

いろいろな曲線

上越教育大学 中川仁

令和4年9月2日(金)～9月30日(金)

毎週金曜日 19:00～21:00

上越教育大学 講義棟 201 教室

ただし9月23日は講義棟 302 教室

目次

1	円錐曲線の性質	1
1.1	楕円	1
1.2	双曲線	3
1.3	放物線	5
1.4	楕円, 双曲線, 放物線の接線	5
1.5	円錐面と平面の交線としての円錐曲線	10
1.5.1	平面の傾きが円錐の側面の傾きよりも小さい場合	10
1.5.2	平面の傾きが円錐の側面の傾きよりも大きい場合	10
1.5.3	平面の傾きが円錐の側面の傾きと等しい場合	12
2	放物運動と惑星の運動	13
2.1	一様な重力場における放物体の運動	13
2.2	中心力場における運動	14
3	サイクロイド	21
3.1	最速降下線	21
3.2	サイクロイドに沿った往復運動	26
3.3	サイクロイドの伸開線とサイクロイド振り子	28
4	楕円積分	30
4.1	単振り子	31
4.2	楕円の弧長	34
4.3	レムニスケートの弧長	35
5	楕円曲線	38
A	微積分の基本事項と公式	41
A.1	微分	41
A.2	積分	48
A.3	曲線の弧長	53
B	ニュートンの運動方程式	60
C	レムニスケート関数とその加法定理	64

はじめに

円錐曲線とは円錐面を平面で切断したときに現れる楕円，放物線，双曲線の3種類の曲線群の総称である．古代ギリシャのアポロニウス（前262年頃 – 前190年頃）は円錐曲線論の体系を著書にまとめた．ドイツの天文学者ケプラー（1571年–1630年）はデンマークの天文学者ティコ・ブラーエ（1546年–1601年）の肉眼で観察された惑星の観測データをもとに有名なケプラーの3法則を発見した（第1，第2法則は1609年に発表，第3法則は1619年に発表）．

- **第1法則**：惑星は太陽を1つの焦点とする楕円上を運動する．
- **第2法則**：惑星と太陽を結ぶ線分が一定時間に通過する面積は一定である．
- **第3法則**：惑星の公転周期 T の2乗は軌道長半径 a の3乗に比例する．

ケプラーの法則はニュートンによる万有引力の発見に結びついた．

本講座ではまず円錐曲線の性質を述べ，万有引力からケプラーの法則を導く．さらに最速降下線問題と等時曲線問題について解説する．次に振幅が大きい場合の振り子の運動を考察すると楕円の弧の長さを表す楕円積分と関係すること，レムニスケートとよばれる八の字型の曲線の弧の長さも楕円積分で表されることを解説する．最後に楕円積分の逆関数として定義される楕円関数とそれによってパラメータ表示される楕円曲線についても解説する．

また付録Aに微積分の基本事項を，付録Bにニュートン力学の基本事項をまとめておいた．付録Cでは楕円積分の逆関数として定義される楕円関数について解説した．

本講座の参考書として，松下泰雄「曲線の秘密」，講談社，2016年を挙げておく．

1 円錐曲線の性質

定義 1.1. 2つの定点 F, F' からの距離の和が一定であるような点の軌跡を**楕円**という. 2つの定点 F, F' からの距離の差が一定であるような点の軌跡を**双曲線**という. 楕円, 双曲線いずれについても F, F' を**焦点**とよぶ. 1つの定直線 d と d 上にない定点 F との距離が等しいような点の軌跡を**放物線**という. F を放物線の焦点, d を**準線**とよぶ. また焦点 F を通り準線 d と垂直な直線を放物線の**軸**とよぶ.

