie droite sera effacée plus tard (voir la transcription de la preuve plus loin). Elle demande après l'avoir tracé « t'es sûre ? si tu plies, c'est pas symétrique » [172]. Salomé et Karen, toutes les deux, ne sont pas sûres que le parallélogramme puisse être superposable lors du pliage. Ainsi, Karen propose de tracer un autre parallélogramme sur un brouillon [173].

Salomé & Karen (6) pour le problème 3
171. K : c'est le milieu de … M c'est le milieu
172. S : bon, c'est pas symétrique. Là, **t'es sûre ? si tu plies, c'est pas symétrique**, ouais, ben.
173. K : en fait, **il faut que tu traces sur un brouillon.**
174. S : ouais.

Salomé et Karen (6) tracent un autre parallélogramme sur un brouillon et découpent comme le dessin ci-contre. Elles trouvent que les deux côtés ne se superposent pas [176], alors que Karen remarque que deux parties séparées par le pli sont égales [177 ; 179 ; 183]. Ainsi, la reconnaissance est effectuée par le pliage effectif dans ce cas.

Salomé & Karen (6) pour le problème 3
176. S : après **on découpe**. Mais attends, regarde. … non, de toute façon, ce sera pas …
177. K : **c'est pareil, là ?**
178. S : quoi ?
179. K : **c'est un peu pareil, hein ?**
180. S : ouais, ouais.
181. K : …
182. S : alors, ce qu'on va faire …,
183. K : regarde, **c'est presque pareil.**



Puis Salomé propose de tracer l'image symétrique pour montrer que le segment DC n'est pas symétrique de AB par rapport à MN [184 ; 186 ; 188] (voir la transcription de la preuve plus loin). Le contrôle mobilisé pour cette procédure est celui qui repose sur la validité de constructions : « si un objet donné n'est pas identique au symétrique tracé, alors il n'est pas symétrique ».

Salomé & Karen (6) pour le problème 3

184. S : regarde. **On va dessiner le symétrique, comme ça, ça sera démontré. OK ?**
185. K : à mon avis, toi, tu plies, non même pas.
186. S : regarde, **je vais dessiner le symétrique de l'autre, par rapport à la droite**, machin là ?
187. K : la droite machin.
188. S : je fais la droite MN. Et je vais dessiner le symétrique. Ça, **ça démontrera que c'est pas le vrai symétrique**. Tu vois ce que je veux dire ?

Lors de la réalisation du symétrique du segment AB, Salomé remarque encore la nécessité d'orthogonalité. Elle verbalise explicitement « pour que ce soit symétrique … il faut la perpendiculaire à MN » [200]. Or, cette nécessité est liée étroitement au pliage ou à la construction. En effet, le discours de Salomé [202] indique que la mobilisation d'orthogonalité réalise un dessin qui est superposable lors du pliage. Le pliage fonctionne comme contrôle du résultat obtenu de la construction. Le contrôle de la mobilisation d'orthogonalité est le fait que la procédure permet une réalisation satisfaisante pour le pliage. L'orthogonalité n'est donc pas attachée à la reconnaissance, mais à la construction ou au pliage.

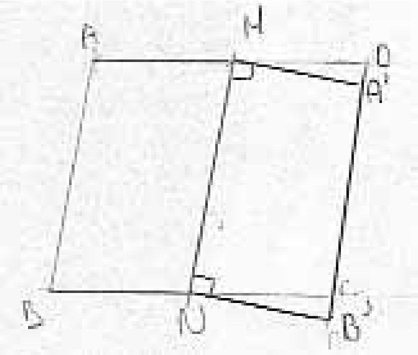
Salomé & Karen (6) pour le problème 3

199. K : il faut deux côtés écrits comme ça.
200. S : … non, oui, attends, ah oui, non, parce que, en fait, on fait le … le perpendiculaire, non ? Ben, **pour que ce soit symétrique, il faut comme ça en fait. il faut la perpendiculaire à MN**, je crois.
201. K : perpendiculaire à MN ?
202. S : en fait, on s'est trompé tout à l'heure. … **comme ça, tu sais, comme ça si tu plies, ça se pliera**.
203. K : ben donc, tu reportes tes mesures de l'autre côté.
204. S : ouais, après, il faut que je reporte la mesure. OK. Ah, oui, oui, c'est ça, en fait, **il faut la perpendiculaire**. Tout à l'heure, ben, c'était long, parce que c'était déjà …, même si c'était pas perpendiculaire ... Voilà, maintenant on reporte la mesure.
205. K : après, il va falloir démontrer.

Enfin le dessin réalisé n'est pas correct. La droite perpendiculaire ne passe pas par le point origine de la symétrie. Le pliage mental l'accepte quand même comme symétrique. Nous considérons que Salomé prend les points M et N, parce qu'ils sont privilégiés, c'est-à-dire ils sont remarquables pour elle.

<u>Phase de rédaction</u>

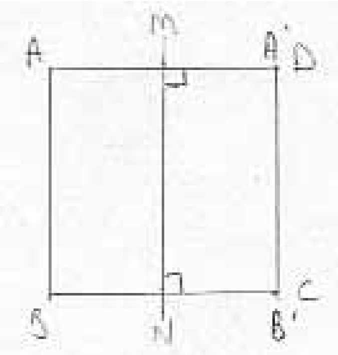
La preuve donnée pour le problème 3 par Salomé & Karen (6) est la suivante.



1 : [A’B’] est le symétrique de [AB] par rapport

2 : à la droite (MN) donc [CD] n’est pas symétrique

3 : de [AB] par rapport à (MN)



4 : Dans un carré ou dans un rectangle, [AB] et

5 : [DC] sont symétrique par rapport à (MN)

6 : Donc les droites [AB] et [BC] ne sont <u>pas</u>

7 : <u>toujours</u> symétriques à (MN)

La preuve tracée et rédigée peut être dissociée en deux parties. La première partie est le dessin en haut et les lignes (1, 2 et 3). La deuxième est le dessin en bas et les lignes (4 et 5). Le pas de preuve suivant est donné dans la première partie.

i : [A’B’] ne coïncide pas à [DC] $\rightarrow$ non Sym (AB, DC, MN)

La preuve de la première partie s’appuie sur le contrôle que nous avons identifié dans la phase d’argumentation. Nous le reprenons ici comme une règle.

> SK-Nr2 : si un objet donné n’est pas identique au symétrique tracé, alors il n’est pas symétrique

La règle est perceptive. En effet, l’identification de deux objets ne peut être effectuée que par la perception. D’après la conclusion de cette partie (non symétrique), le binôme reconnaît par la perception de la coïncidence de deux objets géométriques que « A’B’ » est différent de « DC ». Dans le protocole pour la rédaction de la première partie, nous ne pouvons pas avoir d’information qui complète la preuve donnée.

La deuxième partie de la preuve propose deux pas suivants (ii) et (iii) de la preuve.

ii : ABCD carré $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

iii : ABCD rectangle $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Les milieux M et N qui doivent être pris en compte sont implicites dans la preuve. Mais, nous les identifions dans le protocole [261]. La justification de ces deux pas n'est pas donnée dans la preuve. Le seul indice de la justification est le dessin ayant un code de l'angle droit et les points (A' et B'). Nous interprétons, de même que la première partie de la preuve, que Salomé et Karen reconnaissent deux segments symétriques dans un carré ou rectangle par le pliage mental comme dans la phase de conjecture et justifient par la réalisation d'un segment identique ([A'B'] et [DC]) [263]. Dans ce cas, la règle suivante doit être mobilisée.

SK-Nr3 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors il est symétrique

Salomé & Karen (6) pour le problème 3

261. K : là, on va démontrer que la droite qui passe par **les milieux**, c'est MN, attends,
262. S : c'est bien symétrique ?
263. K : **ouais. … donc, là, ça marche**, en fait. A, B, C, D, et D et C, **c'est en même temps A'**
264. S : et …, A' et B'.
265. K : il faut montrer que c'est les angles droits, non ?
266. S : tu peux pas l'angle droit, ah si. Non ?
267. K : oui, oui, attends.
268. S : il faut dire que **c'est perpendiculaire**.
269. K : oui, c'est perpendiculaire. Et là, c'est comme perpendiculaire, ça c'est les mêmes.
270. S : il faut marquer aussi A' et B'. Tu écris ?

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses des trois résolutions.

- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire. La propriété d'orthogonalité est explicitée par Salomé. Cependant, il semblait que la règle « si PP' $\perp$ d et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*) » n'était pas mobilisée.
- L'orthogonalité n'est jamais évoquée pendant la résolution du problème 2, la reconnaissance de figures symétriques. La nécessité d'orthogonalité est remarquée pour la reconnaissance de figures non symétriques dans la résolution du problème 3. Le manque d'orthogonalité est trouvé à partir de la construction et du pliage afin de justifier la réponse de la reconnaissance. Cette propriété est attachée aux problèmes de justification et de construction plutôt qu'à celui de reconnaissance.
- La preuve pour le problème 2 n'utilise que les propriétés géométriques qui apparaissent aussi dans le problème 3, c'est-à-dire sans orthogonalité. De ce fait, la preuve et les règles mobilisées sont contradictoires à la résolution de celui-ci. La règle de la caractérisation de la symétrie pour le problème 2 est donc temporaire.

2.5 Estelle & Mélodie (7)

2.5.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Estelle & Mélodie (7) utilise des procédures différentes pour la réalisation du symétrique du point A et pour celle du point B. L'équerre et le compas sont utilisés pour le point B. En revanche, seul le compas est utilisé pour tracer le symétrique du point A. Du plus, la procédure identifiée pour le symétrique du point A utilise le symétrique B' qui est déjà tracé auparavant. Nous présentons premièrement la structure de la résolution, puis l'analyse de la réalisation du premier point symétrique et le deuxième. Les processus suivants sont identifiés à partir des produits des élèves et de l'observation de l'observateur.

1. tracer une droite perpendiculaire passant par B avec l'équerre.
2. reporter au compas la distance entre B et l'intersection (N) de l'autre côté de l'axe.
3. reporter de l'autre côté de l'axe au compas une distance d'un point sur l'axe à côté de la marque (d) au point P
4. reporter la longueur AB au compas à partir du point B'
5. tracer un segment à partir de cette intersection (A') jusqu'à B'.
6. tracer un segment pointé entre A et A'.

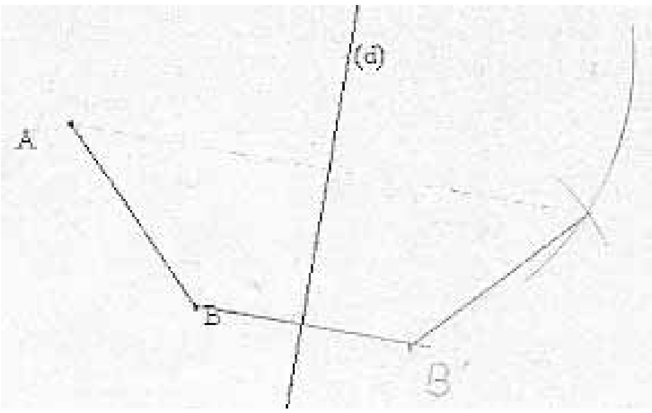


Figure VI.33 Réalisation par le binôme Estelle & Mélodie (7)

La réalisation du symétrique A' repose sur le résultat obtenu par la résolution du problème P(B). Autrement dit, le problème abordé n'est pas le même que le problème P(B) pour le symétrique B'. Nous considérons le problème suivant P'(A) qui est abordé à cette étape. Nous avons utilisé la même notation (prime) pour le problème P'([AB]), parce que dans les deux cas, il existe déjà certains symétriques tracés par la même symétrie.

> P'(point) : tracer le symétrique d'un point donnée lorsque un point symétrique par la même symétrie est déjà tracé

Ainsi l'enchaînement de problèmes peut être présenté comme le schéma ci-dessous.

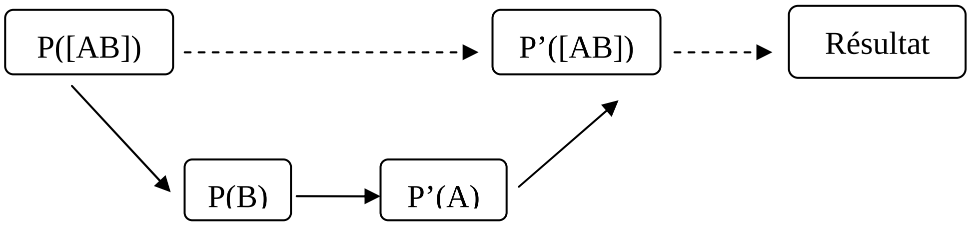


Figure VI.34 L'enchaînement de problèmes pour Estelle & Mélodie (7)

La résolution du problème P(B) est effectuée avec la règle et le compas. Le processus de la réalisation est le même que ceux des binômes Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4) et Salomé & Karen (6), ainsi que les opérateurs mobilisés. Notre analyse porte ici surtout sur les contrôles à partir des observables dans le protocole.

Dans le protocole, ces opérateurs sont choisis surtout par Mélodie et c'est elle qui résout le problème P(B). Son discours explicite que l'orthogonalité est attachée à l'utilisation de l'équerre [6]. En revanche, Estelle propose au départ de tracer une droite horizontale passant par le point B ([5] ; on ne peut pas le voir dans le discours, mais l'observateur l'a remarqué) et aussi l'utilisation d'un compas [11-12] (à ce moment là, la droite perpendiculaire n'est pas encore tracé).

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 1

2. Mélodie : il faut qu'on trace comment ?
3. E : ben, je sais pas. Mais, déjà …
4. M : alors, … comme ça avec …,
5. E : ah, oui, mais **il faut comme ça** [propose de tracer une droite horizontale]
6. M : non, on en a pas besoin, tu fais, **trace en perpendiculaire**,
7. E : mais, c'est plus simple avec ça,
8. M : ben, je sais pas, mais j'en ai appris que …
9. E : … aussi,
10. M : je pense que tu fais … laisse tomber, laisse tomber
11. E :… symétrie à côté …
12. M : oui, oui, **mais pourquoi avec le compas**, on va laisser tomber.
13. E : si, **il faut que ce soit pareil**, mais **tu prends la même longueur**, **tu l'amènes de l'autre côté**,
14. M : pour le segment …, c'est ça, et puis, après, on essaie de …, de toute façon,
15. E : quoi ?
16. M : on fait avec le … l'équerre, on va, et puis avec le compas

L'utilisation de l'équerre avec le discours « perpendiculaire » [6] indique que la propriété de l'orthogonalité est nécessaire pour la réalisation d'un point symétrique. Celle du compas indique la mobilisation de milieu. Ces deux propriétés nous permettent d'identifier les contrôles suivants EM-Cσ1 ou EM-Cσ2 possibles à la réalisation d'un support qui relie deux points symétriques.

EM-Cσ1 : si P$x \perp$ d et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)

EM-Cσ2 : l'orthogonalité et l'équidistance sont nécessaires pour la construction d'un point symétrique, parce qu'ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par la perception globale ou l'effet de miroir

Dans le protocole, Mélodie répond « mais j'en ai appris que … » [8] à Estelle qui affirme que sa proposition est plus simple [7]. Cette communication indique la mobilisation d'un autre contrôle pour choix d'opérateurs. La nécessité d'orthogonalité est soumise à l'effet de contrat, c'est-à-dire comme l'enseignant ou le manuel dit de construire une droite perpendiculaire, elle le fait.

Ces contrôles sont plutôt ceux de Mélodie que d'Estelle. En effet, celle-ci propose de tracer une droite horizontale comme support et ne prend pas en compte l'orthogonalité. Elle n'est pas d'accord avec la réalisation d'une droite perpendiculaire avec l'équerre [10-13]. En outre, en proposant l'utilisation d'un compas, elle explicite sa perception globale de segments symétriques « il faut que ce soit pareil » [13] et envisage de reporter la longueur de l'autre côté de l'axe « tu prends la même longueur, tu l'amènes de l'autre côté » [13]. Nous ne pouvons pas explicitement la longueur de quel objet il s'agit. Ce serait soit la longueur du segment, soit la distance d'un point sur l'axe au point B. Cependant, nous considérons qu'elle mobilise comme contrôle la perception globale de segments symétriques et de support horizontal.

Pour résoudre le problème « P'(A) : tracer le symétrique d'un point donnée lorsque un point symétrique par la même symétrie est déjà tracé », le binôme Estelle & Mélodie (7) réalise d'une façon différente de celle pour le problème P(B). Il effectue deux actions : « tracer avec le compas de l'autre côté de l'axe un arc dont le centre est un point sur l'axe et qui passe par le point à l'origine » (Figure VI.35) et « reporter au compas la longueur du segment » (Figure VI.36).

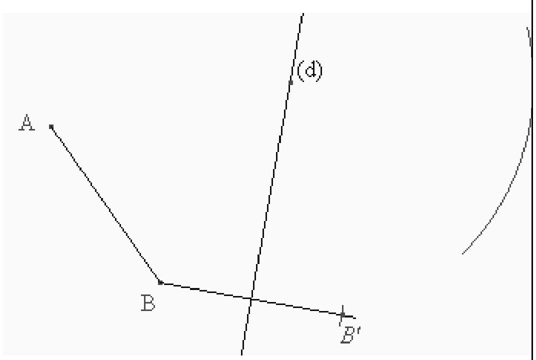


Figure VI.35 La première étape

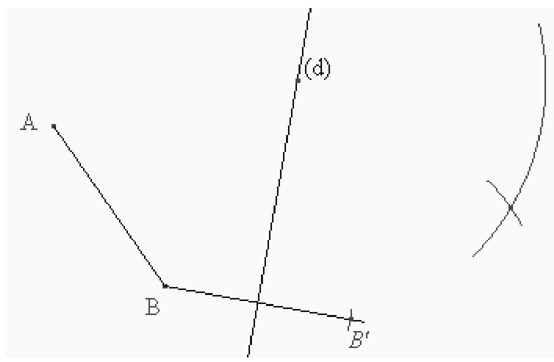


Figure VI.36 La deuxième étape

Les opérateurs suivants sont identifiés à partir du processus de la réalisation. C'est Estelle qui réalise la construction [21-22].

EM-Cr1 : reporter la distance entre le point A et un point quelconque sur l'axe de l'autre côté de l'axe

EM-Cr2 : reporter la longueur du segment de l'autre côté de la droite

L'utilisation d'un compas à la première étape pour l'opérateur EM-Cr1 nous permet de diagnostiquer la mobilisation de la propriété de l'équidistance à partir d'un point quelconque sur l'axe [20-21]. Puis le compas est encore utilisé dans la deuxième étape pour l'opérateur EM-Cr2. Dans ce cas, la mobilisation de la propriété de conservation de la longueur du segment par la symétrie est identifiée [34]. En effet, grâce à cette propriété de la symétrie, le report de la longueur peut être réalisé.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 1

19. E : oui, mais regarde, si tu fais ça, si tu reportes là, ça fait pareil, c'est simple
20. M : mais, **comment tu sais quel point tu prends sur la droite d ?**
21. E : mais, **tu traces un trait d'abord, c'est pour ça, j'ai pris l'équerre** [plutôt le compas]
22. M : d'accord, **bon, vas-y, si tu veux**
23. E : t'as rien compris,
24. M : non.
25. E : je te montre

…

33. E : ah, oui, après il faut …là, tu sais pas quel est le …
34. M : mais **tu mesuras**, tout simplement, **ça va tomber sur un trait à un moment**
35. E : ah putain, t'es con… comme quoi …

Il semble que la procédure mobilisée est bien analytique. Le contrôle EMσ5 suivant qui permet de choisir les opérateurs peut être considéré.

EM-Cσ3 : si PM = Mx ($\forall$M $\in$ d) et PQ = xQ' (Sym (Q, Q', d)) alors Sym (P, x, d)

Le contrôle (EM-Cσ3) est une règle qui n'est jamais vue dans les manuels scolaires, ni considérée dans l'analyse théorique du Chapitre IV. Parce que la réalisation repose sur le résultat précédemment obtenu ou d'autres points symétriques, c'est-à-dire cette règle ne peut pas être mobilisée pour la réalisation du premier point symétrique.

Or, la règle (EM-Cσ3) est analytique mais invalide. La mobilisation de la perception globale de la position de point symétrique ou un critère analytique mais implicite sur le point symétrique A' est encore nécessaire. En effet, du point de vue mathématique, il existe deux points intersections entre deux cercles qui permettent deux arcs tracés par les opérateurs EM-Cr1 et EM-Cr2 (Figure VI.37). Un autre critère implicite est donc mobilisé pour la réalisation. La mobilisation de la perception globale de la position du point symétrique ne permet pas de remarquer l'autre intersection. En effet, le binôme Estelle & Mélodie (7) ne trace qu'une partie du cercle, c'est-à-dire un arc.

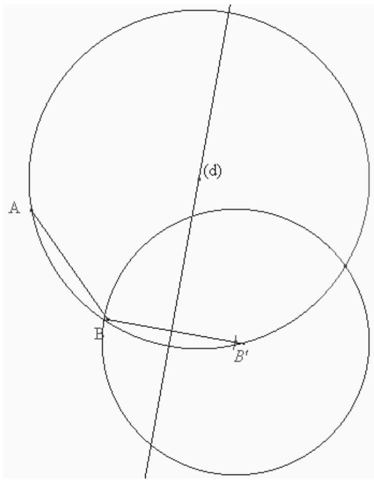


Figure VI.37 Il y a deux intersections entre deux cercles

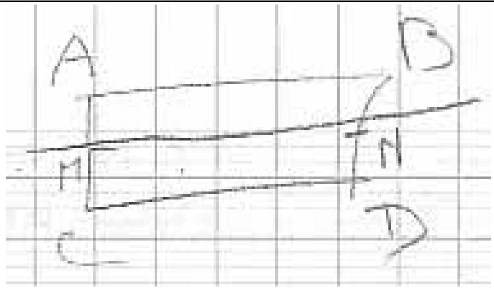
La résolution du problème P'(A) est effectuée surtout par Estelle, alors que celle du problème P(B) est par Mélodie. Et l'orthogonalité n'est pas prise en compte dans la procédure pour P'(A). Comme Estelle remarque à la première réalisation du point symétrique B' la droite horizontale, la nécessité de l'orthogonalité n'est pas toujours prise en comptes dans la symétrie orthogonale.

Dans la phase de validation du résultat obtenu, l'observable sur son moyen n'est pas identifié dans le protocole. La réalisation avec deux procédures différentes pour deux problèmes ayant la même nature est due à la modalité de l'expérimentation, le travail en binôme. Deux élèves qui mobilisent des conceptions différentes réalisent séparément le premier point et le deuxième.

2.5.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

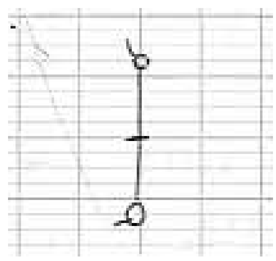
Dans la phase de conjecture, le problème posé est de reconnaître si la figure proposée est symétrique ou non. Estelle et Mélodie ne discutent pas au départ sur la reconnaissance. La première information sur le symétrique est l'intervention de Mélodie. Elle trace sur le brouillon à main levée un rectangle et une droite passant par les milieux (figure ci-dessous), et affirme que la droite MN est l'axe de symétrie [83]. Nous considérons que c'est le contrôle perceptif qui permet à Mélodie de reconnaître le symétrique. Parce qu'aucune information sur la relation entre deux segments symétriques n'est évoquée.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 2	
83. M : hop, hop, t'as une droite, et le couple ça et ça, **c'est l'axe de symétrie** 84. E : oui, … attends, … opposés A et B … maintenant j'essaie de comprendre là. Le segment AB …, non, AD, et B 85. M : mais, c'est **vu que M et N sont les milieux de AB et DC**. 86. E : oui, 87. M : eh ben, **BN est égale à MA**. T'es d'accord ? 88. E : donc, quoi ? 89. M : c'est **forcément l'axe de symétrie**. 90. E : mais, ça c'est pas avec …, attends …	 Le dessin tracé par Mélodie. La notation n'est pas celle du problème posé : B et C sont inverses.

Ensuite, Mélodie remarque les milieux « M et N sont les milieux de AB et DC » [85] et propose un argument, l'égalité de la longueur de deux segments : « BN est égale à MA » [87]. Pour le moment, le lien entre les arguments proposés et la conclusion n'est pas explicite. Nous considérons que c'est une explication descriptive qui explique un phénomène concernant la symétrie.

<u>Phase d'argumentation</u>

Plus tard, Mélodie considère un argument, la symétrie centrale [130,] et explique à Estelle sur le brouillon que deux points sont symétriques par rapport à un point [132 ; 134].

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 2	
130. M : **oui, c'est forcément**, 131. E : quoi ? 132. M : **quand t'as, par exemple, un point là et un point là, tu as une droite au milieu, t'as un milieu** 133. E : oui, 134. M : **c'est forcément ces deux points sont symétriques, symétriques par rapport au point**,	

A partir du discours de Mélodie [134] et le dessin tracé sur le brouillon (la figure ci-dessus), le fait que le symétrique par rapport à un point (Sym (P, P', M)) est déduit du milieu peut être observé. La règle suivante est ainsi mobilisée comme opérateur ou permis d'inférer.

EM-Sr1 : si M milieu de [PP'] alors Sym (P, P', M)

La règle est valide, voire théorique, malgré qu'elle soit de la symétrie centrale.

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve suivante est écrite par le binôme Estelle & Mélodie (7). La conjecture dans la phase de reconnaissance n'est pas explicite dans le protocole, mais c'est la réponse « oui, symétrique ».

1 : ~~Si [MN] est le milieu de [AB] et [DC] alors [MN] est~~
2 : ~~l'axe de symétrie de ADBCB~~[6]
3 : On pense que M et N sont les milieux des segments
4 : [AB] et [DC] la droite (MN) est le symétrique.
5 : Si M est le milieu de [AB], M est le point de
6 : symétrie de [AB]. AM + MB = AB
7 : Donc si N est le milieu des côtés opposés
8 : DC, alors N est le point de symétrie
9 : de [DC]. DN + NC = DC

La phrase écrite aux deux lignes (3 et 4) explique une condition qui produit le symétrique et la conclusion générale qui est mal formulée (i). Deux pas de preuve ayant la même nature sont rédigés aux lignes (5 et 6) et (7, 8 et 9). Trois pas sont ainsi identifiés.

i : M et N milieux respectifs de [AB] et [DC] → Sym (AD, BC, MN)

ii : M milieu de [AB] → Sym (A, B, M) et AM + MB = AB

iii : N milieu de [DC] → Sym (D, C, N) et DN + NC = DC

Dans le discours des élèves, après la rédaction de deux lignes (3 et 4), c'est-à-dire le premier pas, Mélodie remarque aussi la perpendiculaire [166], mais elle ne discute pas pour le moment.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 2

166. M : non, c'est **perpendiculaire**, apparemment, c'est
167. E : les milieux, des droites …,
168. M : non ! les milieux des segments, parce que les crochets, ça veut dire seulement les segments,

Les symétries centrales des deux derniers pas (ii) et (iii) sont considérées dans la phase d'argumentation. La règle (EM-Sr1) est mobilisée comme opérateur par Mélodie. Le discours des élèves indique qu'Estelle rédige d'après la proposition de Mélodie. Cependant, les expressions « AM + MB = AB » et « DN + NC = DC » sont ajoutées par Estelle. Dans le protocole, nous repérons que c'est Estelle qui les considère et qui rédige après la symétrie orthogonale évoquée par Mélodie [179 ; 181]. Leur rapport avec d'autres propriétés ou la symétrie n'est pas explicité dans le discours.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 2

175. E : attends, mais dis moi, je t'écris franchement.
176. M : **si M est le milieu de AB, M est le symé... M est le point de symétrie de A et B.**
177. E : attends, si M est le milieu de AB, tu veux dire quoi, après ? M est le point de symétrie de AB …, ben oui, c'est ça. …
178. M : **c'est la même chose pour D et C**, **si N est le milieu de DC**
179. E : et attends, hum, … mais là **il faudrait mettre ça, il faut mettre ça,**

[6] Cette partie est effacée dans la rédaction.

