数学基礎演習

– 集合と位相 –

中川 仁

2014 年度後期

目標　大学で学ぶ数学の基礎として必要になる，集合，写像，ユークリッド空間の位相についての基本的なことをを解説する．

記号　$\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ をそれぞれ自然数全体の集合，整数全体の集合，有理数全体の集合，実数全体の集合，複素数全体の集合とする．

目 次

1　集合と写像 …… **1**

1.1　集合 …… 1
1.2　単射と全射 …… 6
1.3　可算集合 …… 9
1.4　直積集合 …… 11
1.5　同値関係 …… 13

2　ユークリッド空間の位相 …… **15**

2.1　実数の連続性 …… 15
2.2　$\mathbb{R}^n$ における距離 …… 16
2.3　$\mathbb{R}^n$ における開集合と閉集合 …… 18
2.4　内部と閉包 …… 22
2.5　連続写像 …… 24
2.6　コンパクト集合 …… 30
2.7　一様連続性 …… 36
2.8　代数学の基本定理 …… 37
2.9　コンパクト集合の直積 …… 40
2.10　連結集合 …… 42

A　ベルンシュタインの定理 …… **46**

B　選択公理 …… **49**

1　集合と写像

1.1　集合

有限個の元からなる集合を**有限集合**といい，有限集合でない集合を無限集合という．また，元を含まない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ で表す．

A を集合とするとき，a が A の元であるとき，$a \in A$ とかき，a が A の元でないとき，$a \notin A$ とかく．

B が A の部分集合であるとき，$B \subset A$ とかき，B が A の真部分集合である ($B \subset A$ かつ $B \neq A$) とき，$B \subsetneq A$ とかく．

A, B を X の部分集合とするとき，A の元で，かつ B の元でもあるもの全体のなす集合を A と B の**交わり**といい，$A \cap B$ で表す．

$$A \cap B = \{x \in X \,|\, x \in A \text{ かつ } x \in B\}.$$

また，A の元かまたは B の元であるもの全体のなす集合を A と B の**和**といい，$A \cup B$ で表す．

$$A \cup B = \{x \in X \,|\, x \in A \text{ または } x \in B\}.$$

数学では，いくつかの集合に番号を付けて並べたもの $A_1, A_2, \ldots, A_k$ を考えることがある．このような集合の集まり $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ を**集合族**という．これは有限個の集合からなる集合族であるが，自然数 $1, 2, 3, \ldots, n, \ldots$ に一つずつ集合を対応させた列

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

を考えることもある．これを $\{A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n, \ldots\}$ とか $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ とかいて，**可算個の集合からなる集合族**という．もっと一般に，何かある集合 I の各元 $i \in I$ に一つずつ集合 A_i を対応させた集合族 $\{A_i\}_{i \in I}$ を考えることもある．i を A_i の**添え字**といい，$\{A_i\}_{i \in I}$ を I **を添え字集合とする集合族**という．

$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合からなる集合族とする．いずれかの A_i の元であるような元全体のなす集合 (A_i たちの**和集合**) を，

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in X \,|\, \text{ある } i \in I \text{ について } x \in A_i\}$$

と表す．また，すべての A_i に属するような元全体のなす集合 (A_i たちの**交わり，共通部分**) を

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \in X \,|\, \text{すべての } i \in I \text{ について } x \in A_i\}$$

と表す．A の元で，かつ B の元でないもの全体のなす集合を，A から B を引いた**差集合**といい，$A \setminus B$ で表す．

$$A \setminus B = \{x \in A \,|\, x \notin B\}.$$

特に，$X \setminus B$ を X における B の**補集合**といい，X の中で考えていることが明らかな場合は，X を明示しないで B^c と表すこともある．

$$B^c = X \setminus B = \{x \in X \,|\, x \notin B\}.$$

X の部分集合 A とその X における補集合 A^c について次が成り立つ．

$$(A^c)^c = A, \quad X^c = \emptyset, \quad \emptyset^c = X, \quad A \cup A^c = X, \quad A \cap A^c = \emptyset.$$

実際，$x \in X$ について，$x \in (A^c)^c \iff x \notin A^c \iff x \in A$. よって，$(A^c)^c = A$ である．他は明らかである．また，$A \subset B \subset X$ のとき，$A^c \supset B^c$ である．

例 1.1. $\mathbb{Z} \subsetneq \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subsetneq \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subsetneq \mathbb{C}$ である．$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ は無理数全体のなす集合である．

例 1.2. $X = \mathbb{R}$, $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$ とする．

$$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 > 0\}$$

とおけば，$C = A \cup B$ である．また，$D = \mathbb{R} \setminus C$ とおけば，

$$D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x - 6 \leq 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$$

である．したがって，

$$D \cap \mathbb{Z} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}.$$

例 1.3. $X = \mathbb{R}$ とし，$n \in \mathbb{Z}$ に対して，$I_n = \{x \in \mathbb{R} \mid n \leq x < n+1\}$ とすると，

$$\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} I_n.$$

例 1.4. P を素数全体の集合とする．各 $p \in P$ に対して，

$$A_p = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \text{ の分母は } p \text{ と互いに素}\}$$

とおく．そのとき，

$$\bigcap_{p \in P} A_p = \mathbb{Z}.$$

命題 1.5 (ド・モルガンの法則). X を集合とし，A, B を X の部分集合とする．X における A の補集合を A^c と表す．次が成り立つ．

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c.$$

もっと一般に，$\{A_i\}_{i \in I}$ を X の部分集合の族とすれば，次が成り立つ．

$$\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c, \qquad \left(\bigcap_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in I} A_i^c.$$

[証明]　$x \in X$ について，$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A$ かつ $x \in B$ であるから，

$$\begin{aligned} x \in (A \cap B)^c &\Longleftrightarrow x \notin A \cap B \Longleftrightarrow x \notin A \text{ または } x \notin B \\ &\Longleftrightarrow x \in A^c \text{ または } x \in B^c \Longleftrightarrow x \in A^c \cup B^c. \end{aligned}$$

ゆえに，$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ である．これを A を A^c, B を B^c に置き換えて適用すれば，$D = A^c \cap B^c$ とおくとき

$$D^c = (A^c \cap B^c)^c = (A^c)^c \cup (B^c)^c = A \cup B.$$

したがって，$(A \cup B)^c = (D^c)^c = D = A^c \cap B^c$ である．　□

命題 1.6. X を集合とし，$\{X_i\}_{i\in I}$ を X の部分集合の族, Y を X の部分集合とすると，次が成り立つ.

(1) $Y\cap\left(\bigcup_{i\in I}X_i\right)=\bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)$.

(2) $Y\cup\left(\bigcap_{i\in I}X_i\right)=\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)$.

(3) $Y\cap(X\setminus Y)=\emptyset$, $Y\cup(X\setminus Y)=X$.

[証明] (1) $Z=\bigcup_{i\in I}X_i$ とおく．各 $i\in I$ に対して，$X_i\subset Z$ より，$Y\cap X_i\subset Y\cap Z$ である．したがって，$\bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)\subset Y\cap Z$ である．逆向きの包含関係を示すために，$x\in Y\cap Z$ とすると，$x\in Y$ かつ $x\in Z$ である．$x\in Z=\bigcup_{i\in I}X_i$ より，ある $i\in I$ について，$x\in X_i$ である．ゆえに，$x\in Y\cap X_i$ である．よって，$x\in\bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)$ (任意の $x\in Y\cap Z$) であり，$Y\cap Z\subset\bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)$ である．ゆえに，$Y\cap Z=\bigcup_{i\in I}(Y\cap X_i)$ である．

(2) $W=\bigcap_{i\in I}X_i$ とおく．各 $i\in I$ に対して，$W\subset X_i$ であるから，$Y\cup W\subset Y\cup X_i$ である．したがって，$Y\cup W\subset\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)$ である．逆向きの包含関係を示すために，$x\in\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)$ とする．すべての $i\in I$ について，$x\in Y\cup X_i$ である．$x\in Y$ ならば，$x\in Y\cup W$ である．$x\notin Y$ ならば，すべての $i\in I$ について，$x\in X_i$ であるから，$x\in\bigcap_{i\in I}X_i=W$ である．よって，$x\in Y\cup W$ (任意の $x\in\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)$) であり，$\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)\subset Y\cup W$ である．ゆえに，$\bigcap_{i\in I}(Y\cup X_i)=Y\cup W$ である．

(3) は明らか. □

有限集合 A の元の個数を $\#(A)$, $|A|$, $\mathrm{card}(A)$ と表す.

命題 1.7. X を集合とし，A, B を X の有限部分集合とする．そのとき，

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|.$$

[証明] まず，$A\cap B=\emptyset$ ならば，命題の等式は明らかに成り立つ．一般の場合は，$C=A\cap B$ とおくと，$C\subset A$, $A=(A\setminus C)\cup C$, $(A\setminus C)\cap C=\emptyset$ であるから，

$$|A|=|A\setminus C|+|C|.$$

同様に，$C\subset B$, $B=(B\setminus C)\cup C$, $(B\setminus C)\cap C=\emptyset$ であるから，

$$|B|=|B\setminus C|+|C|.$$

さらに，

$$A\cup B=\Big((A\setminus C)\cup C\Big)\cup\Big((B\setminus C)\cup C\Big)=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)\cup C$$

であり，$A\setminus C$, $B\setminus C$, C のどの 2 つも交わりは空集合であるから，

$$\begin{aligned}|A\cup B|&=|(A\setminus C)\cup((B\setminus C)\cup C)|=|A\setminus C|+|(B\setminus C)\cup C|\\&=|A\setminus C|+|B\setminus C|+|C|=|A|-|C|+|B|-|C|+|C|\\&=|A|+|B|-|C|=|A|+|B|-|A\cap B|.\end{aligned}$$

□

系 1.8. X を集合とし，A, B, C を X の有限部分集合とする．そのとき，

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

[証明]　$B' = B \cup C$ とおけば，命題 1.7 より，

$$|A \cup B \cup C| = |A \cup B'| = |A| + |B'| - |A \cap B'|.$$

ここで，命題 1.6 より，

$$A \cap B' = A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

であるから，命題 1.7 より，

$$\begin{aligned} |A \cap B'| &= |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| - |(A \cap B) \cap (A \cap C)| \\ &= |A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|, \\ |B'| &= |B \cup C| = |B| + |C| - |B \cap C|. \end{aligned}$$

したがって，

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |A| + |B'| - |A \cap B'| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

□

例 1.9. $X = \{n \in \mathbb{Z} \mid 1 \leq n \leq 300\}$ とする．X の部分集合 A, B, C を

$$\begin{aligned} A &= \{n \in X \mid n \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}, \\ B &= \{n \in X \mid n \text{ は } 5 \text{ の倍数}\}, \\ C &= \{n \in X \mid n \text{ は } 7 \text{ の倍数}\} \end{aligned}$$

とする．そのとき，

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{n \in X \mid n \text{ は } 15 \text{ の倍数}\}, \\ A \cap C &= \{n \in X \mid n \text{ は } 21 \text{ の倍数}\}, \\ B \cap C &= \{n \in X \mid n \text{ は } 35 \text{ の倍数}\}, \\ A \cap B \cap C &= \{n \in X \mid n \text{ は } 105 \text{ の倍数}\} \end{aligned}$$

である．

$$|A| = [300/3] = 100, \qquad |B| = [300/5] = 60, \qquad |C| = [300/7] = 42,$$
$$|A \cap B| = [300/15] = 20, \quad |A \cap C| = [300/21] = 14, \quad |B \cap C| = [300/35] = 8,$$

$|A \cap B \cap C| = [300/105] = 2$ であるから，系 1.8 より，

$$|A \cup B \cup C| = 100 + 60 + 42 - 20 - 14 - 8 + 2 = 162.$$

よって，X の元で 3, 5, 7 のどれでも割れないものの個数は

$$|X \setminus (A \cup B \cup C)| = 300 - 162 = 138.$$

1.2 単射と全射

集合 X から集合 Y への**写像**とは，X の各元 x に対して，Y の元 y をある規則によって対応付けすることである．写像は $f: X \longrightarrow Y$ のように表し，$x \in X$ に $y \in Y$ が対応することを $y = f(x)$ または $f: x \longmapsto y$ のように表す．写像では，X の 2 つ以上の元が Y の 1 つの元に対応することはあるが，X の 1 つの元が Y の 2 つ以上の元に対応することはない．

定義 1.10. 写像 $f: X \longrightarrow Y$ が**単射**であるとは，$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$ であるという性質を f がもつときにいう．

定義 1.11. 写像 $f: X \longrightarrow Y$ が**全射**であるとは，Y のどんな元 y をとっても X の元 x で $f(x) = y$ となるものが存在するという性質を f がもつときにいう．

写像 $f: X \longrightarrow Y$ が与えられたとき，Y の部分集合

$$f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}$$

を f の**像**という．f が全射であることは，$f(X) = Y$ となることと同じである．写像 $f: X \longrightarrow Y$ が単射かつ全射であるとき，**全単射**であるという．

2 つの写像 $f: X \longrightarrow Y$ と $g: Y \longrightarrow Z$ に対して，**合成写像** $g \circ f: X \longrightarrow Z$ は

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

によって定義される．3 つの写像 $f: X \longrightarrow Y$, $g: Y \longrightarrow Z$, $h: Z \longrightarrow W$ に対して，2 通りの仕方で合成した写像 $h \circ (g \circ f)$ と $(h \circ g) \circ f$ は同じ写像である．実際，

$$\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))), \\
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))), \\
h \circ (g \circ f) &= (h \circ g) \circ f.
\end{aligned}$$

すなわち，写像の合成について**結合法則**が成立する．

$f: X \longrightarrow Y$ と $g: Y \longrightarrow Z$ がともに単射であれば，合成写像 $g \circ f$ も単射である．実際，$(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ とすれば，$g(f(x)) = g(f(x'))$ であり，g が単射であることから $f(x) = f(x')$ であり，f も単射であるから，$x = x'$ を得る．

また，$f: X \longrightarrow Y$ と $g: Y \longrightarrow Z$ がともに全射であれば，合成写像 $g \circ f$ も全射である．実際，g は全射であるから，任意の z に対して，$z = g(y)$ を満たす $y \in Y$ が存在する．f は全射であるから，この y に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ が存在する．このとき，$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = z$ である．

したがって，$f: X \longrightarrow Y$ と $g: Y \longrightarrow Z$ がともに全単射であれば，合成写像 $g \circ f$ も全単射である．

写像 $f: X \longrightarrow Y$ が全単射であるとする．任意の $y \in Y$ に対して，$f(x) = y$ となる $x \in X$ がただ 1 つ存在することがわかる．そこで，$g(y) = x$ として写像

$g : Y \longrightarrow X$ を定めると，$g \circ f = \mathrm{id}_X$ である．ここで，$\mathrm{id}_X : X \longrightarrow X$ は X の**恒等写像**であり，任意の $x \in X$ に対して $\mathrm{id}_X(x) = x$ によって定義される．このとき，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ も成り立っている．このような写像 g を f の**逆写像**という．

逆に，写像 $f : X \longrightarrow Y$ と $g : Y \longrightarrow X$ が $g \circ f = \mathrm{id}_X$ を満たせば，f は単射である．実際，$f(x) = f(x')$ ならば，$x = g(f(x)) = g(f(x')) = x'$ であるから，f は単射である．$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ を満たせば，f は全射である．実際，任意の $y \in Y$ に対して，$x = g(y)$ とおけば，$f(x) = f(g(y)) = y$ であるから，f は全射である．よって，両方とも満たせば，f は全単射である．

例 1.12. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ とする．$f : X \longrightarrow Y$ を $f(x) = e^x$ によって定義すると，f は単射であるが全射ではない．しかし，$Y = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$ とすれば，f は全単射である．

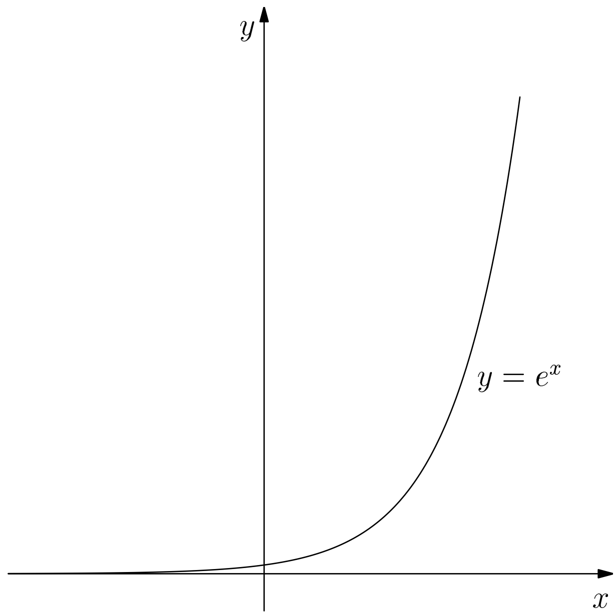

図 1: $y = e^x$ のグラフ

例 1.13. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ とする．$f : X \longrightarrow Y$ を $f(x) = x^2$ によって定義すると，f は全射でも単射でもない．