1.1 楕円

座標平面で楕円を考えてその方程式を求めよう. 2点 F, F' を結ぶ直線を x 軸とするような座標をとる. $c > 0$ として $F = (c, 0), F' = (-c, 0)$ とする. $a > 0$ として点 P と F との距離 PF と点 P と F' の距離 PF' の和が $2a$ であるような点 P の軌跡であるような楕円を考える. $2a = PF + PF' > FF' = 2c$ より $a > c$ である. P の座標を (x, y) とすれば三平方の定理により $PF = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, PF' = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ であるから

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} &= 2a, \\ \sqrt{(x+c)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (x+c)^2 + y^2 &= \left(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\right)^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \\ (1.1) \quad cx - a^2 &= -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \\ (cx - a^2)^2 &= a^2(x-c)^2 + a^2y^2, \\ c^2x^2 - 2a^2cx + a^4 &= a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2. \end{aligned}$$

したがって

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$ とおけば

$$(1.2) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$b^2 = a^2 - c^2$ より $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ である. $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ とおけば $0 < e < 1$ である. e をこの楕円の**離心率**とよぶ. e を用いて方程式 (1.2) を書き直す. (1.1) と $c = ea$ より

$$(1.3) \quad \begin{aligned} a - ex &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ e \left| \frac{a}{e} - x \right| &= \sqrt{(x - c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

直線 $x = a/e$ を d で表す. 楕円 (1.2) 上の点 P に対して, P から直線 d へおろした垂線と直線 d との交点を P' とする. P と d の距離が PP' である. (1.3) は PF と PP' の比が e に等しいことを示している:

$$(1.4) \quad \frac{PF}{PP'} = e.$$

直線 d を楕円の**準線**とよぶ. $PF = r$ とおき, 直線 FP と直線 $F'F$ のなす角を θ と

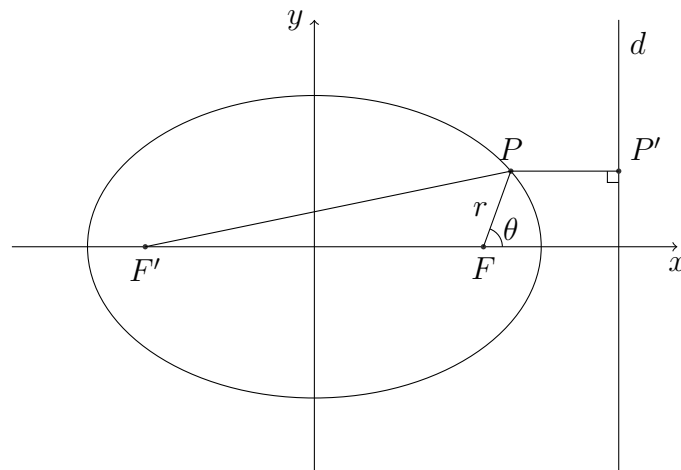


図1 楕円

すれば (図1)

$$PP' + r \cos \theta = \frac{a}{e} - c$$

となるから, (1.4) は

$$r = e \left(\frac{a}{e} - c - r \cos \theta \right), \quad r = a - ce - er \cos \theta.$$

よって $l = a - ce = a(1 - e^2) > 0$ とおけば、楕円は

$$(1.5) \quad r = \frac{l}{1 + e \cos \theta}$$

と極形式の方程式によって表される. $e = 0$ のときは $r = l$ (一定) となって、これは半径 l の円である.

1.2 双曲線

$a > 0$ として点 P と F との距離 PF と点 P と F' の距離 PF' の差が $2a$ であるような点 P の軌跡であるような双曲線を考える. $2a = |PF - PF'| < FF' = 2c$ より $a < c$ である. P の座標を (x, y) とすれば三平方の定理により $PF = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$, $PF' = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$ であるから $PF \leq PF'$ とすると

$$(1.6) \quad \begin{aligned} \sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a, \\ \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ (x + c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2, \\ cx - a^2 &= a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}, \\ (cx - a^2)^2 &= a^2(x - c)^2 + a^2y^2. \end{aligned}$$

$PF > PF'$ とすると

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sqrt{(x - c)^2 + y^2} - \sqrt{(x + c)^2 + y^2} &= 2a, \\ \sqrt{(x - c)^2 + y^2} &= 2a + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \\ (x - c)^2 + y^2 &= 4a^2 + 4a\sqrt{(x + c)^2 + y^2} + (x + c)^2 + y^2, \\ -cx - a^2 &= a\sqrt{(x + c)^2 + y^2}, \\ (cx + a^2)^2 &= a^2(x + c)^2 + a^2y^2. \end{aligned}$$