180. M : ben oui,
181. E : **AM + MB = AB**, et non, il faut mettre ça pour DC
182. M : oui, si N

Après avoir rédigé jusqu'à la ligne (9), Mélodie remarque encore l'orthogonalité [210]. Cependant, Estelle veut finir la preuve [213] et la rédaction est terminée sans arriver à la conclusion générale. Le discours de Mélodie indique que la preuve n'est pas complète : « on n'a rien démontré » [214]. En outre, à partir de son discours « un point de symétrie, c'est-à-dire la symétrie, on peut être partout » [214], nous interprétons que La symétrie centrale n'est pas suffisante pour que deux points soient symétriques par rapport à une droite. Autrement dit, la nécessité d'orthogonalité pour la caractérisation de symétriques est un peu évoquée.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 2
208. M : quand dans un rectangle,
209. E : oui,
210. M : tu mets deux points, deux milieux opposés, tu traces une droite, et ben **c'est forcément perpendiculaire. La droite est forcément perpendiculaire là**.
211. E : oui
212. M : **c'est la propriété**, ça.
213. E : moi, **je sais pas, on va finir là**
214. M : **on n'a rien démontré** … on a commencé à démontrer, mais … tu sais, c'est le point, tu sais ce que c'est, **un point de symétrie, c'est-à-dire la symétrie, on peut être partout**
215. E : ben non, parce que c'est …, elle est …
216. M : mais oui, justement, **il faut marquer ce que je suis en train de dire**

L'analyse présenté jusqu'ici est plutôt celle de Mélodie. Du côté Estelle, elle a une conception différente de celle de Mélodie. Nous l'analysons ici. La partie effacée dans la preuve est rédigée par Estelle. Lors de la rédaction des lignes (3 et 4) par Mélodie, Estelle ne saisit pas la phrase « M et N sont les milieux des droites » [147 ; 153]. Elle préfère plutôt « une droite MN » [151]. A partir de cela, nous interprétons que sa reconnaissance de figures est globale. En revanche, Mélodie décompose les segments symétriques en points symétriques. En ce qui concerne l'orthogonalité, la propriété d'orthogonalité n'est pas prise en compte par Estelle dans la reconnaissance, ni dans la preuve. Ce point est cohérent avec l'analyse faite pour sa résolution. Dans la rédaction, Estelle écrit trois dernières lignes (7, 8 et 9) et ajoute « AM + MB = AB » à la ligne (6). Nous ne pouvons pas bien savoir d'où vient cette expression de l'addition de deux segments dans les discours d'Estelle.

2.5.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

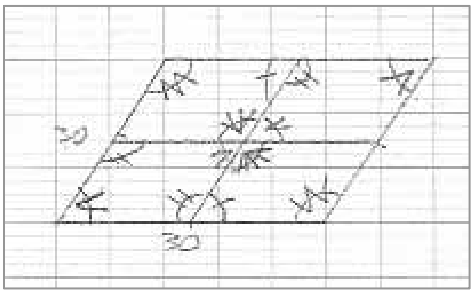
Dans la phase de conjecture, le problème posé est de reconnaître, si la figure donnée est symétrique ou non. Mélodie remarque d'abord que le problème ressemble au problème précédent sauf qu'il manque des angles droits [231]. Estelle propose la réponse « oui, symétrique » [237]. Et Mélodie est d'accord avec elle [238]. Cependant, Mélodie est attentive et hésite la réponse : « ça parait pas évident » [240]. Elle fait toujours l'attention à l'orthogonalité par rapport au problème précédent : [230 ; 244 ; 270 ; 278]. L'orthogonalité n'est pas fortement reliée au symétrique. Mélodie n'a pas de contrôle stable supportant la nécessité d'orthogonalité à la symétrie orthogonale. En revanche, Estelle n'y fait aucune attention et reconnaît le symétrique.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 3

230. M : mais, ça se ressemble, c'est la même chose que, là, **il y a pas d'angle droit**, ça change absolument rien.

…

236. M : …
237. E : **ben oui, ils sont symétriques à une droite** …,
238. M : ben si ça **c'est sûr qu'ils sont symétriques**, alors t'mets
239. E : humm,
240. M : **ça ça parait pas évident**
241. E : non mais …, ben oui, le dernier, c'est ce qu'il demande, ben oui, … c'est une droite, c'est pas un segment.
242. M : attends, **ça, ça est égale à ça, ça est égale à ça, celui-là est égale …, celui-là** …,
243. E : ah tu m'attends, parce que tu fasses c'est une croix comme ça ?
244. M : mais si, si il faut, **si je regarde les perpendiculaires** …
245. E : non, mais,
246. M : **c'est deux autres milieux**.



…

270. M : c'est l'inverse, il faut pas faire avec les angles et la longueur de segments. … c'est la même chose, **c'est exactement le même problème que l'autre, sauf qu'il y a pas d'angle droit**.

…

274. M : ça change rien.
275. E : quoi ?
276. M : ça change rien.
277. E : oui, je suis d'accord, mais pour qu'on y arrive,
278. M : ça change que c'est que là, **il y a pas d'angle droit. Il y a que ça qui change. Il y a pas un endroit où il y a des angles droits. Il y a que ça qui change.**
279 E : attends, les segments sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. … apparemment t'as compris, tu pourra démontrer.

Les propriétés géométriques remarquées sur le dessin associé sont les mesures d'angles et le milieu [242].

<u>Phase d'argumentation</u>

Avant commencer à écrire une preuve, Mélodie explique les propriétés remarquées pour la preuve. A partir du milieu [292], elle déduit deux égalités de longueur de segments : « AM = MD » [290] et « BN = NC » [294]. Dans le discours de Mélodie, l'expression « BN + NC = BC » est utilisée. Comme l'égalité de longueur « BN = NC » est déduite du milieu [292], nous considérons que l'expression « BN + NC = BC » en est aussi déduite et qu'elle indique l'alignement de trois points (B, N et C). Nous ne pouvons pas explicitement savoir sa signification dans le discours.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 3
282. M : je mets que … A, **AM = MD**
283. E : attends, attends, attends, tu vas mettre quoi ?
284. M : **AM = MD, donc**
…
290. M : je te montre ce que j'ai remarqué, d'accord ? c'est **AM = MD**, donc
291. E : AM …, ben non, AM ≠ MD
292. M : ben si, **c'est le milieu**
293. E : ah si si !
294. M : **BN = NC, donc BN + NC = BC**
295. E : oui, donc, si

Ensuite, Mélodie évoque l'égalité « BN = AM » [302]. Son argument explicité dans le discours est l'égalité « AD = BC » [302] qui est déduite du parallélogramme ABCD [320]. Dans ce raisonnement, les égalités auparavant évoquées « AM = MD » et « BN = NC » seraient mises en œuvre comme hypothèses. Puis, le parallélogramme est déduit. L'hypothèse mise en œuvre est premièrement l'énoncé « BN = AM » qui est placé juste avant. Certaines hypothèses y manquent encore. Dans les discours des élèves, Mélodie remarque la nécessité d'une démonstration pour le parallélogramme [305 ; 306], alors que Estelle considère qu'une preuve n'est pas nécessaire pour la propriété qui se trouve sur le dessin [307].

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 3
302. M : vu que **AD = BC, BN = AM**. Donc,
303. E : à quoi ?
304. M : BN = AM, donc ça, donc, **BAMN est un parallélogramme**.
305. E : donc BAMN, oui, **ben ça on le sait**.
306. M : **mais non ! C'est pas marqué dans les énoncés**
307. E : mais **sans doute, quand on voit**.
308. M : ben oui, **sans doute, il faut démontrer**.
309. E : de quoi ? c'est un parallélogramme ?
310. M : oui

Mélodie est en train de commencer à rédiger une preuve. Estelle demande encore ce que rédigera Mélodie [19]. Elle répète les arguments. Dans ces arguments, un autre argument apparaît : « donc c'est forcément parallèle » [326]. Dans le discours, n'est pas explicité de quels segments ou droites il s'agit. A partir de la conjonction « donc », nous interprétons que ce parallélisme est déduit du parallélogramme BAMN et qu'il s'agit du parallélisme « AB // MN » car celui « AM // BN » serait plutôt déduit du parallélogramme ABCD. Ensuite Mélodie commence à rédiger [333].

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 3
319. E : **tu veux mettre quoi ?**
320. M : je mets, vu que BN, non, **vu que ABCD est un parallélogramme**
321. E : oui.
322. M : alors, **AD = BC**
323. E : oui
324. M : après **milieu**, donc **BN = AM,** donc
325. E : donc
326. M : **donc un parallélogramme, donc c'est forcément parallèle**
327. E : quoi ?
328. M : c'est milieu, ça fait …

…
333. E : oui, c'est vrai, **vas mettre ce que tu veux**.

Les arguments ou propriétés qui sont évoqués jusqu'ici peuvent être schématisés comme la figure suivante (Figure VI.38).

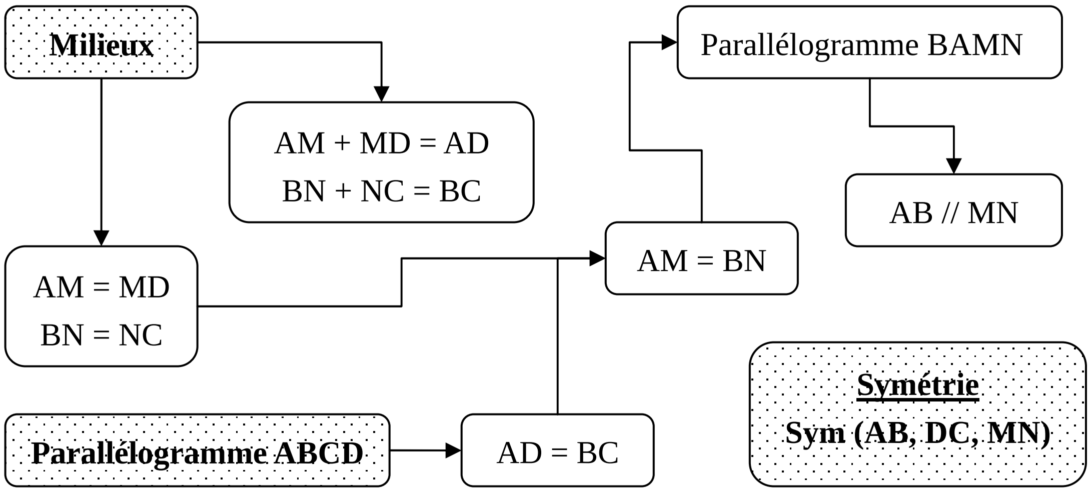


Figure VI.38 L'enchaînement des propriétés apparues dans la phase d'argumentation[7].

Plusieurs propriétés apparaissent dans la phase d'argumentation. Pourtant l'enchaînement à la conclusion n'est pas encore établi.

Phase de rédaction

Dans la phase de rédaction, la preuve suivante est produite. Elle est différente de celle qui est produite pour le problème 2.

1 : Si ADCB est un parallélogramme alors [AD]
2 : égale [BC].
3 : Donc BN = AM. Alors AMNB est un parallélo -
4 : gramme
5 : Si AMNB est un parallélogramme et que
6: [BN] + [NC] = [BC] et [AM] + [MD] = [AD]
7 : alors (MN) est l'axe de symétrie de [AB] et
8 : [DC].

Les pas suivants de preuve peuvent être identifiées.

i : ADCB parallélogramme $\rightarrow$ AD = BC

ii : AD = BC (AM = MD et BN = NC) $\rightarrow$ BN = AM

iii : BN = AM $\rightarrow$ AMNB parallélogramme

[7] Les propriétés en gras sont les hypothèses données dans l'énoncé du problème et la conclusion / conjecture.

iv : AMNB est un parallélogramme et [BN] + [NC] = [BC] et [AM] + [MD] = [AD] $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Le premier pas (i) est identifié aux deux premières lignes (1 et 2). L'opérateur d'une propriété du parallélogramme doit être mobilisée. Le deuxième pas (ii) peut être identifié à partir de la première phrase de la ligne (3). La conjonction « Donc » indique l'utilisation des énoncés qui précèdent comme hypothèses. Comme l'égalité « AD = BC » ne suffit pas pour l'égalité « BN = AM », les hypothèses implicites doivent être prises en compte. Le discours auparavant à la phase d'argumentation [282 ; 290 ; 294] les indique : deux propriétés qui sont déduites des milieux [292] entre parenthèses (ii) sont implicitement mises en œuvre. Le troisième pas est identifié aux lignes (3 et 4). Le parallélogramme est déduit. L'hypothèse mise en œuvre est premièrement l'énoncé « BN = AM » qui est placé juste avant. Certaines hypothèses y manquent encore. Dans les discours des élèves durant la phase d'argumentation, Mélodie remarque qu'il faut encore une démonstration pour le parallélogramme [305 ; 306], mais aucun autre argument n'est proposé, ni dans le discours, ni dans la preuve. Au dernier pas (iv) qui est identifié dans la preuve écrite aux lignes (5, 6, 7 et 8), le parallélogramme « AMNB » et deux propriétés de l'addition « [BN] + [NC] = [BC] » et « [AM] + [MD] = [AD] » sont mises en œuvre pour déduire la conclusion générale « symétrique ». Le parallélogramme est un résultat du pas précédent (iii) qui n'est pas explicitement démontré. Les deux autres propriétés apparaissent brusquement dans la preuve. Cependant, dans le discours de la phase d'argumentation, les deux pas suivant sont déjà identifiés.

v : AM = MD $\rightarrow$ AM + MD = AD (Aligne (A, M, D))

vi : BN = NC $\rightarrow$ BN + NC = BC (Aligne (B, N, C))

La partie qui caractérise la symétrie orthogonale du pas (iv) n'est pas tout de suite rédigée par Mélodie. Elle arrête une fois la rédaction à la ligne (4) de la preuve écrite : « M : j'ai fini » [346]. Estelle lui demande de mettre les expressions « AM + MD = AD » et « BN + NC = BC » de la ligne (6) [349]. Mélodie rédige enfin les lignes (5, 6, 7 et 8). La règle suivante est identifiée dans ce pas, en prenant en compte que l'expression « AM + MD = AD » entend « Aligne (A, M, D) ».

EM-Nr1 : si PQNM parallélogramme, Aligne (P, M, P') et Aligne (Q, M, Q') alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Or, Mélodie prétend « c'est pas un axe de symétrie » [352 ; 354]. La valeur épistémique de Mélodie est « non, symétrique », malgré que la preuve soit rédigée pour démontrer le symétrique. En outre, les expressions « AM + MD = AD » et « BN + NC = BC » sont ajoutées plutôt par Estelle. Ainsi, nous interprétons que ce pas de preuve n'est pas un raisonnement qui permet d'établir la validité de la conclusion, mais il est bricolé en ajoutant les arguments remarqués les uns aux autres. Autrement dit, la règle que nous pouvons identifier dans ce pas est temporairement construite.

Estelle & Mélodie (7) pour le problème 3
345. E : en fait, on laisse comme ça.
346. M : j'ai fini.
347. E : ah non, c'est pas grave. Je sais pas.
348. M : attends.
349. E : non, mais, met-le, **cette formule là aussi**
350. M : je la marque, attends, j'ai marqué là, alors …
351. E : et mais non … l'axe de symétrie …
352. M : **c'est pas un axe de symétrique**
353. E : je sais pas …, si ADCB est un parallélogramme …
354. M : **c'est pas un axe de symétrie**
355. E : alors, AD = BC …, donc BN = AN, alors AMND ?
356. M : B
357. E : oui, c'est un parallélogramme. Si AMNB est un parallélogramme et que BN + NC = BC, que AM …, alors MN est l'axe de symétrie de ?

En résumé

Par rapport aux autres résolutions, nous remarquons les points suivants.

- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire dans la résolution du problème 1. La propriété d'orthogonalité est explicitée par Mélodie. En outre, elle a aussi remarquée lors de la résolution du problème 2. Son manque dans le dessin associé au problème 3 est aussi remarqué par Mélodie. Pourtant, cela ne lui permet pas de proposer explicitement la réponse « non symétrique ». La propriété d'orthogonalité est attachée au problème de la construction et non pas forcément au problème de la reconnaissance ou de la preuve.

2.6 Laura & Justine (8)

2.6.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Laura & Justine (8) trace le support avec l'équerre et reporte la distance au compas. Les opérateurs mobilisés sont les mêmes que ceux des binômes Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4) et Salomé & Karen (6). Dans le protocole, l'information concernant les utilisations d'instruments est explicitée : « l'angle droit » [25]. La propriété d'orthogonalité est donc attachée à l'utilisation de l'équerre. Celle-ci peut aussi être identifiée sur le dessin réalisé (Figure VI.39). Le code de l'angle droit est utilisé pour les orthogonalités des deux supports. L'un des contrôles suivants pour le choix des opérateurs serait mobilisé comme les autres binômes, alors que la propriété attachée à l'utilisation du compas n'est pas explicite dans le protocole. C'est Laura qui réalise la construction.

Laura & Justine (8) pour le problème 1
21. L : ah oui, tracer une droite, après, t'as ta règle ?
22. J : oui

23. L : comme ça,
24. J : t'as un crayon ?
25. L : c'est bon. … OK, **on pourra marquer l'angle droit**. Attends,
26. J : …
27. L : on prend la règle. Ah merde, j'en ai mal…
28. J : ça va pas là.
29. L : angle droit …, après, on prend le compas comme ça. Tu vois ?
30. J : oui.
31. L : houp, attends, si on va plier comme ça, oui, ça vient. C'est bon.
32. J : hum.

LJ-Cσ1 : si P*x* $\perp$ d et PM = M*x* (M = P*x* $\cap$ *d*) alors Sym (P, *x*, *d*)

LJ-Cσ2 : l'orthogonalité et l'équidistance sont nécessaires pour la construction d'un point symétrique, parce qu'ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par la reconnaissance mobilisant d'autres moyens (la perception globale, le pliage, la propriété de conservation de longueur, etc.)

Dans la phase de validation du résultat obtenu, la reconnaissance par pliage est effectuée [31]. La règle suivante serait mobilisée ici.

LJ-Cσ3 : si Pliage (PQ, PQ', d) alors Sym (PQ, P'Q', d)

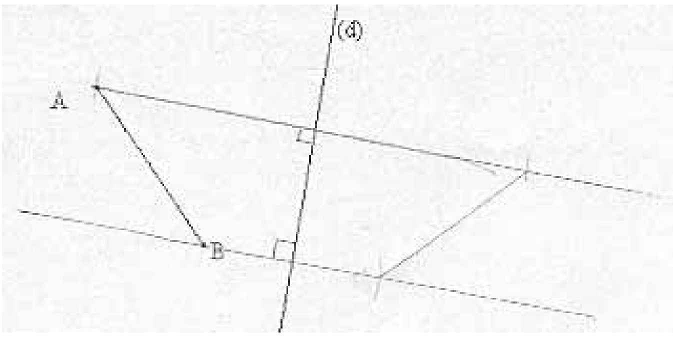
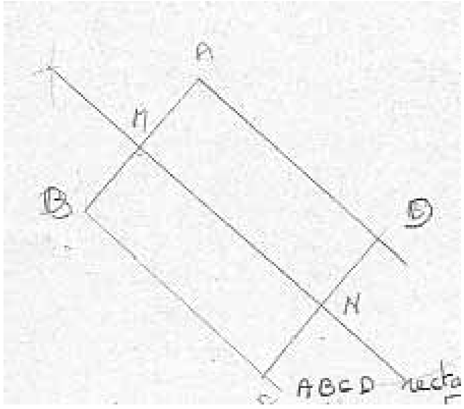


Figure VI.39 Réalisation par Laura & Justine (8)

2.6.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

Dans le protocole du binôme Laura & Justine (8), les élèves donnent rapidement une réponse « oui, symétrique » sans argument pour le symétrique [41-44]. La valeur épistémique de la conclusion de Laura est forte : « Ça, c'est sûr ! » [43]. Mais elles n'ont pas encore d'argument explicite [45]. Nous diagnostiquons qu'elles ont reconnu deux segments comme symétriques à partir de la perception globale de figures symétriques.

Laura & Justine (8) pour le problème 2 41. L : **ben oui, évidemment.** Donc celui-là, oui… 42. J : non, parce que …, non. 43. L : ben oui, c'est symétrique. **Ça, c'est sûr !** Oui, ils sont symétriques. 44. J : ben oui. 45. L : **ils sont symétriques, et pourquoi ?** Parce qu'ils ont … 46. J : parce que **AM est égale à MB**. 47. L : oui, là, non, pas toujours, attends. Pour voir si c'est pas toujours, ou on va tracer un autre, un autre rectangle. … 60. J : mais, **oui, ça sera toujours** … 61. L : ben **oui, ça sera toujours** … 62. J : ben oui, **si c'est des milieux.**	 Le dessin retracé par le binôme

Ensuite, Justine donne un premier argument « AM = MB » [46]. Laura revient à la conjecture et propose de tracer un rectangle pour vérifier si c'est toujours symétrique [47]. La construction d'un rectangle leur permet de confirmer la réponse « oui » [60-61]. Justine donne encore ici un autre argument « si c'est des milieux » [62]. Mais son rapport avec la symétrie n'est pas explicitement établi, c'est-à-dire Justine est encore au niveau de l'explication qui décrit le phénomène dans lequel les segments sont symétriques lorsqu'il existe des milieux (explication descriptive). Par contre, Laura reconnaît le dessin tracé comme symétrique, mais aucun argument n'est explicité. Nous considérons donc que la perception globale joue dans cette phase.

<u>Phase d'argumentation</u>

Le protocole du binôme Laura & Justine (8) ne présente pas explicitement de phase d'argumentation. Après avoir vérifié le symétrique, elles commencent à rédiger une preuve. Les propriétés remarquées jusqu'à cette étape sont celles identifiées lors de l'établissement d'une conjecture : « AM = MB » et milieux.

<u>Phase de rédaction</u>

La transcription de la preuve rédigée par Laura & Justine (8) est comme ce qui suit. La conjecture proposée dans la phase de reconnaissance était la réponse « symétrique ».

1 : Hypothèses : ABCD rectangle
2 : M milieu de [AB]
3 : N milieu de [DC]
4 : Démonstration : A est le symétrique de B par rapport
5 : à M car AM = MB
6 : D est le symétrique de C par rapport à N car DN = NC
7 : Donc la droite qui passe par M et N est symétrique

8 : à (AD) et (BC).
9 : Conclusion : [AB] et [BC] sont symétriques par rapport
10 : à (MN)

Analysons la structure de la preuve donnée. Les pas suivants peuvent être identifiés.

i : $AM = MB \rightarrow A = \text{Sym}\,(B, M)$

ii : $DN = NC \rightarrow D = \text{Sym}\,(C, N)$

iii : $A = \text{Sym}\,(B, M)$ et $D = \text{Sym}\,(C, M) \rightarrow \text{Sym}\,(AD, BC, MN)$

Les trois premières lignes (1, 2 et 3) de la transcription proposent les hypothèses connues dans l'énoncé du problème. Ensuite, la preuve est commencée. Le premier pas est identifié aux lignes (4 et 5). Le mot « car » différencie la conclusion et l'hypothèse (i). La ligne (6) indique aussi un autre pas (ii) de la preuve ayant la même nature que celui qui précède (i). Nous considérons que le même opérateur est mobilisé à ces pas. Le troisième pas peut être identifié aux lignes (7 et 8). En prenant en compte que le mot « Donc » indique l'utilisation de l'hypothèse qui se trouve auparavant et que les énoncés qui concernent les deux segments symétriques, les énoncés « A = Sym (B, M) » et « D = Sym (C, N) » sont pris comme hypothèses.

Les premiers deux pas ne mentionnent pas la symétrie orthogonale mais la symétrie centrale[8]. Dans le protocole, la discussion avance aussi selon l'ordre de la preuve écrite. Laura évoque premièrement la symétrie centrale comme « A est le symétrique de B par rapport à M » [91] et Justine la suit [92]. L'argument de ces énoncés est évoqué par Justine comme « parce que M est le milieu de AB ? » [98] et reformulé à la rédaction comme « car AM = MB » [99].

Laura & Justine (8) pour le problème 2

90. J : démonstration.
91. L : attends. On a oublié de préciser que ABCD rectangle. Donc …, M milieu de …, donc, **A est le symétrique de B par rapport à M** …
92. J : et **D est symétrique de C par rapport à N**.
93. L : non, ça c'est ce qu'on … c'est la démonstration. **Ça, on ne sait pas**.
94. J : oui, oui. **Ça c'est ce qu'on va démontrer**.
95. L : donc, alors …, A est le symétrique de B par rapport à …
96. J : par rapport à M.
97. L : car …
98. J : parce que …, **parce que M est le milieu de AB ?**
99. L : **car AM = MB**.
100. J : oui, c'est pareil.
101. L : et …, D est le symétrique de C par rapport à N …, car DN = NC. Une fois qu'on a ça …,
102. J : ben, on peut dire que …, **M est rectangle** …
103. L : non !

[8] Il se peut que les élèves considèrent par « par rapport à M » la droite MN, c'est-à-dire la symétrie orthogonale. Cependant, nous verrons plus loin lors de l'analyse de leur résolution pour le problème 3 qu'elles considèrent bien la symétrie centrale.

104. J : non ?
105. L : ben non ! Attends, **une fois qu'on a ça** …, mais non, on s'en fiche.

Nous pouvons identifier dans ces deux premiers pas de la preuve la règle suivante comme opérateur ou permis d'inférer.

LJ-Sr1 : si PM = MP' alors Sym (P, P', M)

Cette règle est mobilisée dans les pas (i) et (ii). Ce pas de la preuve peut être exprimé comme le schéma suivant (Figure VI.40). Dans le schéma, l'hypothèse est cherchée après avoir évoqué la conclusion : « Ça, on ne sait pas » [93], « Ça c'est ce qu'on va démontrer » [94].

Hypothèse		Conclusion
AM = MB	→	Sym(A, B, M)

Permis d'inférer

LJ-Sr1 : si PM = MP' alors Sym (P, P', M)

Figure VI.40 Le schéma d'un pas de la preuve de Laura & Justine (8)

La règle (LJ-Sr1) est invalide. Lorsque les trois points A, M et B ne sont pas alignés, les points A et B ne sont pas symétriques par rapport à M. Une hypothèse manquante est l'alignement des trois points concernés. Nous considérons que les élèves le prennent en compte implicitement. Or, le contrôle de choix de cette règle dans cette preuve n'est pas explicité dans le discours.

Le troisième pas (iii) est une fusion de deux symétries. Cette étape est immédiatement effectuée par Laura [107]. Il semble que les deux propriétés obtenues (symétrie centrale) et la conclusion (symétrie orthogonale) sont brutalement associées. En effet, dans le protocole, la règle qui les relie n'est pas évoquée auparavant et Laura cherche le lien à partir de la symétrie centrale : « Une fois qu'on a ça … » [101 ; 105]. Autrement dit, le rapport entre la symétrie centrale et la symétrie orthogonale n'est pas bien établi ou établie sans permis d'inférer explicite.

Laura & Justine (8) pour le problème 2

107. L : donc, si deux points sont … sur la droite …, non attends. Si …, ben si, M est symétrique à A et B. Ben **la droite qui passe par M et par N est donc symétrique à AD et BC**. Parce que c'est pareil, ils sont …, je pense que c'est comme ça, il faut démontrer. Si c'est pas comme ça, c'est pas grave.

Nous pouvons quand même décrire la règle mobilisée comme opérateur suivant.

LJ-Sr2 : si Sym (P, P', M) et Sym (Q, Q', N) alors Sym (PQ, P'Q', MN)

La règle est invalide. Elle ressemble à la manipulation symbolique non pertinente qui est de temps en temps identifiée chez les élèves lors du calcul algébrique comme « $(a + b)^2 = a^2 +$

b^2 », « $\sqrt{a+b} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$ », « $f(x + y) = f(x) + f(y)$ », etc. D’après Artigue, ce processus qui est producteur d’obstacles est appelé « la régularisation formelle abusive » de « la généralisation abusive » (1990, p.261).

Il semble que Justine remarque l’orthogonalité par l’énoncé « M est rectangle » [102]. Mais, comme Laura le refuse, nous ne pouvons pas savoir plus que cela. A part cela, l’orthogonalité n’est pas mentionnée tout au long de la résolution du problème 2, alors que Laura trace une droite perpendiculaire en explicitant l’angle droit par un code sur le dessin pour la résolution du problème 1. Nous voyons encore ici, comme les analyses des binômes Manon & Marion (4) et Salomé & Karen (6), que *la propriété d’orthogonalité est attachée à la résolution de la construction, mais non pas forcément à d’autres problèmes de la symétrie orthogonale*.