例 1.14. $X = \mathbb{R}, Y = \mathbb{R}$ とする．$f : X \longrightarrow Y$ を $f(x) = x^3 - 3x$ によって定義すると，f は全射であるが単射ではない．

例 1.15. $X = \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x > 0\}$, $Y = \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < x < 1\}$ とする．$f : X \longrightarrow Y$ を $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$ によって定義すると，f は全単射である．

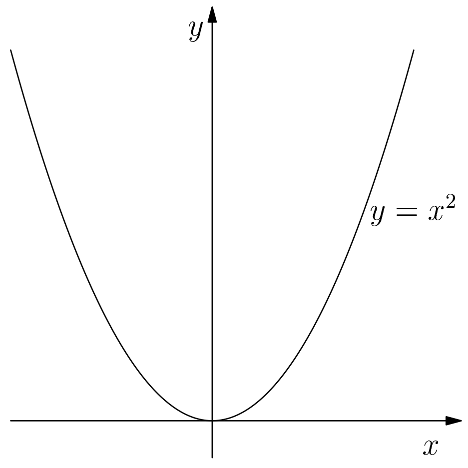

図 2: $y = x^2$ のグラフ

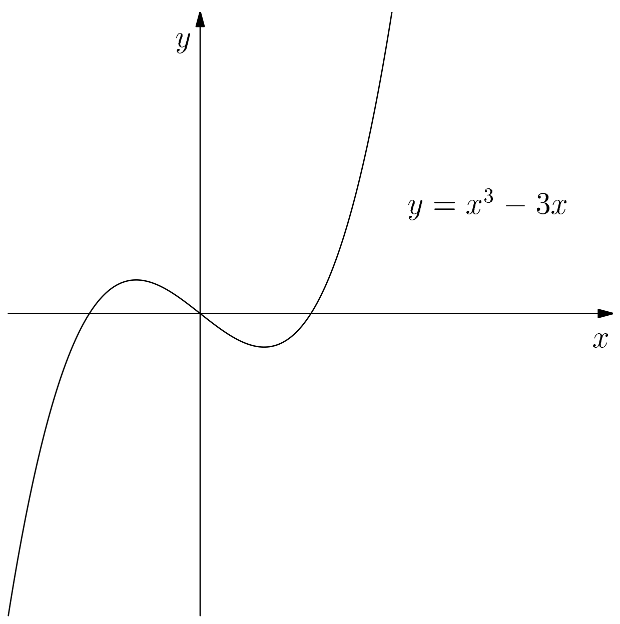

図 3: $y = x^3 - 3x$ のグラフ

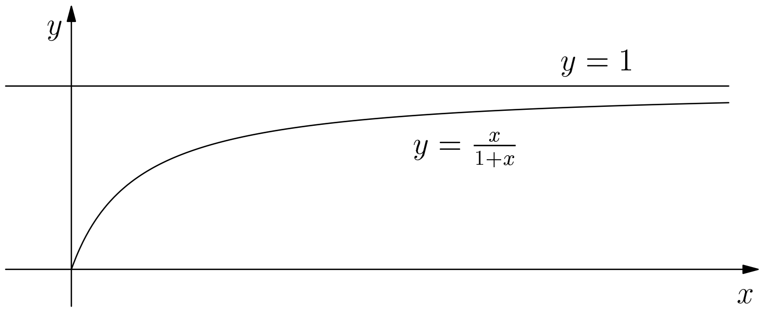

図 4: $y = x/(1+x)$ のグラフ

1.3 可算集合

A が有限集合であるとき，$n = |A|$ とすると，

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

と表せる．$X_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ として，写像

$$f : X_n \longrightarrow A$$

を $f(k) = a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ によって定義すれば，f は全単射である．

定義 1.16. 集合 X に対して，全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ が存在するとき，X は**可算集合**であるという．可算集合でない無限集合を**非可算無限集合**という．

例 1.17. $\mathrm{id}_{\mathbb{N}} : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ は全単射であるから，$\mathbb{N}$ は可算集合である．正の偶数全体の集合を $\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ で表し，正の奇数全体の集合を $\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ で表す．写像 $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ を $f(n) = 2n$ と定義すると，f は全単射である．よって，$\mathbb{N}_{\mathrm{even}}$ は可算集合である．同様に，写像 $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ を $g(n) = 2n - 1$ と定義すると，g は全単射である．したがって，$\mathbb{N}_{\mathrm{odd}}$ も可算集合である．

例 1.18. $\mathbb{Z}$ は可算集合であることを示そう．$f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ を

$$f(n) = \begin{cases} 2n + 1, & n \geq 0, \\ 2|n|, & n < 0 \end{cases}$$

によって定義する．$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を

$$g(m) = \begin{cases} \dfrac{m-1}{2}, & m \text{ は奇数}, \\ -\dfrac{m}{2}, & m \text{ は偶数} \end{cases}$$

によって定義すれば，$f(g(m)) = m$, $g(f(n)) = n$ である．よって，f は全単射であり，$\mathbb{Z}$ は可算集合である．

命題 1.19. 可算集合 X の部分集合 Y は有限集合または可算集合である．

[証明]　Y が有限集合ならば何も示すことはない．よって，Y は無限集合であるとする．$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ を全単射とする．$f(n) = a_n \in X$ とおけば，

$$Y \subset X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

である．$a_n \in Y$ となる最小の番号 n を i_1 とする．$a_n \in Y$, $n > i_1$ となる最小の番号 n を i_2 とする．これを繰り返して，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ がとれたとするとき，$a_n \in Y, n > i_k$ となる最小の番号 n を i_{k+1} とする．Y は無限集合であるから，この操作はどこまでも続けることができる．このとき，写像 $g : \mathbb{N} \longrightarrow Y$ を $g(k) = a_{i_k}$ によって定義する．構成の仕方から，$i_1 < i_2 < \cdots < i_k < \cdots$ であり，$k < \ell$ ならば，$i_k < i_\ell$ より，$g(k) = a_{i_k} \neq a_{i_\ell} = g(\ell)$ である．よって，g は単射である．また，任意の $y \in Y$ は X の元であるから，ある番号 n について，$y = f(n) = a_n$ とかける．そのとき，ある $k \in \mathbb{N}$ に対して，$i_k \leq n < i_{k+1}$ となるが，$i_k < n < i_{k+1}$ となることはないから，$n = i_k$ であり，$g(k) = a_{i_k} = a_n = y$ である．ゆえに，g は全射であり，したがって，全単射である．すなわち，Y は可算集合である．　□

命題 1.20. X を可算集合，Y を有限集合または可算集合とすれば，$X \cup Y$ は可算集合である．

[証明]　$Y \subset X$ のときは主張は自明である．よって，$Y \not\subset X$ とする．$Y' = Y \setminus X$ とおく．そのとき，$X \cup Y = X \cup Y'$, $X \cap Y' = \emptyset$ である．命題 1.19 より，Y' は高々可算集合である．$f : \mathbb{N} \longrightarrow X$ を全単射とする．

Y' が有限集合のとき．$|Y'| = k$ とし，$Y' = \{y_1, \ldots, y_k\}$ とする．$g : \mathbb{N} \longrightarrow X \cup Y$ を

$$g(n) = \begin{cases} y_n, & 1 \leq n \leq k, \\ f(n-k), & n > k \end{cases}$$

によって定義すれば，g は全単射である．

Y' が可算集合のとき．$g : \mathbb{N} \longrightarrow Y'$ を全単射とし，$h : \mathbb{N} \longrightarrow X \cup Y$ を

$$h(n) = \begin{cases} f((n+1)/2), & n \in \mathbb{N}_{\text{odd}}, \\ g(n/2), & n \in \mathbb{N}_{\text{even}} \end{cases}$$

によって定義すれば，h は全単射である．　□

定理 1.21. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は非可算無限集合である．

[証明]　$I = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ とする．例 1.12 と例 1.15 から，$g : \mathbb{R} \longrightarrow I$ を $g(x) = \dfrac{e^x}{1 + e^x}$ によって定義すれば，g は全単射である．よって，$\mathbb{R}$ が非可算無限集合であることを示すためには，I が非可算無限集合であることを示せばよい．こ

れは以下のようなカントールの**対角線論法**によって証明される．I に属する任意の実数 a は

$$a = 0.a_1a_2a_3\cdots a_i\cdots$$

とかける．ここで，a_i は小数点 i 桁目の数字で，$0 \leq a_i \leq 9$ を満たす整数である．a が小数点 n 桁の有限小数ならば，$a_i = 0\ (i > n)$ とおいた無限小数であるとする．このように約束することは，

$$0.33999999999999999999999999999\cdots = 0.34000000000000000000000000000\cdots$$

のうち，右辺の表示だけを採用することを意味するから，小数展開は一意に定まることになる．

I が可算集合であると仮定する．すなわち，全単射 $f : \mathbb{N} \longrightarrow I$ が存在するとする．$\alpha_i = f(i),\, i \in \mathbb{N}$ とする．α_i の小数展開を

$$\alpha_i = 0.a_{i1}a_{i2}a_{i3}\cdots a_{ij}\cdots$$

とする．a_{ij} は小数点 j 桁目の整数である．ここで，0 以上 9 以下の整数からなる整数 $b_1, b_2, \ldots$ を $b_1 \neq a_{11},\ b_2 \neq a_{22},\ \ldots,\ b_n \neq a_{nn},\ \ldots$ となるようにとって (とくに，$1 \leq b_1 \leq 8$ にとれる)，実数 $\beta \in I$ を小数展開

$$\beta = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

によって定めることができる．$f : \mathbb{N} \longrightarrow I$ は全単射であるから，$f(m) = \beta$ となる $m \in \mathbb{N}$ がただ 1 つ存在する．$\beta = f(m) = \alpha_m$ であるから，β の小数展開と α_m の小数展開は一致している．したがって，

$$b_1 = a_{m1},\ b_2 = a_{m2},\ \ldots,\ b_i = a_{mi},\ \ldots,\ b_m = a_{mm},\ \ldots$$

となる．これは $b_m \neq a_{mm}$ にとったことに矛盾する．この矛盾は I が可算集合であると仮定したために生じている．ゆえに，I は非可算無限集合である． $\square$

1.4 直積集合

2 つの集合 X と Y に対して，X の元 x と Y の元 y の組 (x, y) 全体のなす集合を X と Y の**直積集合**といい，$X \times Y$ で表す．

$$X \times Y = \{(x, y) \,|\, x \in X,\ y \in Y\}.$$

同様に，n 個の集合 $X_1, \ldots, X_n$ の直積集合 $X_1 \times \cdots \times X_n$ を

$$X_1 \times \cdots \times X_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \,|\, x_i \in X_i\ (i = 1, \ldots, n)\}$$

によって定義する．特に，$X_1 = \cdots = X_n = X$ のとき，$X_1 \times \cdots \times X_n$ を X^n で表す．

例 1.22.

$$\begin{aligned}
\mathbb{Z}\times\mathbb{N} &= \{(a,b)\,|\,a\in\mathbb{Z},\ b\in\mathbb{N}\},\\
\mathbb{Z}^n &= \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{Z}\ (i=1,\ldots,n)\},\\
\mathbb{Q}^n &= \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{Q}\ (i=1,\ldots,n)\},\\
\mathbb{R}^n &= \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{R}\ (i=1,\ldots,n)\},\\
\mathbb{C}^n &= \{(x_1,\ldots,x_n)\,|\,x_i\in\mathbb{C}\ (i=1,\ldots,n)\}.
\end{aligned}$$

命題 1.23. X, Y がともに可算集合ならば，直積集合 $X\times Y$ も可算集合である．

[証明]　各自然数 n に対して，$S_n\subset\mathbb{N}^2$ を

$$S_n=\{(a,b)\in\mathbb{N}^2\,|\,a+b=n+1\}$$

とおくと，$S_1=\{(1,1)\}$, $S_2=\{(1,2),(2,1)\}$, $S_3=\{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, $\ldots$ である．このとき，$|S_n|=n$ であり，

$$\mathbb{N}^2=\bigcup_{n=1}^{\infty}S_n,\quad S_n\cap S_{n'}=\emptyset\ \ (n\neq n')$$

である．したがって，$(a,b)\in\mathbb{N}^2$ を $a+b$ が小さいものから順に並べ，$a+b$ が同じときは a が小さいものから順に並べる．すなわち，S_n の元を $(1,n),(2,n-1),\ldots,(n,1)$ の順に並べる．このように並べたときに (a,b) が k 番目にあれば，$g(k)=(a,b)$ とおくことによって，写像 $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}^2$ を定義する．

$$(1,1),\ (1,2),(2,1),\ (1,3),(2,2),(3,1),\ (1,4),(2,3),(3,2),(4,1),\ \ldots$$

であるから，

$$g(1)=(1,1),g(2)=(1,2),g(3)=(2,1),g(4)=(1,3),g(5)=(2,2),g(6)=(3,1),\ldots$$

明らかに $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{N}^2$ は全単射である．$p:\mathbb{N}\longrightarrow X$, $q:\mathbb{N}\longrightarrow Y$ を全単射とする．$h:\mathbb{N}^2\longrightarrow X\times Y$ を $h(a,b)=(p(a),q(b))$ によって定義すれば，明らかに h は全単射である．したがって，合成写像 $h\circ g:\mathbb{N}\longrightarrow X\times Y$ は全単射である．ゆえに，$X\times Y$ は可算集合である．　□

例 1.18 と命題 1.23 より，$\mathbb{Z}^2$ は可算集合である．帰納的に $\mathbb{Z}^n$ は可算集合である．

命題 1.24. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ は可算集合である．

[証明]　例 1.18 より $\mathbb{Z}$ は可算集合である．$\mathbb{N}$ はもちろん可算集合である．よって，命題 1.23 より $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ は可算集合である．

$$X=\{(a,b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}\,|\,a\text{ と }b\text{ の最大公約数は }1\}$$

とおけば，命題 1.19 より可算集合 $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$ の部分集合 X は可算集合である．$f:X\longrightarrow\mathbb{Q}$ を $f(a,b)=a/b$ と定義すれば，明らかに f は全単射である．よって，$\mathbb{Q}$ は可算集合である．　□

命題 1.24 と命題 1.23 より，$\mathbb{Q}^2$ は可算集合である．帰納的に，$\mathbb{Q}^n$ は可算集合である．

1.5　同値関係

集合 X において，X の 2 つの元の間にかかわる 1 つの関係を考えて，$x, y \in X$ について，x と y の間にその関係が成り立つとき，$x \sim y$ とかき，その関係が成り立たないとき，$x \not\sim y$ とかく．これが次の 3 条件を満たすとき，$\sim$ は X 上の**同値関係**であるという．

(i) (**反射律**)　任意の $x \in X$ に対して，$x \sim x$ である．

(ii) (**対称律**)　$x \sim y$ ならば，$y \sim x$ である．

(iii) (**推移律**)　$x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば，$x \sim z$ である．

例 1.25. $\mathbb{Z}$ において次の関係を考える．$x, y \in \mathbb{Z}$ に対して，

$$x \sim y \Longleftrightarrow x - y \text{ は } 3 \text{ で割り切れる．}$$

$x - x = 0$ は 3 で割り切れるから，$x \sim x$ である．$x \sim y$ ならば，$x - y = 3q,\ q \in \mathbb{Z}$ とかけ，$y - x = -3q = 3 \times (-q)$ であるから，$y \sim x$ である．$x \sim y,\ y \sim z$ ならば，$x - y = 3m,\ y - z = 3n,\ m, n \in \mathbb{Z}$ とかけ，

$$x - z = (x - y) + (y - z) = 3m + 3n = 3(m + n)$$

より，$x \sim z$ である．よって，この関係 $\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係である．3 で割り切れるという部分を他の自然数で割り切れるとしても同様である．

例 1.26. $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ において次の関係を考える．

$$(a, b) \sim (c, d) \Longleftrightarrow ad - bc = 0.$$

そのとき，$ab - ba = 0$ より，$(a, b) \sim (a, b)$ である．また，$(a, b) \sim (c, d)$ ならば，$ad - bc = 0$ であり，したがって，$cb - da = -(ad - bc) = 0$ である．よって，$(c, d) \sim (a, b)$ である．$(a, b) \sim (c, d)$ かつ $(c, d) \sim (e, f)$ とすると，$ad - bc = 0$ かつ $cf - de = 0$ である．したがって，

$$d(af - be) = adf - bde = f(ad - bc) + b(cf - de) = 0.$$

$d \in \mathbb{N}$ より，$d \neq 0$ であるから，$af - be = 0$ である．よって，$(a, b) \sim (e, f)$ である．ゆえに，この関係 $\sim$ は $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係である．