したがっていずれの場合も

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$ とおけば

$$(1.8) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$b^2 = c^2 - a^2$ より $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$ とおくと $e > 1$ である. e をこの双曲線の**離心率**とよぶ. e を用いて方程式 (1.8) を書き直す. (1.6), (1.7) と $c = ea$ より

$$(1.9) \quad e \left| x \pm \frac{a}{e} \right| = \sqrt{(x \pm c)^2 + y^2}$$

直線 $x = a/e$ を d , 直線 $x = -a/e$ を d' で表す. 双曲線 (1.8) の $x > 0$ の部分の点 P に対して, P から直線 d へおろした垂線と直線 d との交点を P' とする. P と d の距離が PP' である. (1.9) は PF と PP' の比が e に等しいことを示している:

$$(1.10) \quad \frac{PF}{PP'} = e.$$

同様に双曲線 (1.8) の $x < 0$ の部分の点 P に対して, P から直線 d' へおろした垂線と直線 d' との交点を P' とする. P と d' の距離が PP' である. (1.9) は PF' と PP' の比が e に等しいことを示している:

$$(1.11) \quad \frac{PF'}{PP'} = e.$$

直線 d, d' を双曲線の**準線**とよぶ.

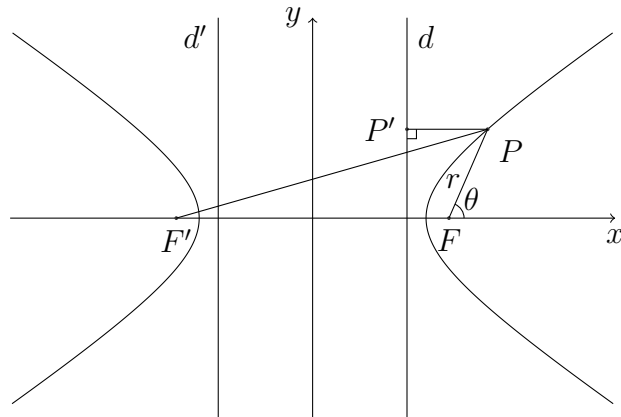


図2 双曲線

双曲線上の点 P が $x > 0$ の部分にあるとき, $PF = r$ とおき, 直線 FP と直線 $F'F$ のなす角を θ とすれば

$$PP' = r \cos \theta + c - \frac{a}{e}$$

となるから, (1.10) は

$$r = e \left(r \cos \theta + c - \frac{a}{e} \right), \quad r = er \cos \theta + ce - a.$$

よって $l = ce - a = a(e^2 - 1) > 0$ とおけば, 双曲線は

$$(1.12) \quad r = \frac{l}{1 - e \cos \theta}$$

と極形式の方程式によって表される.

1.3 放物線

最後に放物線の方程式を求める. 焦点 F を通り準線 d に垂直な直線を y 軸とし, 準線 d と y 軸との交点を F' とする. FF' を中点を通り d と平行な直線を x 軸とする. F の座標を $(0, c)$, $c > 0$ とする. このとき準線 d は方程式 $y = -c$ であらわされる直線である. この放物線上の点 P の座標を (x, y) とすると, P と準線 d との距離は $|y + c|$ であり, $PF = \sqrt{x^2 + (y - c)^2}$ であるから

$$\begin{aligned} |y + c| &= \sqrt{x^2 + (y - c)^2}, \\ (y + c)^2 &= x^2 + (y - c)^2, \\ 4cy &= x^2. \end{aligned}$$

したがって放物線の方程式は

$$y = \frac{1}{4c} x^2$$

となる.

$PF = r$ とおき, y 軸と半直線 FP のなす角を θ とする (図 3). $r \cos \theta + 2c = r$ より $l = 2c$ とおけば, 放物線は

$$(1.13) \quad r = \frac{l}{1 - \cos \theta}$$

と極形式の方程式によって表される.

1.4 楕円, 双曲線, 放物線の接線

楕円, 双曲線, 放物線の接線のもつ性質を説明しよう.