2.6.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Laura & Justine (8), au début de la résolution, Justine affirme tout de suite que le problème et la preuve sont les mêmes que pour le problème 2 [128]. Par contre, Laura est plus attentive que Justine, mais elle répond finalement « oui, symétrique » de même que Justine [135 ; 139]. Les élèves, toutes les deux, proposent plusieurs arguments les un et les autres : « si tu partages un parallélogramme en deux» [134], « MN // DC » [136], « il rejoint à milieu » [137], « dans un parallélogramme, les côtés opposés sont parallèles et de même longueur » [137]. Ces arguments ne sont pas encore organisés en preuve. Nous considérons que la reconnaissance est effectuée plutôt par la perception globale de figures symétriques.

Laura & Justine (8) pour le problème 3

128. J : **c’est pareil**.
129. L : attends. Dans un …,
130. J : ben, si c’est dans un parallélogramme …
131. L : ah, mais, attends, est-ce que c’est toujours comme ça ?
132. J : …
133. L : non, c’est pas grave.
134. J : **si tu partages un parallélogramme en deux**.
135. L : **Oui, ça sera toujours pareil**.
136. J : hum. Parce que **MN est parallèle à DC**.
137. L : ben, parce que, oui. Il rejoint **à milieu** …, dans un parallélogramme, **les côtés opposés sont parallèles et de même longueur**.
138. J : hum.
139. L : donc, dans un parallélogramme …, mais je vais dire **« oui »**.
140. J : hum.

Phase d’argumentation

Plus tard, Laura demande le rôle du parallélogramme [147] et remarque le manque d’angle droit [153]. Elle doute de la réponse qu’elles ont auparavant donnée [151]. Cependant, Justine insiste sur le fait que la réponse est la même que celle du problème 2, en s’appuyant sur les deux propriétés « milieu » [148] et « MN // DC » [150]. Enfin, Laura accepte la conjecture « symétrique » et rédige la même preuve que celle pour le problème 1 [152 ; 157].

Laura & Justine (8) pour le problème 3

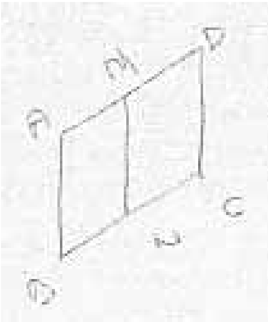
147. L : attends, comme c'est un parallélogramme …, **ça nous apporte quoi ?** attends, AD par rapport à …, si ça c'est parallélogramme …, tu m'aides ?
148. J : oui, ça c'est pareil que tout à l'heure. Si, si M est le milieu de AD, et N milieu de BC. MN …
149. L : oui, mais, il faut bien dire que, quelque part, qu'ils sont …, oui, non, c'est bon.
150. J : oui, c'est ça. C'est pareil que tout à l'heure. …, et MN est parallèle à DC, aussi.
151. L : **oui, mais …, c'est la même chose ?**
152. J : ben oui.
153. L : ça veut dire que **quelque part, l'angle droit et tout ça, ça existe plus rien**.
154. J : hum.
155. L : alors, alors, attends, M est …, merde, A est le symétrique de D
156. J : ah, oui, **on dit pareil**.
157. L : **ben oui**.

A partir de cette discussion, une perturbation chez Laura entre symétrique et non symétrique est identifiée. Le discours sur le manque d'angle droit nous permet d'interpréter que Laura a plus ou moins conscience de l'apparition de l'orthogonalité dans la figure symétrique. Pour cela, elle doute de temps en temps de la réponse « symétrique » pour le problème 3. Cependant, elle accepte finalement la conjecture de Justine. Nous considérons que c'est pour la raison qu'elle mobiliserait pour la reconnaissance la perception globale qui accepte comme symétrique le parallélogramme ou qu'elle n'a pas d'autre moyen de vérifier la réponse. Du point de vue du modèle cK¢, Laura possède deux contrôles qui suscitent des réponses différentes pour la reconnaissance : le contrôle perceptif et le contrôle analytique sur l'orthogonalité Mais, comme elle n'a pas mobilisé « angle droit » pour la reconnaissance du problème 3, ce dernier ne serait pas assez stable chez elle.

Par contre, Justine n'évoque jamais l'orthogonalité. Les arguments pour le symétrique sont « milieu » et « parallèle » qui étaient aussi trouvés sur la figure donnée du problème 2. Justine ne doute donc pas de la réponse « symétrique ».

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve suivante est rédigée par Laura & Justine (8). C'est Justine qui l'écrit.



1 : hyp : ABCD parallélogramme
2 : M milieu de [AD]
3 : N milieu de [BC]
4 : Démonstration : A est le symétrique de D par
5 : rapport à M car il est équidistant de A et
6 : de D et que 3 points sont alignés.
7 : B est le symétrique de C par rapport à N
8 : car il est équidistant de A et de D et que ces
9 : 3 points sont alignés.
10 : Conclusion : [AB] et [DC] sont symétrique par
11 : rapport à la droite (MN)

La structure de preuve est très proche de la preuve donnée pour le problème 2. La différence est que la phrase « il (M) est équidistance de A et de D » est utilisée à la place de « AM = MB » et que la phrase « 3 points sont alignés » est ajoutée. La preuve peut être décomposée en trois pas suivante.

i : AM = MD, Aligne (A, M, D)[9] $\rightarrow$ A = Sym (D, M)

ii : BN = NC, Aligne (B, N, C) $\rightarrow$ B = Sym (C, N)

iii : A = Sym (D, M) et B = Sym (C, M) $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Comme le troisième pas est exactement le même que celui pour le problème 2, il est immédiat sans discussion dans le protocole. Nous analysons ici juste les deux premiers pas ayant une différence par rapport à la preuve du problème 2.

Nous pouvons décrire la règle suivante qui est mobilisée comme opérateur commun dans les deux premiers pas de la preuve.

LJ-Nr1 : si PM = MP' et Aligne (P, M, P') alors Sym (P, P', M)

La règle est la même que LJ-Sr1 « si PM = MP' alors Sym (P, P', M) » sauf une autre condition ajoutée « alignement ». Du point de vue de la validité de la règle, cet opérateur est

[9] Nous utilisons une notation « Aligne (A, B, C) » pour les trois points A, B et C alignés.

valide, voire théorique au niveau de collège, alors qu'il manque encore « A ≠ D ». Pour le problème 3, les élèves ont aperçu la nécessité de cette nouvelle condition. Notre analyse porte ici sur la question « Pourquoi et comment l'ont-elles aperçue ? », parce que, bien que la règle soit spécifique à la symétrie centrale, nous anticipons que l'analyse du protocole pour cette question nous permet de dégager plus précisément le contrôle ou le support d'une génération ou modification d'une règle.

Le binôme Laura & Justine (8) décide de rédiger la même preuve que pour le problème 2. Or, Laura évoque l'alignement « il est placé sur la même droite » [159] et doute que la condition « équidistance » soit suffisante pour le symétrique [167], c'est-à-dire la valeur épistémique de la règle « LJ-Sr1 : si PM = MP' alors Sym (P, P', M) » est moins « forte » que dans le problème 2. Puis, elle donne un dessin avec un compas pour montrer le manque d'une hypothèse pour cette règle.

Sur le dessin tracé (Figure VI.41), la droite horizontale est le cadre de copie. Deux croix au-dessous de la droite sont deux points qui seront symétriques [169]. Laura trace avec un compas une autre croix de deux arcs qui sont équidistants à partir de deux points [171]. La croix claire au-dessus de la droite est l'intersection de deux arcs. Laura demande à Justine si deux points au-dessous de la droite sont symétriques par rapport au point qui est là haut [173]. La réponse est « non » et Justine remarque le manque d'une hypothèse « alignement » [174]. A partir de cela, elles ajoutent une autre hypothèse « alignement » à la règle mobilisée pour le problème 2 et établissent une autre règle (LJ-Nr2).

Laura & Justine (8) pour le problème 3

158. J : alors, A est le symétrique de D par rapport à M
159. L : par rapport à M. car il est placé, **car il est placé sur la même droite** …
160. J : moi, ce que j'aime …
161. L : ben, si, regarde.
162. J : la même droite que ADC ?
163. L : hum, sur la …, non, ça sert à rien.
164. J : ben oui !
165. L : car il est placé à …, car il est équidistant
166. J : oui, de A et de B.
167. L : oui, **j'sais pas, parce que un point est équidistant de deux autres, que c'est symétrique.**
168. J : mais oui, parce que
169. L : mais oui …, ben si, t'as, équidistant …, regarde, attends, je te fais un dessin, après. De A et de D est placé. Regarde, **si t'as un point comme ça, un autre, donc ça c'est M**
170. J : hum.
171. L : **si t'as A là, et un autre point placé, mais à la même distance**, tu vois ? par exemple, là,
172. J : ben oui.
173. L : est-ce que c'est le symétrique ?
174. J : ben oui, il faut que ce soit …, comment …, **il faut dire que ce sont alignés, les trois points.**
175. L : voilà, équidistant de A et de D, et que ces 3

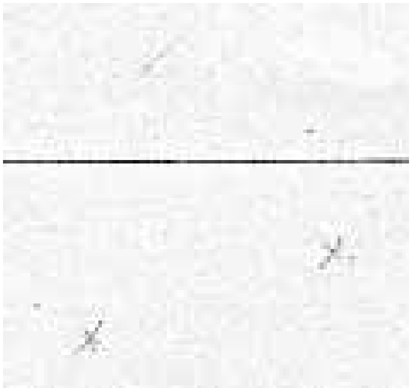


Figure VI.41

points sont alignés. C'est ça qu'on a oublié dans la démonstration de tout à l'heure.

Dans ce processus de la génération d'une règle, la reconnaissance qui permet à Justine de juger « non symétrique » sur le dessin tracé est effectuée par la perception globale de deux points symétriques. C'est la construction qui permet de combiner deux propriétés « équidistance » et « alignement » afin de produire une autre règle qui est acceptable par la reconnaissance perceptive. Autrement dit, le support de la règle (LJ-Nr2) est la constructibilité s'appuyant sur la perception globale. La règle est ainsi plutôt pragmatique, que théorique.

En résumé

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire dans la résolution du problème 1. La propriété d'orthogonalité est explicitée par Laura. Par contre, elle n'a pas remarquée lors de la résolution du problème 2. Son manque dans le dessin associé au problème 3 est aussi remarqué par Laura. Pourtant, cela ne lui permet pas de proposer explicitement la réponse « non symétrique ». La propriété d'orthogonalité est attachée au problème de la construction et non pas forcément au problème de la reconnaissance ou de la preuve.
- Le pliage pour la validation de la réalisation est évoqué dans la résolution du problème 1. Cependant, il n'est jamais mobilisé dans les problèmes 2 et 3 de la reconnaissance.
- Nous considérons ainsi que les propriétés mobilisées dans le contrôle pour la réalisation de symétriques n'étaient pas organisées de manière à permettre la reconnaissance.
- D'ailleurs, Laura et Justine toutes les deux reconnaissent comme symétrique à la fois le dessin dont la forme est un trapèze isocèle et le dessin dont la forme est un parallélogramme. Leurs perceptions globales acceptent comme symétrique ainsi à la fois le trapèze et le parallélogramme. Cela indique que la perception globale accepte comme symétrique la figure séparée en deux parties égales.
- Laura explicite un processus de génération ou de raffinement d'une règle. Le processus nous permet de diagnostiquer que la constructibilité s'appuyant sur la perception globale produit une règle valide qui n'est pas auparavant mobilisée. Cependant, la constructibilité apporte une règle analytique et valide, mais non pas une règle théorique.

2.7 Julien & Steven (9)

2.7.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Julien & Steven (9) trace le support avec l'équerre et reporte la distance au compas.

Les opérateurs mobilisés sont les mêmes que ceux des binômes Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4), Salomé & Karen (6) et Laura & Justine (8). Dans le protocole, les informations concernant les utilisations des instruments apparaissent explicitement. Concernant la propriété d'orthogonalité attachée à l'équerre, Julien verbalise explicitement « Il faut que ce soit perpendiculaire » [8, 11] avant de proposer une équerre pour tracer un support [18]. Il propose aussi un report de la distance avant de décider de l'instrument utilisé [14, 22, 28]. En effet, Julien et Steven mesurent la distance avec la règle graduée [31-33]. Puis, ils prennent un compas pour reporter la distance qui est « plus facile » [35].

Julien & Steven (9) pour le problème 1

8. J : … regarde. Il faut faire comme ça. … **Il faut que ce soit perpendiculaire**.
9. S : … oui, ça fait comme ça, carrément.
10. J : … mais, si, mais … qu'est-ce que tu fais ?
11. S : regarde. …
12. J : il faut que ce soit perpendiculaire. Ça passe par un point.
13. S : oui. Et alors,
14. J : il faut que tu mesures.
15. S : et après, tu fais comme ça. …
16. J : non. Après, tu fais une petite droite.
17. S : ouais, on prend la règle.
18. J : ben, non, **on fait avec l'équerre. … avec l'équerre**, trace une petite droite. Trace.
19. S : comme ça ?
20. J : oui. Mais, pas de point, forcément.
21. S : …
22. J : après, **tu le reportes**. Vas-y, trace, …

…

28. J : après, **il faut mesurer, non ?** Je crois.
29. S : c'est ce que je t'ai dit au début. Il faut mesurer.
30. J : … mesure.
31. S : et … **1,5**.
32. J : **1,6**.
33. S : 1,6 c'est pareil.
34. J : … mais, il faut reporter avec le compas.
35. S : oui. … oui, c'est plus facile, avec le compas. …

Le contrôle suivant JSσ1 peut être considéré comme les autres binômes. Or, les propriétés géométriques de la symétrie orthogonale, l'orthogonalité et l'équidistance, précèdent la réalisation surtout chez Julien. Et deux propriétés sont prises en comptes ensemble. Nous diagnostiquons donc que le contrôle JSσ1 et non pas celui de constructibilité (DBσ4, MMσ2, SKσ2, LJσ2) est mobilisé.

JSσ1 : si $Px \perp d$ et $PM = Mx$ ($M = Px \cap d$) alors Sym (P, x, d)

Dans la phase de validation, nous ne pouvons pas repérer d'indices de contrôles de la validation du résultat obtenu dans le protocole.

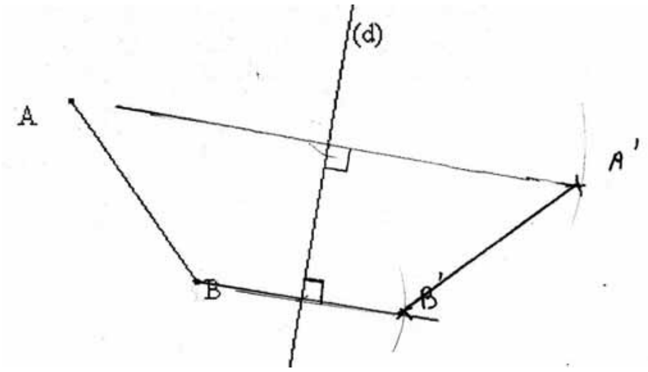


Figure VI.42 Réalisation par le binôme Julien & Steven (9)

2.7.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

La conjecture proposée par le binôme est « oui » [85 : 86]. Steven et Julien répondent tout de suite après la lecture des énoncés du problème. Julien demande si le symétrique est aussi trouvé dans le cas général du rectangle [90]. La réponse des deux élèves est aussi « symétrique » [91 :92]. Les propriétés identifiées dans les discours des élèves sont pour le moment juste les milieux qui sont proposés dans les énoncés du problème.

Julien & Steven (9) pour le problème 2

85. S : … qu'est-ce que t'en penses ? moi, **je dirai « oui »**.
86. J : moi, **je dirai « oui »** aussi.
87. S : maintenant, il faut démontrer. Regarde. **M, N les milieux des côtés opposés**, les segments AD et BC sont symétriques. C'est symétrique.
88. J : hum.
89. S : euh, par rapport à la droite MN. MN, ben oui.
90. J : oui. C'est oui, mais il faut bien dire que, par rapport à cette phrase, si …, **le rectangle est à la différente mesure, si ça marche toujours**.
91. S : hum. Ben **oui**.
92. J : ben **oui**.
93. S : maintenant il faut démontrer.

Phase d'argumentation

Les élèves cherchent les arguments pour la symétrie. Julien remarque premièrement la nécessité de trouver des orthogonalités : « il faut déjà trouver que MN est perpendiculaire à AB et DC » [96]. Puis, le parallélisme entre deux côtés [102]. Steven remarque la même longueur [103] pour laquelle l'argument « milieu » [106] est trouvé par Julien. Ils parlent de deux segment AM et MB.

Julien & Steven (9) pour le problème 2

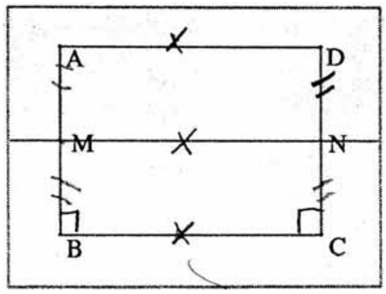
95. S : alors …, il faut commencer par quoi ?
96. J : **il faut déjà trouver que MN est perpendiculaire à AB et DC.**
97. S : à BC ?
98. J : à AB, MN est perpendiculaire à AB
99. S : et DC
100. J : voilà. …

101. S : … ben … qu'est-ce que t'en penses ?
102. J : … **deux droites sont parallèles**. Ben …
103. S : **c'est symétrique. … parce que là, ils ont la même mesure**.
104. J : déjà, **ça c'est pareil. ils mesurent la même longueur**.
105. S : ben oui.
106. J : **parce que M est le milieu de AB**. Ils le disent. Soit M, N les milieux des côtés …
107. S : voilà. Ben, c'est bon alors.

Ensuite, Julien revient à l'orthogonalité et cherche ses arguments [108 ; 110]. Il trouve un argument « le rectangle est partagé en deux rectangles identiques » [112] qui est déduit des milieux [114]. Les élèves commencent à rédiger une preuve.

Julien & Steven (9) pour le problème 2

108. J : ah oui, mais, **on a pas dit que c'est perpendiculaire**.
109. S : attend, on va dire … que c'est perpendiculaire. Parce que … angle droit …
110. J : ouais, mais **pourquoi il y a un angle droit ?**
111. S : 90°. …
112. J : euh … **le rectangle est partagé en deux rectangles identiques**.
113. S : ouais. Comment tu sais ?
114. J : **parce que c'est les milieux**.
115. S : on va écrire alors.



Plusieurs propriétés géométriques remarquées par les élèves sont identifiées dans leur discours. Les rapports entre elles pour le moment peuvent être exprimés comme le schéma de la Figure VI.43.

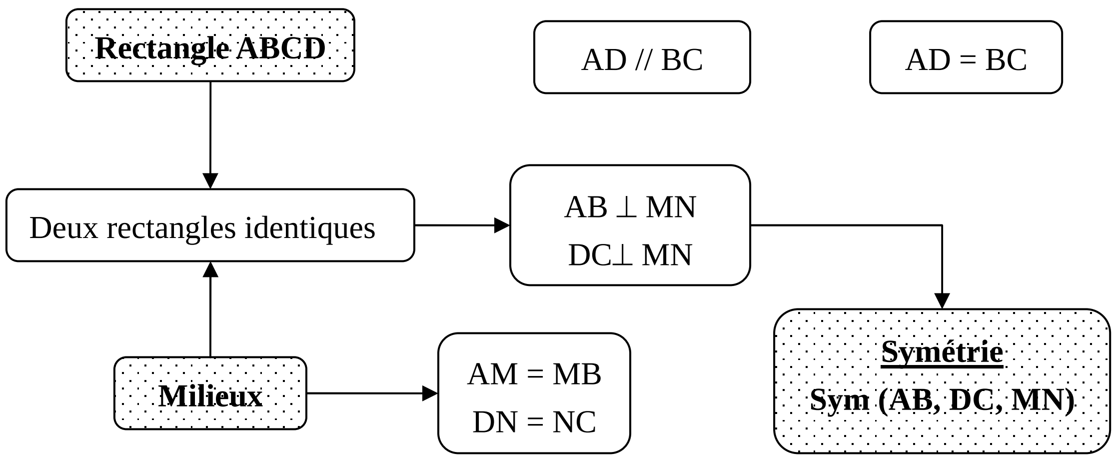


Figure VI.43 L'enchaînement des propriétés remarquées

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par Julien & Steven (9). La conjecture proposée dans la phase de reconnaissance était la réponse « oui, symétrique ». La première ligne est écrite par Julien et à partir de la deuxième est écrite par Steven.

1 : AM et MB ont la même mesure car M et le milieu [AB].
2 : Oui car si les côtés opposés d'un quadrilatère
3 : à au moins 2 angles droits alors c'est
4 : sait un rectangle ou un carré, donc
5 : [MN] est perpendiculaire à [MB] et [NC].
6 : Si M est le milieu de [AB] et
7 : que [MN] est perpendiculaire [AB]
8 : alors A et B sont
9 : symétrique à [MN].
10 : Pareil pour D et C symétrique à [NM].
11 : Si B est symétrique à A par rapport
12 : à [MN] et que C est symétrique
13 : à D par rapport à [MN] alors [BC]
14 : est symétrique à [AD] par rapport
15 : à [MN]

Analysons la structure de la preuve donnée. Les pas suivants peuvent être identifiés.

i : M milieu de [AB] $\rightarrow$ AM = MB

ii : deux angles droits $\rightarrow$ ABCD rectangle

iii : ABCD rectangle $\rightarrow$ MN $\perp$ MB et MN $\perp$ NC

iv : M milieu de [AB] et MN $\perp$ AB $\rightarrow$ Sym (A, B, MN)

v : N milieu de [DC] et MN $\perp$ DC $\rightarrow$ Sym (D, C, MN)

vi : Sym (A, B, MN) et Sym (D, C, MN) $\rightarrow$ Sym (AD, BC, MN)

Le premier pas (i) qui est identifié à la ligne (1) est rédigé au début par Julien. Mais, l'égalité obtenue n'est pas mise en œuvre pour les autres pas. Le deuxième pas (ii) est identifié aux lignes (2, 3 et 4). Bien que l'énoncé « rectangle » soit donné comme hypothèse, il est déduit de deux angles droits qui ne sont pas donnés comme hypothèses. Les élèves, surtout Julien qui demande Steven à rédiger une preuve, confondent les statuts des énoncés. Puis les orthogonalités (MN $\perp$ MB et MN $\perp$ NC) sont impliquées du rectangle au pas suivant (iii) qui est identifié aux lignes (4 et 5). Les pas de preuve qui impliquent deux points symétriques (iv) et (v) sont identifiés aux lignes (6, 7, 8, 9 et 10). L'expression « pareil » de la ligne (10) indique deux raisonnements ayant la même nature du point de vue de l'opérateur mobilisé. Dans le discours des élèves, cette partie de la preuve est explicitement énoncée par Julien [162 ; 166].

Julien & Steven (9) pour le problème 2
162. J : après, si … là, **il y a un angle droit, et tout à fait la même longueur. Ça veut dire que … c'est symétrique**.

163. S : sachant que … Hum ?
164. J : oui,
165. S : MB est la mesure que NC.
166. J : **MB est à même mesure que MA. Et MN est perpendiculaire à AB. Alors, A et B sont symétrique**.
167. S : vas-y, vas-y.

En outre, la propriété d'orthogonalité et l'égalité de longueur sont mises en œuvre ensemble. A partir de cela, nous diagnostiquons la règle suivante qui est mobilisée comme opérateur ou permis d'inférer dans les pas (iv) et (v).

JS-Sr1 : si PP' ⊥ *d* et PM = MP' alors Sym (P, P', *d*)

Le dernier pas (vi) est proposé encore par Julien. En effet, Steven considère que la preuve est déjà terminée [201]. Julien propose une association de deux symétries [202 ; 204]. Julien confond les termes « parallèle » et « symétrique » [202]. Cependant, il considère « symétrique » [204].

Julien & Steven (9) pour le problème 2

201. S : attend, ils disent … **c'est bon. On a répondu**. Tu veux quoi ?
202. J : **ben non. On a dit que … D est parallèle à A. C est parallèle à B. On a pas dit que … AC est parallèle à AD.** Après, il faut mettre, si …
203. S : ouais, c'est parallèle. BC est parallèle à AD.
204. J : **Si AB est parallèle à … symétrique à A et C symétrique à D, alors AD est symétrique à BC.**
205. S : si BC est symétrique …
206. J : non. Si B est, vas-y, marque.

A partir du pas de preuve (vi) et du discours des élèves, nous diagnostiquons en tant que permis d'inférer la règle suivante de l'héritage de la symétrie.

JS-Sr2 : si Sym (P, P', *d*) et Sym (Q, Q', *d*) alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

2.7.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

Steven propose tout de suite la conjecture « oui » après la lecture des énoncés du problème [229 ; 231 ; 245 ; 247]. Par contre, Julien hésite sur la réponse « oui » [233 ; 248 ; 250][10].

Julien & Steven (9) pour le problème 3

229. S : [il lit les énoncés]. **Exactement pareil que l'autre**.
230. J : non, **c'est pas pareil**.
231. S : attend. … est un parallélogramme. Soit M, N les milieux des côtés … Les segments AB et DC … Ben oui. **Ben oui, c'est encore « oui »,** alors.
231. J : ben, il faut d'abord dire **si c'est tout le temps, comme ça**. Parce qu'ils disent que M et N c'est milieu.
232. S : hum, **ça se voit**.
233. J : ben oui, ça peut être … parallèle.

…

[10] Le discours de Julien « ça peut être … parallèle » [233] indique plutôt « ça peut être symétrique », en prenant en compte la confusion de terminologie identifiée dans la résolution du problème 2.

244. J : c'est sûr que c'est le milieu.
245. S : voilà, tu vois. **C'est oui**.
246. J : mais, tu le marques. Marque.
247. S : **tu vois, c'est oui**.
248. J : **on voit pas forcément**.
249. S : donc …
250. J : ben oui, **c'est peut-être oui,** mais … il faut prouver.

Puis, Julien propose la conjecture « c'est pas symétrique » [254 ; 256], alors que Steven la conteste. Julien propose aussi un argument « non perpendiculaire » pour non symétrique [258].

Julien & Steven (9) pour le problème 3

252. J : attend, mais …,
253. S : quoi ?
254. J : **t'es sûr que c'est symétrique ? C'est pas symétrique.**
255. S : attend. **Si, c'est symétrique.**
256. J : non. **C'est pas symétrique.**
257. S : **si, c'est symétrique.**
258. J : **c'est un piège.** C'est pas symétrique. **Parce que, pour que ce soit symétrique, il faut que ce soit parallèle, non perpendiculaire.**
259. S : …

Julien propose ensuite le pliage. En effectuant la reconnaissance par pliage mental, il indique l'endroit du point image et non superposition : « Si tu plies par rapport à ici, il va donner, aller là » [266]. En revanche, Steven prétend la superposition [267 ; 269], c'est-à-dire le pliage mental indique la superposition. Enfin Julien propose un pliage effectif avec une feuille de papier [270 ; 272] et Steven le fait. Ainsi Steven remarque non superposition [293 : 295].

Julien & Steven (9) pour le problème 3

266. J : … non, c'est pas oui. **Parce que, regarde, si tu plies ça, tu plies par rapport à l'axe. Ça va pas revenir sur l'autre bout.** Ça passe, aller là. Tu comprends ? **Si tu plies par rapport à ici, il va donner, aller là.**
267. S : oui, **il va aller là.**
268. J : ben non.
269. S : **ben si**.
270. J : ben non. **Ben, essaie, tu verras.**
271. S : ben, regarde. Tac.
272. J : **vas-y, prend un petit bout là**.
273. S : attend, on verra …
274. J : mais non, je te dis, il faut que ce soit parallèle, non perpendiculaire.

…

291. S : hum ?
292. J : c'est la même chose. Si tu plies, comme ça sur le petit machin. Ben, ce point, il va arriver là.
293. S : fais voir. **Est-ce qu'on va essayer … tordre …**
294. J : …
295. S : ouais, t'as raison.

Du point de vue de la règle, celle qui est mobilisée lors du pliage est la suivante.