集合 X 上の同値関係 $\sim$ が与えられているとき，各 $a \in X$ に対して，X の部分集合

$$C(a) = \{x \in X \mid x \sim a\}$$

を a を含む**同値類**という．$a \in C(a)$ であるから，$C(a) \neq \emptyset$ である．同値類全体のなす集合を $X/\!\sim$ で表す．

$$X/\!\sim = \{C(a) \mid a \in X\}.$$

このとき，次が成り立つ．

命題 1.27. $a, b \in X$ に対して，$C(a) = C(b)$ または $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ が成り立つ．また，集合 X は互いに交わらないような部分集合 $C(a)$ の和集合として表せる．すなわち，X の部分集合 A が存在して，

$$X = \bigcup_{a \in A} C(a), \qquad C(a) \cap C(b) = \emptyset \quad (\forall a, b \in A,\ a \neq b).$$

[証明] $a, b \in X$ とする．$C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ とすれば，$c \in C(a) \cap C(b)$ がとれる．そのとき，$c \sim a$, $c \sim b$ である．$a \sim c$, $c \sim b$ より，$a \sim b$ である．$x \in C(a)$ ならば，$x \sim a$, $a \sim b$ であるから，$x \sim b$, $x \in C(b)$ である．よって，$C(a) \subset C(b)$ である．同様に，$x \in C(b)$ ならば，$x \sim b$, $b \sim a$ であるから，$x \sim a$, $x \in C(a)$ である．よって，$C(b) \subset C(a)$ である．ゆえに，$C(a) = C(b)$ である．したがって，$C(a) = C(b)$ または $C(a) \cap C(b) = \emptyset$ が成り立つ．$a \in C(a) \subset X$ であるから，

$$X = \bigcup_{a \in X} C(a)$$

である．$\Lambda = X/\!\sim$ とする．<u>各 $\lambda \in \Lambda$ から 1 つの元 a_λ を選び，</u>$A = \{a_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ とおけば，

$$X = \bigcup_{a \in A} C(a)$$

であり，$a, b \in A$, $a \neq b$ ならば，$C(a) \neq C(b)$ であるから，$C(a) \cap C(b) = \emptyset$ である． $\square$

例 1.28. 例 1.25 における $\mathbb{Z}$ 上の同値関係 $\sim$ を考える．任意の $x \in \mathbb{Z}$ は，$x = 3q + r$, $q, r \in \mathbb{Z}$, $r = 0, 1, 2$, とかける．よって，$x - r = 3q$, $x \sim r$ である．このとき，$x \in C(r)$ であり，$C(x) = C(r)$ である．したがって，同値類は $C(0), C(1), C(2)$ のいずれかである．$0, 1, 2$ のどの 2 つも同値でないから，$C(0), C(1), C(2)$ は相異なる同値類であり，

$$\mathbb{Z} = C(0) \cup C(1) \cup C(2), \quad C(a) \cap C(b) = \emptyset \ \ (a, b \in \{0, 1, 2\},\ a \neq b).$$

一般に，$m > 1$ を自然数として，$x, y \in \mathbb{Z}$ に対して，$x - y$ が m で割り切れるとき，$x \sim y$ であると定義すれば，

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{a=0}^{m-1} C(a), \qquad C(a) \cap C(b) = \emptyset \ \ (a, b \in \{0, 1, \ldots, m-1\},\ a \neq b).$$

通常は，$x - y$ が m で割り切れるとき，$x \equiv y \pmod{m}$ と表す．

例 1.29. 例 1.26 における $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係 $\sim$ を考える．そのとき，$(a, b), (c, d) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ に対して，(a, b) を含む同値類 $C(a, b)$ と (c, d) を含む同値類 $C(c, b)$ について，

$$C(a, b) = C(c, d) \iff (a, b) \sim (c, d) \iff ad - bc = 0 \iff \frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

したがって，

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{N})/\!\sim \longrightarrow \mathbb{Q}, \quad C(a, b) \longmapsto \frac{a}{b}$$

は全単射である．

2　ユークリッド空間の位相

自然数 n に対して，$\mathbb{R}^n$ に § 2.2 で定義する通常の距離を入れたものを n 次元**ユークリッド空間**という．以下，ユークリッド空間上の連続関数やユークリッド空間からユークリッド空間への連続写像について基本的なことを解説する．

2.1　実数の連続性

定義 2.1. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．A が**上に有界**であるとは，ある実数 M が存在して，すべての $x \in A$ に対して，$x \leq M$ が成り立つことである．このような M を 1 つの A の**上界**という．A が**下に有界**であるとは，ある実数 m が存在して，すべての $x \in A$ に対して，$x \geq m$ が成り立つことである．このような m を 1 つの A の**下界**という．A が上にも下にも有界であるとき，単に**有界**であるという．

例 2.2. $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ は下に有界であるが，上に有界ではない．開区間

$$I = (0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

は有界である．$0 \notin I, 1 \notin I$ であるから，I には最大元も最小元もない．しかし，I の上界のなす集合は

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$$

であるから，これは最小元 1 を持つ．同様に，I の下界のなす集合は

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

であるから，これは最大元 0 を持つ．

定義 2.3. A を $\mathbb{R}$ の部分集合とする．A の上界の中の最小元を A の**上限**といい，$\sup A$ で表す．同様に，A の下界の中の最大元を A の**下限**といい，$\inf A$ で表す．A が上に有界でないときは，$\sup A = \infty$ とする．同様に，A が下に有界でないときは，$\inf A = -\infty$ とする．

例 2.4. 開区間 $I = (0, 1)$ に対して，$\sup I = 1$, $\inf I = 0$ である．また，$A = \left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$ とすれば，$\sup A = 1$, $\inf A = 0$ である．

例 2.5. $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ に対して，$\sup A = \sqrt{2}$, $\inf A = -\sqrt{2}$ である．また，$B = \left\{\frac{\sqrt{2}}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とすれば，$\sup B = \sqrt{2}$, $\inf B = 0$ である．

実数の連続性　上に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には上限が存在する．下に有界な $\mathbb{R}$ の部分集合には下限が存在する．

実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が実数 α に**収束する**とは，n が大きくなるにつれて a_n が α に近づくことをいう．もう少し正確にいえば，どんな小さな数 $\varepsilon > 0$ をとっても，それに応じて自然数 n_0 を十分大きくとれば，$n \geq n_0$ なるすべての自然数 n に対して，$|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つことをいう．

命題 2.6. 実数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界で単調増加 (下に有界で単調減少) ならば，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する．

[証明]

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$$

とする．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が上に有界で単調増加とする．$M \in \mathbb{R}$ が存在して，$a_n \leq M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ であるから，A は上に有界である．実数の連続性によって，$\alpha = \sup A$ が存在する．α は A の 1 つの上界であるから，$a_n \leq \alpha$ $(\forall n = 1, 2, \ldots)$ である．一方，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\alpha - \varepsilon$ は α より小さいから，A の上界ではない．したがって，ある自然数 n_0 が存在して，$a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ である．$\{a_n\}$ は単調増加であるから，任意の $n \geq n_0$ に対して，$a_n \geq a_{n_0} > \alpha - \varepsilon$ である．したがって，

$$|a_n - \alpha| = \alpha - a_n < \varepsilon \quad (\forall n \geq n_0)$$

が成り立つ．これは，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を示している．$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が下に有界で単調減少である場合は，$\alpha = \inf A$ とおけば，$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ であることが同様に示される． $\square$

2.2 $\mathbb{R}^n$ における距離

$\mathbb{R}^n$ の点 $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (x_1, \ldots, x_n)$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して，

$$\begin{aligned} x + y &= (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n), \\ cx &= (cx_1, \ldots, cx_n) \end{aligned}$$

とする．$x - y = x + (-1)y$ である．さらに，

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \sum_{j=1}^{n} x_j y_j = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \\ \|x\| &= \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \end{aligned}$$

とおく．$x, y, z \in \mathbb{R}^n$, $c \in \mathbb{R}$ とすれば，

$$\begin{aligned} x \cdot y &= y \cdot x, \\ (cx) \cdot y &= x \cdot (cy) = c(x \cdot y), \\ (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z, \quad x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \end{aligned}$$

が成り立つ．

命題 2.7 (コーシー・シュワルツの不等式)**.** $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$$

が成り立つ．$x \neq (0, \ldots, 0)$ とすれば，

$$\text{等号が成り立つ} \iff y = cx \text{ となる } c \in \mathbb{R} \text{ が存在する}.$$

[証明]　$x = (0, \ldots, 0)$ ならば，不等式の両辺とも 0 であるから，等号が成り立つ．$x \neq (0, \ldots, 0)$ とする．$\|x\| > 0$ である．$t \in \mathbb{R}$ に対して，

$$f(t) = \|tx - y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (tx_j - y_j)^2$$

とおけば，すべての実数 t に対して，$f(t) \geq 0$ である．ここで，

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2(x \cdot x) - 2t(x \cdot y) + y \cdot y = \|x\|^2 t^2 - 2(x \cdot y)t + \|y\|^2 \\ &= \|x\|^2 \left(t - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2} \right)^2 + \frac{\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2}{\|x\|^2} \end{aligned}$$

である．よって，すべての実数 t に対して，$f(t) \geq 0$ となることから，

$$\|x\|^2\|y\|^2 - (x \cdot y)^2 \geq 0, \quad (x \cdot y)^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.$$

よって，$|x \cdot y| \leq \|x\|\|y\|$ である．等号が成り立つとすれば，

$$f(t) = \|x\|^2 \left(t - \frac{x \cdot y}{\|x\|^2} \right)^2$$

であるから，$c = \dfrac{x \cdot y}{\|x\|^2}$ とおけば，$f(c) = 0$ である．これは，$\|cx - y\|^2 = 0$, $y = cx$ を意味する．逆に，ある実数 c に対して，$y = cx$ ならば，$x \cdot y = c(x \cdot x) = c\|x\|^2$, $|x \cdot y| = |c|\|x\|^2 = \|x\|\|y\|$ である．　□

定義 2.8. x と y の**距離** $d(x, y)$ を

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

によって定義する．このとき，

$$d(x, y)^2 = (x - y) \cdot (x - y)$$

である．明らかに，$d(x, y) = d(y, x)$ であり，$d(x, y) = 0 \iff x = y$ である．

命題 2.9 (三角不等式). $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

が成り立つ．$x, y, z \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$$

が成り立つ．

[証明]　命題 2.7 より，

$$\begin{aligned}(\|x\|+\|y\|)^2 &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2, \\ \|x+y\|^2 &= (x+y)\cdot(x+y) = x\cdot x + 2(x\cdot y) + y\cdot y \\ &= \|x\|^2 + 2(x\cdot y) + \|y\|^2, \\ (\|x\|+\|y\|)^2 - \|x+y\|^2 &= 2(\|x\|\|y\| - x\cdot y) \ge 0.\end{aligned}$$

ゆえに，$\|x\|+\|y\| \ge \|x+y\|$ である．したがって，

$$d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \le \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z).$$

$\square$

2.3　$\mathbb{R}^n$ における開集合と閉集合

$a \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 $r > 0$ の**開球**を

$$U_r(a) = U_r^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x,a) < r\}$$

によって定義する ($U_r^n(a)$ は $\mathbb{R}^n$ における開球であることを明示する必要があるとき用いる).

定義 2.10. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**開集合**であるとは，任意の $a \in A$ に対して，十分小さな $r > 0$ をとれば，$U_r(a) \subset A$ であるという性質を持つことをいう．空集合 $\emptyset$ および $\mathbb{R}^n$ は開集合である．A の $\mathbb{R}^n$ における補集合 $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A$ が開集合であるとき，A は**閉集合**であるという．よって，空集合 $\emptyset$ および $\mathbb{R}^n$ は閉集合である．

命題 2.11 (開集合の基本性質).　(1) $\mathbb{R}^n$ の有限個の開集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ に対して，$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k$ は開集合である．

(2) $\mathbb{R}^n$ の (有限個または無限個の) 開集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は開集合である．

[証明]　(1) $a \in A_1 \cap \cdots \cap A_k$ とする．$a \in A_j$ $(j = 1, \ldots, k)$ である．各 A_j は開集合であるから，$r_j > 0$ を十分小さくとれば，$U_{r_j}(a) \subset A_j$ である．$r = \min(r_1, \ldots, r_k)$ とおけば，$r > 0$ であり，$U_r(a) \subset U_{r_j}(a) \subset A_j$ である．よって，これらの共通部分をとれば，$U_r(a) \subset A_1 \cap \cdots \cap A_k$ である．ゆえに，$A_1 \cap \cdots \cap A_k$ は開集合である．

(2) $a \in \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ とすると，ある $\lambda \in \Lambda$ について，$a \in A_\lambda$ である．A_λ は開集合であるから，$r > 0$ を十分小さくとれば，$U_r(a) \subset A_\lambda$ である．よって，$U_r(a) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ である．ゆえに，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は開集合である．□

命題 2.12 (閉集合の基本性質)．　(1) $\mathbb{R}^n$ の有限個の閉集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k$ に対して，$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k$ は閉集合である．

(2) $\mathbb{R}^n$ の (有限個または無限個の) 閉集合の族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は閉集合である．

[証明]　(1) $j = 1, \ldots, k$ に対して，$B_j = A_j^c$ とおけば，B_j は開集合である．命題 1.5 より

$$(A_1 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap \cdots \cap A_k^c = B_1 \cap \cdots \cap B_k$$

であり，命題 2.11 の (1) より，$B_1 \cap \cdots \cap B_k$ は開集合である．したがって，$A_1 \cup \cdots \cup A_k$ は閉集合である．

(2) 各 $\lambda \in \lambda$ に対して，$B_\lambda = A_\lambda^c$ とおく．B_λ は開集合である．命題 1.5 より

$$\Big(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\Big)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$$

であり，命題 2.11 の (2) より，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} B_\lambda$ は開集合である．したがって，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は閉集合である．□

系 2.13. A を $\mathbb{R}^n$ の有限部分集合とすれば，A は閉集合である．

[証明]　$\mathbb{R}^n$ の 1 点からなる集合 $\{a\}$ の補集合 $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ は明らかに開集合である．よって，$\{a\}$ は閉集合である．

$$A = \{a_1, \ldots, a_k\} = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_k\}$$

とすれば，命題 2.12 の (1) より，A は閉集合である．□

例 2.14.

$$\begin{aligned}
A &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 < x_j < 1 \ (j = 1, \ldots, n)\}, \\
B &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le x_j \le 1 \ (j = 1, \ldots, n)\}, \\
C &= \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,|\, 0 \le x_j < 1 \ (j = 1, \ldots, n)\}
\end{aligned}$$

とおけば，A は開集合であり，B は閉集合である．C は開集合でも閉集合でもない．

まず，A が開集合であることを示そう．$a = (a_1, \ldots, a_n) \in A$ とする．

$$r_0 = \min\{a_1, \ldots, a_n\}, \quad r_1 = \min\{1 - a_1, \ldots, 1 - a_n\}$$

とおけば，$0 < a_j < 1$ $(j = 1, \ldots, n)$ であるから，$r_0 > 0$, $r_1 > 0$ である．よって，$r = \min(r_0, r_1)$ とおけば，$r > 0$, $r \leq r_1$, $r \leq r_2$ である．このとき，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_r(a)$ とすれば，$d(x, a) < r$ である．各 $j = 1, \ldots, n$ について，

$$|x_j - a_j| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = d(x, a) < r.$$

よって，$-r < x_j - a_j < r$, $a_j - r < x_j < a_j + r$ である．$r \leq r_0 \leq a_j$ と $r \leq r_1 \leq 1 - a_j$ から，$r \leq a_j$, $a_j + r \leq 1$ である．したがって，

$$0 \leq a_j - r < x_j < a_j + r \leq 1, \qquad 0 < x_j < 1.$$

ゆえに，$x \in A$ $(\forall x \in U_r(a))$，したがって，$U_r(a) \subset A$ である．これは A が開集合であることを示している．

次に B が閉集合であることを示そう．

$$B^c = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \text{ある } j \text{ について，} x_j < 0 \text{ または } x_j > 1\}$$

である．そこで，各 $1 \leq j \leq n$ に対して，

$$C_j = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j < 0\},$$
$$D_j = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j > 1\}$$

とおけば，

$$B^c = \bigcup_{j=1}^{n} C_j \cup \bigcup_{j=1}^{n} D_j$$

である．C_j, D_j が開集合であることを示せば，命題 2.11 より，それらの和集合 B^c も開集合であり，したがって，B は閉集合である．$a = (a_1, \ldots, a_n) \in C_j$ とする．$a_j < 0$ である．r を $0 < r < |a_j|$ にとれば，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_r(a)$ は

$$|x_j - a_j| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = d(x, a) < r$$

を満たすから，$-r < x_j - a_j < r$ であり，$x_j < a_j + r = r - |a_j| < 0$ である．よって，$x \in C_j$, $U_r(a) \subset C_j$ である．ゆえに，C_j は開集合である．$a = (a_1, \ldots, a_n) \in D_j$ とする．$a_j > 1$ である．r を $0 < r < a_j - 1$ にとれば，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in U_r(a)$ は

$$|x_j - a_j| \leq \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} = d(x, a) < r$$