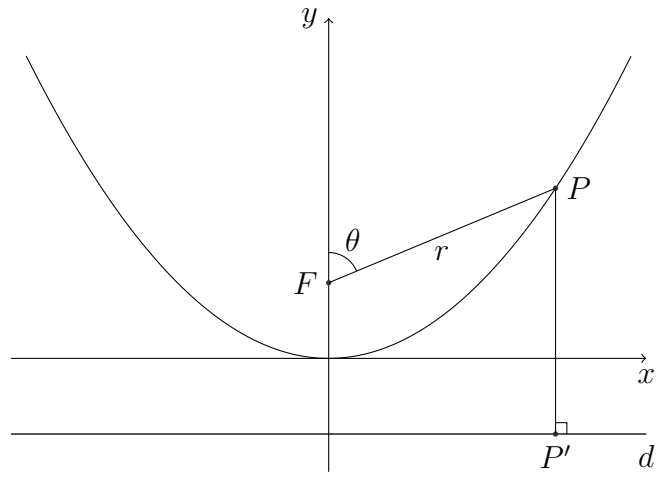


図 3 放物線

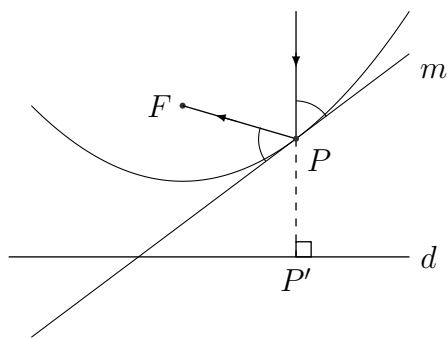


図 4 放物線の接線の性質

命題 1.2. 焦点 F , 準線 d をもつ放物線上の点 P における接線を m とする. P を通る放物線の軸と平行な直線と接線 m のなす角は P と F を通る直線と接線 m のなす角に等しい (図 4). いいかえると軸と平行な光線は放物線で反射して焦点に集まる.

[証明] F と P' を通る直線の垂直 2 等分線を n とする. n 上の任意の点 Q をとれば, $QF = QP'$ である. 逆に $QF = QP'$ ならば Q は n 上の点である. 特に $PF = PP'$ であるから P は n 上の点である. Q を P と異なる n 上の点として, 準線 d 上の点 Q' を QQ' が d と垂直となるようにとると, $QQ' < QP' = QF$ である (図 5). したがって Q は放物線上にはない. すなわち直線 n は放物線と点 P を共有し, P 以外の点を共有しないから, 直線 n は P における放物線の接線 m と一致する. したがって m は F と P' を通る直線の垂直 2 等分線である. ゆえに F と P を通る直線と m のなす角は放物線の軸と平行な直線と接線 m のなす角に等しい. \square

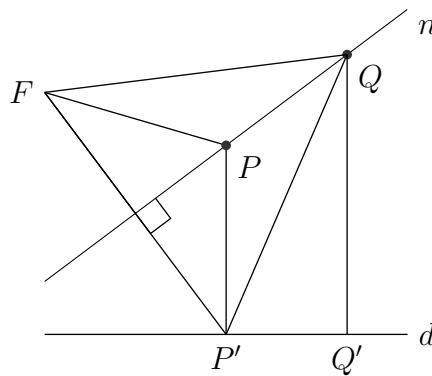


図 5

命題 1.3. 焦点 F, F' をもつ楕円上の点 P における接線を m とすると, FP と m のなす角と $F'P$ と m のなす角は等しい. いいかえると焦点 F から出た光線は楕円で反射してもう一方の焦点 F' に集まる.

[証明] 図 7 のように $\angle FPF'$ の 2 等分線を n とし, P を通り n に垂直な直線を m' とする. m' に関して F' と対称な点を F'' とする. F'', P, F は一直線上にある. Q を m' 上の P と異なる任意の点とする. このとき