JS-Nr1 : si non Pliage (PP', QQ', *d*) alors non Sym (PP', QQ', *d*)

Phase d'argumentation

La phase d'argumentation ne peut pas explicitement être dissociée de celle de la conjecture, parce que les arguments proposés et mis en œuvre sont « non perpendiculaire » et « non pliage » qui sont remarqués dans la phase de conjecture. Après avoir une réponse commune, ils reviennent à l'argument « non perpendiculaire » [299 ; 300].

Julien & Steven (9) pour le problème 3
299. S : **Parce que tu dis que M est pas perpendiculaire à AD.**
300. J : MN est pas perpendiculaire à AD et BC

Nous diagnostiquons la règle suivante à partir de la mise en œuvre de « non perpendiculaire ».

JS-Nr2 : si non PP' $\perp$ *d* alors Sym (P, P', *d*)

Julien remarque aussi la réponse « pas toujours », parce que l'orthogonalité peut être trouvée lors du rectangle [320 ; 322 ; 324].

Julien & Steven (9) pour le problème 3
320. J : **il faut dire que des fois ça marche. Mais non, il faut mettre « pas toujours »**.
321. S : non, si, il faut mettre « oui ».
322. J : **il faut mettre « pas toujours »**. … ben non, ça sera pas « oui », parce que ça marche pas.
323. S : oui, « pas toujours ».
324. J : « pas toujours », parce que si les … c'est des angles droits, ça fait un rectangle. Ça marche.

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par Julien & Steven (9). Julien l'écrit.

1 : « Pas toujours ». Les segments [AB] et [DC] ne
2 : sont pas symétriques par rapport à [MN] car
3 : [MN] est pas perpendiculaire à [AD] et [BC].
4 : Est ça peut être symétrique si ABCD est
5 : un rectangle ou un carré.

Les pas de preuve suivants sont identifiés dans cette preuve. Le premier pas (i) est à partir des trois lignes (1, 2 et 3) et le deuxième pas (ii) est à partir des lignes (4 et 5).

i : MN non $\perp$ AD et MN non $\perp$ BC $\rightarrow$ non Sym (AB, DC, MN)

ii : ABCD rectangle $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

La règle suivante est identifiée à partir du premier pas.

JS-Nr3 : si non PP' $\perp$ *d* et non QQ' $\perp$ *d* alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

En résumé

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire dans la résolution du problème 1. La propriété d'orthogonalité est explicitée et mise en œuvre explicitement avec l'équidistance par Julien. Il a aussi mobilisé comme permis d'inférer la règle « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' alors Sym (P, P', *d*) » lors de la résolution du problème 2. Nous considérons ainsi que Julien dispose de cette règle.

- Le pliage est proposé par Julien et utilisé pour la reconnaissance du problème 3, puisque la conjecture de Steven était « oui, symétrique ». Même avec le pliage mental, il reconnaît deux segments comme symétriques. Nous y voyons la fiabilité faible du pliage mental.

2.8 Mathieu & Pierre (10)

2.8.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Mathieu & Pierre (10) trace le support avec l'équerre et reporte la distance avec la règle graduée. Bien que la règle graduée soit utilisée, son fonctionnement, report de la distance, est le même que celui du compas. Les opérateurs mobilisés sont donc les mêmes que ceux des binôme Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4), Salomé & Karen (6) et Laura & Justine (8). Dans le discours de Mathieu et Pierre explicite la propriété attachée à l'utilisation de la règle graduée [10 ; 13].

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 1

1. Mathieu : Construire le symétrique du segment AB par rapport à l'axe d …, ah c'est facile, **tu prends un compas et tu vas reporter la longueur.**
2. Pierre : le symétrique du segment AB par rapport à l'axe d.
3. M : … si je me rappelle bien, **déjà il faut reporter le segment**.
4. P : oui, ça me parait logique. … ah oui, attends, t'as raison.
5. M : non, **ça écrit avec l'équerre**.

…

9. M : tu prends comme ça, houp. Tu reportes la droite.
10. P : ah, oui ! … **il faut prendre la mesure aussi ?**
11. M : hum. T'as, il y a la … tu prends
12. P : oui, oui, je vois ce que tu vas faire. C'est bon.
13. M : **la mesure …, 1,7, 1,7. Voilà.**
14. P : oui, après, on fait ça avec …, pareil pour là haut.

Les règles suivantes sont les contrôles de choix des opérateurs que nous pouvons considérer du point de vue théorique à partir de la procédure de réalisation.

MP-Cσ1 : si P*x* $\perp$ d et PM = M*x* (M = P*x* $\cap$ *d*) alors Sym (P, *x*, *d*)

MP-Cσ2 : l'orthogonalité et l'équidistance sont nécessaires pour la construction d'un point symétrique, parce qu'ils permettent de réaliser des symétriques acceptables par la reconnaissance mobilisant d'autres moyens (la perception globale, le pliage, la propriété de conservation de longueur, etc.)

Or, dans le protocole, l'information concernant l'utilisation d'instruments ne porte que sur le report de la distance. La propriété attachée à l'utilisation de l'équerre n'est pas explicitée dans le discours des élèves. Il se peut que l'orthogonalité ne soit pas attachée à l'utilisation d'équerre. Cependant nous ne pouvons pas le savoir à partir du protocole.

A la fin de la réalisation, nous ne pouvons pas repérer dans le discours les indices des contrôles pour la validation du résultat produit. Cependant, Mathieu propose au début de la résolution l'utilisation d'un compas pour reporter la longueur et le segment [1 ; 3]. Nous considérons le segment AB qu'il mentionne, parce qu'il n'existe que le segment AB comme segment à ce moment là. La propriété de la conservation de la longueur peut être repérée ici. Elle serait mobilisée comme un contrôle pour la vérification du résultat obtenu, c'est-à-dire pour une reconnaissance. Pourtant, nous ne pouvons pas explicitement savoir comment cette propriété est mise en œuvre dans la résolution.

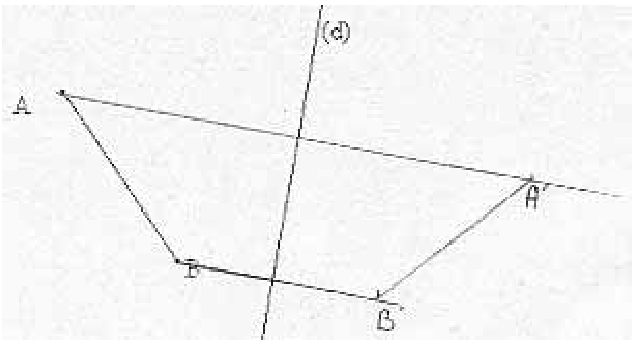


Figure VI.44 Réalisation par Mathieu & Pierre (10)

2.8.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Mathieu & Pierre (10), Mathieu donne sans expliciter d'arguments la réponse « oui » [39]. Les élèves commencent à rédiger tout de suite sans réfléchir à la résolution. Pierre écrit et Mathieu propose ce qui est écrit [37].

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 2

37. M : attend, **je t'explique ce que tu vas écrire.**
38. P : …
39. M : attend, regarde. Attends, **normalement oui,** c'est …, marque **oui**.
40. P : oui, non, mais ça c'est pas tout, oui.
41. M : ouais, après, on démontre. Oui, ils sont symétriques. Vas-y, marques ça, après je démontre.

Aucun argument n'apparaît jusqu'ici. Nous considérons que la perception globale est mobilisée pour la reconnaissance.

Phase d'argumentation

Le protocole du binôme Mathieu & Pierre (10) ne présente pas explicitement de phase d'argumentation. Après avoir eu la réponse « oui », ils commencent à rédiger une preuve.

Nous analysons ici juste la discussion pendant la rédaction de la conclusion qui est mise au début de la preuve..

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 2
53. M : alors, **à quoi il sert le point M**.
54. P : **pour montrer le milieu**. Après, peut-être, …, les segments AD et BC
55. M : les segments AD et BC sont symétriques, deux points. Donc, **ils sont symétriques parce que c'est un rectangle. Il y a les angles droits.**

Mathieu remarque premièrement le point M et puis le rectangle. A partir du rectangle, il indique « les angles droits ». Mais nous ne pouvons pas savoir de quels angles droits il s'agit. Les propriétés géométriques remarquées jusqu'ici sont : milieux ; rectangle ; angles droits.

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve suivante est rédigée par le binôme Mathieu & Pierre (10). La conjecture donnée dans la phase de reconnaissance était la réponse « oui, symétrique ».

1 : oui, les ségments [AD] et [BC] sont
2 : symétriques :
3 : Vu que (MN) est le milieu [AB] et [DC],
4 : alors [AD] // [MN] et [BC] // [MN]
5 : donc ils sont symétriques.

Analysons la structure de la preuve donnée. Les pas suivants peuvent être identifiés.

i : MN milieux de AB et DC $\rightarrow$ AD // MN et BC // MN

ii : AD // MN et BC // MN $\rightarrow$ Sym (AD, BC, MN)

Le premier pas (i) est identifié aux lignes (3 et 4) de la transcription. L'énoncé « (MN) est le milieu [AB] et [DC] » est celui qui est aussi utilisé dans la preuve du binôme Salomé & Karen (6) pour le problème 2. Il signifie comme Salomé & Karen (6) « ça [la droite MN] passe aux milieux de AB et de DC » [74] selon Pierre. La ligne (5) indique la conclusion de la preuve. Bien que les hypothèses mises en œuvre ne soient pas explicitées, nous considérons que les énoncés juste avant la conclusion sont utilisés comme hypothèses (ii). Parce que d'autres propriétés ne sont pas mentionnées dans la preuve.

L'opérateur qui peut être identifié dans le premier pas est une règle invalide. Les milieux de deux segments ne permettent pas toujours les parallélismes de segments formés par les extrémités. En outre, le lien entre l'hypothèse et la conclusion du premier pas (i) n'est pas explicite dans le protocole et ainsi non pas bien établi. En effet, après avoir écrit la ligne (3) [68] qui est proposée par Pierre [58], le binôme cherche d'autres arguments. Le parallélisme est remarqué par Mathieu [77] qui est ensuite rédigé à la ligne (4).

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 2
58. P : il faut qu'on montre que **ça c'est le milieu de ça et ça**.
59. M : ouais.

…
68. P : AB et DC.
69. M : et que **la symétrie par rapport aux longueurs**. J'sais pas si la longueur est moins exagéré.
70. P : ouais, c'est bon. On s'en fiche.
71. M : les longueurs …
72. P : ben, …
73. M : ça prouve qu'ils sont …
74. P : soit M, N les milieux des côtés opposés AB et DC. Les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. En fait, ce qu'il faut qu'on démontre, **ça, ça passe au milieu de AB et de DC. Ça c'est forcément symétrique**, tu vois ?
75. M : ouais, mais, ils sont symétriques parce que … il y a …, comment il s'appelle ?
76. P : **il y a MN qui partage l'un et l'autre.**
77. M : déjà, **ils sont parallèles**. Ca, il faut dire.
78. P : ouais, ouais, ouais, mais, ça, on a un point là, donc.
79. M : ouais.
80. P : donc, c'est …, symé…, c'est parallèle.
81. M : non, non, il faut marquer, alors
82. P : je vais dire, AD parallèle à MN, et BC parallèle à MN.

La construction du deuxième pas (ii) de la preuve ressemble à celle du premier (i). Après avoir écrit la ligne (4), Mathieu arrive tout de suite à la conclusion « donc ils sont symétriques ».

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 2
91. M : ouais, non, ouais, MN et BC parallèle à
92. P : MN.
93. M : donc ils sont symétriques.

La règle suivante peut être identifiée à partir de ce dernier pas (ii). Elle est invalide, comme la règle identifiée pour le binôme Delphine & Baptiste (1) (DB-Sr2). Et le contrôle pour la validation de l'opérateur n'est pas repéré à partir du discours.

MP-Sr1 : si PQ // MN et P'Q' // MN alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Par ailleurs, Pierre verbalise des arguments pour la symétrie. Premièrement, il remarque les milieux « ça, ça passe au milieu de AB et de DC. Ça c'est forcément symétrique » [74]. Nous considérons que c'est une explication descriptive qui explique le phénomène dans lequel deux segments sont symétriques lorsque l'axe passe par leurs milieux. Puis il remarque « il y a MN qui partage l'un et l'autre » [76] qui signifierait que la droite MN partage deux parties égales (MP-Sr2). Celui-ci est aussi identifié chez Marion du binôme Manon & Marion (4) et chez Karen du binôme Salomé & Karen (6) pour le problème 2. Il semble que les arguments sont ajoutés les uns aux autres pour la validation de la conclusion.

MP-Sr2 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F' et F'') par une droite *d* alors Sym (F', F'', *d*)

En ce qui concerne l'orthogonalité, Mathieu & Pierre (10) ne la remarque pas tout au long de la résolution du problème 2. Par rapport à la résolution de la construction pour le problème 1, Mathieu a utilisé l'équerre sans expliciter l'orthogonalité. Autrement dit, l'orthogonalité n'apparaît jamais pour le moment dans leurs résolutions.

2.8.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans le protocole du binôme Mathieu & Pierre (10), la réponse au problème 3 n'est pas explicitement annoncée, sauf que Pierre rappelle par rapport au problème précédent « c'est pareil sauf que c'est un parallélogramme » [100]. La réponse positive « oui, symétrique » est identifiée à la fin de la discussion.

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 3

100. P : en fait, **c'est pareil sauf que c'est un parallélogramme**. … attends, ce qu'on a, c'était un carré ou un rectangle.
101. M : c'est un rectangle.
102. P : c'était les propriétés des rectangles.
103. M : non, c'est bon. …
104. P : …

Phase d'argumentation

Pierre propose d'identifier les propriétés attachées au parallélogramme [108]. Les élèves trouvent « il a ses côtés opposés parallèles » [109] et « la même longueur » [110]. La rédaction d'une preuve est commencée.

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 3

105. M : quadrilatère ABCD …,
106. P : pas toujours ?
107. M : oh, c'est facile, juste, regarde.
108. P : **il faut juste trouver les propriétés qui vont avec ça**.
109. M : **le parallélogramme, c'est …, il a ses côtés opposés parallèles**.
110. P : **et la même longueur**.
111. M : ben voilà, c'est ça. Ben, vas-y. Marque-le.

Phase de rédaction

La preuve suivante est donnée par Mathieu & Pierre (10). C'est Pierre qui la rédige.

1 : Vu qu'un parallélogramme à ses côtés ([AB] et [BC])
2 : à ses côtés opposés parallèles et de même longueur et
3 : que (MN) coupe [AD] et [BC] en leur milieux alors
4 : ils sont symétriques.

Dans la preuve écrite, deux pas suivants de la preuve peuvent être identifiées. Nous avons interprété que « un parallélogramme à ses côtés ([AB] et [BC]) à ses côtés opposés parallèles et de même longueur » des lignes (1 et 2) comme « les côtés opposés dans un parallélogramme sont parallèles et de même longueur deux à deux » (i). Ces propriétés du parallélogramme et une propriété écrite à la ligne (3) sont les hypothèses du pas (ii).

i : ABCD parallélogramme $\rightarrow$ AB // DC, BC // AD, AB = DC, BC = AD

ii : AB // DC, BC // AD, AB = DC, BC = AD, (MN) coupe [AD] et [BC] en leur milieux
$\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Dans le discours, nous ne trouvons pas plus d'information pour les premières deux lignes (1 et 2). Pour la troisième ligne, Pierre propose d'abord « MN … partage le parallélogramme » [130 : 132], puis « MN coupe les segments AD et BC en son milieu » [134]. Mathieu n'est pas tout à fait d'accord avec l'utilisation de « partage » et « coupe » [131 : 133], mais accepte le terme « coupe » [135]. A partir de ces arguments, les élèves concluent « ils sont symétriques » [142 ; 143]. Le discours de Pierre « partage » indique la mobilisation de la règle (MN-Sr2) qui est identifiée lors de la résolution du problème 2. Dans la preuve écrite, cette règle est exprimée sous la forme « (MN) coupe [AD] et [BC] en leur milieux » (ligne 3).

Mathieu & Pierre (10) pour le problème 3
129. M : non ! et que MN …
130. P : et que **MN … partage**
131. M : **non, coupe, non, partage**,
132. P : **partage le parallélogramme**.
133. M : non, non, non,
134. P : soit, c'est mieux, **coupe les segments AD et BC en son milieu**
135. M : **ben, si tu veux**. Mais, bon, marques.
136. P : Parce que …, non ?
137. M : si, si.
138. P : que MN coupe AD et … BC
139. M : en leurs milieux.
140. P : en leurs milieux. Alors …,
141. M : ça prouve que
142. P : alors, **ils sont symétriques.**
143. M : ouais, ça prouve qu'ils sont symétriques. Non, **donc ils sont symétriques**.

L'analyse systématique attribue au pas (ii) la règle suivante.

MP-Nr1 : si PQ // P'Q', PP' // QQ', PQ = P'Q', PP' = QQ' et *d* coupe [PP'] et [QQ'] en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

Or, les arguments proposés dans la preuve s'ajoutent les uns aux autres comme dans l'argumentation selon Duval (1991). En effet, d'une part, le rapport entre les propriétés déduites du parallélogramme et la droite qui coupe deux segments n'est pas établi. Plusieurs propriétés sont mises en œuvre pour la conclusion, mais celles qui la déduisent ne sont pas indiquées. Nous considérons que la règle attribuée par l'analyse systématique de la preuve écrite n'est pas une règle spécifique de la symétrie orthogonale mais celle qui est temporairement générée en ajoutant les arguments. Autrement dit, dans une autre situation dans laquelle se trouvent d'autres propriétés géométriques, une autre règle serait mobilisée.

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- L'équerre est utilisée afin de tracer une droite perpendiculaire dans la résolution du problème 1. La propriété d'orthogonalité n'est pas explicitée. Elle n'est jamais évoquée tout au long de trois résolutions. En outre, la figure dans laquelle manque l'orthogonalité est reconnue comme symétrique. L'orthogonalité n'est donc associée ni à l'utilisation d'équerre et ni à la reconnaissance. L'équerre est utilisée en s'appuyant sur le contrôle perceptif instrumenté au sens de Rolet (1996).

- Comme l'orthogonalité n'est pas remarquée dans les résolutions des deux derniers problèmes, les propriétés disponibles pour les élèves n'ont pas changé dans chaque résolution. Cependant, les règles qui caractérisent la symétrie orthogonale ne sont pas les mêmes. La règle est donc composée des arguments qui s'ajoutent les uns aux autres selon les problèmes.
- La mobilisation de la règle « MP-Sr2 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F' et F'') par une droite *d* alors Sym (F', F'', *d*) » qui s'appuie sur l'appréhension figurale de la symétrie orthogonale est identifiée.
- Les élèves répondent « oui » pour deux reconnaissances (problèmes 2 et 3), c'est-à-dire les règles mobilisées pour les preuves peuvent être les mêmes selon notre analyse a priori. Deux règles largement différentes sont mobilisées dans les preuves écrites (MP-Sr1 et MP-Nr1), c'est-à-dire les règles mobilisées ne sont pas cohérentes. En outre, il semblait que les arguments s'ajoutent les uns aux autres pour valider la conclusion. Nous considérons ainsi que la règle attribuée par l'analyse systématique de la preuve écrite n'est pas une règle spécifique de la symétrie orthogonale mais celle qui est temporairement générée en ajoutant les arguments.

3 SANS SUPPORT OU SUPPORT SANS EQUERRE

Trois binômes sur onze n'utilisent pas l'équerre pour tracer le segment symétrique dans la résolution du problème 1 : Aurélie & Elliot (2), Charlotte & Vanessa (5) et Lola & Laura (11). Tous les trois réalisent séparément les points symétriques et tracent ensuite le segment (A'B'). Les deux binômes Aurélie & Elliot (2) et Charlotte & Vanessa (5) ont tracé les supports sans équerre, c'est-à-dire sans propriété d'orthogonalité du point de vue de la propriété attachée à l'utilisation d'instruments, et reporté la distance au compas, c'est-à-dire avec la propriété de milieu, pour la réalisation de points symétriques. Par contre, le binôme Lola & Laura (11) réalise un segment symétriqu sans tracer le support qui relient deux points symétriques. Elles mobilisent la procédure qui se trouve du temps en temps dans le manuel scolaire : à partir de deux points différents quelconques sur l'axe, tracer deux arcs passant par A (et B) de l'autre côté de l'axe ; l'intersection de ces deux arcs est le symétrique. Nous analysons les résolutions de ces binômes pour les trois problèmes différents.

3.1 Aurélie & Elliot (2)

3.1.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Aurélie & Elliot (2) résout le problème selon le processus suivant avec le compas et la règle.

1. prendre un point sur l'axe d (la croix en bas par lequel passe la droite passant par B).
2. Reporter aucompas la distance entre B et le point pris à l'étape précédente de l'autre côté de l'axe.
3. tracer avec la règle une droite passant par B et prendre l'intersection B'.
4. prendre un deuxième point sur d et même procédure pour le point A
5. tracer un segment entre A' et B'.

Pour la résolution du problème P(B), premièrement un point sur l'axe est pris et la distance entre ce point et le point B est reporté de l'autre côté de l'axe avec un compas (Figure VI.45). Puis une droite passant par le point B et le point sur l'axe est tracé avec une règle en tant que support qui relie deux points symétriques (Figure VI.46). La droite tracée (BB') est perceptivement proche à celle perpendiculaire par rapport à la droite d, alors que AA' est légèrement plus loin de la droite perpendiculaire que BB' (Figure VI.47).

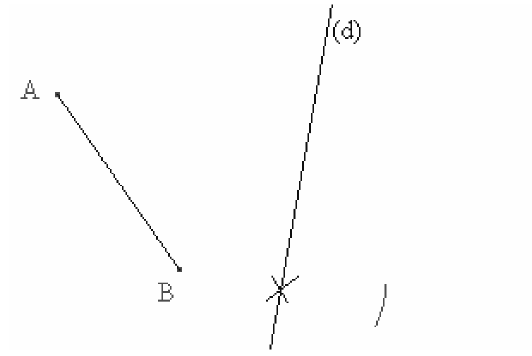


Figure VI.45 Première étape

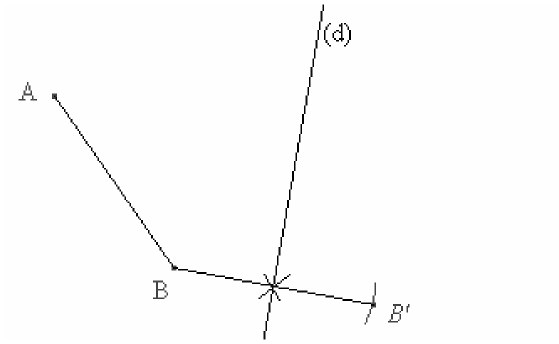


Figure VI.46 Deuxième étape

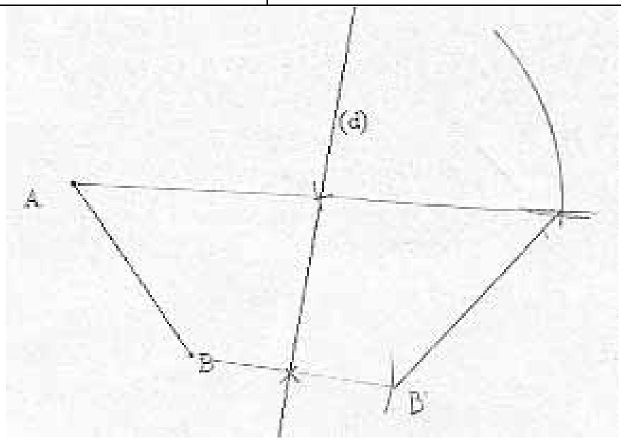


Figure VI.47 Réalisation par le binôme Aurélie & Elliot (2)

Les opérateurs suivants sont identifiés à partir de ce processus pour la résolution du problème P(B)

> AE-Cr1 : prendre un point sur une droite et reporter la distance de l'autre côté de cette droite avec un compas
>
> AE-Cr2 : tracer une droite passant par deux points avec une règle

Dans les opérateurs AE-Cr1 et AE-Cr2, l'action qui implique l'orthogonalité n'est pas trouvée. Même dans le protocole, l'énoncé qui la mentionne n'apparaît pas. Le point pris par l'opérateur AE-Cr1 sur l'axe joue un rôle important dans la réalisation. Ce point pour B n'est pas un point quelconque sur l'axe, mais celui qui n'est pas très loin du point par lequel passe le support perpendiculaire à l'axe. Ainsi, ce point sur l'axe est perceptivement pris. Par contre, nous diagnostiquons que l'utilisation d'un compas dans cet opérateur porte le report de la distance. Et l'opérateur AE-Cr2 trace une droite qui passe par deux points qui est auparavant tracée, c'est-à-dire elle est analytiquement tracée. Nous diagnostiquons que l'utilisation d'une règle porte la propriété de l'alignement de points.

La procédure prend en compte à la fois les critères analytiques et perceptifs. Elle est donc « semi-analytique » dans notre sens. Le contrôle suivant pour le choix d'opérateurs est diagnostiqué.

AE-Cσ1 : si $\exists$M $\in$d (perceptif), PM = M*x*, et Aligne (P, M, *x*) alors Sym (P, *x*, *d*)

Comme le point M pris dans la réalisation n'était pas quelconque, « $\exists$M $\in$d (perceptif) » signifie que « le point M est pris sur la droite d par un critère perceptif ».

Dans le protocole du binôme Aurélie & Elliot (2), nous ne pouvons pas identifier d'informations sur la validation du résultat obtenu. La réalisation et le protocole ne nous permettent pas d'analyser le contrôle pour la validation du résultat obtenu.

3.1.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans la phase de conjecture, le problème posé est la reconnaissance : la figure donnée est-elle symétrique ou non par rapport à une droite ? Les élèves Aurélie et Elliot proposent la réponse « oui, symétrique » tout de suite après la lecture des énoncés [29 ; 30]. A ce moment là, comme les éléments, autres que les propriétés données par les énoncés du problème, ne sont pas mentionnés, la perception globale est sans doute mobilisée pour juger si la figure donnée est symétrique ou non.

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 2
28. E : … segments AD et BC …
29. A : **ils sont symétriques** …
30. E : **oui, ils sont symétriques**.
31. A : **par rapport à la droite MN**.
32. E : ouais. Il faut démontrer.

Puis, Aurélie remarque l'existence d'orthogonalité « c'est perpendiculaire à cette droite » [33]. A partir de cela, nous considérons que la propriété d'orthogonalité dispose pour Aurélie d'un statut particulier. Mais, pour le moment, son lien avec la symétrie n'est pas explicité. D'autre part, Elliot propose aussi comme argument la même longueur « parce que AM est égal à MB et DN est égal à NC » [36] qui provient de la propriété de milieux [34]. Pour le moment, les arguments ne sont pas organisés de manière à ce qu'ils valident la conjecture. En effet, le discours d'Aurélie « comment on démontre ? » [37] l'indique. Autrement dit, la valeur logique des égalités pour Aurélie n'est pas encore « démontrée ».

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 2
33. A : hummm, ben, **c'est perpendiculaire à cette droite** …
34. E : **parce que MN, il coupe AB en deux et DC en deux**.
35. A : je sais pas, moi. Ils sont symétriques, mais …, parce que apparemment …
36. E : **parce que AM est égal à MB et DN est égal à NC**.
37. A : ça est égal à ça ? oui, mais oui, comment on démontre ? Ben oui, **les milieux** des …
38. E : … **oui ou non ?**
39. A : ben, c'est déjà **c'est oui**. On va mettre.

Phase d'argumentation

Avant commencer à rédiger une preuve, Aurélie & Elliot (2) cherchent encore des arguments pour démontrer « oui, symétrique ». Aurélie propose comme argument le pliage : « si on plie la feuille, le segment AD il va être sur le segment BC » [43 ; 45]. Elle revient encore sur l'orthogonalité et propose de la démontrer : « il faut prouver que ça c'est perpendiculaire » [47]. Nous pouvons encore voir que l'orthogonalité a un statut particulier par rapport aux autres éléments. Ensuite, elle considère le partage en deux parties égales : « il coupe en deux » [47] et « c'est un rectangle de la même dimension » [50]. Aurélie arrive aux égalités « AM = MB » et d'autres [51] qui étaient déjà considérées par Elliot [34 ; 36].