を満たすから，$-r < x_j - a_j < r$ であり，$x_j > a_j - r > 1$ である．よって，$x \in D_j$, $U_r(a) \subset D_j$ である．ゆえに，D_j は開集合である．

最後に，C が開集合でも閉集合でもないことを示そう．$a = (0, 0, \ldots, 0) \in C$ である．任意の $r > 0$ に対して，$x_1 = \cdots = x_n = -r/n$ とすれば，$x = (x_1, \ldots, x_n)$ は

$$d(x, a) = \sqrt{n(r/n)^2} = \frac{r}{\sqrt{n}} < r, \quad x \in U_r(a)$$

であるが，$x \notin C$ である．よって，$U_r(a) \not\subset C$ である．これは C が開集合でないことを示している．$b = (1, 1, \ldots, 1) \in C^c$ である．任意の $r > 0$ に対して，$m > 1$ を $m > r/n$ にとって，$x_1 = \cdots = x_n = 1 - r/(mn)$ とすれば，$0 < x_j < 1$ であるから，$x = (x_1, \ldots, x_n) \in C$ であり，

$$d(x, b) = \sqrt{n\left(\frac{r}{mn}\right)^2} = \frac{r}{m\sqrt{n}} < r, \quad x \in U_r(b)$$

である．$x \notin C^c$ である．よって，$U_r(b) \not\subset C^c$ である．これは C^c が開集合でないこと，すなわち，C が閉集合ではないことを示している．

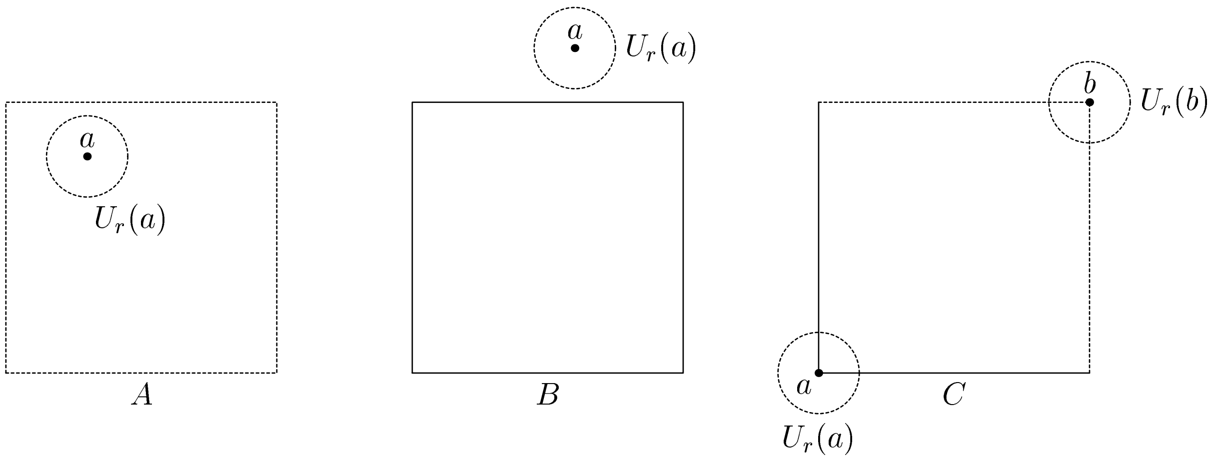

図 5: $\mathbb{R}^2$ の開集合と閉集合

例 2.15. $b \in \mathbb{R}^n$ を中心とする半径 R の開球 $U_R(b)$ は開集合である．実際，$a \in U_R(b)$ とすると，$d(a, b) < R$ である．r を $0 < r < R - d(a, b)$ にとれば，$x \in U_r(a)$ は $d(x, a) < r$ を満たすから，三角不等式より，

$$d(x, b) \leq d(x, a) + d(a, b) < r + d(a, b) < R.$$

よって，$x \in U_R(b)$, $U_r(a) \subset U_R(b)$ である．ゆえに，$U_R(b)$ は開集合である．また，開球 $U_R(b)$ の外部を $V = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, b) > R\}$ とすると，V も開集合である．実際，$c \in V$ とすると，$d(c, b) > R$ である．r を $0 < r < d(c, b) - R$ にとれば，$x \in U_r(c)$ は $d(x, c) < r$ を満たすから，三角不等式より，

$$d(c, b) \leq d(c, x) + d(x, b) < r + d(x, b), \quad d(x, b) > d(c, b) - r > R.$$

よって，$x \in V$, $U_r(c) \subset V$ である．ゆえに，V は開集合である．

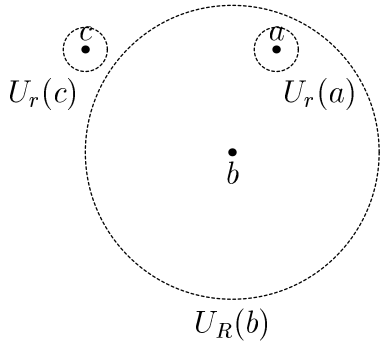

図 6: $\mathbb{R}^2$ の開円板

2.4　内部と閉包

定義 2.16. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$a \in \mathbb{R}^n$ が A の**内点**であるとは，ある $r > 0$ に対して，$U_r(a) \subset A$ となることである．A の内点全体の集合を A の**内部**といい，A^i で表す．$a \in U_r(a)$ であるから，$A^i \subset A$ である．A が開集合であることは $A^i = A$ であることと同じである．

命題 2.17. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とすれば，A^i は開集合である．また，A^i は A に含まれる最大の開集合である．

[証明]　A^i は開集合である．実際，$a \in A^i$ とすれば，ある $r > 0$ について，$U_r(a) \subset A$ である．このとき，$b \in U_r(a)$ とすると，$d(b,a) < r$ であるから，r' を $0 < r' < r - d(b,a)$ にとれば，$x \in U_{r'}(b)$ は，$d(x,b) < r' < r - d(b,a)$ を満たし，したがって，

$$d(x,a) \leq d(x,b) + d(b,a) < r, \quad x \in U_r(a) \subset A$$

であり，$U_{r'}(b) \subset A$ である．よって，b は A の内点であり，$b \in A^i$ である．これが任意の $b \in U_r(a)$ について成り立つから，$U_r(a) \subset A^i$ $(\forall a \in A^i)$ である．ゆえに，A^i は開集合である．

V を A に含まれる開集合とする．$a \in V$ とすれば，ある $r > 0$ に対して，$U_r(a) \subset V \subset A$ である．よって，a は A の内点である．任意の $a \in V$ に対して，$a \in A^i$ であるから，$V \subset A^i$ である．ゆえに，A^i は A に含まれる開集合の中で最大のものである．　□

定義 2.18. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$a \in \mathbb{R}^n$ が A の**触点**であるとは，任意の $r > 0$ に対して，$U_r(a) \cap A \neq \emptyset$ となることである．A の触点全体の集合を A の**閉包**といい，$\bar{A}$ で表す．$a \in A$ は A の触点であるから，$A \subset \bar{A}$ である．

命題 2.19. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とすれば，$\bar{A}$ は閉集合であり，$\bar{A} = ((A^c)^i)^c$ である．また，$\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である．

[証明]　$B=(\bar{A})^c$ とおく．$a\in B$ とすると，a は A の触点ではないから，ある $r>0$ に対して，$U_r(a)\cap A=\emptyset$ である．よって，$U_r(a)\subset A^c$ であり，これは a が A^c の内点であることを意味する．よって，$B\subset (A^c)^i$ である．逆に，$a\in (A^c)^i$ ならば，ある $r>0$ に対して，$U_r(a)\subset A^c$ であり，$U_r(a)\cap A=\emptyset$ である．よって，a は A の触点ではない．すなわち，$a\notin \bar{A}$, $a\in(\bar{A})^c=B$ である ($\forall a\in (A^c)^i$)．ゆえに，$(A^c)^i\subset B$ である．したがって，$B=(A^c)^i$ であり，命題 2.17 より，これは開集合である．ゆえに，$\bar{A}$ は閉集合である．また，$\bar{A}=B^c=((A^c)^i)^c$ である．

F を A を含む閉集合とする．$A\subset F$ より，$A^c\supset F^c$ であり，F^c は A^c に含まれる開集合である．命題 2.17 より，$(A^c)^i$ は A^c に含まれる最大の開集合であるから，$F^c\subset (A^c)^i$ である．ゆえに，$F=(F^c)^c\supset ((A^c)^i)^c=\bar{A}$ である．よって，$\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合である．　□

系 2.20. A が閉集合であることと $\bar{A}=A$ は同値である．

[証明]

$$A \text{が閉集合} \iff A^c \text{が開集合} \iff A^c=(A^c)^i \iff A=((A^c)^i)^c \iff A=\bar{A}.$$

□

定義 2.21. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対して，$\partial A=\bar{A}\setminus A^i$ を A の**境界**という．

例 2.22. $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$A=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0<x_1<1,\ 0<x_2<1\}$$

に対して，A は開集合であり，A の内部は $A^i=A$ である．

$$C_1=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x_1<0\},\quad C_2=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x_2<0\},$$
$$D_1=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x_1>1\},\quad D_2=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x_2>1\}$$

とおけば，図 5 より，$a\in C_1\cup C_2\cup D_1\cup D_2$ は A の触点ではない．よって，

$$C_1\cup C_2\cup D_1\cup D_2\subset \bar{A}^c$$

である．この補集合をとれば，

$$(C_1\cup C_2\cup D_1\cup D_2)^c\supset \bar{A}.$$

この左辺は

$$C_1^c\cap C_2^c\cap D_1^c\cap D_2^c=\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1\}$$

に等しい．一方，$a=(a_1,a_2)$ が $0\le a_1\le 1$, $0\le a_2\le 1$ を満たせば，明らかに a は A の触点である．よって，$\bar{A}$ に含まれる．すなわち，

$$\{x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 \,|\, 0\le x_1\le 1,\ 0\le x_2\le 1\}\subset \bar{A}.$$

ゆえに，
$$\bar{A} = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_1 \le 1,\ 0 \le x_2 \le 1\}.$$
したがって，A の境界は
$$\begin{aligned}
\partial A = \bar{A} \setminus A^i &= B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4, \\
B_1 &= \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}, \\
B_2 &= \{(1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}, \\
B_3 &= \{(x_1, 1) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_1 \le 1\}, \\
B_4 &= \{(0, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, 0 \le x_2 \le 1\}.
\end{aligned}$$

例 2.23. $\mathbb{R}^n$ の部分集合として $A = \mathbb{Q}^n$ を考えると，$\bar{A} = \mathbb{R}^n$ である．実際，任意の $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ をとると，任意の $r > 0$ に対して，$|b_j - a_j| < r/\sqrt{n}$ を満たす $b_j \in \mathbb{Q}$ が存在する $(1 \le j \le n)$．そのとき，$b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{Q}^n = A$ であり，
$$d(b, a) = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2} < \sqrt{n(r/\sqrt{n})^2} = r$$
よって，$b \in U_r(a) \cap A$, $U_r(a) \cap A \ne \emptyset$ である．したがって，$a \in \bar{A}$ $(\forall a \in \mathbb{R}^n)$ であり，$\mathbb{R}^n \subset \bar{A}$ である．$\bar{A} \subset \mathbb{R}^n$ は明らかであるから，$\bar{A} = \mathbb{R}^n$ である．$B = \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ とすると，$\bar{B} = B$，すなわち，B は閉集合である．$b = (b_1 \ldots, b_n) \in B^c$ とすると，ある i について $b_i \notin \mathbb{Z}$ である．$m \in \mathbb{Z}$ で $m < b_i < m + 1$ を満たすものをとる．$r > 0$ を $r < \min\{b_i - m, m + 1 - b_i\}$ にとる．$x \in U_r(b)$ とすれば，
$$|x_i - b_i| \le d(x, b) < r < \min\{b_i - m, m + 1 - b_i\}$$
より，$x_i \notin \mathbb{Z}$，したがって，$x \notin \mathbb{Z}^n = B, x \in B^c, U_r(b) \subset B^c$ である．これは B^c が開集合であることを示している．よって，B は閉集合であり，$B = \bar{B}$ である．あるいは，$U_r(b) \cap B = \emptyset$ であることから，b は B の触点ではない．$B^c \subset \bar{B}^c, B \supset \bar{B}$ である．$B \subset \bar{B}$ だから，$B = \bar{B}$ である．

2.5 連続写像

関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$
を満たすとき，$f(x)$ は $x = a$ で**連続**であるという．言葉でいえば，“x を a に近づけるとき，$f(x)$ は $f(a)$ に近づく” ことである．これをもう少し正確に表現すれば，次のようになる．

> どんな小さな $\varepsilon > 0$ に対しても，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$|x - a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．

あるいは

> 任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ が成り立つ．

といっても同じことである．

2 つの関数 $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ がともに $x = a$ で連続であるとき，和 $f + g$ も $x = a$ で連続であることは次のようにわかる．任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta_1 > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta_1$ を満たす任意の x に対して，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$ が成り立つ．同様に，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta_2$ を満たす任意の x に対して，$|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ が成り立つ．$\delta > 0$ を $\delta < \delta_1, \delta < \delta_2$ にとれば，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned}|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)| &= |f(x) - f(a) + g(x) - g(a)| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

よって，$f + g$ は $x = a$ で連続である．

積 fg も $x = a$ で連続である．これは次のようにわかる．任意の $1 > \varepsilon > 0$ に対して，

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{1 + |f(a)| + |g(a)|}$$

とおく．$0 < \varepsilon_1 < \varepsilon < 1$ である．ある $\delta_1 > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta_1$ を満たす任意の x に対して，

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon_1$$

が成り立つ．同様に，ある $\delta_2 > 0$ が存在して，$|x-a| < \delta_2$ を満たす任意の x に対して，

$$|g(x) - g(a)| < \varepsilon_1$$

が成り立つ．$\delta > 0$ を $\delta < \delta_1, \delta < \delta_2$ にとれば，$|x-a| < \delta$ を満たす任意の x に対して，

$$\begin{aligned}|f(x)| &= |f(x) - f(a) + f(a)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a)| \\ &\leq \varepsilon_1 + |f(a)| < 1 + |f(a)|, \\ |f(x)g(x) - f(a)g(a)| &= |f(x)(g(x) - g(a)) + g(a)(f(x) - f(a))| \\ &\leq |f(x)||g(x) - g(a)| + |g(a)||f(x) - f(a)| \\ &\leq (|f(x)| + |g(a)|)\varepsilon_1 \\ &< (1 + |f(a)| + |g(a)|)\varepsilon_1 = \varepsilon.\end{aligned}$$

よって，fg は $x = a$ で連続である．

$f(x) = x$ とすれば，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，$f(x)$ は $x = a$ で明らかに連続である．($\varepsilon > 0$ に対して，$\delta = \varepsilon$ にとればよい)．したがって，x^2 も連続である．帰納

的に，x^n も連続である．x^2+x+1 なども連続であり，$f(x)$ が x の実数係数の多項式ならば，$f(x)$ は $x=a$ で連続であることがわかる．

不連続な関数の例.

(1) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbb{Q},\\ 0, & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

によって定義する．$a\in\mathbb{Q}$ ならば，$a+1/n\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ であり，$f(a+1/n\sqrt{2})=0$ $(n=1,2,\dots)$, $f(a)=1$ である．よって，$x=a$ で f は連続ではない．$a\notin\mathbb{Q}$ ならば，各自然数 n に対して，$|a-a_n|<1/n$ となる $a_n\in\mathbb{Q}$ がとれる．このとき，$f(a_n)=1$ であるが，$f(a)=0$ であるから，$x=a$ で f は連続ではない．

(2) 実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[x]$ で表す．このとき，

$$f(x)=[x],\qquad g(x)=x-[x]$$

によって関数 $f(x),g(x)$ を定義する．$a\in\mathbb{R}$, $a\notin\mathbb{Z}$ ならば，$f(x)$, $g(x)$ は $x=a$ において連続であるが，$a\in\mathbb{Z}$ ならば，$f(x)$, $g(x)$ は $x=a$ において連続でない (**不連続である**).