$$FQ + QF' = FQ + QF'' > FF'' = FP + PF'' = FP + PF' = 2a$$

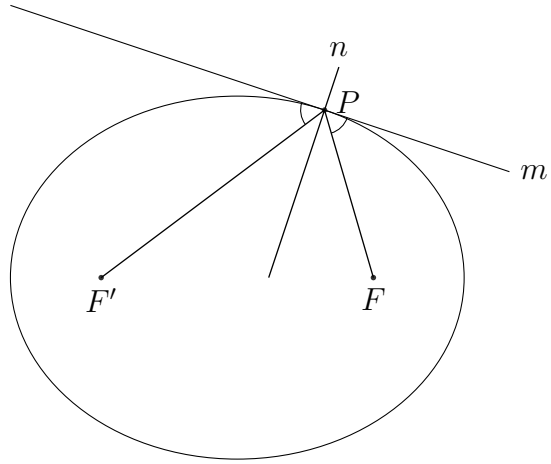


図 6 楕円の接線の性質

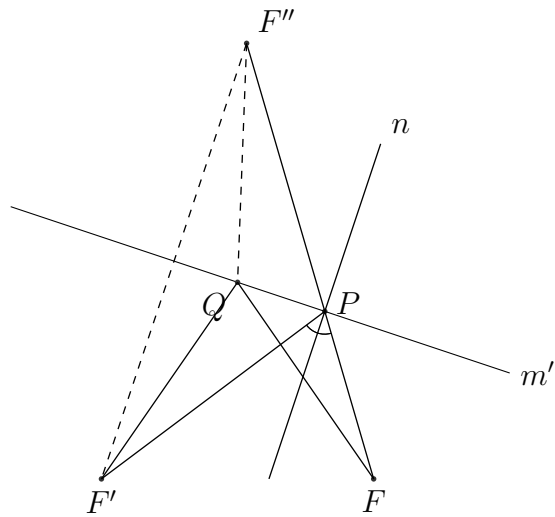


図 7

である. したがって Q は楕円上にはない. すなわち直線 m' は楕円と点 P で接する接線 m と一致する. ゆえに FP と m のなす角と $F'P$ と m のなす角は等しい.

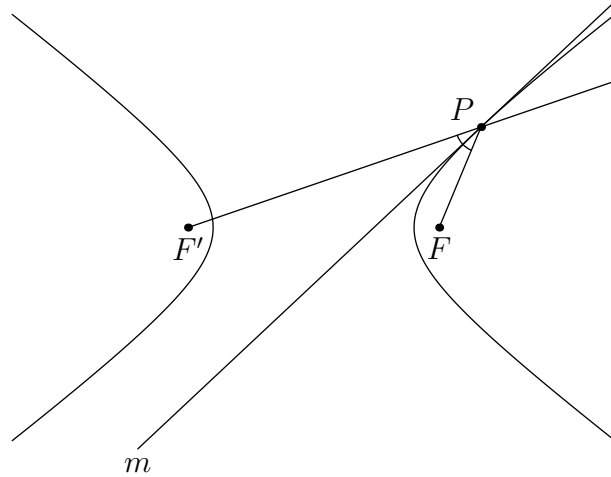


図 8 双曲線の接線の性質

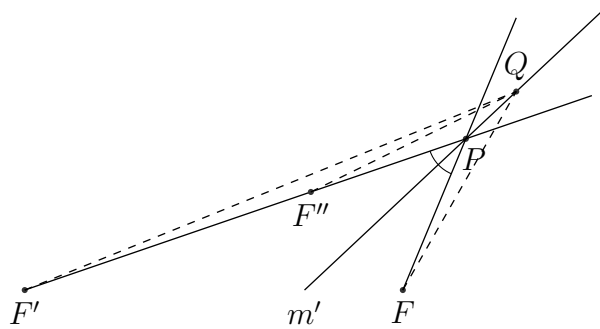


図 9

命題 1.4. 焦点 F, F' をもつ双曲線上の点 P における接線 m を考える. FP と m のなす角と $F'P$ と m のなす角は等しい. いいかえると焦点 F から出た光線は双曲線で反射してもう一方の焦点 F' と P を通る直線の方に拡散する.

[証明] m' を $\angle FPF'$ の 2 等分線とする. $F'P > FP$, $F'P - FP = 2a$ とする. 線分 $F'P$ 上に点 F'' を $PF'' = PF$ となるようにとる (図 9). Q を P と異なる m' の任意の点とする. このとき $F''Q = FQ$, $F'F'' = F'P - F''P = F'P - FP = 2a$ である

から

$$F'Q < F'F'' + F''Q = F'F'' + FQ,$$

$$F'Q - FQ < F'F'' = 2a.$$

したがって Q は双曲線上にはない. すなわち直線 m' は双曲線と点 P で接する接線 m と一致する. ゆえに FP と m のなす角と $F'P$ と m のなす角は等しい. \square

1.5 円錐面と平面の交線としての円錐曲線

円錐 (の側面) S と円錐の頂点を通らない平面 H がある. S と H に接する球を **ダンデリンの球** という. ダンデリンの球を用いて円錐と平面の交線が楕円, 双曲線, 放物線になることを示そう.