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 2

42. E : oui, AD et BC sont symétriques par rapport à MN
43. A : **parce que si on plie, ça touche ça**.
44. E : ah, bien. Il faut dire ça.
45. A : oui, mais, **si on plie la feuille, le segment AD il va être sur le segment BC**.
46. E : c'est bon.
47. A : alors, et ben … il faut prouver que ça **c'est perpendiculaire**. C'est un rectangle, en fait, parce que … ah oui, il utilise … alors, attends, … **comme c'est un rectangle, et il coupe en deux**.
48. E : hum. Ça fait …
49. A : ça **c'est perpendiculaire à**
50. E : **c'est un rectangle de la même dimension**.
51. A : voilà, et donc, … et **AM égal à MB**. Ça c'est égal à ça. Ça c'est égal à ça. Donc, voilà. Il faut rédiger maintenant.

Le rapport entre les propriétés remarquées jusqu'ici peut être exprimé comme le schéma suivant. Le pliage est explicitement lié à la symétrie orthogonale. La « même dimension » implique les égalités. Le milieu est aussi lié à la même longueur, mais de la manière moins explicite. L'orthogonalité ou la perpendiculaire n'est liée à aucune autre propriété.

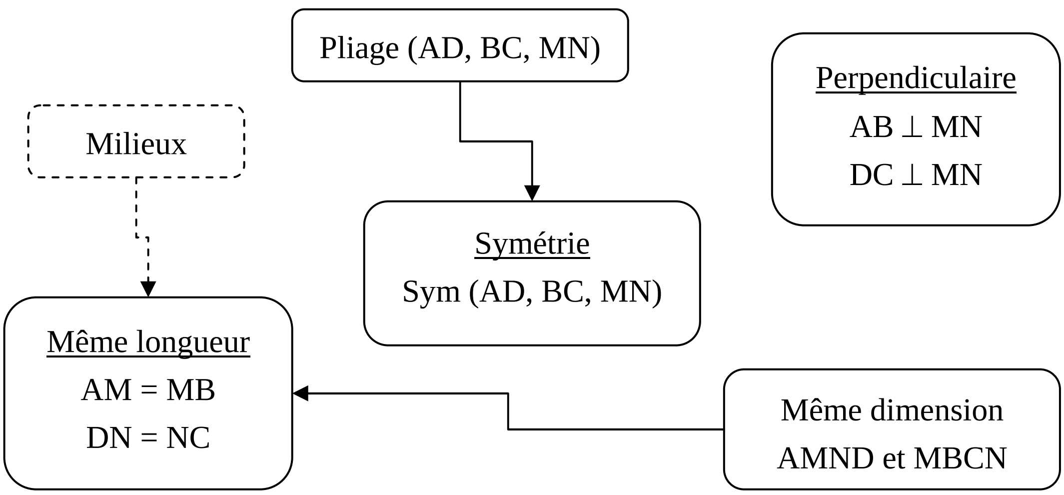


Figure VI.48 les liens entre les propriétés repérées dans la phase d'argumentation

Phase de rédaction

La preuve donnée par Aurélie & Elliot (2) est la suivante. La conjecture donnée dans la phase de reconnaissance était la réponse positive « oui, symétrique ». C'est Elliot qui la rédige. Nous analysons d'abord la structure de raisonnement de la preuve.

1 : Oui, les segments [AD] et [BC] sont symétriques
2 : par rapport à la droite (MN) car la droite (MN)
3 : partage le rectangle ABCD en 2 rectangles de même
4 : dimensions : AMND et MNBC.
5 : Donc MB = MA et NC = ND

Dans la rédaction, nous avons interprété que la phrase après la conjonction « car » de la ligne (2) est une preuve. Le premier pas (i) est identifié dans cette phrase. Comme le terme « Donc » est un indice de la conclusion, l'énoncé avant ce terme est une hypothèse et celui après est la conclusion. Le deuxième pas (ii) n'est pas explicite dans la preuve. Nous interprétons que la propriété marquée à la fin de la preuve est mise en œuvre comme hypothèse pour la conclusion générale de la preuve. Les pas suivants de la preuve sont ainsi identifiés.

i : AMND et MNBC : rectangles de même dimensions $\rightarrow$ MB = MA et NC = ND

ii : MB = MA et NC = ND $\rightarrow$ Sym (AB, DC, MN)

Le premier pas est un raisonnement qui est aussi identifié dans la phase d'argumentation [50-51]. Par contre, le deuxième pas n'est pas explicitement évoqué dans la phase d'argumentation, ni dans la phase de rédaction. Nous pouvons considérer à partir de la preuve écrite que la règle suivante mobilisée comme opérateur ou permis d'inférer pour le deuxième pas qui caractérise la symétrie.

AE-Sr1 : si PM = MP' et QN = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

Or, le rapport de l'égalité de longueur avec la symétrie orthogonale n'est pas non plus explicité dans le discours [72-74]. Les discours d'Aurélie à la fin de la résolution montrent qu'elle n'a pas bien saisi le problème et la résolution [75 ; 77], c'est-à-dire ce rapport serait aussi implicite chez Aurélie.

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 2

71. A : alors, on met …, bon ben,
72. E : et on **met BC égal MN ? Les côtés opposés ont la même longueur**.
73. A : non, tu mets **BM est égal à MA** et **ND est égal à NC**. On laisse comme ça, d'accord ?
74. E : oui. … voilà.
75. A : **t'as compris, l'exercice ?** le deux.
76. E : ouais.
77. A : pas, moi. **C'est pire**.

Nous considérons une autre possibilité de la preuve. La phrase après « car » jusqu'à « Donc » dans la rédaction peut être une hypothèse pour la conclusion « Sym (AB, DC, MN) ». En effet, si une droite partage un rectangle en deux rectangles de mêmes dimensions, ces deux rectangles sont symétriques par rapport à la droite. Dans ce cas, la règle suivante est plutôt mobilisée.

> AE-Sr2 : si une droite *d* coupe un rectangle en deux rectangles (F' et F'') de la même dimension alors Sym (F', F'', *d*)

La règle (AE-Sr2) est valide dans le cas de rectangle. Les travaux antérieurs montrent que la règle sous le format plus général « la droite de symétrie partage la figure en deux parties égales » est souvent mobilisée pour la reconnaissance par les élèves (Grenier, 1988, p.166).

Par ailleurs, dans le protocole, Elliot remarque une autre propriété qui n'est pas prise en compte par Aurélie pour la rédaction. Tout de suite après la rédaction de la deuxième proposition, Elliot propose les égalités « BC = MN » [72] provenant de la propriété du rectangle « Les côtés opposés ont la même longueur » [72]. Les propriétés annoncées par Elliot sont plutôt celles globales qui seraient des arguments pour deux segments symétriques : « parce que MN, il coupe AB en deux et DC en deux » [34] ; « c'est un rectangle de la même dimension » [50] ; « BC égal MN ? Les côtés opposés ont la même longueur » [72]. En revanche, Aurélie remarque les propriétés qui permettent de caractériser des points symétriques : l'orthogonalité [33 ; 47 ; 49] ; l'égalité de longueur ou distance [51 ; 73]. De plus, le pliage est aussi évoqué pour la reconnaissance. Mais, finalement, l'argument mis en œuvre pour la rédaction est seulement l'égalité de longueur « MB = MA et NC = ND », alors qu'Aurélie ne considère pas que la preuve soit bien rédigée.

Par rapport au problème de la construction (problème 1), l'orthogonalité et le pliage qui n'apparaissent pas dans la construction sont identifiés dans la reconnaissance. Cependant, ils ne sont pas mobilisés de manière à permettre une caractérisation de symétriques.

3.1.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance) et d'argumentation

La première réponse d'Elliot est « oui » en référence du problème précédent (problème 1) [84 ; 86 ; 88]. Par contre, Aurélie la conteste tout d'abord et propose la réponse « non » [85 ; 87]. Mais, la réponse d'Aurélie n'est pas stable. Elle hésite entre « oui » et « non » [89].

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 3

83. A : les segments AB et DC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN ?
84. E : **oui. C'est un même truc**.
85. A : mais, **non**, c'est la droite des milieux. …, bon alors …,
86. E : **c'est pareil, pour l'exercice 2**.
87. A : **ben non, parce que** …, ben si, si.
88. E : **si.**
89. A : il faut démontrer que, si MN est parallèle à AB et DC. Disons, on met oui, parce que c'est sûr. **Ben non**.

90. E : **ben si**.
91. A : regarde. … c'est quoi, ce truc ?

Aurélie remarque certaines propriétés pour avoir une réponse symétrique ou non : « parallèle » [93] ; « la même distance » [95]. Finalement, elle décide de tracer un dessin pour déterminer la réponse [95 ; 99]. Le dessin tracé est celui du haut, dans la preuve. Nous interprétons ici que le choix de construction de symétrique pour la reconnaissance indique que les propriétés remarquées ne sont pas suffisantes pour elle afin d'avoir une réponse. En outre, le contrôle perceptif ne l'est pas non plus.

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 3

92. E : …
93. A : alors regarde. **Ca et ça c'est parallèle**. Ça …, j'arrive pas à …, c'est pas grave.
94. E : …
95. A : donc, ça et ça c'est pareil. **C'est la même distance**. Ça aussi. Hum …, il faut savoir s'ils sont symétriques. **Il faut essayer de voir comme ça**.
96. E : non, c'est pas grave. **en gros, parallélogramme divisé par** … par
97. A : **par une droite**.
98. E : une droite ça coupe le parallélogramme.
99. A : **pour voir si c'est symétrique**, on va essayer **avec le compas**, tu vois ? Donc, pour l'instant, ça va. Ensuite, …, houp …, **ben oui, c'est symétrique**.
100. E : hum.
101. A : comme on rejoint ça et ça, ben …

A main levée, Aurélie trace le symétrique [99]. Aurélie mobilise ici un contrôle suivant pour la reconnaissance de symétriques par la construction.

> AE-Nr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques

Nous ne pouvons pas savoir à partir du protocole et du dessin donné la procédure de construction, mais nous pouvons le savoir plus précisément dans la construction effectuée plus tard avec le compas et la règle. En effet, après avoir construit un dessin à main levée, Aurélie retrace le dessin avec la règle et le compas [107, 109]. Cette fois-ci, le rôle de la construction est plus explicite dans le protocole : « il faut avec le compas pour voir si c'est … ça va nous rendre le même résultat » [111]. Le contrôle AE-Nr1 est bien mobilisé.

Aurélie & Elliot (2) pour le problème 3

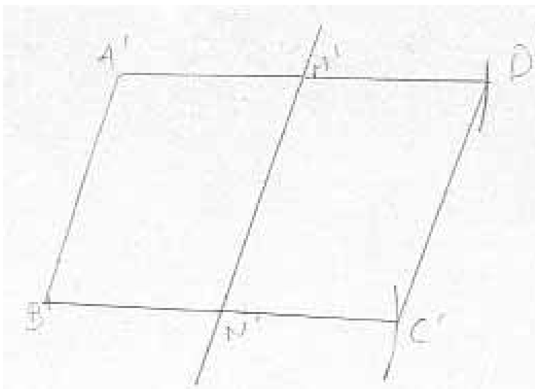
102. E : tu peux mettre, oui. **La droite MN coupe AD en son milieu et BC en son milieu aussi**.
103. A : est-ce qu'on peut démontrer avec … tracer ?
104. E : après, **tu vas marquer MN coupe AD en son milieu et BC en son milieu**.
105. A : oui, mais ils disent là, on a pas besoin de les mettre.
106. E : d'accord.
107. A : **on va refaire la figure**.
108. E : un milieu ?
109. A : ben non, **je mets avec ma règle et mon compas**. On fait déjà tracer la parallèle.
110. E : …
111. A : je me souviens plus comme on trace, mais c'est pas grave. … pour tracer, **il faut avec le compas pour voir si c'est … ça va nous rendre le même résultat**, mais …. On verra bien que … et on va faire pareil … avec le compas. Et on trace … . ça donne le même parallélogramme. … ben, **on va démontrer comme on a fait**. Non ?

Si. Alors, vas-y, écris.

Du côte Elliot, un argument explicité pour la réponse « symétrique » est « en gros, parallélogramme divisé par une droite » [96]. Nous interprétons que la règle suivante est mobilisée. De plus, à partir de « en gros », nous pouvons savoir que la reconnaissance est globale. Il remarque aussi les milieux [102 ; 104]. Nous considérons que le milieu dispose d'un statut particulier pour la symétrie orthogonale pour Elliot.

AE-Nr2 : si une droite *d* coupe un rectangle en deux parallélogrammes (F' et F'') de la même dimension alors Sym (F', F'', *d*)

Le processus de la réalisation d'un segment symétrique et le dessin tracé sont présentés ci-dessous. Le processus de construction est repéré par l'observateur. Aurélie utilise des notations avec primes pour montrer qu'il est possible que le dessin qui sera tracé soit différent de la figure donnée.

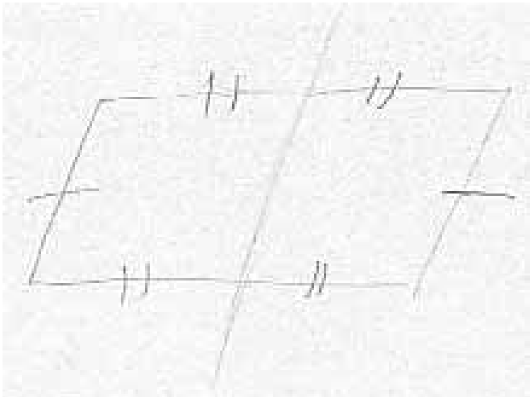
Instruments : règle, compas 1. trace la droite M'N' 2. trace les points A' et B' perceptivement parallèle à M'N' 3. trace un petit arc avec le centre M' et la distance AM' (M' est perceptivement choisi) 4. trace la droite A'M' (l'intersection avec M'N' est D') 5. même chose pour C' étant l'image de B' 6. trace les segments A'B' et D'C'	

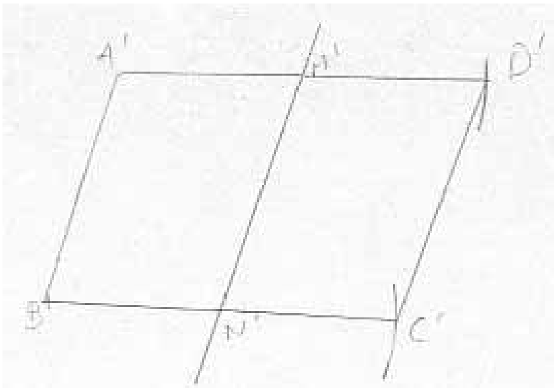
Aurélie prend sur l'axe le point (M') qui se situe sur la droite horizontale passant par A' (3). A ce moment, la droite n'est pas encore tracée, c'est-à-dire elle prend implicitement en compte la droite ou direction horizontale. Puis, après avoir tracé avec un compas un petit arc pour reporter la distance, la droite passant par deux points A' et M' est tracée. Le point qui existe déjà sur l'axe est utilisé. Enfin, comme les deux points pris sur l'axe (M' et N') sont sur les droites horizontales, le dessin tracé est un parallélogramme comme la figure donnée par le problème 3.

La réponse donnée par Aurélie est « oui », parce qu'elle propose une preuve avec la construction comme elle a fait [111] et aussi que le dessin tracé est identique au dessin donné par le problème.

<u>Phase de rédaction</u>

La preuve suivante est rédigée pour le problème 3 par le binôme Aurélie & Elliot (2). La preuve est une explication du rôle du dessin tracé qui est déjà considéré dans le discours précédent. Nous y confirmons la mobilisation de la règle AE-Nr1. Les propriétés géométriques ne sont pas mises en œuvre pour la preuve. Dans le protocole, nous ne pouvons pas identifier plus d'informations que celles qui sont écrites sur la preuve.





1 : Oui, car en traçant avec le compas le symétrique
2 : de A'B'M'N' on obtient le parallélogramme A'B'C'D'.
3 : Donc [AB] et [DC] sont symétriques par rapport
4 : à la droite (MN)

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- L'équerre n'est pas utilisée pour tracer des supports qui relient deux points symétriques. L'opérateur qui repose sur la perception globale n'est pas celui de la réalisation d'un support, mais celui du choix d'un point sur l'axe pour reporter la distance. Or, l'opérateur « AE-Cr1 : prendre un point sur une droite et reporter la distance de l'autre côté de cette droite avec un compas » est souvent mobilisé dans la réalisation d'un point symétrique avec la propriété d'équidistance.
- La propriété d'orthogonalité est évoquée par Aurélie dans la résolution du problème 2. Cependant elle ne l'est pas dans les preuves des problèmes 2 et 3, ni dans la

reconnaissance du problème 3. Autrement dit, cette propriété n'est pas attachée à la preuve de caractérisation, ni à la reconnaissance. Pour cela, dans la résolution du problème 3, la reconnaissance est effectuée par la construction. La procédure de réalisation est cohérente à celle du problème 1, et l'orthogonalité n'est donc pas prise en compte pour la réalisation de supports.

- Le pliage est aussi évoqué dans la résolution du problème 2. Cependant il n'est pas mis en œuvre pour le problème 3.
- Aurélie hésite à donner la réponse « oui » pour le problème 3. Nous considérons que sa perception globale des figures symétriques est la cause de cette hésitation. De ce fait, la construction est choisie pour la reconnaissance.
- Pour l'élève Elliot, son moyen de reconnaissance pour le problème 3 est le même que celui pour le problème 2. Le partage en deux parties égales est mobilisé qui s'appuie sur l'appréhension globale de la symétrie orthogonale.

3.2 Charlotte & Vanessa (5)

3.2.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Charlotte & Vanessa (5) n'utilise pas non plus l'équerre pour la réalisation de supports. Nous présentons ci-dessous ce processus.

1. tracer la droite perpendiculaire à d passant par B avec la règle (sans équerre)
2. tracer, de l'autre côté, avec le compas, un arc du cercle dont le centre est l'intersection entre d et la droite tracée.
3. Idem pour le point A.
4. tracer un segment entre A' et B'.

Deux points symétriques sont réalisés séparément. Pour la réalisation d'un point symétrique, le support est tracé en premier et puis la distance est reportée. Les instruments utilisés sont une règle et un compas. Analysons la partie de la réalisation d'un point symétrique.

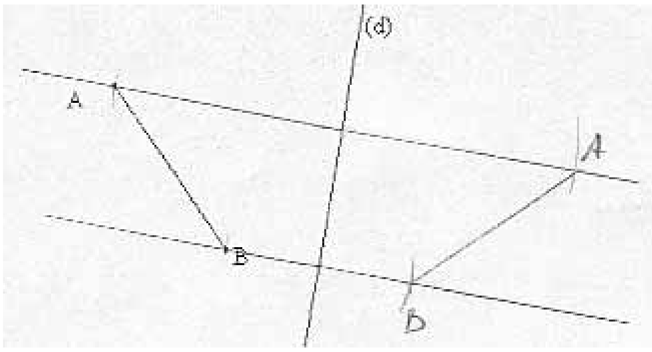


Figure VI.49 Réalisation par le binôme Charlotte & Vanessa (5)

Les opérateurs suivants sont identifiés à partir du processus de la réalisation du symétrique B'.

CV-Cr1 : tracer une droite passant par B

CV-Cr2 : reporter la distance au compas

L'opérateur CVr1 n'explicite aucun critère de la direction de la droite à tracer que nous pouvons observer à partir de l'instrument utilisé. Or, dans la réalisation sur la feuille, une direction est privilégiée pour deux cas, AA' et BB'. Cette direction est très proche de la perpendiculaire à l'axe d. Dans le protocole, aucun critère pour la réalisation d'une droite n'apparaît. Nous considérons que la nécessité de l'orthogonalité est perceptivement prise en compte[11].

Par ailleurs, le report de la distance est effectué avec le compas qui nous permet d'observer la propriété mise en œuvre dans l'action. De plus, dans le protocole, le terme « milieu » qui indique le report de la distance est utilisé [8-9].

Charlotte & Vanessa (5) pour le problème 1

8. V : ça c'est **le milieu** là, non ?
9. C : il faut que, **il faut que ça soit milieu quoi**, attends.
10. V : ça va aller où, là ?
11. C : ben, d'autre côté, après avec le compas, attends, … ça, on peut …, après on prend un compas, t'as un compas ?
12. V : …
13. C : après on prend sur la ligne. …, voilà. … après on fait pareil.

Ainsi considérons-nous que le binôme Charlotte & Vanessa (5) utilise la procédure « semi-analytique » pour la réalisation. Nous diagnostiquons la règle suivante pour le contrôle de choix d'opérateurs.

CV-Cσ1 : si Px : direction privilégiée et PM = Mx (M = P$x \cap d$) alors Sym (P, x, d)

[11] Dans les travaux précédents sur la construction de symétriques, la direction horizontale est souvent privilégiée (Grenier, 1988 ; Tahri, 1993).

La phrase « direction privilégiée » signifie ici l'orthogonalité du point de vue de l'observateur. C'est une règle perceptive ayant une propriété perceptive et pragmatique dont le support est inscrit dans la géométrie pragmatique.

Le protocole du binôme Charlotte & Vanessa (5) ne nous permet pas suffisamment d'informations pour le contrôle de la validation de résultat obtenu.

3.2.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans la phase de conjecture, le binôme Charlotte & Vanessa (5) propose la réponse « oui » tout de suite après la lecture [21 ; 22]. En outre, Charlotte mobilise le pliage pour la reconnaissance de symétriques [23].

Charlotte & Vanessa (5) pour le problème 2

21. C : ABCD est un rectangle. Soit M, M est le milieu de AB et N est le milieu de DC. M, N est les milieux des côtés. Oui. Les segments AD et BC sont-ils symétriques par rapport à la droite MN ? Symétrique ? **Ben, oui, non ?**
22. V : **oui**.
23. C : **ben oui, si tu pliais, ça se met sur l'autre**.
24. V : oui.
25. C : après, ben, il faut démontrer, mon dieu. … une idée ?

La règle suivante sur le pliage est donc mobilisée par Charlotte. Parce qu'elle n'a pas effectivement plié la feuille, le pliage était mental.

CV-Sr1 : si Pliage (F, F', *d*) alors Sym (F, F', *d*)

Phase d'argumentation

Les élèves cherchent les arguments pour la démonstration. La première propriété considérée est « la même longueur » [30] par Vanessa. Charlotte considère d'abord les milieux [33] et puis la même longueur à partir du rectangle [33]. Cette dernière indique « AB = DC et AD = BC ». Ensuite, nous interprétons que le discours de Charlotte « il partage, forcément la même longueur, si il coupe en milieux » indique la propriété de la même longueur rédigée dans la preuve : « [AB] = [MB] = [DN] = [CN] ».

Charlotte & Vanessa (5) pour le problème 2

30. V : je sais pas… ben tu sais **la même longueur**.
31. C : oui, mais il y a pas de longueur. On peut faire avec ça ? On n'a pas de longueur ?
32. V : non, tu peux pas ?
33. C : non, tu peux pas bouger sur le dessin. … ah ben oui, **ça c'est le milieu**, c'est le milieu de ça et ça. Regarde, il est rectangle. Donc, **s'il y a rectangle, forcément ça et ça, ils ont la même longueur**. **Et ça et ça ils ont la même longueur**. Donc, lui, c'est le milieu ..
34. V : mais, … pour milieu de …
35. C : non, c'est un truc de triangle, ce qu'on apprend dans le triangle. Les milieux, là ?
36. V : oui
37. C : mais non, regarde ça. Le rectangle, **ça et ça, ils ont la même longueur. Et ça et ça, ils ont la même longueur**. Donc, si lui, **il partage, forcément la même longueur, s'il coupe en milieux**.

38. V : oui, tu expliques ça comment ?

Les élèves commencent à rédiger. Mais, pour le moment, le rapport entre les propriétés identifiées et le symétrique n'est pas explicité.

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par Charlotte & Vanessa (5). La conjecture proposée dans la phase de reconnaissance était la réponse « oui, symétriques ».

1 : Oui
2 : ABCD est un rectangle
3 : donc [AB] = [DC]
4 : [AD] = [BC]
5 : M est le milieu de AB
6 : N est le milieu de DC
7 : donc la droite (MN) coupe
8 : [AB] et [DC] en leur milieu
9 : donc [AM] = [MB] = [DN] = [CN]
10 : donc [AD] et [BC] sont symétriques

Analysons d'abord la structure de la preuve. Les pas suivants de la preuve peuvent être identifiés. Le premier pas (i) est explicitement identifié aux lignes (2, 3 et 4). Une propriété du rectangle est mobilisée comme opérateur. Le deuxième pas (ii) est identifié aux lignes (5, 6, 7 et 8). Ce pas assemble juste les deux propriétés séparées. Ensuite, nous interprétons que deux pas sont effectués (iii et iv) pour la conclusion de la ligne (9). En effet, l'énoncé donné aux lignes (7 et 8) ou (5 et 6) ne permet pas l'égalité « MB = DN » de la ligne (9). Il doit exister un pas qui le permet. Comme l'égalité « DN = NC » est déduite au premier pas (i), nous considérons que le pas (iv) mobilise implicitement la transitivité d'égalité avec cette propriété. Enfin, nous avons interprété que l'énoncé de la ligne (9) est utilisé comme hypothèse pour la conclusion générale écrite à la ligne (10).

i : ABCD rectangles $\rightarrow$ AB = DC et AD = BC

ii : M et N milieux de AB et de DC $\rightarrow$ (MN) coupe [AB] et [DC] en leurs milieux

iii : MN coupe [AB] et [DC] en leurs milieux $\rightarrow$ AM = MB et DN = CN

iv : AB = DC, AM = MB et DN = CN $\rightarrow$ AM = MB = DN = CN

v : AM = MB = DN = CN $\rightarrow$ Sym (AD, BC, MN)

Pour le dernier pas (v) qui concerne directement la symétrie, une règle suivante peut être identifiée.

CV-Sr1 : si PM = MP' = QN = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN)

C’est une règle invalide. L’hypothèse manquante pour qu’elle devienne valide est d’abord les alignements de (P, M, P’) et de (Q, N, Q’). Comme les points M et N sont les milieux, les élèves les prennent implicitement en compte. Ensuite, les orthogonalités (PP’ ⊥ MN et QQ’ ⊥ MN) sont absentes. Dans le protocole, la partie qui déduit la conclusion générale, le pas (v), est immédiate, c’est-à-dire le rapport entre les égalités et la symétrie orthogonale est implicite [47]. La propriété plus ou moins explicitement prise en compte est donc celle des milieux qui sont déjà donnés dans les énoncés du problème.

Charlotte & Vanessa (5) pour le problème 2

39. C : ben, alors. ABCD … est un … donc, AB … = DC, AB = DC, et … AD = BC. Donc, après, M, le milieu, comment on fait déjà ? le milieu de AB, N est … de DC.
40. V : M est le milieu de AB et N est le milieu de DC.
41. C : DC … donc, … vas-y. Comment on dit ça ?
42. V : la droite **MN coupe les milieux du rectangle ABCD** ..
43. C : le milieu du rectangle. Donc là, la droite MN coupe …
44. V : coupe le rectangle … ABCD, non ?
45. C : non, ben non, coupe … MN … donc la droite MN coupe
46. V : AB et CD
47. C : AB et CD et DC en leurs milieux. Donc, coupe AB et DC, **je comprends pas ce que je suis en train de dire**. En leur milieu. **Donc, AM = MB = DN = CN**. Donc, ben donc, **AD et BC sont symétriques**.
48. V : symétriques.

Dans l’analyse de la construction pour le problème 1, l’orthogonalité n’est pas prise en compte dans la réalisation du support qui relie deux points symétriques. Dans la résolution du problème 2, en cohérence avec la résolution du problème 1, l’orthogonalité n’est jamais évoquée tout au long de la résolution. La règle identifiée ici utilise les milieux qui sont aussi mis en œuvre dans la construction du problème 1. Dans ce sens, les règles mobilisées sont cohérentes dans deux problèmes différents.

3.2.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance) et d’argumentation

Dans le protocole du binôme Charlotte & Vanessa (5), la conjecture « oui, symétrique » est immédiatement obtenue. Le discours de Charlotte indique que la preuve est la même que celle pour le problème 2 [53]. La discussion sur la conjecture n’est pas identifiée dans le protocole. Vanessa commence déjà à écrire une preuve [54].