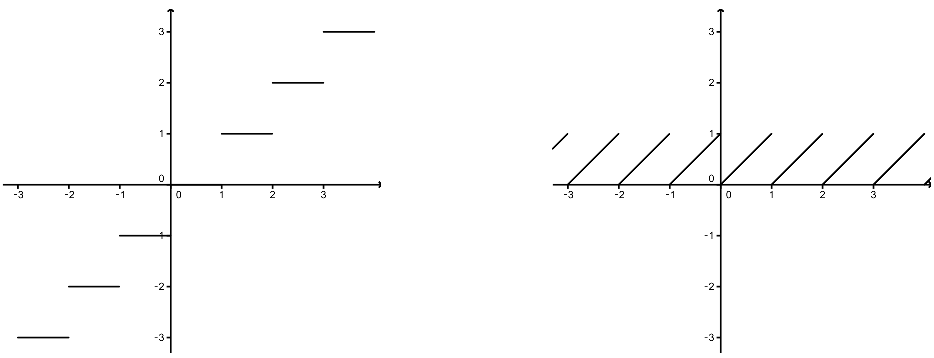

図 7: 不連続関数の例

定理 2.24 (中間値の定理)．$f(x)$ を区間 $[a,b]$ で連続であり，$f(a)\neq f(b)$ とする．そのとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の実数 α に対して，実数 c で $a<c<b$ かつ $f(c)=\alpha$ となるものが存在する．

[証明]　$f(a)<f(b)$ としてよい.．$f(a)<\alpha<f(b)$ に対して，

$$A=\{x\in[a,b]\,|\,f(x)\leq\alpha\}$$

とおく．$f(a)<\alpha<f(b)$ だから $a\in A$ かつ $b\notin A$ である．b は A の上界だから A は上に有界である．実数の連続性より $c=\sup A$ が存在する．$a\in A$ だから $a\leq c$ である．また，b は A の上界だから $c\leq b$ である．$f(x)$ は連続で $f(a)<\alpha$ だから，a' が a より少しだけ大きければ，$f(a')<\alpha$ となって，$a'\in A$ となる．よって，$a'\leq c$

であり，とくに $a < c$ がわかる．$f(c) = \alpha$ を示す．もし，$f(c) < \alpha$ だとすれば，$c \in A, c < b$ である．c' を c より少しだけ大きくとっても，$f(c') < \alpha$ が成り立って，$c' \in A$ となるが，これは c が A の上界だということに矛盾する．もし，$f(c) > \alpha$ だとすれば，$a < c$ だから c' を c より少しだけ小さくとると，$c' \leq x \leq c$ を満たす x に対して，$f(x) > \alpha$ が成り立つ．このとき，$a' \in A$ とすれば，$a' \notin [c', c]$ がわかる．$a' \leq c$ だから $a' < c'$ になる．これがすべての $a' \in A$ について成り立つから，c' は A の上界である．これは c が A の最小の上界だということに矛盾する．以上により，$f(c) = \alpha$ が示された．$a < c$ は最初に示した．$f(c) = \alpha < f(b)$ から $c < b$ もわかる． □

定義 2.25. D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を D 上で定義された実数値をとる関数とする．f が**点** $a \in D$ **において連続**であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (\forall x \in U^n_\delta(a) \cap D)$$

(a との $\mathbb{R}^n$ における距離が δ 未満の任意の D の点 x に対して，$f(a)$ と $f(x)$ の $\mathbb{R}$ における距離は ε 未満) を満たすことである．f がすべての $a \in D$ において連続であるとき，f は D **上で連続**であるという．

X, Y を集合とし，$f : X \longrightarrow Y$ を写像とする．Y の部分集合 A に対して，A の f による**逆像**を

$$f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$$

によって定義する．ここでは，f^{-1} は f の逆写像ではないことに注意する．

命題 2.26. D を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ を D 上で定義された実数値関数とする．そのとき，次の 2 条件は同値である．

(1) f は D 上で連続である．

(2) $\mathbb{R}$ の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

[証明] (1) $\Rightarrow$ (2). $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ は連続とする．U を $\mathbb{R}$ の開集合とする．$f^{-1}(U) = \emptyset$ ならば，$f^{-1}(U)$ は開集合であるから，何も示すことはない．よって，$f^{-1}(U) \neq \emptyset$ とする．$a \in f^{-1}(U) = \{x \in D \mid f(x) \in U\}$ をとる．$f(a) \in U$ であり，U は開集合であるから，$\varepsilon > 0$ を $U^1_\varepsilon(f(a)) \subset U$ にとれる．f は a で連続であるから，この $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $x \in U^n_\delta(a) \cap D$ に対して，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ である．ここで，

$$U^1_\varepsilon(f(a)) = \{y \in \mathbb{R} \mid |y - f(a)| < \varepsilon\},$$
$$U^n_\delta(a) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) < \varepsilon\}$$

である．したがって，$f(x) \in U_\varepsilon^1(f(a)) \subset U$, $x \in f^{-1}(U)$ $(\forall x \in U_\delta^n(a) \cap D)$, $U_\delta^n(a) \cap D \subset f^{-1}(U)$ である．$a \in D$ であり，D は開集合であるから，$0 < r < \delta$ を十分小さくとれば，$U_r(a) \subset D$ にできる．$U_r(a) \subset U_\delta(a)$ より，

$$U_r(a) \subset U_\delta(a) \cap D \subset f^{-1}(D)$$

である．これが任意の $a \in f^{-1}(U)$ について成り立つから，$f^{-1}(U)$ は開集合である．

(2) $\Rightarrow$ (1). $\mathbb{R}$ の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとする．$a \in D$ とし，a において f は連続であることを示そう．任意の $\varepsilon > 0$ をとる．$U = U_\varepsilon^1(f(a))$ とおけば，U は $\mathbb{R}$ の開集合であるから，仮定より，$f^{-1}(U)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$a \in f^{-1}(U)$ であるから，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，$U_\delta^n(a) \subset f^{-1}(U)$ にできる．これは，任意の $x \in U_\delta^n(a) \cap D$ が $f(x) \in U$，すなわち，$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ を満たすことを意味する．よって，f は a において連続である．a は任意の D の点だから，f は D 上で連続である． □

定義 2.27. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D から $\mathbb{R}^m$ への写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が点 $a \in D$ において連続であるとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，

$$f(x) \in U_\varepsilon^m(f(a)) \quad (\forall x \in U_\delta^n(a) \cap D)$$

($d(x, a) < \delta$ である任意の $x \in D$ に対して，$d(f(x), f(a)) < \varepsilon$) を満たすことである．$f$ がすべての $a \in D$ において連続であるとき，f は D **上で連続**であるという．

命題 2.28. D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を写像とする．そのとき，次の 3 条件は同値である．

(1) f は D 上で連続である．

(2) $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x))$ と表すとき，各関数 $f_j : D \longrightarrow \mathbb{R}$ $(j = 1, \ldots, m)$ は D 上で連続である．

(3) $\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U) = V \cap D$, V は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．

[証明] (1) $\Rightarrow$ (3). $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ は連続とする．U を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．$f^{-1}(U) \neq \emptyset$ としてよい．$a \in f^{-1}(U) = \{x \in D \,|\, f(x) \in U\}$ をとる．$f(a) \in U$ であり，U は開集合であるから，$\varepsilon > 0$ を $U_\varepsilon^m(f(a)) \subset U$ にとれる．f は a で連続であるから，この $\varepsilon > 0$ に対して，$\delta > 0$ を十分小さくとれば，任意の $x \in U_\delta^n(a) \cap D$ に対して，$f(x) \in U_\varepsilon^m(f(a)) \subset U$ である．したがって，$x \in f^{-1}(U)$ $(\forall x \in U_\delta^n(a) \cap D)$, $U_\delta^n(a) \cap D \subset f^{-1}(U)$ である．よって，$V_a = U_\delta^n(a)$ とおけば，$V_a \cap D \subset f^{-1}(U)$ である．そこで，$V = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} V_a$ とおけば，V_a は $\mathbb{R}^n$ の開集合であり，それらの和集合 V も $\mathbb{R}^n$ の開集合である．さらに，$a \in V_a$ より，

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} \{a\} \subset \bigcup_{a \in f^{-1}(U)} (V_a \cap D) \subset f^{-1}(U),$$

よって，
$$f^{-1}(U)=\bigcup_{a\in f^{-1}(U)}(V_a\cap D)=D\cap\bigcup_{a\in f^{-1}(U)}V_a=D\cap V.$$

(3) $\Rightarrow$ (1). $\mathbb{R}^m$ の任意の開集合 U に対して，$f^{-1}(U)=V\cap D$, V は $\mathbb{R}^n$ の開集合であるとする．$a\in D$ とし，a において f は連続であることを示そう．任意の $\varepsilon>0$ をとる．$U=U^m_\varepsilon(f(a))$ とおけば，U は $\mathbb{R}^m$ の開集合であるから，仮定より，$f^{-1}(U)=V\cap D$, V は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．$a\in f^{-1}(U)=V\cap D\subset V$ であるから，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$U^n_\delta(a)\subset V$ にできる．よって，任意の $x\in U^n_\delta(a)\cap D$ に対して，$U^n_\delta(a)\cap D\subset V\cap D=f^{-1}(U)$ であるから，$f(x)\in U=U^m_\varepsilon(f(a))$ である．すなわち，f は a において連続である．a は任意の D の点だから，f は D 上で連続である．

(1) $\Rightarrow$ (2). $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^m$ は連続とする．$a\in D$ とする．任意の $\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$f(x)\in U^m_\varepsilon(f(a))$ $(\forall x\in U^n_\delta(a)\cap D)$ である．このとき，各 $j=1,\dots,m$ について，
$$|f_j(x)-f_j(a)|\leq\sqrt{(f_1(x)-f_1(a))^2+\cdots+(f_m(x)-f_m(a))^2}=d(f(x),f(a))<\varepsilon$$
が任意の $x\in U^n_\delta(a)\cap D$ に対して成り立つ．よって，各 f_j は連続である．

(2) $\Rightarrow$ (1). $f_j:D\longrightarrow\mathbb{R}$ $(j=1,\dots,m)$ は連続とする．$a\in D$ とする．任意の $\varepsilon>0$ をとる．各 $j=1,\dots,m$ について，$\delta_j>0$ を十分小さくとれば，
$$|f_j(x)-f_j(a)|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}\quad(\forall x\in U^n_{\delta_j}(a))$$
にできる．このとき，$\delta=\min\{\delta_1,\dots,\delta_m\}>0$ とおけば，$x\in U^n_\delta(a)$ に対して，
$$d(f(x),f(a))=\sqrt{(f_1(x)-f_1(a))^2+\cdots+(f_m(x)-f_m(a))^2}<\sqrt{m\frac{\varepsilon^2}{\sqrt{m}^2}}=\varepsilon.$$
よって，$f(x)\in U^m_\varepsilon(f(a))$ $(\forall x\in U^n_\delta(a))$ である．ゆえに，f は a において連続である．これが任意の $a\in D$ について成り立つから，f は D 上で連続である． □

次に，連続写像の合成は連続であることをみよう．

命題 2.29. D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合，E を $\mathbb{R}^m$ の部分集合とし，写像 $f:D\longrightarrow\mathbb{R}^m$ と写像 $g:E\longrightarrow\mathbb{R}^k$ は連続写像であり，$f(D)\subset E$ とする．そのとき，$g\circ f$ も連続である．

[証明]　$a\in D$ とする．$b=f(a)$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対して，g は b において連続であるから，$\delta>0$ を十分小さくとれば，$g(y)\in U^k_\varepsilon(g(b))$ $(\forall y\in U^m_\delta(b)\cap E)$ である．さらに，f は a において連続であるから，$\delta'>0$ を十分小さくとれば，$f(x)\in U^m_\delta(b)$ $(\forall x\in U^n_{\delta'}(a)\cap D)$ である．したがって，任意の $x\in U^n_{\delta'}(a)\cap D$ に対して，$f(x)\in U^m_\delta(b)\cap E$ であり，$g(f(x))\in U^k_\varepsilon(g(b))$ である．これは $g\circ f$ が $a\in D$ において連続であることを示している．a は任意の D の点であるから，$g\circ f$ は D 上で連続である． □

2.6 コンパクト集合

定義 2.30. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**有界**であるとは，十分大きな $R > 0$ をとれば，$A \subset U_R^n(0)$ となることである．ここで，$0 = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ とした．

定義 2.31. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A に対して，$\mathbb{R}^n$ の開集合の族 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が A の**開被覆**であるとは，

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

を満たすことである．

例 2.32. $r > 0$ とし，$A = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$ とする．$A = \overline{U_r^2(0)}$ である．よって，A は閉集合である．$R > r$ にとれば，$A \subset U_R^2(0)$ であるから，A は有界である．各 $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対して，

$$O_a = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,|\, a_1 - 1 < x_1 < a_1 + 1,\ a_2 - 1 < x_2 < a_2 + 1\}$$

とおく．このとき，$\{O_a\}_{a\in\mathbb{Z}^2}$ は A の開被覆である．さらに，

$$M = \{(a_1, a_2) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, |a_1| \leq r,\ |a_2| \leq r\}$$

とおけば，M は有限集合であり，

$$A \subset \bigcup_{a\in M} O_a$$

である．実際，$x = (x_1, x_2) \in A$ ならば，$x_1^2 + x_2^2 \leq r^2$ より，$|x_1|, |x_2| \leq r$ である．したがって，$a_1 \in \mathbb{Z}$ を $x_1 \geq 0$ のときは，$a_1 \leq x_1 < a_1 + 1$ に，$x_1 < 0$ のときは，$a_1 - 1 < x_1 \leq a_1$ にとれば，いずれの場合も，$|a_1| \leq |x_1| \leq r$, $a_1 - 1 < x_1 < a_1 + 1$ である．x_2 に対して同様に，$a_2 \in \mathbb{Z}$ をとれば，$|a_2| \leq |x_2| \leq r$, $a_2 - 1 < x_2 < a_2 + 1$ である．したがって，$a \in M$, $x \in O_a$ である．ゆえに，$A \subset \bigcup_{a\in M} O_a$ である．

上の例では，A のある開被覆 $\{O_a\}_{a\in\mathbb{Z}^2}$ から有限個の開集合からなる部分開被覆 $\{O_a\}_{a\in M}$ をとれたことになる．この A について，他のどのような開被覆が与えられても，つねに有限個の開集合からなる部分開被覆が存在するだろうか．もし，そうならば，$\mathbb{R}^n$ の部分集合がそのような性質を持つための条件は何だろうか．

定義 2.33. A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．A の任意の開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ に対して，必ず有限部分被覆が存在するとき，すなわち，Λ の有限部分集合 $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$ が存在して，

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} O_{\lambda_j}$$

となるとき，A は**コンパクト集合**であるという．

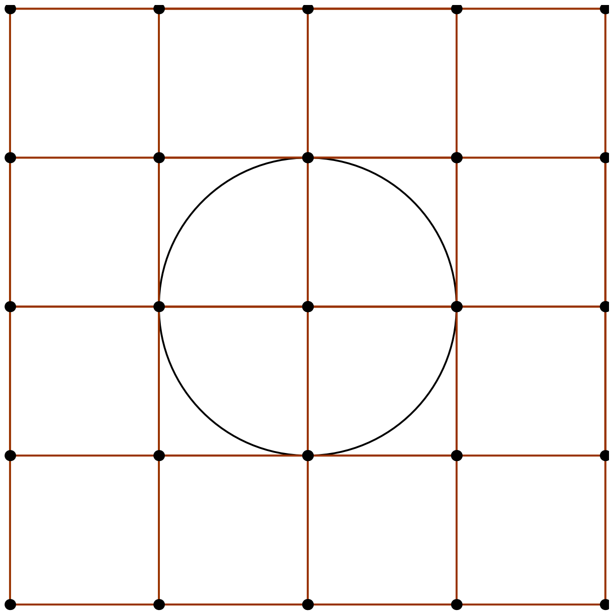

図 8: 単位円の有限部分被覆

命題 2.34. A と B を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とすれば，$A \cup B$ もコンパクト集合である．

[証明]　$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $A \cup B$ の開被覆とすれば，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は A の開被覆であり，B の開被覆でもある．A, B はコンパクトであるから，有限個の $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ と $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_{k+l} \in \Lambda$ が存在して，

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{k} O_{\lambda_j}, \quad B \subset \bigcup_{j=k+1}^{k+l} O_{\lambda_j}$$

である．よって，

$$A \cup B \subset \bigcup_{j=1}^{k+l} O_{\lambda_j}.$$

ゆえに，$A \cup B$ はコンパクト集合である．　$\square$

補題 2.35. A を $\mathbb{R}^n$ の閉集合とし，B を A を含むような $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とする．そのとき，A もコンパクト集合である．

[証明]　$\mathcal{O} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を A の開被覆とする．

$$A \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

である．A は閉集合だから，A^c は開集合であり，

$$B \subset \mathbb{R}^n = A^c \cup A \subset A^c \cup \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

である．よって，$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\cup\{A^c\}$ は B の開被覆である．B はコンパクト集合であるから，有限個の $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して，

$$B\subset A^c\cup O_{\lambda_1}\cup\cdots\cup O_{\lambda_m}$$

が成り立つ．$A\subset B$ より，

$$A\subset B\subset A^c\cup O_{\lambda_1}\cup\cdots\cup O_{\lambda_m}.$$

よって，

$$A\subset O_{\lambda_1}\cup\cdots\cup O_{\lambda_m}$$

である．したがって，A はコンパクト集合である． □

補題 2.36. $\mathbb{R}^n$ の一辺の長さが $2R$ の立方体

$$B=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\mid -R\le x_j\le R\ (j=1,\ldots,n)\}$$