Charlotte & Vanessa (5) pour le problème 3

53. C : ABCD. **Oui. tu fais pareil que …, ça c’est milieu et ça et ça est égal, ça et ça c’est égal** …,
54. V : …
55. C : alors AD …, égal à, montres.
56. V : AD = , **ah ça c’est parallèle**.
57. C : ce que je disais est **la même longueur**.
58. V : ben,
59. C : regarde. **Ils sont parallèles**, **ils ont pas la même longueur**. Non, mais, **ils ont la même longueur**, après c’est tout. **AD et BC qui sont la même longueur**.
60. V : oui, mais, **AB et DC sont la même longueur aussi**.

Les arguments identifiés par Charlotte sont, comme nous avons vu dans le protocole du problème 2, les milieux et les égalités de longueur [53] : « AM = MD et BN = NC ». Vanessa remarque aussi la propriété de parallélisme [56], mais Charlotte ne la prend pas en compte pour la preuve [57 ; 59].

Phase de rédaction

La preuve suivante est rédigée par le binôme Charlotte & Vanessa (5). La conjecture proposée est « oui, symétrique ».

1 : Oui
2 : ABCD est un parallélogramme
3 : alors [AD] = [BC] et [AB] = [DC]
4 : M coupe le milieu de [AD]
5 : N coupe le milieu de [BC]
6 : Donc la droite (MN) coupe les segments
7 : [AD] et [BC] en leurs milieu
8 : [AB] et symétrique à [DC] par rapport à
9 : [MN]

La preuve est presque la même que celle pour le problème 2. Ce qui est principalement différent est un seul point, il manque dans la preuve pour le problème 3 une ligne qui existait dans la preuve pour le problème 2 : la propriété d'égalité « [AM] = [MB] = [DN] = [CN] » de la ligne 9 de la preuve pour le problème 2. Cette propriété est évoquée par Charlotte au début de la résolution [53]. Cependant nous ne pouvons pas explicitement savoir sa mise en œuvre pour la validation de la conclusion générale. La règle suivante est identifiée à partir de la dernière pas de la preuve écrite.

CV-Nr1 : si (MN) coupe [PP'] et [QQ'] en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', MN)

En résumé

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- La propriété d'orthogonalité n'est jamais explicitée tout au long des résolutions des trois problèmes. L'orthogonalité n'a donc pas un statut particulier pour la symétrie orthogonale pour le binôme Charlotte et Vanessa.
- Le pliage est évoqué par Charlotte dans la résolution du problème 2. Cependant, il n'est pas mentionné pour les problèmes 1 et 3.
- La procédure de réalisation du problème 1 ne prend en compte que les milieux. De même, deux preuves produites pour les problèmes 2 et 3 prennent en compte les égalités de longueur et/ou les milieux. Les règles mobilisées sont ainsi cohérentes dans ces trois

résolutions.

3.3 Lola & Laura (11)

3.3.1 Problème 1 : construction d'un segment symétrique

Le binôme Lola & Laura (11) réalise le segment symétrique pour le problème de construction sans réaliser de supports qui relient deux points symétriques. La propriété d'équidistance est deux fois prise avec le compas pour la réalisation d'un point symétrique. Le processus suivant de la réalisation d'un segment symétrique par le binôme Lola & Laura (11) est identifié.

1. Tracer avec le compas des arcs à partir de deux points quelconques sur l'axe (deux points sur l'axe : l'un à côté de la marque (d) et l'autre à la partie en bas) passant par A et B, c'est-à-dire quatre arcs sont tracé.
2. Prendre les intersections comme A' et B'.
3. Tracer un segment entre A' et B'.
4. Vérifier le symétrique avec le quasi pliage.

L'instrument utilisé est principalement le compas. La règle est utilisée simplement pour tracer un segment dont les extrémités sont déjà réalisées. Cette procédure est trouvée souvent dans les manuels scolaires[12] et bien analysée dans l'analyse théorique du chapitre IV. Le processus de la réalisation pour les points symétriques A' et B' n'est pas explicitement dissocié. Les problèmes P(A) et P(B) sont abordés en même temps (Figure VI.50 et Figure VI.51). Cependant, les résolutions de ces deux problèmes ont de la même nature. Nous analysons donc la réalisation pour un point symétrique : P(A).

[12] Par exemple, *Pythagore 6*e, p.147. Voir aussi le Chapitre IV §4.3.2.

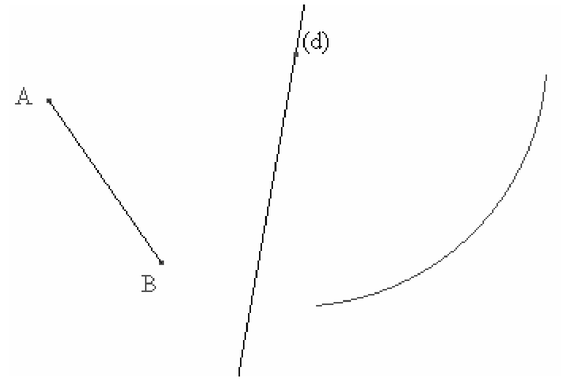


Figure VI.50

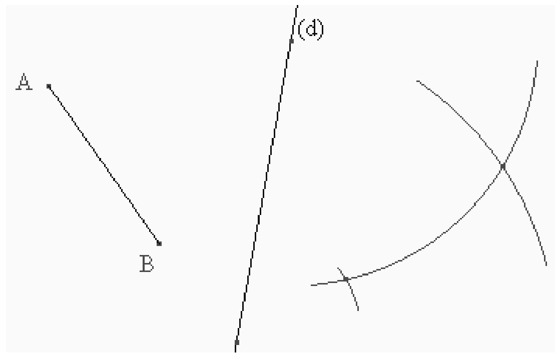


Figure VI.51

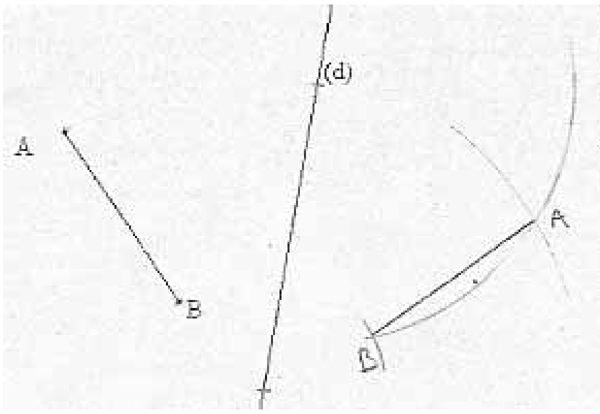


Figure VI.52 Réalisation par le binôme Lola & Laura (11)

L'opérateur suivant est deux fois mobilisé.

> LL-Cr1 : reporter la distance entre le point A et un point quelconque sur l'axe de l'autre côté de l'axe

Cet opérateur est aussi mobilisé par les binômes Aurélie & Elliot (2), Pauline & Agathe (3) et Estelle & Mélodie (7). L'utilisation d'un compas nous permet de repérer la mobilisation de la propriété de l'équidistance de deux points symétriques à partir d'un point quelconque sur l'axe. Comme il est mobilisé deux fois, la règle suivante est identifiée pour le contrôle de choix de l'opérateur.

> LL-Cσ1 : si PM = Mx ($\forall$M $\in$ d) et PN = Nx ($\forall$N $\in$ d) alors Sym (P, x, d)

Dans le discours du binôme Lola & Laura (11), la mobilisation de l'opérateur et le terme « distance » est explicité par Laura [7]. Le choix d'un point quelconque sur l'axe est aussi remarqué [15]. Bien entendu, comme les arcs tracés ne sont pas des cercles, la perception globale de la position de points symétriques est aussi mobilisée comme contrôle de choix de l'opérateur.

Lola & Laura (11) pour le problème 1

4. Laura : si c'est symétrique, **on peut plier la feuille, comme ça ?**

5. Lola : non, comme ça.
6. Laura : ah oui,
7. Lola : **tu prends un point, sur la droite**. … tu prends un point sur la droite, **comme ça avec le compas**. Et … **la distance avec le point comme ça**.
8. Laura : mais non, c'est le point, c'est à partir de la droite.

…

14. Laura : mais non, c'est la symétrie, c'est tout.
15. Lola : **ben, non, ça doit marcher pour tous les points**. Tu prends un point comme ça …, c'est ce que je me souviens, mais …, je suis pas sûre, si c'est ça.
16. Laura : oui …

Dans le protocole, le contrôle de la validation du résultat obtenu et final est aussi explicité de plusieurs façons. Premièrement, le pliage est évoqué par Laura [4, 28] et reconnu aussi par Lola [5]. Le pliage apparaît au début pour anticiper le segment symétrique et à la fin de la résolution pour valider le résultat. Dans les deux cas, la feuille n'est pas totalement mais légèrement pliée. Nous identifions la règle suivante pour ce contrôle.

LL-Cσ2 : si Pliage (PQ, P'Q', *d*) alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

Deuxièmement la mesure de la longueur de deux segments symétriques est mobilisée pour le contrôle de la validation de résultat. En effet, Lola les mesure avec la règle graduée et vérifie la même longueur [25]. Dans ce cas, nous considérons que la règle suivante de la conservation de longueur est mobilisée pour le contrôle de la validation. Nous avons exprimé sous la forme de la règle de propriété de la symétrie orthogonale, parce que nous considérons que les élèves ne reconnaissent pas deux segments n'ayant que la même longueur comme symétriques.

LL-Cσ3 : si Sym (PQ, P'Q', *d*) alors PQ = P'Q'

Troisièmement, la perception globale est aussi mobilisée. En effet, lorsque Laura demande « inverser la droite, c'est normal ? » [20], Lola répond « hum, oui, peut-être, pas mal » [21]. Nous interprétons cette communication telle que la perception globale de segments symétriques de Lola permet de lui répondre, mais la valeur épistémique à la proposition « deux segments symétriques » ne serait pas encore très forte avant la comparaison des mesures de leurs longueurs et le pliage

Lola & Laura (11) pour le problème 1

20. Laura : **inverser la droite, c'est normal ?**
21. Lola : hum, **oui, peut-être, pas mal** …
22. Laura : en fait, c'est la même chose que si t'as écrit …
23. Lola : je pense que c'est comme ça …, regardes, ça fait le …, oui, c'est bon là, à mon avis. Et maintenant on va tracer …
24. Laura : sur la …, c'est le même …
25. Lola : oui. **3,3 …, et j'ai 3,3**.
26. Laura : ben, c'est bon.
27. Lola : tu vas voir l'angle sur le dessin ?
28. Laura : **je plie après**.
29. Lola : oui, **ça se ressemble**.
30. Laura : oui.

Dans la résolution, la propriété d'orthogonalité n'est jamais évoquée. En effet, elle n'est pas nécessaire lors de la mise en œuvre de deux équidistances.

3.3.2 Problème 2 : reconnaissance de figures symétriques et preuve

Phase de conjecture (reconnaissance)

Dans la phase de conjecture, le problème posé est la reconnaissance : la figure proposée est-elle symétrique ou non ? Lola et Laura proposent la réponse « oui, symétrique » tout de suite après la lecture des énoncés [34 ; 40 ; 42]. Les propriétés remarquées à ce moment sont les milieux et le rectangle [38 ; 42]. Pour le moment, le rapport entre ces propriétés et la symétrie n'est pas encore établi. La perception globale de figures symétriques serait donc mobilisée pour la reconnaissance de symétriques.

Lola & Laura (11) pour le problème 2
34. Laura : AD et BC sont-ils symétriques ? **ben oui !**
35. Lola : on est celui-là ? Répondre oui, non, ou pas toujours, et démontrer.
36. Laura : oui, mais c'est quoi, le point M et le point N ?
37. Lola : ceux-là ? Les points M et N ?
38. Laura : ouais, mais c'est, **est-ce que c'est forcément les milieux ?**
39. Lola : oui, c'est les milieux, forcément. Ces points sont les milieux.
40. Laura : **ben alors, c'est forcément**.
41. Lola : **si c'est un rectangle, oui**.
42. Laura : ben oui, si c'est un rectangle. …, tu écris.

Laura propose aussi de retracer le rectangle pour vérifier le symétrique pour tous les rectangles. Mais, comme Lola répond « c'est toujours pareil » [55], les élèves cherchent des arguments pour la démonstration.

Lola & Laura (11) pour le problème 2
54. Laura : il faut faire …, **c'est forcément rectangle apparemment, donc il faut faire un différent sorte de rectangle, et montrer que c'est toujours ou pas toujours**
55. Lola : **c'est toujours pareil**, le rectangle. Alors, sur le quadrilatère …
56. Laura : il faut démontrer là, …

Phase d'argumentation

Lola et Laura cherchent des arguments pour le symétrique. Outre les milieux et le rectangle [77 ; 83], Lola remarque le parallélisme [71]. Cependant, celui-ci n'est pas mis en œuvre comme argument, mais elle confond l'énoncé à démontrer avec le parallélisme [72 ; 75].

Lola & Laura (11) pour le problème 2
71. Lola : **ils sont parallèles**,
72. Laura : oui, c'était pas ça qui est demandé.
73. Lola : si.
74. Laura : mais non !
75. Lola : **ah, symétrique ! merde …, ben oui, symétrique, c'est pareil**.
76. Laura : ben, non.
77. Lola : si. **Si c'est milieu, c'est forcément symétrique**.
78. Laura : ben, non, c'est pas forcément.
79. Lola : ben, si.
80. Laura : Non ! Regarde. Si t'as

81. Lola : alors
82. Laura : si t'as un truc, c'est une droite comme ça, et comme ça, et comme ça. Donc c'est les milieux.
83. Lola : oui, mais, c'est pas un triangle. Je t'explique. C'est pas un rectangle. **Si c'est un rectangle, c'est forcément**.
84. Laura : il faut dire le symétrique, mais pas le parallèle.

Finalement, Lola décide de tracer un rectangle sur la feuille.

Lola & Laura (11) pour le problème 2

107. Lola : ben oui. Bon alors …, tu sais … ABCD est un rectangle … **on fait un rectangle**.
108. Laura : …
109. Lola : on fait avec l'équerre.

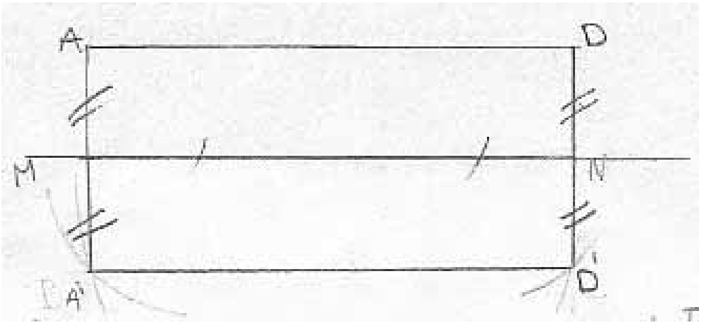
Phase de rédaction

La preuve suivante est écrite par le binôme Lola & Laura (11).

1 : Si le quadrilatère ABCD est un rectangle alors

2 : les segments [AB] et [CD] sont

3 : symétriques par rapport à la droite qui passe en leur milieu.



4 : J'ai fait le symétrique du segment [AD]

5 : par rapport à la droite (MN)

Les trois premières lignes (1, 2 et 3) présentent un théorème à démontrer[13]. Lola trace un rectangle et une droite qui passe par les milieux de deux côtés opposés. Ensuite, comme l'indiquent les lignes (4 et 5), Lola vérifie le symétrique par sa réalisation effective avec le compas. A partir de deux points sur la droite MN (deux marques entre les points M et N), elle trace des arcs passant par A et D au compas, pour dire que B et C sont bien symétriques par rapport à MN. Sur le dessin tracé, les notations A' et D' sont utilisées afin d'exprimer les points symétriques. Le discours de Lola « on va simuler à construire le machin » [129] indique cette stratégie de la preuve.

Lola & Laura (11) pour le problème 2

129. Lola : attends, attends, attends, **on va simuler à construire le machin.** Regarde, on va, attends,
130. Laura : ah, oui. D'accord. Je peux le faire ?
131. Lola : hum.

[13] Les segments AB et CD dans la preuve écrite indiquent probablement plutôt les segments AD et BC.

132. Laura : donc, on va prendre …,
133. Lola : tu prends deux points sur la droite. Tu prends celui-là, et celui-là. Tu vas apporter A. Attends, on va peut-être gommer comme ça, ça va faire vraiment bien.

La règle suivante est ainsi identifiée. Elle est aussi identifiée dans la résolution du binôme Aurélie & Elliot (2) pour le problème 3.

> LL-Sr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques

Tout au long de la résolution, les propriétés géométriques autres que le milieu et le rectangle ne sont évoquées, ni orthogonalité, ni équidistance. Le pliage remarqué lors de la construction du problème 1 n'est pas non plus évoqué.

3.3.3 Problème 3 : reconnaissance de figures non symétriques et preuve

<u>Phase de conjecture (reconnaissance)</u>

Lola remarque tout de suite après la lecture des énoncés que le problème est très similaire au précédent : « C'est pareil, presque » [169]. Laura pense que la résolution est la même et commence à tracer le dessin [170]. La reconnaissance de segments symétriques n'est pas explicitement effectuée. Au début de la résolution, la réponse n'est ainsi pas explicitement donnée par les élèves.

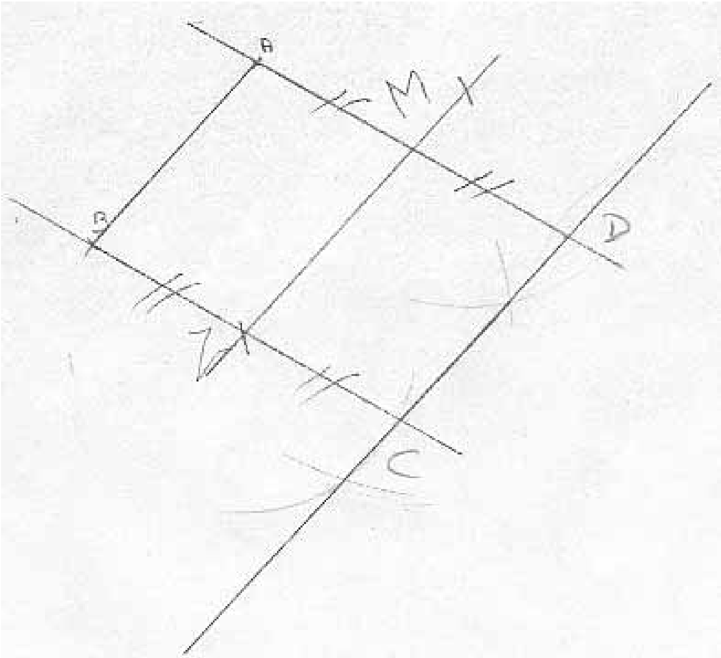
Lola & Laura (11) pour le problème 3
169. Lola : sont-ils symétriques par rapport à la droite MN. Répondre oui, non, ou pas toujours, et démontrer. **C'est pareil, presque**.
170. Laura : ah oui, **c'est la même chose ?** …, je peux faire ?

<u>Phase de construction</u>

Dans la résolution du problème 2, le rectangle est en premier lieu tracé. Cependant, dans ce cas, la réalisation du symétrique du segment AB est envisagée par Lola. Le processus suivant de réalisation est identifié par l'observateur.

1. Tracer deux droites parallèles (AB // MN).
2. A partir de deux points quelconque, tracer quatre arcs passant soit par A, soit par B avec le compas.
3. Tracer une droite passant par ces deux points d'intersections.
4. Vérification par le presque pliage.
5. Tracer deux droites parallèles dont l'une passe par le premier point quelconque.

La construction réalisée et la réponse donnée par le binôme sont les suivantes.



1 : oui [BA] et [DC] sont symétriques par

2 : rapport à (MN)

3 : le symétrique

La règle mobilisée pour cette procédure de la reconnaissance est la suivante, qui est aussi mobilisée pour le problème 2.

> LL-Nr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques

Deux points symétriques sont bien tracés par les équidistances (deux croix sur la droite DC). Cependant, le segment ayant ces deux points comme extrémités n'est pas tracé, mais la droite qui passe par ces deux points est tracée par Lola. Laura remarque que la droite n'est pas le symétrique dans son discours [208 ; 210 ; 212]. Mais, Lola n'a pas modifié son dessin. Ensuite, Laura propose le pliage pour contester la réalisation de Lola.

Lola & Laura (11) pour le problème 3

207. Lola : c'est …, non,
208. Laura : ben non ! **Ce qu'il faut faire, il faut faire le symétrique de AD, non ?**
209. Lola : oui.
210. Laura : non, c'est pas **la droite passé** …,
211. Lola : j'sais pas.
212. Laura : non, ça peut pas être ça. **Parce que la droite passe …, c'est pas ça**.
213. Lola : mais, là, de toute façon, **on a fait trois parallèles**. Donc, c'est bon. Mais les points là, il faut que ça soit juste une droite. Il faut que ça soit

A ce moment là, Laura et Lola reviennent à la question initiale « symétrique ou non » [228-229]. Laura répond « non symétrique » [230], alors que Lola insiste « oui » [231]. Laura prétend en évoquant le pliage [232 ; 234]. Lola considère que deux côtés sont superposables lors du pliage [233], alors que Laura ne le pense pas. Enfin, Laura plie légèrement la feuille et remarque la superposition [238], c'est-à-dire les élèves arrivent à la réponse « oui symétrique ».

Lola & Laura (11) pour le problème 3
228. Laura : AB,
229. Lola : DC sont-ils symétriques
230. Laura : **ben non**.
231. Lola : par rapport à la droite MN. **Ben, si**.
232. Laura : ben, non ! **T'as pas vu que ce qu'on a fait**, c'était faux.
233. Lola : **oui, ben oui, si tu plies. Ben, ça va**.
234. Laura : ben non. **Je te montre que ça va pas**. Regarde.
235. Lola : **si, si, ça va**.
236. Laura : **ben, non, tu plies en même temps**
237. Lola : bien, c'est
238. Laura : regardes, **ça se pose. Ah, oui, ça va**.
239. Lola : tu vois ?

Le pliage qui vérifie la symétrie est effectué après avoir tracé trois droites parallèles, les supports qui relient des points symétriques ne sont pas encore tracés. Pour cela, la superposition qu'elles ont remarquée porte sur le segment AB et la droite DC, non pas sur deux segments. C'est pour cela que le segment AB est superposable à la droite DC. Si les supports avaient été déjà tracés, la reconnaissance aurait été différente. Les règles suivantes sont identifiées pour la reconnaissance de deux segments symétriques à partir de leur discussion.

LL-Nr2 : si Pliage (PQ, P'Q', *d*), alors Sym (PQ, P'Q', *d*)

LL-Nr3 : si non Pliage (PQ, P'Q', *d*), alors non Sym (PQ, P'Q', *d*)

A la fin de la résolution du problème 3, Laura défend encore la réponse « non symétrique » [262]. Cependant, Lola insiste sur la réponse « oui symétrique » [263] et Laura renonce [264]. Nous pouvons identifier que la propriété « milieux » [263] est un argument pour la symétrie pour Lola.

Lola & Laura (11) pour le problème 3
261. Lola : de toute façon, on s'en fout. Tous qu'on veut, c'est que la droite soit alignée. C'est que les droites sont toutes parallèles. On s'en fout des
262. Laura : oui, mais, **on n'a pas de symétrique**.
263. Lola : **mais, si, parce que là, c'est aux milieux**.
264. Laura : ben, oui, **si tu veux**.

Nous interprétons cette discussion comme le fait que Laura considère « non symétrique » pour la réponse, mais elle ne peut pas convaincre Lola, puisque le pliage ne l'a pas permis. Autrement dit, Laura n'a pas d'autre argument qui permet d'avancer sa conjecture.

<u>En résumé</u>

Nous avons remarqué les points suivants au travers des analyses de trois résolutions.

- Le support n'est pas tracé lors de la réalisation d'un segment symétrique pour le problème 1. Deux équidistances sont mises en œuvre. La procédure de construction est celle qui est souvent trouvée dans les manuels scolaires de collège et est ainsi bien analytique. Or, l'orthogonalité n'est jamais évoquée tout au long des résolutions, même pour la reconnaissance de figures non symétriques n'ayant pas cette propriété. Nous affirmons ainsi que la procédure favorable de construction ne rend pas forcément possible la reconnaissance favorable.

- Le pliage mental est mis en œuvre lors de la validation de symétrique réalisé (problème 1) et de la reconnaissance (problème 3). Or, il ne permet pas d'avoir la réponse « non symétrique » pour le problème 3 car le dessin tracé ne le permet pas.
- Laura considère que la réponse est « non symétrique » pour le problème 3. Cependant, le pliage n'a pas permis de soutenir sa conjecture et elle ne trouve pas d'autre argument. Nous considérons ainsi que l'orthogonalité, qui n'est pas mise en œuvre dans la construction, n'a pas de rapport étroit avec la symétrie orthogonale.

4 DISCUSSION ET RESULTATS

Notre expérimentation avait pour objectif d'étudier la nature de règles mobilisées par les élèves dans la construction de preuves par rapport à celles pour les problèmes de construction et de reconnaissance. A partir des analyses de données obtenues dans l'expérimentation, nous avons remarqué certains points qui nous paraissent spécifier la nature de règles mobilisés dans la preuve par rapport à celle dans d'autres problèmes.

<u>Nature des règles dans la construction</u>

Huit binômes (1, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10) réalisent pour le problème 1 les points symétriques avec l'équerre et le compas (ou la règle graduée). Nous avons considéré que les élèves qui réalisent le symétrique avec l'équerre pour l'orthogonalité et le compas ou la règle graduée pour l'équidistance, en particulier ceux qui explicitent les propriétés géométriques attachée aux instruments, mobilisait une règle théorique « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ d) alors Sym (P, P', *d*) ». Or, à partir des analyses des résolutions d'élèves pour le problème 2 qui exige la même règle du point de vue théorique et le problème 3 qui focalise sur la propriété d'orthogonalité, nous avons constaté que cette règle n'est pas mobilisée de façon à permettre une reconnaissance de symétriques, même si les élèves utilisent l'équerre et le compas pour la réalisation d'un point symétrique, et encore même s'ils explicitent les propriétés géométriques attachées aux instruments. La construction de symétrique avec les propriétés géométriques pertinentes ne permet pas la caractérisation de symétriques, alors que les mêmes propriétés sont exigées du point de vue théorique dans ces deux problèmes différents. Les résolutions d'élèves concernant l'orthogonalité sont résumées dans la table suivante (Table VI.3).

Table VI.3 Les réponses des binômes concernant l'orthogonalité[14]

	Problème 1	Problème 2	Problème 3
1 : Delphine & Baptiste	équerre (orthogonalité)		Pas toujours.
2 : Aurélie & Elliot	sans équerre		Oui.
3 : Pauline & Agathe	équerre		Oui.
4 : Marion & Manon	équerre (orthogonalité)		Non.
5 : Charlotte & Vanessa	sans équerre		Oui.
6 : Salomé & Karen	équerre (orthogonalité)		Pas toujours.

[14] L'orthogonalité entre parenthèse du rang « problème 1 » est celle explicitée lors de l'utilisation d'équerre. Les binômes Pauline & Agathe (3) et Mathieu & Pierre (10) ne l'ont pas manifestée dans le discours. Pour le problème 2, le terme « orthogonalité » est mis pour le binôme qui l'utilise pour la caractérisation de symétrique (un seule binôme Julien & Steven (9)).

7 : Estelle & Mélodie	équerre (orthogonalité)		Oui.
8 : Laura & Justine	équerre (orthogonalité)		Oui.
9 : Julien & Steven	équerre (orthogonalité)	orthogonalité	Pas toujours.
10 : Mathieu & Pierre	équerre		Oui.
11 : Lola & Laura	sans équerre		Oui.

Pour le problème 2, un seul binôme mobilise la règle de caractérisation « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ d) alors Sym (P, P', *d*) » (Julien & Steven (9)). Chez les autres binômes, la propriété d'orthogonalité n'est pas mobilisée pour la caractérisation de symétriques.