はコンパクト集合である．

[証明] B がコンパクト集合でないと仮定する．B のある開被覆 $\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ で，有限部分被覆を持たないようなものが存在する．そのとき，B を一辺の長さが半分の 2^n 個の立方体に分割する．小立方体の少なくとも 1 つは有限個の $\{O_\lambda\}$ では覆われないので，それを B_1 とする．次に，B_1 を一辺の長さが半分の 2^n 個の小立方体に分割する．有限個の $\{O_\lambda\}$ で覆われない小立方体が存在するので，それを B_2 とする．このような操作を続けることにより，有限個の $\{O_\lambda\}$ で覆われない立方体の列

$$B_1\supset B_2\supset\cdots\supset B_m\supset\cdots \tag{2.1}$$

が構成される． 立方体 B_m は

$$B_m=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n\,|\,b_{m,j}\le x_j\le c_{m,j}\ (1\le j\le n)\}$$

と表すことができ，$c_{m,j}-b_{m,j}=R/2^{m-1}\ (1\le j\le n)$ である．また，包含関係 (2.1) より，

$$b_{1,j}\le\cdots\le b_{m,j}\le b_{m+1,j}\le\cdots\le c_{m+1,j}\le c_{m,j}\le\cdots\le c_{1,j}$$

である．$\{b_{m,j}\}_{m=1}^\infty$ は上に有界な単調増加数列であるから，実数の連続性によってある実数 β_j に収束する．同様に，$\{c_{m,j}\}_{m=1}^\infty$ は下に有界な単調減少数列であるからある実数 γ_j に収束する．

$$\gamma_j-\beta_j=\lim_{m\to\infty}(c_{m,j}-b_{m,j})=\lim_{m\to\infty}\frac{R}{2^{m-1}}=0$$

より，$\gamma_j = \beta_j$ である．ここで，各立方体 B_m から点 p_m をとる．

$$p_m = (a_{m,1}, a_{m,2}, \ldots, a_{m,n})$$

とかけば，$p_m \in B_m$ より，$b_{m,j} \leq a_{m,j} \leq c_{m,j}$ $(j = 1, \ldots, n)$ である．よって，

$$\lim_{m\to\infty} a_{m,j} = \beta_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

であり，$\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n$ とおけば，

$$\lim_{m\to\infty} d(p_m, \beta) = \lim_{m\to\infty} \sqrt{(a_{m,1} - \beta_1)^2 + \cdots + (a_{m,n} - \beta_n)^2} = 0.$$

ゆえに，B に含まれる点列 $\{p_m\}_{m=1}^{\infty}$ は点 β に収束する．明らかに $\beta \in B$ である $(-R \leq b_{1,j} \leq \beta_j \leq c_{1,j} \leq R)$．$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は B の開被覆であったから，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$\beta \in O_\lambda$ である．O_λ は開集合であるから，$\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば，$U_\varepsilon(\beta) \subset O_\lambda$ である．このとき，十分大きい m をとれば，$d(p_m, \beta) < \varepsilon/2$ かつ $R/2^{m-1} < \varepsilon/2\sqrt{n}$ にできる．$p_m \in B_m$ より，任意の $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_m$ に対して，

$$\begin{aligned} d(x, \beta) &\leq d(x, p_m) + d(p_m, \beta) < \sqrt{(x_1 - a_{m,1})^2 + \cdots + (x_n - a_{m,n})^2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &\leq \sqrt{n(R/2^{m-1})^2} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

よって，$x \in U_\varepsilon(\beta)$ $(\forall x \in B_m)$，したがって，$B_m \subset U_\varepsilon(\beta) \subset O_\lambda$ である．これは，B_m が有限個の $\{O_\lambda\}$ で覆われない小立方体であることに矛盾する．ゆえに，B はコンパクト集合である．　□

定理 2.37. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A について，A がコンパクト集合であるためには，A が有界閉集合であることが必要十分である．

[証明]　A がコンパクト集合であるとする．自然数 k に対して，$\{U_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ は開集合の族であり，

$$A \subset \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k(0)$$

を満たす．したがって，$\{U_k(0)\}_{k=1}^{\infty}$ は A の開被覆である．A はコンパクト集合であるとしたから，有限個の $k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ が存在して，

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} U_{k_j}(0) = U_{k_m}(0)$$

である．ゆえに，A は有界である．A が閉集合であることを示す．A が閉集合でないとして矛盾を導く．$A \subsetneq \bar{A}$ であり，$\partial A = \bar{A} \setminus A \neq \emptyset$ である．$a \in \partial A$ をとる．自然数 k に対して，

$$O_k = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, a) > 1/k\}$$

とおくと，O_k は開集合である．このとき，

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} O_k = \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$$

である．したがって，

$$A \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} O_k$$

であり，$\{O_k\}_{k=1}^{\infty}$ は A の開被覆である．A はコンパクトであるから，有限個の自然数 $k_1 < \cdots < k_m$ が存在して，

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} O_{k_j}.$$

$O_{k_1} \subset \cdots \subset O_{k_m}$ より，$A \subset O_{k_m}$ である．したがって，

$$U_{1/k_m}(a) \cap A \subset U_{1/k_m}(a) \cap O_{k_m} = \emptyset, \quad U_{1/k_m}(a) \cap A = \emptyset$$

である．これは $a \in \partial A$ が A の触点であることに矛盾する．ゆえに，A は閉集合である．

逆に，A が有界閉集合であるとする．A がコンパクトであることを示す．$R > 0$ を十分に大きくとれば，A は一辺の長さが $2R$ の立方体

$$B = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid -R \leq x_j \leq R \ (j = 1, \ldots, n)\}$$

に含まれる．補題 2.36 より，B はコンパクトである．A はコンパクト集合 B に含まれる閉集合であるから，補題 2.35 より，A もコンパクトである． □

定理 2.38. D を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を連続写像とすれば，f の像 $f(D)$ は $\mathbb{R}^m$ のコンパクト集合である．

[証明] $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を $f(D)$ の開被覆とする．

$$f(D) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$$

より，任意の $x \in D$ に対して，ある $\lambda \in \Lambda$ が存在して，$f(x) \in O_\lambda$ である．そのとき，$x \in f^{-1}(O_\lambda)$ である．よって，

$$D \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda) \subset D, \qquad D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O_\lambda).$$

O_λ は $\mathbb{R}^m$ の開集合であり，f は連続であるから，命題 2.28 より，$f^{-1}(O_\lambda) = V_\lambda \cap D$，$V_\lambda$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合である．よって，

$$D = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (V_\lambda \cap D) \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

より，$\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は D の開被覆である．D はコンパクト集合であるとしたから，有限個の $\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\Lambda$ が存在して，

$$D\subset\bigcup_{j=1}^{m}V_{\lambda_j}$$

が成り立つ．したがって，

$$D=D\cap\left(\bigcup_{j=1}^{m}V_{\lambda_j}\right)=\bigcup_{j=1}^{m}(D\cap V_{\lambda_j}),$$
$$f(D)=\bigcup_{j=1}^{m}f(D\cap V_{\lambda_j})\subset\bigcup_{j=1}^{m}O_{\lambda_j}.$$

ゆえに，$f(D)$ はコンパクト集合である． □

系 2.39. D を $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合とすると，連続関数 $f:D\longrightarrow\mathbb{R}$ は最大値，最小値を持つ．特に，有界閉区間 $I=[a,b]=\{x\in\mathbb{R}\,|\,a\le x\le b\}$ 上の連続関数 $f:I\longrightarrow\mathbb{R}$ は最大値，最小値を持つ．

[証明]　定理 2.37 より，D はコンパクト集合である．よって，定理 2.38 より，f の像 $f(D)$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合である．定理 2.37 より，$f(D)$ は有界閉集合である．$\alpha=\inf f(D),\beta=\sup f(D)$ とおけば，$f(D)$ が有界であることから，α,β は有限な実数であり，$f(D)$ が閉集合であることから，$\alpha,\beta\in f(D)$ である．実際，もし，$\alpha\notin f(D)$ とすれば，$\alpha\in\mathbb{R}\setminus f(D)$ であり，$f(D)$ は閉集合であるから，$\mathbb{R}\setminus f(D)$ は開集合である．したがって，$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば，

$$(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\subset\mathbb{R}\setminus f(D)$$

である．一方，$\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$ は $f(D)$ の下界ではないから，$\alpha\le y<\alpha+\dfrac{\varepsilon}{2}$ となる $y\in f(D)$ が存在する．このとき，$y\in(\alpha-\varepsilon,\alpha+\varepsilon)\subset\mathbb{R}\setminus f(D)$ となって矛盾である．よって，$\alpha\in f(D)$ である．同様に，もし，$\beta\notin f(D)$ とすれば，$\beta\in\mathbb{R}\setminus f(D)$ であり，$\varepsilon>0$ を十分小さくとれば，

$$(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)\subset\mathbb{R}\setminus f(D)$$

である．一方，$\beta-\dfrac{\varepsilon}{2}$ は $f(D)$ の上界ではないから，$\beta-\dfrac{\varepsilon}{2}<y\le\beta$ となる $y\in f(D)$ が存在する．このとき，$y\in(\beta-\varepsilon,\beta+\varepsilon)\subset\mathbb{R}\setminus f(D)$ となって矛盾である．よって，$\beta\in f(D)$ である．したがって，$\alpha=f(x_1),\,\beta=f(x_2)$ となる $x_1,x_2\in D$ が存在する．α は $f(D)$ の (最大) 下界であり，β は $f(D)$ の (最小) 上界であるから，

$$\alpha\le f(x)\le\beta,\qquad\forall x\in D$$

である．したがって，f は x_1 で最小値 α をとり，x_2 で最大値 β をとる． □

2.7 一様連続性

定義 2.40. D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．写像 $f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ が，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ が存在して，

$$d(f(x), f(x')) < \varepsilon, \quad \forall x, x' \in D,\ d(x, x') < \delta$$

を満たすとき，f は**一様連続**であるという．

定理 2.41. D を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を連続写像とする．そのとき，f は一様連続である．

[証明]　$\varepsilon > 0$ が与えられたとする．D の各点 a において f は連続であるから，$r > 0$ が存在して，$d(f(x), f(a)) < \varepsilon/2\ (\forall x \in U_r(a) \cap D)$ である．$0 < r \leq 1$ としてよい．したがって，

$$\Delta_a = \{r \in \mathbb{R} \,|\, 0 < r \leq 1,\ d(f(x), f(a)) < \varepsilon/2\ (\forall x \in U_r(a) \cap D)\}$$

とおけば，$\mathbb{R}$ の部分集合 Δ_a は上に有界であるから，$r_a = \sup \Delta_a$ が存在して，$0 < r_a \leq 1$ である (r_a のとり方を明確に定めている)．$0 < \delta < r_a$ ならば，δ は Δ_a の上界でないから，$r \in \Delta_a$ で $\delta < r \leq r_a$ となるものが存在する．このとき，$U_\delta(a) \subset U_r(a)$ だから

$$d(f(x), f(a)) < \frac{\varepsilon}{2}\ \ (\forall x \in U_\delta(a) \cap D)$$

である．また，$\{U_{r_a/3}(a)\}_{a \in D}$ は D の開被覆である．すなわち，

$$D \subset \bigcup_{a \in D} U_{r_a/3}(a)$$

である．D はコンパクトであるから，有限個の $a_1, \ldots, a_k \in D$ が存在して，

$$D \subset \bigcup_{j=1}^{k} U_{r_{a_j}/3}(a_j)$$

が成り立つ．$\delta = \min\{r_{a_1}/3, \ldots, r_{a_k}/3\}$ とおけば，$\delta > 0$ である．また，$x, x' \in D$, $d(x, x') < \delta$ とすれば，ある $1 \leq j \leq k$ について，$x \in U_{r_{a_j}/3}(a_j)$ であり，したがって，

$$d(f(x), f(a_j)) < \frac{\varepsilon}{2}$$

である．さらに，

$$d(x', a_j) \leq d(x', x) + d(x, a_j) < \delta + \frac{r_{a_j}}{3} < \frac{2r_{a_j}}{3} < r_{a_j}$$

であるから，$d(f(x'), f(a_j)) < \varepsilon/2$ である．よって，

$$d(f(x), f(x')) \leq d(f(x), f(a_j)) + d(f(a_j), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

ゆえに，f は一様連続である．　$\square$

注意 2.42. 連続関数がリーマン積分可能であることを示すときに，一様連続性が用いられる．

2.8　代数学の基本定理

$\mathbb{C}$ の元は $\alpha = a + bi,\ a, b \in \mathbb{R}$ とかける．このとき，α と $\mathbb{R}^2$ の点 (a, b) と同一視することによって，$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視する．$\alpha = a + bi,\ \beta = c + di$ に対して，

$$|\alpha - \beta| = \sqrt{(a-c)^2 + (b-d)^2}$$

は $\mathbb{R}^2$ における 2 点 (a, b) と (c, d) の距離である．

定義 2.43. 写像 $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ が連続であるとは，上に述べた同一視によって，f を $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への写像とみたときに連続であることである．すなわち，$\alpha \in \mathbb{C}$ において，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，十分小さな $\delta > 0$ をとれば，

$$|f(z) - f(\alpha)| < \varepsilon, \quad \forall z \in \mathbb{C},\ |z - \alpha| < \delta$$

が成り立つとき，f は α において連続であるといい，すべての $\alpha \in \mathbb{C}$ において連続であるとき，f は連続であるという．$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ が連続であることも同様に定義する．

補題 2.44. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(z) = |z|$ とすれば，f は連続である．

[証明]　$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．$\varepsilon > 0$ に対して，$0 < \delta < \varepsilon$ にとれば，$|z - \alpha| < \delta$ のとき，

$$|z| = |(z - \alpha) + \alpha| \leq |z - \alpha| + |\alpha|$$

より，$|z| - |\alpha| \leq |z - \alpha|$ である．同様に，

$$|\alpha| = |(\alpha - z) + z| \leq |z - \alpha| + |z|$$

より，$-|z - \alpha| \leq |z| - |\alpha|$ である．ゆえに，

$$|f(z) - f(\alpha)| = ||z| - |\alpha|| \leq |z - \alpha| < \delta < \varepsilon.$$

□

定理 2.45 (代数学の基本定理)**.** n を自然数とし，$a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C},\ a_0 \neq 0$ を定数として，$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$$

によって定義すれば，$f(\alpha) = 0$ となる $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在する．

定理 2.45 を証明するために，いくつかの補題を用意する．

補題 2.46. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ を定理 2.45 の通りとすれば，f は連続である．

[証明]　$\alpha \in \mathbb{C}$ とする．

$$\begin{aligned}|f(z)-f(\alpha)| &= |a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n-(a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n)|\\ &= |a_0(z^n-\alpha^n)+a_1(z^{n-1}-\alpha^{n-1})+\cdots+a_{n-1}(z-\alpha)|\\ &\le |a_0||z^n-\alpha^n|+|a_1||z^{n-1}-\alpha^{n-1}|+\cdots+|a_{n-1}||z-\alpha|.\end{aligned}$$

ここで，$|z-\alpha|<1$ とすると，

$$|z|=|z-\alpha+\alpha|\le|z-\alpha|+|\alpha|<1+|\alpha|$$

である．したがって，$k=1,\ldots,n$ に対して，

$$\begin{aligned}|z^k-\alpha^k| &= |(z-\alpha)(z^{k-1}+\alpha z^{k-2}+\cdots+\alpha^{k-1})|\\ &= |z-\alpha||z^{k-1}+\alpha z^{k-2}+\cdots+\alpha^{k-1}|\\ &\le |z-\alpha|\left((|\alpha|+1)^{k-1}+|\alpha|(|\alpha|+1)^{k-2}+\cdots+|\alpha|^{k-1}\right)\\ &\le k(|\alpha|+1)^{k-1}|z-\alpha|.\end{aligned}$$

よって，

$$\begin{aligned}|f(z)-f(\alpha)| &\le (n|a_0|(|\alpha|+1)^{n-1}+(n-1)|a_1|(|\alpha|+1)^{n-2}+\cdots+|a_{n-1}|)|z-\alpha|\\ &= M|z-\alpha|.\end{aligned}$$

したがって，$\varepsilon>0$ に対して，$\delta>0$ を $\delta<\varepsilon/M$, $\delta<1$ にとれば，$|z-\alpha|<\delta$ に対して，

$$|f(z)-f(\alpha)|\le M|z-\alpha|<M\delta<\varepsilon.$$

ゆえに，f は α において連続である．α は任意であったから，f は連続である．　□

補題 2.47. $f:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}$ を定理 2.45 の通りとすれば，$|z|\to\infty$ のとき，$|f(z)|\to\infty$ である．

[証明]　$|z|\ge 1$ のとき，$|z|^{-k}\le|z|^{-1}$ $(k=1,\ldots,n)$ であるから，

$$\begin{aligned}|f(z)| &= \left|a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n\right|\\ &= |z|^n\left|a_0+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}\right|\\ &\ge |z|^n\left(|a_0|-\left|a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}\right|\right)\\ &\ge |z|^n\left(|a_0|-(|a_1||z|^{-1}+\cdots+|a_n||z|^{-n})\right)\\ &\ge |z|^n\left(|a_0|-(|a_1|+\cdots+|a_n|)|z|^{-1}\right).\end{aligned}$$