Les binômes Pauline & Agathe (3) et Mathieu & Pierre (10) n'explicitent jamais la propriété d'orthogonalité tout au long des résolutions des trois problèmes. Ils reconnaissent aussi des figures n'ayant pas d'orthogonalité comme symétriques. Nous avons ainsi diagnostiqué que l'orthogonalité n'était pas attachée à la reconnaissance et ni à l'utilisation d'équerre. La réalisation d'un segment symétrique s'appuie plutôt sur le contrôle perceptif instrumenté au sens de Rolet (1996, pp.74-75). Le processus de construction peut donc être exprimé comme le schéma de la Figure VI.53. Après la réalisation, les propriétés géométriques sont vides, parce que l'utilisation d'instruments ne les implique pas. Puis, pour produire une réponse, la reconnaissance perceptive est effectuée sur un dessin tracé.

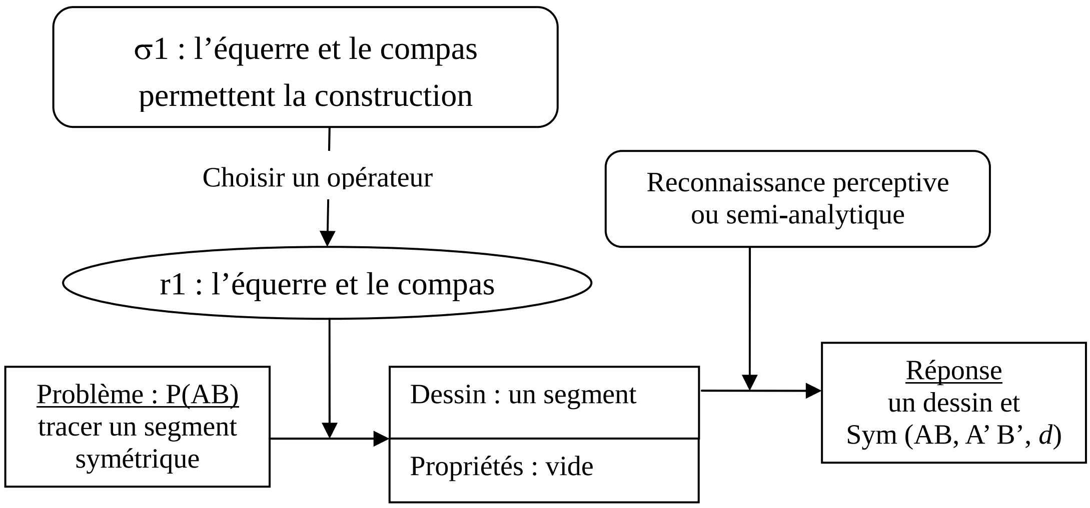


Figure VI.53 Le schéma de la construction pour le problème 1

Les deux binômes Estelle & Mélodie (7) et Laura & Justine (8) utilisent l'équerre pour la réalisation du symétrique en explicitant la propriété d'orthogonalité. La propriété géométrique est bien attachée à l'utilisation d'équerre. Or, ils reconnaissent des figures n'ayant pas d'orthogonalité comme symétriques. Nous avons ainsi diagnostiqué qu'elle est attachée à la réalisation de symétrique, c'est-à-dire au problème de construction, mais non pas au problème de la reconnaissance. Le processus de construction peut être exprimé comme le schéma de la Figure VI.54. Les propriétés après la réalisation ne sont pas vides, mais elles ne sont pas prises en compte pour produire la réponse.

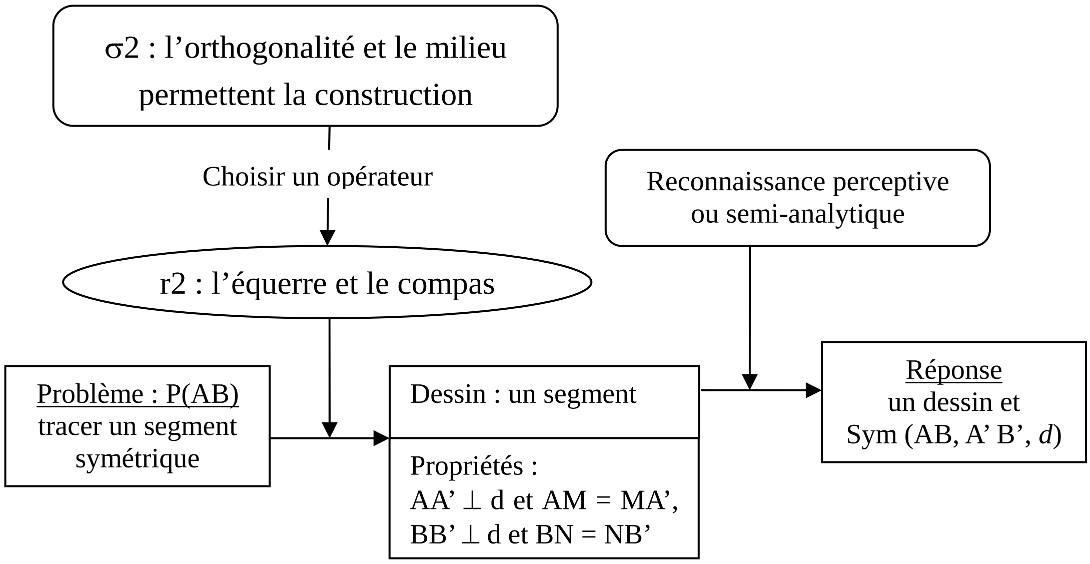


Figure VI.54 Le schéma de la réalisation pour le problème 1

Les trois binômes Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4) et Salomé & Karen (6) utilisent l'équerre en explicitant la propriété d'orthogonalité (problème 1). La propriété géométrique est bien attachée à l'utilisation d'équerre. Ils reconnaissent des figures n'ayant pas d'orthogonalité comme non symétriques (problème 3). Nous avons diagnostiqué que cette propriété est bien attachée à la réalisation de symétrique, c'est-à-dire au problème de construction, et au problème de la reconnaissance. Or, aucun élève ne la remarque dans la résolution du problème 2 et la règle « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' (M = PP' $\cap$ *d*) alors Sym (P, P', *d*) » n'est pas mobilisée. En outre, l'orthogonalité est de temps en temps remarquée à partir du pliage. La nécessité d'orthogonalité est justifiée par le pliage (Marion & Manon (4)) ou par la perception globale (Delphine & Baptiste (1)), c'est-à-dire le support de la règle « si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d* » est le pliage ou la perception globale. Nous diagnostiquons ainsi que cette propriété est attachée à la réalisation de symétrique et à la justification de non symétrique, mais non pas à la caractérisation de symétrique. Les propriétés mobilisées dans le contrôle pour la réalisation de symétriques ne sont pas organisées de manière à permettre la caractérisation. Autrement dit, les règles mobilisées lors de la réalisation pour le problème 1 sont plutôt les règles de propriété. Le processus de construction peut être exprimé comme le schéma de la Figure VI.55. Les propriétés après la réalisation ne sont pas vides, et elles seraient prises en compte pour la reconnaissance mais d'une façon semi-analytique.

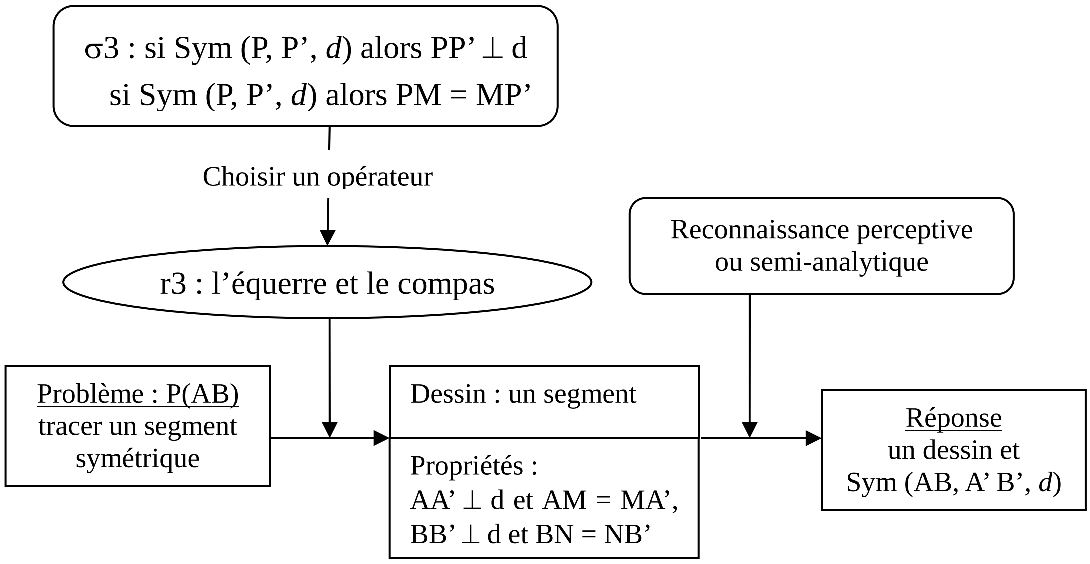


Figure VI.55 Le schéma de la réalisation pour le problème 1

Par rapport au contrôle perceptif instrumenté mentionné ci-dessus, le contrôle mobilisé dans la construction par ces derniers cinq binômes n'est pas tout à fait perceptif, ni théorique, mais analytique dans le sens où les propriétés soient acceptables par la géométrie théorique, alors qu'elles ne sont pas théoriquement organisées. Le contrôle possède certaines propriétés qui permettent de construire un symétrique acceptable par la reconnaissance effectuée par d'autres moyens. Du point de vue de la règle, la règle de caractérisation de la symétrie n'est pas mobilisée, mais les règles de propriétés de la symétrie sont successivement mobilisées avec une autre règle qui permet une reconnaissance ou validation.

Par ailleurs, nous avons aussi identifié l'indice de la mobilisation de la règle théorique dans le discours de Julien (Julien & Steven (9)). Lorsqu'il trace un point symétrique, il propose les propriétés géométriques nécessaires pour la réalisation, puis choisit des instruments pertinents. En revanche, les autres binômes proposent les instruments utilisés avant les propriétés. Nous considérons que ce point différentie la mobilisation théorique d'une règle de celle pragmatique.

Nous considérons, du point de vue de la problématique de la preuve, que ce point différentie la connaissance théorique de la géométrie qui est exigée dans la preuve de celle pragmatique qui peut être mobilisée dans la réalisation d'une construction.

Du point de vue du modèle cK¢, nous voyons que la conception d'élèves est reliée étroitement au problème abordé. La nature de problème joue un rôle crucial. Nous considérons que la différence du comportement d'élèves pour les problèmes de construction et de preuve est due au niveau de fonctionnement d'une règle que nous avons remarqué dans l'analyse théorique du Chapitre IV. En effet, du point de vue théorique, une règle fonctionne dans la réalisation en tant que contrôle qui est souvent implicite, tandis qu'elle fonctionne dans la preuve en tant qu'opérateur qui est explicite et qui doit être accepté par la théorie. Autrement dit, la construction seule ne permet pas d'évaluer la règle mobilisée du point de vue de la géométrie théorique.

<u>Règles identifiées dans les preuves</u>

Nous présentons en premier lieu une liste de règles identifiées sur les preuves écrites de tous les binômes.

Table VI.4 Les règles identifiées dans la preuve[15]

Réponse « oui » pour le problème 3
Aurélie & Elliot (2) AE-Cσ1 : si $\exists M \in d$ (perceptif), PM = M*x*, et Aligne (P, M, *x*) alors Sym (P, *x*, *d*) AE-Sr1 : si PM = MP' et QN = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN) AE-Sr2 : si une droite *d* coupe un rectangle en deux rectangles (F' et F'') de la même dimension alors Sym (F', F'', *d*) AE-Nr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques AE-Nr2 : si une droite *d* coupe un rectangle en deux parallélogrammes (F' et F'') de la même dimension alors Sym (F', F'', *d*)
Pauline & Agathe (3) PA-Sr1 : si Sym (P, P', M), Sym (Q, Q', N), PM = QN = MP' = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN) PA-Nr1 : si PQ // MN // P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', MN)
Charlotte & Vanessa (5) CV-Cσ1 : si P*x* : direction privilégiée et PM = M*x* (M = P*x* $\cap$ *d*) alors Sym (P, *x*, *d*) CV-Sr1 : si Pliage (F, F', *d*) alors Sym (F, F', *d*) CV-Sr1 : si PM = MP' = QN = NQ' alors Sym (PQ, P'Q', MN) CV-Nr1 : si (MN) coupe [PP'] et [QQ'] en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', MN)
Estelle & Mélodie (7) EM-Sr1 : si M milieu de [PP'] alors Sym (P, P', M) EM-Nr1 : si PQNM parallélogramme, Aligne (P, M, P') et Aligne (Q, M, Q') alors Sym (PQ, P'Q', MN)
Laura & Justine (8) LJ-Sr1 : si PM = MP' alors Sym (P, P', M) LJ-Sr2 : si Sym (P, P', M) et Sym (Q, Q', N) alors Sym (PQ, P'Q', MN) LJ-Nr1 : si PM = MP' et Aligne (P, M, P') alors Sym (P, P', M)
Mathieu & Pierre (10) MP-Sr1 : si PQ // MN et P'Q' // MN alors Sym (PQ, P'Q', MN) MP-Sr2 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F' et F'') par une droite *d* alors Sym (F', F'', *d*) MP-Nr1 : si PQ // P'Q', PP' // QQ', PQ = P'Q', PP' = QQ' et *d* coupe [PP'] et [QQ'] en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', *d*)
Lola & Laura (11) LL-Cσ1 : si PM = M*x* ($\forall M \in d$) et PN = N*x* ($\forall N \in d$) alors Sym (P, *x*, *d*) LL-Cσ2 : si Pliage (PQ, P'Q', *d*) alors Sym (PQ, P'Q', *d*) LL-Cσ3 : si Sym (PQ, P'Q', *d*) alors PQ = P'Q' LL-Sr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques LL-Nr1 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors ils sont symétriques

15 Les règles identifiées dans la construction sont celles qui sont systématiquement attribuées par l'utilisation d'instruments et celles éventuelles apparues dans la validation de résultat obtenu. Nous avons vu plus haut que ces premières ne peuvent pas attribuer simplement à partir des instruments utilisés.

LL-Nr2 : si Pliage (PQ, P’Q’, *d*), alors Sym (PQ, P’Q’, *d*) LL-Nr3 : si non Pliage (PQ, P’Q’, *d*), alors non Sym (PQ, P’Q’, *d*)
Réponse « non » ou « pas toujours » pour le problème 2
Delphine & Baptiste (1) DB-Sr2 : si PM = MP’ (M $\in$ PP’) et QN = NQ’ (N $\in$ PP’) alors Sym (PQ, P’Q’, MN) DB-Sr2 : si PQ // MN, P’Q’ // MN et PQ = P’Q’ alors Sym (PQ, P’Q’, MN) DB-Nr1 : si non Pliage (F, F’, *d*) alors non Sym (F, F’, *d*) DB-Nr2 : si Sym (P, P’, *d*) alors PP’ $\perp$ *d*
Marion & Manon (4) MM-Sr1 : si la droite MN coupe deux segments PP’ et QQ’ à leurs milieux alors Sym (PQ, P’Q’, MN) MM-Sr2 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F’ et F’’) par une droite *d* alors Sym (F’, F’’, *d*) MM-Nr1 : si non Pliage (F, F’, *d*) alors non Sym (F, F’, *d*) MM-Nr2 : si PP’ non $\perp$ *d* et QQ’ non $\perp$ *d* alors non Sym (PQ, P’Q’, *d*) MM-Nr3 : si PP’ $\perp$ *d* et QQ’ $\perp$ *d* alors Sym (PQ, P’Q’, *d*)
Salomé & Karen (6) SK-Sr1 : si une figure F est coupée en deux parties égales (F’ et F’’) par une droite *d* alors Sym (F’, F’’, *d*) SK-Nr1 : si non Pliage (F, F’, *d*) alors non Sym (F, F’, *d*) SK-Nr2 : si un objet donné n’est pas identique au symétrique tracé, alors il n’est pas symétrique SK-Nr3 : si un objet donné est identique au symétrique tracé, alors il est symétrique
Julien & Steven (9) JS-Sr1 : si PP’ $\perp$ *d* et PM = MP’ alors Sym (P, P’, *d*) JS-Sr2 : si Sym (P, P’, *d*) et Sym (Q, Q’, *d*) alors Sym (PQ, P’Q’, *d*) JS-Nr1 : si non Pliage (PP’, QQ’, *d*) alors non Sym (PP’, QQ’, *d*) JS-Nr2 : si non PP’ $\perp$ *d* alors Sym (P, P’, *d*) JS-Nr3 : si non PP’ $\perp$ *d* et non QQ’ $\perp$ *d* alors Sym (PQ, P’Q’, *d*)

Quatre binômes, Pauline & Agathe (3), Estelle & Mélodie (7), Laura & Justine (8) et Mathieu & Pierre (10), répondent « oui » pour deux reconnaissances (problèmes 2 et 3), c’est-à-dire les règles mobilisées pour les preuves peuvent être les mêmes selon notre analyse a priori. Deux règles largement différentes sont souvent mobilisées dans les preuves écrites, c’est-à-dire les règles mobilisées ne sont pas cohérentes ou stables. Par exemple, les règles identifiées (MP-Sr1 et MP-Nr1) dans les preuves écrites de Mathieu & Pierre (10).

Quatre binômes répondent « non » ou « pas toujours » pour le problème 3. Même certains parmi eux mobilisent des règles pour le problème 2 qui sont contradictoires ou non cohérentes à la résolution du problème 3. Par exemple, la règle (DB-Sr2) de Delphine & Baptiste (1) et la règle (MM-Sr1) de Marion & Manon (4). Cette incohérence n’est pas dans la plupart des cas remarquée par les élèves. Nous considérons ainsi que la règle attribuée par l’analyse systématique de la preuve écrite n’est pas celle qui est stable mais celle qui est temporairement générée en ajoutant les arguments. Il semble que les arguments s’ajoutent de temps en temps les uns aux autres pour valider la conclusion.

Tous les élèves sauf Julien (Julien & Steven (9)) ne mobilisent pas la règle attendue dans la preuve du problème 2. Cependant, certains élèves mobilisent la règle qui permet de justifier la reconnaissance de deux segments non symétriques pour le problème 3. La différence entre ces deux problèmes de preuves est le type de règles exigées. Comme nous l'avons vu dans l'analyse a priori, le premier nécessite une règle de la caractérisation de symétrie et le deuxième nécessite une règle de la propriété de symétrie. Nous avons aussi vu que dans la première expérimentation, la règle « Si Sym (P, P', *d*) alors PP' ⊥ *d* » qui est aussi demandée au problème 3 est la plus souvent mobilisée. Nous y voyons un grand écart chez les élèves.

La plupart des règles mobilisées par les élèves sont celles qui tentent de caractériser le segment symétrique sans le décomposer aux points (extrémités). Dans le protocole, ces élèves cherchent des arguments ou propriétés géométriques qui permettent de valider directement la conclusion, deux segments symétriques. Par exemple, les règles AE-Sr1, PA-Nr1, CV-Sr1, MP-Sr2, SK-Sr1, etc. Du point de vue de l'appréhension globale ou ponctuelle de figures, les élèves mobilisent celle globale. La règle mobilisée avec l'appréhension globale évoque souvent la propriété « la droite des milieux » au sens de Grenier (1988, p.166). Son apparition est identifiée dans les règles, par exemple, « CV-Nr1 : si (MN) coupe [PP'] et [QQ'] en leurs milieux alors Sym (PQ, P'Q', MN) » et « AE-Sr2 : si une droite *d* coupe un rectangle en deux rectangles (F' et F'') de la même dimension alors Sym (F', F'', *d*) ». Nous considérons que sa mise en œuvre est due d'une part à l'appréhension globale et d'autre part au manque d'orthogonalité lors de la caractérisation.

Par ailleurs, dans la réalisation d'un segment symétrique du problème 1, tous les binômes tracent tout d'abord un point symétrique. La décomposition du segment en points était immédiate. Nous pouvons diagnostiquer que l'appréhension ponctuelle est effectuée. Nous considérons que c'est dû à la nature de problème, la construction. En effet, la construction ne peut être effectuée qu'à partir d'un point, lorsque la procédure analytique avec les instruments usuels est mise en œuvre. Cette nature serait un contrôle qui permet d'implicitement mobiliser la règle de dissociation.

<u>Support de règle</u>

Les supports de règles étaient souvent implicites dans les protocoles et productions d'élèves. Cependant, les binômes Delphine & Baptiste (1), Marion & Manon (4), Salomé & Karen (6) et Laura & Justine (8) explicitent certaines informations dans leurs discours, afin de les diagnostiquer.

Dans les protocoles des binômes Marion & Manon (4) et Salomé & Karen (6), nous avons identifié le support pour la règle de la propriété d'orthogonalité de la symétrie orthogonale – « Si Sym (P, P', *d*) alors PP' ⊥ *d* » – qui est exigée par la justification de la reconnaissance pour le problème 3. Manon (Marion & Manon (4)) et Salomé (Salomé & Karen (6)) impliquent la nécessité d'orthogonalité à partir du pliage.

Dans le discours, lorsqu'elle explique à son partenaire la nécessité d'orthogonalité dans la symétrie orthogonale, Delphine (Delphine & Baptiste (1)) essaie de verbaliser la configuration de figures symétriques effectuée sur le dessin obtenue par l'effet de miroir ou par la perception globale de figures symétriques pour le problème 1 : « ça doit être le même segment, quand on voit devant glace » ; « c'est inverse » ; « la même inclinaison par rapport à la droite » ; « pour que la même inclinaison, ben il faut que ce soit perpendiculaire ». La nécessité d'orthogonalité est justifiée par la configuration de figures symétriques.

D'autre part, le protocole du binôme Laura & Justine (8) explicite le support d'une règle de la caractérisation de symétrie. La règle n'est pas celle de la symétrie orthogonale mais de la symétrie centrale : « Si PM = MP' et Aligne (P, M, P') alors Sym (P, P', M) ». Pourtant, en vue du support de ce type de règles, cela vaut d'être mentionné. Dans le discours de Laura, le processus de la modification d'une règle auparavant mobilisée est explicité. L'alignement qui n'est pas mis en œuvre dans la règle mobilisée pour le problème 2 est ajouté dans la nouvelle règle. Le support de la règle était une construction et la perception globale. En traçant deux points avec certaines propriétés géométriques, s'ils sont reconnus comme symétriques par la perception globale, alors la règle de la caractérisation ayant ces propriétés est valide.

La question qui se pose est « ces règles sont-elle théoriques ou pragmatiques ? » Du point de vue de la géométrie théorique, la réponse est « non », puisque le permis d'inférer doit être accepté par la théorie admise au départ. Les règles ci-dessus peuvent être impliquées de la définition, mais celle-ci n'est pas considérée. Or, en prenant en compte l'apprentissage de la géométrie qui avance de la géométrie pragmatique à la géométrie théorique, il semble qu'une phase dans laquelle les règles s'appuient sur le pliage ou l'effet de miroir est favorable.

Chapitre VII

CONCLUSION

Notre point de départ est la question du fonctionnement de la connaissance d'un objet précis en géométrie dans la preuve surtout le rôle et la nature de la connaissance exigée et engagée dans la preuve. Les questions suivantes assez globales étaient posées.

Q1. *Quelle connaissance ou quel aspect de la connaissance sur un objet mathématique est mobilisé par les élèves lors de la construction d'une preuve ? Quel rapport y a-t-il entre la connaissance et la preuve ?*

La méthodologie adoptée pour répondre à la question est de développer d'abord une méthode de la modélisation de connaissance dans la preuve à partir de la nature du raisonnement et puis de l'appliquer à un objet mathématique précis dans plusieurs contextes de problème. Cela nous permet de dégager la spécificité de la nature de la connaissance engagée dans la construction d'une preuve par rapport à celles dans d'autres types de problèmes. Nous avons choisi comme notion mathématique de notre étude la symétrie orthogonale. Ce choix est retenu pour la raison que beaucoup de travaux de recherches antérieurs analysent les connaissances de la symétrie orthogonale dans le contexte de la construction géométrique et de la reconnaissance, alors qu'elle est peu abordée dans le contexte de la preuve. Cet objet est pertinent en ce sens que nous pouvons regarder comment la connaissance engagée dans les problèmes usuels hors contexte de la preuve est investie par les élèves dans la construction d'une preuve. Notre étude porte ainsi sur le rapport entre les connaissances engagées dans les problèmes usuels de la symétrie orthogonale (reconnaissance et construction) et dans le problème de la preuve. Les questions initiales sont maintenant reformulées et détaillées.

Q2. *Quelle connaissance ou quel aspect de la connaissance sur la symétrie orthogonale est mobilisé par les élèves lors de la construction d'une preuve ?*

Q3. *Quelles différences de connaissance peuvent être trouvées dans la construction d'une preuve et dans la construction géométrique et reconnaissance de la symétrie orthogonale ?*

Pour répondre à ces questions, nous avons avancé une analyse théorique qui permet d'anticiper certaines spécificités de la mobilisation de connaissances dans différents types de problèmes et puis réalisé une expérimentation ayant pour objectif d'analyser des comportements effectifs d'élèves par la méthode développée. Nous présentons dans ce qui suit les éléments et les résultats obtenues qui répondent à nos questions.

La règle, le support et le modèle cK¢ : un outil d'analyse de connaissances

Nous avons cherché un moyen d'accéder à la connaissance engagée dans la résolution de problèmes. A la suite de l'analyse fonctionnelle et structurelle du raisonnement et de l'analyse de la connaissance du point de vue du modèle cK¢, nous avons remarqué la *règle* qui peut être exprimée « si … alors … » et son support. La remarque sur la place de la propriété géométrique en jeu dans la règle nous amène à dissocier les règles concernant la symétrie orthogonale en trois types dont les natures différentes : « si symétrique alors propriété », « si propriétés alors symétrique » et « si symétrique alors symétrique ».

La méthode développée, la combinaison de règle, support et modèle cK¢, nous a permis d'une part d'analyser de la façon détaillée l'apparition de connaissances et leur spécificité dans la preuve et dans les autres problèmes. En conséquence, elle permet d'établir la relation comparative entre le problème de preuve et les autres problèmes en terme de connaissance engagée. Les résultats sont obtenus par cette méthode.

Le fonctionnement de la règle

L'analyse des problèmes de symétrie orthogonale du point de vue de la règle nécessaires pour la résolution de problèmes a mis en évidence les fonctionnements différents et communs de la connaissance. D'une part, la règle clef pour la résolution de certains problèmes est de même nature. Le problème de reconnaissance et le problème de construction de figures symétriques et d'axes exigent souvent une mobilisation de la règle de caractérisation « si propriétés alors symétrique ». D'autre part, l'analyse des problèmes avec le modèle cK¢ permet de mettre en évidence la place différente de la règle dans la résolution de problèmes. Les règles dans la construction et la reconnaissance fonctionnent comme contrôles prédicatifs qui choisissent et indiquent les actions ou opérateurs nécessaires pour la réalisation à la fois comme opérateurs qui transforment les informations obtenues à la réponse. Comme la réalisation d'objets et l'indication de propriétés sont effectuées dans le registre spatio-graphique, les règles doivent permettre un changement de registre de spatio-graphique à géométrique dans le processus de résolution. Par ailleurs, les règles dans la preuve fonctionnent comme opérateur qui permet de déduire un énoncé à partir des propositions données et d'autoriser la validité d'un énoncé à partir des propositions admises. Du point de vue du registre, la transformation par l'opérateur doit être toujours effectuée dans un seul registre, géométrique. Ce fonctionnement différent dans le problème de preuve et les autres amène, comme nous avons observé, à différentes productions aux différents problèmes exigeant la même règle.

Fonctionnement du contrôle

Dans l'analyse du contrôle, nous avons adopté les trois points de vue afin de mettre en évidence les contrôles ayant des rôles différents : le contrôle qui désigne un opérateur ; le contrôle qui assure la validité de l'opérateur ; le contrôle qui valide le résultat obtenu. Pour raison des niveaux différents du fonctionnement de la règle, la nature du contrôle diffère aussi en fonction du problème abordé. Nous résumons ici le fonctionnement du contrôle pour la résolution différente.

Le contrôle a tout d'abord un rôle de la désignation d'un opérateur. Le contrôle prédicatif dans les problèmes de reconnaissance et de construction est une règle de la symétrie orthogonale qui permet de choisir un opérateur pour la résolution. Dans notre analyse, il est explicitement exprimé sous la forme d'une règle (si … alors …). En revanche, le contrôle prédicatif dans le problème de preuve est soumis à l'effet d'une situation dans laquelle le problème est posé, c'est-à-dire le contrôle est provoqué à partir de la nature de la situation. Une situation dans laquelle des propriétés géométriques spécifiques sont proposées ou faciles à reconnaître conduit au choix différent d'un opérateur qu'une autre situation qui propose d'autres propriétés. En outre, la nature de la situation n'est pas forcément spécifique à la symétrie orthogonale, mais à des propriétés géométriques apparues. Or, l'analyse du choix d'un contrôle dans les problèmes de reconnaissance et de construction nous conduit aussi à la réflexion sur la nature de la situation. En effet, le choix d'une approche dans la résolution de ces problèmes est soumis à l'effet de la situation dans laquelle le problème est posé. Nous voyons ici les niveaux différents auxquels intervient la nature de la situation. Ce serait un effet des niveaux de fonctionnement de la règle.

Le deuxième fonctionnement du contrôle porte sur la validité de l'opérateur mobilisé. La validité de l'opérateur dans les problèmes de reconnaissance et de construction est assurée par le contrôle qui le désigne. Comme le contrôle implique naturellement un opérateur ou une règle d'action, la validité d'un contrôle est transmise à celle de l'opérateur. D'ailleurs, l'opérateur dans la preuve est une règle qui doit être acceptée par la théorie admise au départ. Par exemple, l'opérateur impliqué à partir de la définition est admis et théorique, c'est-à-dire que la définition assure sa validité. L'opérateur ayant une démonstration est aussi admis, c'est-à-dire que la démonstration assure sa validité. Bien entendu, il n'est pas toujours théorique dans la preuve donnée par les élèves. Dans ce cas, certains contrôles assurent sa validité. Or, comme les niveaux de fonctionnement d'une règle sont différents dans le problème de la preuve et les autres, la validité du contrôle mobilisé dans les problèmes de la reconnaissance et des constructions peut être aussi considérée. Du point de vue mathématique, le contrôle doit être accepté par la théorie admise au départ. Ainsi, si l'on ne considère pas les niveaux différents de fonctionnements de la règle, la validation d'une règle peut avoir la même nature.

En ce qui concerne le troisième fonctionnement du contrôle, la validation du résultat obtenu, la nature de son fonctionnement est caractérisée non seulement par la notion abordée, la symétrie orthogonale, mais aussi par la nature du problème abordé. Dans un premier lieu, comme nous l'avons vue, la reconnaissance joue un rôle crucial dans la phase de validation du résultat obtenu dans les problèmes de reconnaissance et de construction. Elle est effectuée après et pendant la construction si l'objet tracé est bien symétrique ou non, et aussi après la reconnaissance pour la vérification et la confirmation du résultat obtenu. Par ailleurs, la reconnaissance ne permet pas une validation de la preuve produite. Deuxièmement, la construction doit être soumise à la règle de jeu de construction qui n'est pas directement liée à la notion abordée dans la résolution. De même, dans la construction de preuves, la validation porte sur deux critères. D'une part, la validité de permis d'inférer mis en œuvre est en question. Le contrôle ayant le fonctionnement de la validation d'un opérateur serait réinvestie. Celle-ci est liée à la notion de la symétrie orthogonale. D'autre part, la nature de la preuve telle que l'enchaînement d'énoncés, la validité d'énoncés des hypothèses, etc. est en question. Pour celle-ci, la validation n'est pas liée directement à la notion de symétrie orthogonale mais à la règle de jeu de la preuve. Ainsi, la nature du contrôle pour la validation de résultat obtenu est différente en fonction des types de problèmes.

Les élèves construisent mais ne peuvent pas prouver

Dans les expérimentations, nous avons premièrement trouvé que les élèves de collège de 3e en France peuvent correctement construire avec des instruments, éventuellement en manifestant les propriétés nécessaires, mais qu'ils ne peuvent pas prouver en mettant en œuvre les règles nécessaires dans la construction. A partir de l'analyse effectuée en termes de règle et support, nous avons repéré certains résultats qui expliquent des raisons de ce phénomène et à la fois mettent en évidence la nature de la connaissance engagée dans le processus de construction de figures symétriques et dans le processus de preuve.

Preuve et « opportunisme » pour la construction

Dans les protocoles d'élèves, nous avons premièrement identifié les règles mobilisées concernant la symétrie orthogonale comme contrôle dans la construction et la reconnaissance. Cela nous permet d'expliciter que les règles mobilisées comme contrôles prédicatifs dans la construction ne sont pas les règles de caractérisation de la symétrie que nous avons prévues dans l'analyse théorique, mais des règles qui ne sont pas organisées et structurées pour qu'elles puissent résoudre le problème de preuve. La construction est un « opportunisme » sous la contrainte de la structure de connaissance.

Pour le problème de construction, le symétrique peut être réalisé sans règle de caractérisation. Le processus de construction consiste en deux phases : réalisation effective et attribution de la signification (ou transformation). Du point de vue théorique, ces deux phases exigent toutes les deux une règle de caractérisation comme contrôle dans la première phase et comme opérateur dans la deuxième phase (Chapitre IV, §4.3). Or, dans la première phase, une règle qui indique comme contrôle l'utilisation d'équerre permet la réalisation, aux yeux de l'observateur, portant la propriété d'orthogonalité. Dans ce cas, le contrôle perceptif instrumenté ou la règle de propriété « si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d* » est suffisant pour la première phase. Dans la deuxième phase, la reconnaissance permet de produire une signification au dessin réalisé dans la première phase. La reconnaissance perceptive ou semi-analytique, voire le pliage, qui ne mobilise pas la règle de caractérisation peut admettre la réponse. Ainsi la plupart des élèves dans notre observation ont réalisés une réponse « correcte » au problème de construction : l'« opportunisme » pour la construction.

En particulier, lorsque la propriété d'orthogonalité est prise en compte, mais que la règle de caractérisation n'est pas mobilisée dans la réalisation, le symétrique est réalisé en respectant les propriétés géométriques attachées à la symétrie qui ne sont pas organisées ou liées entre elles, mais les propriétés séparément collectionnées sur la figure symétrique. La validité de la procédure ne repose pas sur les propriétés organisées dans la première phase, mais sur le fait qu'une telle procédure permet de construire un symétrique acceptable par d'autres contrôles dans la deuxième phase. Du point de vue des types de règles, ce n'est pas une règle « si propriétés alors symétrique » qui est mobilisée, mais plutôt des règles « si symétrique alors propriété ».

En revanche, dans la construction d'une preuve, comme les règles dans la preuve fonctionnent comme opérateur qui transforme des énoncés dans le registre discursif, une règle ayant les propriétés géométriques bien organisées est exigée. Par exemple, « si PP' $\perp$ *d* et PM = MP' alors Sym (P, P', *d*) ». Or, cela dépend aussi la nature du problème posé. Si le problème ne demande pas une preuve de la caractérisation, mais de la mise en œuvre d'une propriété géométrique attachée à la symétrie, la règle de caractérisation ayant les propriétés bien organisées n'est pas requise. C'est le cas des problèmes proposés à la première expérimentation. Comme la règle de propriété de la symétrie telle que « si Sym (P, P', *d*) alors PP' $\perp$ *d* » est juste exigée, les élèves ont moins de difficultés pour la construction d'une preuve (Chapitre V).

Les règles exigées et les conceptions dans la construction et dans la preuve ne sont donc pas les mêmes. Du point de vue du modèle cK¢, le problème de construction est dans le domaine de validité de la conception ayant une structure de contrôle moins organisé, alors que le problème de preuve qui exige surtout une règle de caractérisation de la symétrie est en dehors d'un tel domaine de validité.

Géométrie pratique et géométrie théorique

La géométrie est introduite par une approche pragmatique ou empirique à l'école primaire, alors que la géométrie théorique ou déductive est envisagée en introduisant la preuve à partir du collège. Comme les travaux effectués précédemment le remarquent (Mariotti, 2000 ; Laborde & Capponi, 1994 ; Balacheff, 2000), du point de vue de l'apprentissage de la géométrie, le passage de la connaissance pratique engagée dans une approche pragmatique de la géométrie à la connaissance théorique dans la géométrie théorique n'est pas immédiat.

A propos de la construction, l'introduction de la géométrie théorique au travers de la construction géométrique est tentée par Mariotti dans un environnement de Cabri-géomètre (Mariotti, 1997 ; Mariotti et al, 1997 ; Mariotti, 1999 ; Mariotti, 2000). Elle remarque après la validation de construction par déplacement qu'il s'agit de passer à la validation par l'explication de cette validation elle-même, c'est-à-dire la justification dans le système théorique de la géométrie. Ses observations montrent cette évolution non immédiate et la complexité de ce passage avec plusieurs exemples de construction (Mariotti, 1997). Elle propose deux aspects principaux qui mettent en relation l'environnement de Cabri-géomètre et la géométrie théorique : « - *le parallélisme entre les propriétés géométriques et les "primitives" de Cabri ; - la relation entre la fonction de déplacement de Cabri et la validation théorique d'une construction* » (Mariotti, 1999, p.122).

Nos observations montrent aussi cette complexité dans le cas de la construction de figures symétriques dans l'environnement papier-crayon. Du point de vue de la construction théorique, la mise en œuvre de la théorie, c'est-à-dire les axiomes et théorèmes du système théorique de la géométrie, permet une utilisation d'instruments pour la réalisation. Dans ce cas, la construction réalisée repose ainsi sur la théorie. Or, comme nous l'avons vu, l'utilisation d'instruments ne signifie pas nécessairement une mobilisation de la théorie. En outre, l'utilisation des propriétés ne signifie pas non plus nécessairement une construction dans le système théorique de la géométrie. L'utilisation de propriétés géométriques dans la procédure de construction ne permet donc pas forcément le passage de la géométrie pragmatique à la géométrie théorique. Celle-ci est nécessaire, mais en outre, le contrôle bien organisé est exigé. En effet, l'explicitation des relations entre les propriétés géométriques ne serait pas immédiate, surtout pour la symétrie orthogonale. La distance entre la construction pratique et la construction théorique est ainsi suscitée aussi par la règle implicitement mobilisée en tant que contrôle prédicatif lors de la construction. Du point de vue de la règle, il s'agit d'une règle ayant les propriétés géométriques bien organisées.

Nous avons analysé le problème de preuve qui demande une caractérisation de symétrie. La connaissance spécifique sur la symétrie orthogonale, en particulier sa définition ou son appréhension, était en jeu. Ce point différentie nos résultats de ceux de Mariotti qui abordent plutôt la construction des objets géométriques en général (bissectrice, la droite parallèle, la droite perpendiculaire, etc.) dont la caractérisation ne suscite pas souvent les difficultés chez les élèves.

Création de règles par la perception à partir de la figure

Nous avons aussi analysé le processus de génération d'une règle mobilisée dans la preuve. Cela nous permet de mettre en évidence que la règle comme opérateur dans la preuve est souvent temporairement créée à partir des propriétés reconnues sur la figure.

Le rôle de la figure ici est de donner par la perception des informations sur l'objet géométrique et de créer une règle du type « si symétrique alors propriété ». En effet, une fois qu'une figure est reconnue ou acceptée comme symétrique par la perception, les propriétés ou les invariants repérées sur la figure seront souvent attachées à la symétrie orthogonale. Le support de la règle dans ce cas est la figure acceptable comme symétrique. L'acquisition d'une règle d'une telle façon est plus fréquente par l'utilisation de la fonction de déplacement dans l'environnement de Cabri-géomètre, comme le remarque Mariotti (1999, p.117).

Or, l'acquisition d'une règle du type « si propriétés alors symétrique » n'est pas du tout immédiate. Une règle peut être créée par une collection de propriétés repérées sur la figure donnée comme un opportunisme de la construction. Mais, elle doit être validée pour que ce soit valide comme règle. Cependant, le domaine de validité de la règle générée comprend toujours la figure donnée, puisque les propriétés sont identifiées à partir de cette figure. Les propriétés obtenues sur la figure ne peuvent donc pas contrôler sa validité. Il nécessite une autre étape de la validation. Par exemple, une autre construction à partir des propriétés choisies peut être effectuée. Sans validation, un tas de règles peuvent être mobilisées dans le problème de preuve, c'est-à-dire il y a moins de contraintes de règles dans la preuve. Nous considérons que c'est pour cela que plusieurs règles démontrables ou non sont mobilisées par les élèves de nos observations.

Vers une situation de validation de la règle mobilisée

Du point de vue de l'apprentissage de la géométrie théorique, à part la constructibilité, il importe de créer une situation qui permette de prendre conscience que seulement certaines propriétés qui sont mises en œuvre dans la construction permettent de caractériser l'objet en jeu, mais les autres ne le permettent pas.

Notre étude montre que l'explicitation de propriétés géométriques ne suffit pas pour la géométrie théorique surtout pour la symétrie orthogonale, et l'importance de la validation. Il faut encore une autre phase dans laquelle la validité des règles mobilisées hors contexte de la construction est mise en question. Le problème de preuve peut être employé pour susciter différentes règles qui ne sont pas forcément mobilisées dans la procédure de construction. Le fait que les élèves puissent créer plusieurs règles pour le problème de la preuve est une activité favorable du point de vue de l'apprentissage de la géométrie théorique. Dans cette activité, il importe qu'une phase autonome de validation de règles créées. Pour invalider les règles non-pertinentes, la construction joue un rôle important. Ce qui permet la validité d'une règle est l'existence de contre exemples construits à partir des propriétés explicitées de la règle. Pour que cette activité puisse être effectuée de façon autonome par l'apprenant, il est nécessaire de créer une situation adidactique permettant de valider ou invalider les règles créées.

Par exemple, pour la règle « DB-Sr2 : si PQ // MN, P'Q' // MN et PQ = P'Q' alors Sym (PQ, P'Q', MN) » mobilisée par Delphine & Baptiste (1), une construction de deux segments parallèles à la droite et de même longueurs, mais de distance différente à partir de la droite (Figure VII.1) ou qui sont très éloignés (Figure VII.2) pourrait être un contre exemple qui l'invalide. En effet, le binôme Laura & Justine (8) remarque le manque d'une propriété dans un permis d'inférer à partir de la construction et trouve une règle.

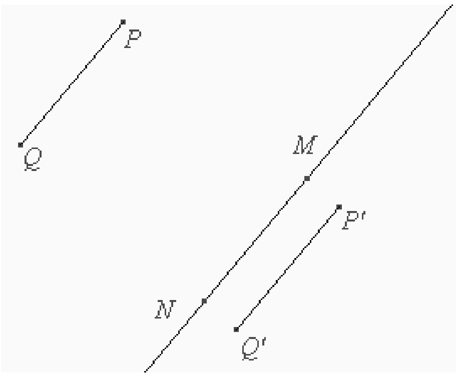


Figure VII.1

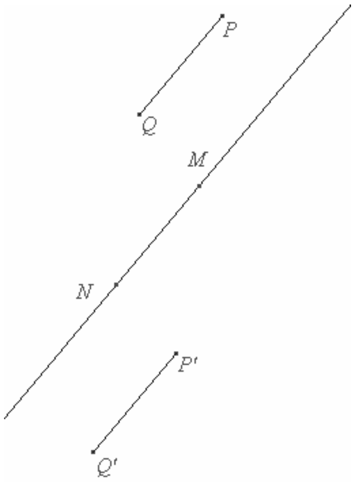


Figure VII.2

Par ailleurs, du point de vue de la géométrie théorique, les règles validées par la construction ou par la perception n'ont pas encore le statut théorique. Elles sont les produits de « opportunisme ». Les règles mobilisables dans la géométrie théorique sont celles qui sont acceptées ou partagées par l'institution ou par la communauté. Une phase de décision des axiomes est nécessaire. Mariotti et al. (1997) propose une situation de cette phase au travers de la discussion mathématique.

Conclusion

Notre étude débutant par l'analyse du fonctionnement de connaissance dans la preuve se conclut par la même évidence d'une distance entre la géométrie pragmatique et la géométrie théorique qui n'est pas facile à combler. Le travail de cette thèse porte sur l'analyse de comportement des élèves. Nous avons vu que la construction ne suffit pas, tandis qu'elle joue un rôle important. Il s'agit d'une réorganisation de connaissance. La question de l'apprentissage qui permet de dépasser cette distance se pose légitimement.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Artigue, M. (1991) Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 10(2/3) pp. 241-286.

Artigue, M. & Robinet, J. (1982) Conceptions du cercle chez des enfants de l'école. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 3(1) pp. 5-64.

Balacheff, N. (1987) Processus de preuves et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics* 18(2) 147-176

Balacheff, N. (1988) *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de Collège*. Thèse d'état. Grenoble: Université Joseph Fourier.

Balacheff, N. (1995) Conception, propriété du sujet/milieu. In: Noirfalise R., Perrin-Glorian M.-J. (ed.) *Actes de la VII° Ecole d'été de didactique des mathématiques* (pp.215-229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

Balacheff, N. (1995) Conception, connaissance et concept. In: Grenier D. (ed.) *Didactique et technologies cognitives en mathématiques, séminaires 1994-1995* (pp.219-244). Grenoble: Université Joseph Fourier

Balacheff, N. (1997) Apprendre la preuve. In: J.F. Sallantin, J.J. Sczeciniarz (eds.) *Le concept de preuve à la lumière de l'intelligence artificielle*, pp.197-236. Paris: PUF.

Balacheff, N. (1999). L'argumentation est-elle un obstacle? Invitation à un débat..., *La lettre de la preuve*, http://www-didactique.imag.fr/preuve/Newsletter/990506.html (dernière accès le 6 juillet 2001).

Balacheff, N. (2000). A modelling challenge: untangling learners' knowing. In: *Journées Internationales d'Orsay sur les Sciences Cognitives: L'apprentissage*, JIOSC2000, Paris. (http://www-didactique.imag.fr/Balacheff/TextesDivers/JIOSC2000.html)

Balacheff, N. & Gaudin, N. (2002). Students conceptions: an introduction to a formal characterization. *Les cahiers du laboratoire Leibniz.* No.65. (http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers/)

Balacheff, N. & Margolinas, C. (2005). cK¢ modèle de connaissances pour le calcul de situations didactiques. in Mercier A. & Margolinas C. (ed.), *Balises en Didactiques des Methématiques*, pp 75 - 106, Grenoble : La Pensée Sauvage.

Bautier, T. (1987). Une modélisation didactique des activités d'enseignement des premières propriétés de la symétrie orthogonale plane. *Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*. n° ?. 197-238. LSD2-IMAG, Grenoble.

Bell, A. (1993). Some experiments in diagnostic teaching. *Educational studies in mathematics*, 24(1), 115-137.

Boero P., Garuti R., Mariotti M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. *Proceedings of PME-XX*, Valencia, vol.2 (pp. 113-120).

Boero P., Garuti R., Lemut (1999). About the generation of conditionality of statements and its links with proving. *Proceedings of PME-XXIII*, Haifa, vol.2 (pp. 137-144).

Both Carvalho, N. T. & Laborde, C: (1999-2000). Transformations géométriques et configurations en 4ème et 3ème : une première classification des tâches proposées aux élèves et leur répartition dans deux manuels. *petit x*, n° 52, pp.43 - 71.

Chambadal, L. (1981) *Dictionnaire de mathématiques.* Paris : Hachette.

Chevalard, Y. (1985) *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné*. éd. La Pensée Sauvage : Grenoble. (1991 : 2ème édition)

Douek N. (2000). Comparing argumentation and proof in a mathematics education perspective. ICME9 TSG 12. Tokyo.

Denys B. & Grenier D. (1986). Symétrie orthogonale : des élèves français et japonais face à une même tâche de construction. *Petit X*, n° 12, pp.33 - 56.

de Villier, M. (199 ?)

Deloustal-Jorrand, V. (2000) L'implication. Quelques aspects dans les manuels et points de vue d'élèves-professeurs, *Petit x* n°55, 35-71. IREM de Grenoble.

Durand-Guerrier, V. (1995) Place de la logique formelle comme outil d'analyse des connaissances mises en oeuvre dans le raisonnement mathématique dans une perspective didactique, in G. Arsac, J. Gréa, D. Grenier, A. Thibergien, *Différents types de savoirs et leurs articulations*, La Pensée Sauvage : Grenoble. pp.205-233.

Durand-Guerrier, V. (2003) Which notion of implication is the right one ? From logical considerations to a didactic perspective ; *Educational Studies in Mathematics* 53 5-34

Duval, R. (1990) Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 3, pp. 195-221. Strasbourg : IREM de Strasbourg.

Duval, R. (1991) Structure du raisonnement déductif et apprentissage de la démonstration. *Educational Studies in Mathematics* 22(3) 233-261

Duval, R., (1992-1993). Argumenter, démontrer, expliquer : continuité ou rupture cognitive?, *Petit x*, n° 31, pp.37 - 61.

Duval, R., (1994). Les différents fonctionnements d’une figure dans une démarche géométrique. *Repères*, n° 17, pp.121 - 138.

Duval, R. (1995). *Semiosis et pensée humaine*. Bernes : Peter Lang.

Duval, R. (2000) Ecriture, raisonnement et découverte de la démonstration en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 20(2) pp. 135-170.

Gal, H. & Linchevski, L. (2002). Analyzing geometry problematic learning situations by theory of perception. In *Proceeding of the 26th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, vol.2, pp.400-407, Norwich, England.

Gallou-Dumiel, E. (1987). Symétrie orthogonale et micro ordinateur. *Recherches en didatique des mathématiques*, 8(1.2), 5-60.

Garuti, R., Boero, P., Lemut, E. (1998) Cognitive Unity of Theorems and Difficulties of Proof. *Proceedings of PME-XXII*, vol. 2, pp. 345-352.

Gaudin, N. (2002). Conceptions de fonction et registres de représentation, étude de cas au lycée. *For the Learning of mathematics*, (22)2, 35-47

Gras, R. (1983). Instrumentation de notions mathématiques, un exemple : la symétrie. *petit x*, n° 1, pp.7 - 39.

Grenier, D. (1985a). Quelques aspects de la symétrie orthogonale pour des élèves de classes de 4ème et 3ème. *petit x*, n° 7, pp.57 - 69.

Grenier, D. (1985b). Conceptions des élèves de collèges à propos de la symétrie orthogonale. *Séminaire de Didactique des mathématiques et de l'informatique*. n°63. 51-72. LSD2-IMAG, Grenoble.

Grenier, D. (1988). *Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale en sixième*. Thèse. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Grenier, D. (1989). Construction et étude d'un processus d'enseignement de la symétrie orthogonale: éléments d'analyse du fonctionnement de la théorie de situations. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 10(1), 5-60.

Grenier, D. & Laborde, C. (1988). Transformations Géométriques: Le cas de la symétrie orthogonale. In *Didactique et acquisition des connaissances scientifique*: Actes du colloque de Sèvres. Grenoble: Le pensée sauvage, pp. 65-86.

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics.* 44. 5-23.

Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes : results from exploratory studies. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.) *Research in collegiate mathematics education. III*, pp.234 - 283. Providence, RI : American Mathematical Society and Washington, DC : Mathematical Association of America.

Healy, L. & Hoyles, C. (1998) Technical Report on the Nationwide Survey: Justifing and Proving in School Mathematics. London: Institute of Education, University of London

Healy, L. & Hoyles, C. (2000) A study of proof conception in algebra. *Journal for Research in Mathematics Education.* 31(4) pp. 396-428.

Hoyles, C. & Healy, L. (1997). Unfolding meanings for reflective symmetry, *International journal of computers in mathematical learning*, 2(1). 27-59.

Jahn, A.P. (1998) *Des transformations des figures aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre*. Thèse. Leibniz-IMAG, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Keskessa, B. (1992) *Preuves et résolutions de problèmes de lieux géométriques*. Thèse. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.

Küchemann, D. (1981). Reflection and rotation. In Hart K (ed), *Children's understanding of mathematics: 11-16*. (pp. 137-157) London: John Murray.

Lakatos, I. (1976) *Preuves et Réfutations.* Paris : Hermann, (traduction en français, 1985)

Legrand, M. (1988) Rationalité et démonstration mathématique, le rapport de la classe à une communauté scientifique. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 9(3) pp. 365-406.

Lerouge, A. (2000) La notion de cadre de rationalité à propos de la droite au collège. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 20(2) pp. 171-208.

Margolinas, C. (1993) *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques.* Grenoble : La Pensée Sauvage.

Mariotti, M.A., Bartolini Bussi M., Boero,P., Ferri, F., and Garuti, R. (1997) 'Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition', *Proceedings of PME-XXI*, Lahti, vol.1, pp. 180-195

Mariotti, M.A. (1997) Justifying and proving in geometry: the mediation of a microworld. (Revised and extended version of the version published in: Hejny M., Novotna J. (eds.) *Proceedings of the European Conference on Mathematical Education* (pp.21-26). Prague: Prometheus Publishing House.

http://www.lettredelapreuve.it/Resumes/Mariotti/Mariotti97a/Mariotti97a.html)

Mariotti, M.A. (1999) Cabri, les constructions géométriques et le problème de la démonstration. *Actes X^e^ école d'été de didactique des mathématiques,* Houlgate, tome II, pp. 18-25.

Mariotti, M.A. (2000). Introduction to Proof: The Mediation of a Dynamic Software Environment. *Educational Studies in Mathematics*. 44(1/2), 25-53.

Miyakawa, T. (2002). Relation between proof and conception: the case of the sum of two even numbers. In *Proceeding of the 26th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, vol.3, pp.353-360, Norwich, England.

Miyakawa, T. (2004). The nature of students' rule of inference in proving: the case of reflective symmetry. *Paper accepted and presented at ICME-10*. 4-11 July, Copenhagen, Denmark. (On line paper, http://www.icme-organisers.dk/tsg19/)

Miyakawa, T. (2004). Reflective symmetry in construction and proving. In *Proceeding of the 28th International Conference of Psychology of Mathematics Education*, vol.3, pp.337-344, Bergen.

Nunes, T., Schliemann, A.D. & Carraher, D.W. (1993). Street Mathematics and School Mathematics. Cambridge, U.K: Cambridge University Press.

NCTM (1989). *Curriculum Evaluation Standards For School Mathematics,* Reston, VA, NCTM.

NCTM (2000). *Principle and Standards for School Mathematics*, Reston, VA, NCTM.

Pedemonte, B. (2001) Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics. *Proceedings of PME-XXV*, Utrecht, vol.4, (pp.33-40).

Pedemonte, B. (2002) *Etude didactique et cognitive des rapports de l'argumentation et de la démonstration dans l'apprentissage des mathématiques.* Thèse. Leibniz – IMAG, Université Joseph Fourier – Grenoble 1.

Peirce, C. S. (1960) *Collected papers of Charles Sanders Peirce; Vol. 2.* (ed. C. Hartshorne and P. Weiss) Cambridge: Belknap Press of Harvard Univ. Press.

Perrin-Glorian, M.-J. (1999) Problèmes d'articulation de cadres théoriques : l'exemple du concept de milieu. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 19(3) pp. 279-322.

Polya, G. (1958) *Les mathématiques et le raisonnement "plausible"*. Paris : Gautier-Villars, (originale en anglais : *Mathematics and plausible reasoning*, 1954)

Polya, G. (1965) *Comment poser et résoudre un problème.* Paris : Dunod, (originale en anglais : *How to solve it*, 1945)

Rolet, C. (1996) *Dessin et figure en géométrie : analyse des conceptions de futures enseignants dans le contexte Cabri-géomètre.* Thèse de doctorat. Université Claude Bernard – Lyon 1.

Sangaré, M. (2000) *La rotation : approche cognitive et didactique, une étude de cas au Mali*. Thèse de l'Université du Mali.

Tahri, S. (1993) *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse de décisions didactiques*. Thèse. LSD2-IMAG, Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Toulmin, S.E. (1958). *The use of argument*, Cambridge University Press. (Traduction française, *Les usages de l'argumentation*, Paris : PUF, 1993).

Vergnaud, G. (1981) Quelques orientations théoriques et méthodologiques des recherches françaises en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 2(2) 215-231.

Vadcard L. (2000) *Etude de la notion d'angle sous le point de vue des conceptions*. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble 1.

Vergnaud, G.. (1991) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10(2/3) 133-169.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: the need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics.* 48(1), 101-119.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of mathematics.* 22(3), 14-17.

Weyl, H. (1952). *Symmetry*. Princeton : Princeton University Press.