したがって，

$$M=\frac{2(|a_1|+\cdots+|a_n|)}{|a_0|}+1$$

とおけば，$|z| \geq M$ のとき，

$$(|a_1|+\cdots+|a_n|)|z|^{-1} < (|a_1|+\cdots+|a_n|)\frac{|a_0|}{2(|a_1|+\cdots+|a_n|)} = \frac{|a_0|}{2}$$

であり，

$$|f(z)| > |z|^n\left(|a_0| - \frac{|a_0|}{2}\right) = \frac{|a_0|}{2}|z|^n.$$

ゆえに，$|z| \to \infty$ のとき，$|f(z)| \to \infty$ である． □

[定理 2.45 の証明] 補題 2.47 より，ある実数 M をとると，すべての $|z| \geq M$ に対して，$|f(z)| > |f(0)|$ となる．$D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq M\}$ は有界閉集合であるから，コンパクトである．補題 2.44 と補題 2.46 および命題 2.29 より，関数 $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$, $z \longmapsto |f(z)|$ は連続である．したがって，系 2.39 より，D における $|f(z)|$ の最小値 $|f(z_0)|$ が存在する．$|f(z_0)| \leq |f(0)|$ であり，$z \in \mathbb{C} \setminus D$ ならば，$|f(z)| > |f(0)|$ であるから，$|f(z_0)|$ は $\mathbb{C}$ 全体における $|f(z)|$ の最小値である．以下，$|f(z_0)| = 0$ を示す．

$g(z) = f(z_0+z)$ とおく．$g(z)$ も z の n 次多項式である．$|g(0)| = |f(z_0)| > 0$ と仮定して矛盾を導く．$g(z)$ の定数項 $g(0)$ は 0 でないとしたから，ある k $(1 \leq k \leq n)$ について，

$$g(z) = g(0) + b_k z^k + \cdots + b_n z^n, \quad b_k \neq 0$$

とかける．$a = g(0)$, $b = b_k$, $h(z) = b_{k+1} + b_{k+2}z + \cdots + b_n z^{n-k-1}$ とおけば，

$$g(z) = a + bz^k + z^{k+1}h(z), \qquad a \neq 0,\ b \neq 0, \quad h(z) \text{ は } n-k-1 \text{ 次多項式}$$

である．ただし，$k = n$ のときは，$h(z) = 0$ とする．$-a/b$ の k 乗根の 1 つのを c とする．$-a/b = c^k$, $bc^k = -a$ である．$h(z)$ は連続であるから，$0 < t < 1$ なる t を十分小さくとれば，$h(tc)$ は $h(0) = b_{k+1}$ に十分近くなり，したがって，$t|c^{k+1}h(tc)|$ はいくらでも 0 に近くなる．よって，$0 < t < 1$ なる t を十分小さくとれば，

$$t|c^{k+1}h(tc)| < |a|$$

が成り立つ．そのとき，

$$\begin{aligned} g(tc) &= a + b(tc)^k + (tc)^{k+1}h(tc) = a(1-t^k) + t^{k+1}c^{k+1}h(tc), \\ |g(tc)| &= |a(1-t^k) + t^{k+1}c^{k+1}h(tc)| \leq |a|(1-t^k) + t^k t|c^{k+1}h(tc)| \\ &< |a|(1-t^k) + t^k|a| = |a| = |g(0)|. \end{aligned}$$

すなわち，$|f(tc+z_0)| < |f(z_0)|$ である．これは，$|f(z_0)|$ が $|f(z)|$ の最小値であることに矛盾する．ゆえに，$|f(z_0)| = 0$, $f(z_0) = 0$ である． □

2.9 コンパクト集合の直積

補題 2.48. U を $\mathbb{R}^n$ の開集合とし，V を $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．そのとき，直積集合 $U \times V$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合である．

[証明] $(a, b) \in U \times V$ とする．$a \in U$, $b \in V$ であり，U, V は開集合であるから，$r_1 > 0$, $r_2 > 0$ を十分小さくとれば，$U^n_{r_1}(a) \subset U$, $U^m_{r_2}(b) \subset V$ である．このとき，$r > 0$ を $r < r_1$, $r < r_2$ にとれば，$(x, y) \in U^{n+m}_r((a, b))$ ならば，

$$
\begin{aligned}
d((x,y),(a,b))^2 &= (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 + (y_1 - b_1)^2 + \cdots + (y_m - b_m)^2 \\
&= d(x,a)^2 + d(y,b)^2
\end{aligned}
$$

より，$d(x, a) \leq d((x, y),(a, b)) < r < r_1$, $d(y, b) \leq d((x, y),(a, b)) < r < r_2$ である．よって，$x \in U^n_{r_1}(a)$, $y \in U^m_{r_2}(b)$ であり，$(x, y) \in U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b)$ である．したがって，$U^{n+m}_r((a, b)) \subset U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b) \subset U \times V$ である．ゆえに，$U \times V$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合である． □

補題 2.49. O を $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合とすれば，各点 $(a, b) \in O$ $(a \in \mathbb{R}^n,\ b \in \mathbb{R}^m)$ に対して，$r_1, r_2 > 0$ を十分小さくとれば，$U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b) \subset O$ が成り立つ．したがって，

$$
O = \bigcup_{(a,b)\in O} U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b)
$$

である．

[証明] O は開集合であるから，$(a, b) \in O$ ならば，$r > 0$ を十分小さくとれば，$U^{n+m}_r((a, b)) \subset O$ である．$0 < r_1$, $r_2 < r/2$ とすれば，$x \in U^n_{r_1}(a)$, $y \in U^m_{r_2}(b)$ に対して，

$$
\begin{aligned}
d(x,a) &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2} < r_1 < \frac{r}{2}, \\
d(y,b) &= \sqrt{(y_1 - b_1)^2 + \cdots + (y_m - b_m)^2} < r_2 < \frac{r}{2}, \\
d((x,y),(a,b)) &= \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 + (y_1 - b_1)^2 + \cdots + (y_m - b_m)^2} \\
&< \sqrt{r_1^2 + r_2^2} < \sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{2}} < r.
\end{aligned}
$$

したがって，$(x, y) \in U^{n+m}_r((a, b)) \subset O$, $U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b) \subset O$ である．これらの和集合をとれば，

$$
O \subset \bigcup_{(a,b)\in O} U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b) \subset O, \quad O = \bigcup_{(a,b)\in O} U^n_{r_1}(a) \times U^m_{r_2}(b).
$$

□

定理 2.50. A を $\mathbb{R}^n$ のコンパクト集合とし，B を $\mathbb{R}^m$ のコンパクト集合とする．そのとき，直積集合 $A\times B$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ のコンパクト集合である．

[証明]　$\{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $A\times B$ の開被覆とする．

$$A\times B\subset\bigcup_{\lambda\in\Lambda}O_\lambda.$$

$$\mathcal{B}=\{O_1\times O_2\,|\,O_1 \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の開集合}, O_2 \text{ は } \mathbb{R}^m \text{ の開集合}\}$$

とおけば，補題 2.49 より，$\mathbb{R}^{n+m}$ の任意の開集合は $O_1\times O_2\in\mathcal{B}$ の和として表せる．また，補題 2.48 より，$O_1\times O_2\in\mathcal{B}$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ の開集合である．したがって，

$$\mathcal{O}=\{O_1\times O_2\in\mathcal{B}\,|\,O_1\times O_2\subset O_\lambda\ (\exists\lambda\in\Lambda)\}$$

とおけば，$\mathcal{O}$ も $A\times B$ の開被覆である．

$$A\times B\subset\bigcup_{O_1\times O_2\in\mathcal{O}}O_1\times O_2.$$

ここで，

$$\mathcal{U}=\{U\,|\,U:\mathbb{R}^n \text{ の開集合}, \exists\{V_j\}_{j=1}^N: B \text{ の有限開被覆}, U\times V_j\in\mathcal{O}\ (\forall j)\}$$

とおく．このとき，$\mathcal{U}$ は A の開被覆である．実際，任意の $a\in A$ に対して，

$$\{a\}\times B\subset A\times B\subset\bigcup_{O_1\times O_2\in\mathcal{O}}O_1\times O_2$$

である．ここで，写像 $f:\mathbb{R}^m\longrightarrow\{a\}\times\mathbb{R}^m$ を $f(y)=(a,y)$ によって定義すれば，f は連続な全単射である．B はコンパクトであるから，$f(B)=\{a\}\times B$ はコンパクトである．したがって，より，有限部分開被覆 $\{O_{1,j}\times O_{2,j}\}_{j=1}^N\subset\mathcal{O}$ がとれる．

$$\{a\}\times B\subset\bigcup_{j=1}^N O_{1,j}\times O_{2,j}.$$

$a\notin O_{1,j}$ であるような j は取り除いても，$\{a\}\times B$ の開被覆になるから，すべての $1\le j\le N$ に対して，$a\in O_{1,j}$ であるとしてよい．このとき，$\{O_{2,j}\}_{j=1}^N$ は B の有限開被覆であり，$U_0=\bigcap_{k=1}^N O_{1,k}$ とおけば，U_0 は a を含む $\mathbb{R}^n$ の開集合である．また，$U_0\times O_{2,j}\in\mathcal{O}$ $(j=1,\ldots,N)$ である．したがって，$U_0\in\mathcal{U}$ である．任意の $a\in A$ に対して，$a\in U$ となる $U\in\mathcal{U}$ の存在が示されたから，

$$A\subset\bigcup_{U\in\mathcal{U}}U.$$

すなわち，$\mathcal{U}$ は A の開被覆である．A はコンパクトであるから，$\mathcal{U}$ の有限部分開被覆 $\{U_k\}_{k=1}^s$ がとれる．

$$A \subset \bigcup_{k=1}^{s} U_k.$$

各 $k = 1, 2, \ldots, s$ に対して，$U_k \in \mathcal{U}$ であるから，B の有限開被覆 $\{V_{kj}\}_{j=1}^{N_k}$ が存在して，$U_k \times V_{kj} \in \mathcal{O}$，すなわち，ある $\lambda_{kj} \in \Lambda$ が存在して，$U_k \times V_{kj} \subset O_{\lambda_{kj}}$ である．したがって，

$$B \subset \bigcup_{j=1}^{N_k} V_{kj}, \quad U_k \times B \subset \bigcup_{j=1}^{N_k} U_k \times V_{kj} \subset \bigcup_{j=1}^{N_k} O_{\lambda_{kj}},$$

$$A \times B \subset \bigcup_{k=1}^{s} U_k \times B \subset \bigcup_{k=1}^{s} \bigcup_{j=1}^{N_k} O_{\lambda_{kj}}.$$

これは $A \times B$ がコンパクトであることを示している． □

2.10　連結集合

定義 2.51. $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が

$$A \subset U_1 \cup U_2, \quad A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset, \quad U_1, U_2 \text{ は開集合} \Longrightarrow A \subset U_1 \text{ または } A \subset U_2$$

を満たすとき，A は**連結**であるという．

例 2.52. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 1\}$ とする．$U_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y > 0\}$, $U_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x < 0,\ y < 0\}$ とおけば，U_1, U_2 は開集合であり，$A \subset U_1 \cup U_2$, $A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である．しかし，$A \not\subset U_1$, $A \not\subset U_2$ であるから，A は連結ではない．

補題 2.53. A, B を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．A が連結であり，$A \subset B \subset \bar{A}$ ならば，B も連結である．

[証明]　$B \subset U_1 \cup U_2$, $B \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_1, U_2 は $\mathbb{R}^n$ の開集合とする．このとき，$A \subset B$ より，

$$A \subset U_1 \cup U_2, \quad A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

であり，A は連結であるから，$A \subset U_1$ または $A \subset U_2$ である．$A \subset U_1$ とすると，$A = A \cap U_1$, $A \cap U_2 = A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ である．よって，$A \subset U_2^c$ である．U_2^c は閉集合であり，$\bar{A}$ は A を含む最小の閉集合であるから，$\bar{A} \subset U_2^c$ である．したがって，$B \subset \bar{A} \subset U_2^c$ である．ゆえに，

$$B = U_2^c \cap B \subset U_2^c \cap (U_1 \cup U_2) = (U_2^c \cap U_1) \cup (U_2^c \cap U_2) = U_2^c \cap U_1 \subset U_1,$$

$B \subset U_1$ である．$A \subset U_2$ とすれば，同様にして，$B \subset U_2$ がわかる．ゆえに，B は連結である． □

定理 2.54. D を $\mathbb{R}^n$ の連結な部分集合とし，$f : D \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を連続とする．そのとき，$f(D)$ は $\mathbb{R}^m$ の連結な部分集合である．

[証明]　$f(D) \subset U_1 \cup U_2$, $f(D) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_1, U_2 は $\mathbb{R}^m$ の開集合とする．命題2.28 より，$j = 1, 2$ について，$f^{-1}(U_j) = D \cap V_j$, V_j は $\mathbb{R}^n$ の開集合とかける．

$$D = f^{-1}(U_1) \cup f^{-1}(U_2) \subset V_1 \cup V_2$$

である．また，$x \in D \cap V_1 \cap V_2$ とすると，$f(x) \in f(D) \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$ となって，矛盾である．ゆえに，$D \cap V_1 \cap V_2 = \emptyset$ である．D は連結であるから，$D \subset V_1$ または $D \subset V_2$ である．よって，$f(D) \subset U_1$ または $f(D) \subset U_2$ である．ゆえに，$f(D)$ は連結である．　□

補題 2.55. $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ とする．$A = (a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, a < x < b\}$ とする．そのとき，連続な全単射 $f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ が存在する．また，$c \in \mathbb{R}$ とすれば，連続な全単射 $g : A \longrightarrow (c, \infty)$, および $h : A \longrightarrow (-\infty, c)$ も存在する．

[証明]　$I = (0, 1)$ とする．$\psi : \mathbb{R} \longrightarrow I$ を $\psi(x) = e^x/(1 + e^x)$ によって定義すれば，ψ は連続な全単射である．$I \longrightarrow A$, $x \longmapsto (b - a)x + a$，は連続な全単射であるから，

$$f(x) = (b - a)\psi(x) + a = (b - a)\frac{e^x}{1 + e^x} + a$$

とおけば，$f : \mathbb{R} \longrightarrow A$ は連続な全単射である．

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{b - x} - \frac{1}{b - a} + c, \quad a < x < b, \\ h(x) &= -\frac{1}{x - a} + \frac{1}{b - a} + c, \quad a < x < b, \end{aligned}$$

とおけば，$g : A \longrightarrow (c, \infty)$, および $h : A \longrightarrow (-\infty, c)$ は連続な全単射である．　□

命題 2.56. $\mathbb{R}$ の連結集合で少なくとも 2 点を含むものは次のいずれかに限る．

$$(a, b), \quad (a, b], \quad [a, b), \quad [a, b].$$

ここで，$a < b$ であり，$a = -\infty$ や $b = \infty$ の場合も含める．

[証明]　まず，上のような部分集合が連結であることを示す．$\mathbb{R}$ が連結であることを示す．これがいえれば，補題2.55 と定理2.54 より，(a, b), (a, ∞), $(-\infty, b)$ も連結である．さらに，補題2.53 によって，$(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$ も連結である．

$\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$, U_1, U_2 は $\mathbb{R}$ の開集合とする．$U_1 \neq \emptyset$, $U_2 \neq \emptyset$ として矛盾を導けばよい．$a \in U_1$, $b \in U_2$ をとる．$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より，$a \neq b$ である．$a < b$ としてよい．

$$C = U_1 \cap \{x \in \mathbb{R} \,|\, x < b\}$$

とおく．$a \in C$ であり，$C \neq \emptyset$ である．b は C の1つの上界であるから，C は上に有界であり，$\gamma = \sup C$ とおけば，$\gamma \leq b$ である．また，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$\gamma - \varepsilon$ は C の上界ではないから，$\gamma - \varepsilon < x \leq \gamma$ となる $x \in C \subset U_1$ が存在する．したがって，$(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \cap U_1 \neq \emptyset$ $(\forall \varepsilon > 0)$ である．これは γ が U_1 の触点であることを示している．よって，$\gamma \in \bar{U}_1$ である．しかし，$\mathbb{R} = U_1 \cup U_2$, $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ より，$U_1 = U_2^c$ である．U_2 は開集合だから，$U_1 = U_2^c$ は閉集合である．したがって，$U_1 = \bar{U}_1$ である．ゆえに，$\gamma \in U_1$ である．$\gamma \leq b$ であったが，もし，$\gamma = b$ とすると，$\gamma = b \in U_1 \cap U_2$ となって，$U_1 \cap U_2 = \emptyset$ に矛盾する．よって，$\gamma < b$ である．

一方，$\gamma = \sup C$ より，$\gamma < x \leq b$ ならば，$x \notin C$ である．$C \subset U_1$ より，$x \notin U_1$ である．よって，$x \in U_1^c = U_2$ である．特に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$(\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon) \cap U_2 \neq \emptyset$ である．これは γ が U_2 の触点であることを示している．よって，$\gamma \in \bar{U}_2$ である．$U_2 = U_1^c$ は閉集合だから，$U_2 = \bar{U}_2$ である．したがって，$\gamma \in U_1 \cap \bar{U}_2 = U_1 \cap U_2$ となるが，これは $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ に矛盾する．したがって，$U_1 = \emptyset$ または $U_2 = \emptyset$ であり，$\mathbb{R} = U_2$ または $\mathbb{R} = U_1$ である．以上によって，$\mathbb{R}$ は連結であることが示された．

逆に，A を $\mathbb{R}$ の連結な部分集合で少なくとも2点を含むとする．まず，A は閉集合は有界であるとする．$a = \inf A$, $b = \sup A$ とおく．$a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2$ とすれば，$a \leq a_1 < a_2 \leq b$ である．よって，$a < b$ である．もし，$a < c < b$ となる $c \notin A$ が存在したとすれば，$U_1 = (-\infty, c)$, $U_2 = (c, \infty)$ とおけば，U_1, U_2 は開集合であり，

$$A \subset \mathbb{R} \setminus \{c\} = U_1 \cup U_2, \quad A \cap U_1 \cap U_2 = \emptyset$$

である．さらに，$\varepsilon > 0$ を $\varepsilon < c - a$, $\varepsilon < b - c$ にとれば，$a + \varepsilon$ は A の下界ではないから，$a \leq x < a + \varepsilon < c$ となる $x \in A$ が存在する．よって，$A \cap U_1 \neq \emptyset$ である．同様に，$b - \varepsilon$ は A の上界ではないから，$c < b - \varepsilon \leq x \leq b$ となる $x \in A$ が存在する．よって, $A \cap U_2 \neq \emptyset$ である．したがって，$A \not\subset U_2$, $A \not\subset U_1$ である．これは A が連結であることに矛盾する．ゆえに，$a < c < b$ ならば，$c \in A$ である．すなわち，$(a, b) \subset A$ である．また，a は A の1つの下界であり，b は A の1つの上界であるから，$c \in A$ ならば，$a \leq c \leq b$ である．よって，$A \subset [a, b]$ である．以上によって，$(a, b) \subset A \subset [a, b]$ が示された．したがって，$a \in A, b \in A$ ならば，$A = [a, b]$，$a \notin A, b \in A$ ならば，$A = (a, b]$，$a \in A, b \notin A$ ならば，$A = [a, b)$，$a \notin A, b \notin A$ ならば，$A = (a, b)$ である．A が有界でない場合も，$a = -\infty$ あるいは $b = \infty$ として，同様に議論すればよい． □

定理 2.57 (中間値の定理)．$a < b$ とし，$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ を連続関数とする．そのとき，$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の c に対して，$f(x_0) = c$ となる $x_0 \in [a, b]$ が存在する．

[証明]　命題2.56より，$[a, b]$ は連結である．定理2.54より，$f([a, b])$ も連結である．命題2.56より，$f([a, b])$ は区間である．定理2.37より，$[a, b]$ はコンパクトであり，定理2.38より，$f([a, b])$ もコンパクトである．定理2.37より，$f([a, b])$ は有界閉集合である．ゆえに，$f([a, b])$ は有界閉区間である．したがって，$f(a)$ と $f(b)$

の間の任意の c に対して，$c \in f([a,b])$ であり，$f(x_0)=c$ となる $x_0 \in [a,b]$ が存在する． □

命題 2.58. $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathbb{R}^n$ の連結部分集合の族で，$A_\lambda \cap A_\mu \neq \emptyset$ $(\forall\lambda,\mu\in\Lambda)$ を満たすとする．そのとき，$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は連結である．

[証明]　$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ が連結でないとすると，開集合 U_1, U_2 で，

$$A\subset U_1\cup U_2,\quad A\cap U_1\cap U_2=\emptyset,\quad A\cap U_1\neq\emptyset,\quad A\cap U_2\neq\emptyset$$

を満たすものが存在する．$a_1\in A\cap U_1$, $a_2\in A\cap U_2$ をとる．

$$A\cap U_1=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\cap U_1,\quad A\cap U_2=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\cap U_2$$

より，ある $\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda$ が存在して，$a_1\in A_{\lambda_1}\cap U_1$, $a_2\in A_{\lambda_2}\cap U_2$ である．このとき，

$$A_{\lambda_1}\subset A\subset U_1\cup U_2,\quad A_{\lambda_1}\cap U_1\cap U_2=\emptyset$$

であり，$A_{\lambda_1}\cap U_1\neq\emptyset$ である．A_{λ_1} は連結であるから，$A_{\lambda_1}\subset U_1$, $A_{\lambda_1}\cap U_2=\emptyset$ である．同様にして，$A_{\lambda_2}\subset U_2$, $A_{\lambda_2}\cap U_1=\emptyset$ である．したがって，

$$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}\subset A\cap U_1\cap U_2=\emptyset$$

より，$A_{\lambda_1}\cap A_{\lambda_2}=\emptyset$ となるが，これは仮定に矛盾する．ゆえに，$A=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$ は連結である． □

定理 2.59. A を $\mathbb{R}^n$ の連結部分集合とし，B を $\mathbb{R}^m$ の連結部分集合とする．そのとき，直積集合 $A\times B$ は $\mathbb{R}^{n+m}$ の連結集合である．

[証明]　$A\times B$ の点 (a,b) を固定する．$A\times B$ の任意の点 (x,y) に対して，2 点 (a,b), (x,y) を含む連結集合が存在することを示す．$M=A\times\{y\}$ および $N=\{a\}\times B$ はそれぞれ連結集合 A, B の連続写像による像であるから連結である．$(a,y)\in M\cap N$ であるから，命題2.58 より，$L_{(x,y)}=M\cup N$ は連結であり，2 点 (a,b), (x,y) を含む．$(x,y)\in L_{(x,y)}\subset A\times B$ が $A\times B$ の任意の点 (x,y) に対して成り立つから，

$$A\times B=\bigcup_{(x,y)\in A\times B}L_{(x,y)}.$$

任意の $(x,y)\in A\times B$ に対して，$(a,b)\in L_{(x,y)}$ であるから，命題2.58 より，$L_{(x,y)}$ の和集合である $A\times B$ も連結である． □

A　ベルンシュタインの定理

命題 A.1. X を無限集合とし，Y と A を X の部分集合とする．Y は無限集合であり，A は有限集合または可算集合であるとする．そのとき，$Y \cup A$ の濃度は Y の濃度と等しい．

[証明]　Y から 1 つの元 b_1 をとる．$Y \setminus \{b_1\}$ から b_2 をとる．以下同様にして，$Y \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ から b_{n+1} をとる．Y は無限集合だからこの操作はどこまでも続けられる．そこで，

$$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$$

とおけば，$B \subset Y$ であり，命題 1.19 より，B は可算集合である．$A' = A \setminus Y$ とおくと，命題 1.19 より，A' は有限集合または可算集合である．命題 1.20 より，$B \cup A'$ は可算集合である．したがって，全単射 $B \cup A' \longrightarrow \mathbb{N}$ と全単射 $\mathbb{N} \longrightarrow B, n \longmapsto b_n$ を合成して得られる全単射 $f : B \cup A' \longrightarrow B\ (\subset Y)$ がある．このとき，

$$\begin{gathered} Y \cup A = Y \cup A', \quad Y \cap A' = \emptyset, \\ Y = (Y \setminus B) \cup B, \quad (Y \setminus B) \cap B = \emptyset \end{gathered}$$

であるから，

$$Y \cup A = (Y \setminus B) \cup (B \cup A'), \quad (Y \setminus B) \cap (B \cup A') = \emptyset$$

である．よって，写像 $\tilde{f} : Y \cup A \longrightarrow Y$ を

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} x, & x \in Y \setminus B, \\ f(x), & x \in B \cup A' \end{cases}$$

によって定義する．このとき，$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x')$ とする．$x \in Y \setminus B, x' \in B \cup A'$ とすれば，$\tilde{f}(x) = x \in Y \setminus B, \tilde{f}(x') = f(x') \in B$ であるから，$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x') \in (Y \setminus B) \cap B = \emptyset$ となって矛盾である．よって，$x, x' \in Y \setminus B$ または $x, x' \in B \cap A'$ であり，$x = x'$ または $f(x) = f(x')$ である．f は単射だから，後者の場合でも $x = x'$ である．ゆえに，$\tilde{f}$ は単射である．また，任意の $y \in Y$ に対して，$Y = (Y \setminus B) \cup B$ であるから，$y \in Y \setminus B$ または $y \in B$ である．$y \in Y \setminus B$ ならば，$\tilde{f}(y) = y$ であり，$y \in B$ ならば，$f(x) = y$ となる $x \in B \cup A'$ が存在するから，$\tilde{f}(x) = f(x) = y$ である．ゆえに，$\tilde{f}$ は全射である．以上によって，$\tilde{f}$ は全単射であり，$Y \cup A$ と Y は同じ濃度を持つ．　□

命題 A.2. X と Y がともに $\mathbb{R}$ と同じ濃度を持つとすれば，直積集合 $X \times Y$ も $\mathbb{R}$ と同じ濃度を持つ．

[証明]　$I = \{a \in \mathbb{R} \mid 0 \leq a < 1\}$ とする．全単射 $f : I \longrightarrow I^2$ を構成する．各 $a \in I$ を小数展開して，

$$a = 0.a_1 a_2 \cdots a_n \cdots$$

と表す．前と同様に，a が小数点 n 桁の有限小数ならば，$a_i = 0\ (i > n)$ とおいた無限小数であるとする．このとき，小数展開は一意に定まる．このように $a \in I$ を無限小数で表すとき，

$$x = 0.a_1a_3a_5 \cdots a_{2n-1} \cdots ,$$
$$y = 0.a_2a_4a_6 \cdots a_{2n} \cdots$$

とおけば，$x, y \in I$ である．$f(a) = (x, y)$ とおくことによって，写像 $f : I \longrightarrow I^2$ を定義する．明らかに，f は単射である．実際，$f(a) = (x, y)$ とすると，x の小数展開から，a の小数展開の奇数番目の数がわかり，y の小数展開から a の小数展開の偶数番目がわかるから，a の小数展開がわかり，a が (x, y) からわかることになる．また，任意の $(x, y) \in I^2$ に対して，x, y の小数展開を

$$x = 0.b_1b_2b_3 \cdots b_n \cdots ,$$
$$y = 0.c_1c_2c_3 \cdots c_n \cdots$$

とすると，

$$a = 0.b_1c_1b_2c_2 \cdots b_nc_n \cdots$$

とおけば，$a \in I$ であり，$f(a) = (x, y)$ である．よって，f は全射であり，全単射である．$I' = I \setminus \{0\} = \{a \in \mathbb{R} \,|, 0 < a < 1\}$ とおけば，$I = I' \cup \{0\}$ であるから，命題 A.1 より，I の濃度と I' の濃度は等しい．よって，全単射 $g : I' \longrightarrow I$ が存在する．よって，合成写像 $f \circ g : I' \longrightarrow I^2$ は全単射である．g の逆写像を $g^{-1} : I \longrightarrow I'$ とすれば，

$$I^2 \longrightarrow I'^2, \quad (x, y) \longmapsto (g^{-1}(x), g^{-1}(y))$$

は全単射である．さらに，定理 1.21 の証明でみたように，全単射 $h : I' \longrightarrow \mathbb{R}$ が存在するから，

$$I'^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (h(x), h(y))$$

も全単射である．以上によって，

$$\mathbb{R} \text{ の濃度} = I' \text{ の濃度} = I^2 \text{ の濃度} = I'^2 \text{ の濃度} = \mathbb{R}^2 \text{ の濃度}$$

である．$p : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $q : Y \longrightarrow \mathbb{R}$ を全単射とすれば，

$$X \times Y \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (p(x), q(y))$$

も全単射であるから，

$$X \times Y \text{ の濃度} = \mathbb{R}^2 \text{ の濃度} = \mathbb{R} \text{ の濃度}.$$

$\square$

命題 A.2 より，$\mathbb{R}^2$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいから，命題 A.2 より，帰納的に $\mathbb{R}^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ の濃度は $\mathbb{R}$ の濃度と等しいことがわかる．

集合 X の濃度を $\mathrm{card}(X)$ で表す．$\mathrm{card}(\mathbb{N}) = \aleph_0$, $\mathrm{card}(\mathbb{R}) = \aleph$ とかく．

定義 A.3. 集合 X から集合 Y への単射が存在するとき，$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ とかく．$\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ かつ $\mathrm{card}(X) \neq \mathrm{card}(Y)$ のとき，$\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(Y)$ とかく．

定理 A.4 (ベルンシュタインの定理)**.** $\mathrm{card}(X) \leq \mathrm{card}(Y)$ かつ $\mathrm{card}(Y) \leq \mathrm{card}(X)$ ならば，$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ である．

[証明]　単射 $f : X \longrightarrow Y$ と単射 $g : Y \longrightarrow X$ が存在するとき，全単射 $X \longrightarrow Y$ が存在することを示す．$\Phi = g \circ f$ とおけば，$\Phi : X \longrightarrow X$ は単射である．この写像 Φ を用いて，X の部分集合の列

$$X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$$

で，

$$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(X_2) = \mathrm{card}(X_4) = \cdots, \tag{A.1}$$

$$\mathrm{card}(Y) = \mathrm{card}(X_1) = \mathrm{card}(X_3) = \cdots \tag{A.2}$$

となるものを構成しよう．まず，偶数番目の部分集合 $X_2, X_4, \ldots$ を次のように構成する．$X_2 = \Phi(X)$ とおけば，$X \supset X_2$ であり，Φ は X から X_2 への全単射であるから，$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(X_2)$ である．同様に，$X_4 = \Phi(X_2)$ とおけば，$X \supset X_2$ より，$X_2 = \Phi(X) \supset \Phi(X_2) = X_4$, $\mathrm{card}(X_2) = \mathrm{card}(X_4)$ である．以下同様にして，$X_{2n+2} = \Phi(X_{2n})$ $n = 1, 2, \ldots$ とおけば，$X_{2n+2} \supset X_{2n}$, $\mathrm{card}(X_{2n+2}) = \mathrm{card}(X_{2n})$ である．次に奇数番目の部分集合 $X_3, X_5, \ldots$ を以下のように構成する．$X_1 = g(Y)$ とおく．$X_1 \subset X$ で，g は Y から X_1 への全単射であるから，$\mathrm{card}(Y) = \mathrm{card}(X_1)$ である．以下同様に，

$$X_3 = \Phi(X_1), \quad X_5 = \Phi(X_3),\ \cdots,\ X_{2n+1} = \Phi(X_{2n-1}),\ \cdots$$

が得られる．このとき，$X_{2n-1} \supset X_{2n+1}$ であり，$\mathrm{card}(X_{2n-1}) = \mathrm{card}(X_{2n+1})$ である．$Y \supset f(X)$ より，$X_1 = g(Y) \supset g(f(X)) = \Phi(X) = X_2$ である．ここで，$X_{2n-2} \supset X_{2n-1} \supset X_{2n}$ とすると，

$$X_{2n} = \Phi(X_{2n-2}) \supset \Phi(X_{2n-1}) = X_{2n+1} \supset \Phi(X_{2n}) = X_{2n+2}.$$

以上によって，(A.1) と (A.2) を満たす X の部分集合の列 $X \supset X_1 \supset X_2 \supset \cdots$ が得られた．そこで，

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$$

とおけば，X と X_1 は次のように互いに交わらない部分集合の和集合として表せる．

$$X = (X \setminus X_1) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \setminus X_{n+1}) \right) \cup K,$$

$$X_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (X_n \setminus X_{n+1}) \right) \cup K.$$

これから写像 $h : X \longrightarrow X_1$ を

$$h(x) = \begin{cases} \Phi(x), & x \in X_{2n} \setminus X_{2n+1}, \\ x, & x \in X_{2n+1} \setminus X_{2n+2}, \qquad (n = 0, 1, 2, \dots) \\ x, & x \in K \end{cases}$$

によって定義できる．ただし，$X_0 = X$ とした．そのとき，h は全単射である．$g : Y \longrightarrow X_1$ は全単射であるから，$g^{-1} : X_1 \longrightarrow Y$ を g の逆写像とすれば，$g^{-1} \circ h : X \longrightarrow Y$ は全単射であり，$\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ が示された． □

B　選択公理

選択公理 集合 X から集合 Y への全射 $f : X \longrightarrow Y$ が与えられたとき，写像 $g : Y \longrightarrow X$ で，$f \circ g = \mathrm{id}_Y$ となるものが存在する．

命題 A.1 の証明および命題 1.27 の証明の下線部には選択公理を用いている．