1.5.1 平面の傾きが円錐の側面の傾きよりも小さい場合

円錐 S と平面 H の交線上の任意の点 P をとる. P を通る円錐の母線とダンデリンの球 B_1, B_2 との接点をそれぞれ P_1, P_2 とする. 平面 H と球 B_1 の接点を F , 平面 H と球 B_2 の接点を F' とする (図 10). F および P_1 はともに P を通る球 B_1 へ接線の接点であるから $PF = PP_1$ であり, F' および P_2 はともに P を通る球 B_2 へ接線の接点であるから $PF' = PP_2$ である. したがって

$$PF + PF' = PP_1 + PP_2 = P_1P_2 = \text{一定}$$

である. ゆえに円錐 S と平面 H の交線は F, F' を焦点とする楕円である.

1.5.2 平面の傾きが円錐の側面の傾きよりも大きい場合

円錐 S と平面 H の交線上の任意の点 P をとる. P を通る円錐の母線とダンデリンの球 B_1, B_2 との接点をそれぞれ P_1, P_2 とする. 平面 H と球 B_1 の接点を F , 平面 H と球 B_2 の接点を F' とする (図 11). F および P_1 はともに P を通る球 B_1 へ接線の接点であるから $PF = PP_1$ であり, F' および P_2 はともに P を通る球 B_2 へ接線の接点であるから $PF' = PP_2$ である. したがって

$$|PF' - PF| = |PP_2 - PP_1| = P_1P_2 = \text{一定}$$

である. ゆえに円錐 S と平面 H の交線は F, F' を焦点とする双曲線である.

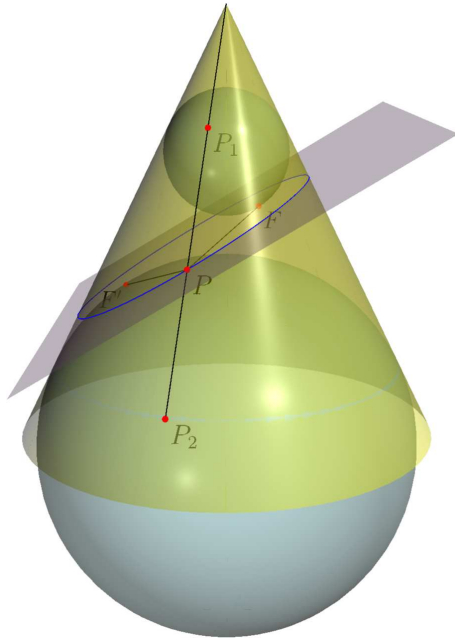


图 10

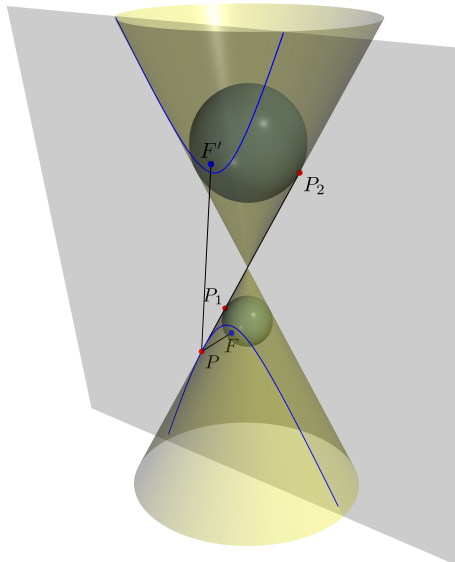


图 11

1.5.3 平面の傾きが円錐の側面の傾きと等しい場合

円錐 S と平面 H の交線上の任意の点 P をとる. P を通る円錐の母線とダンデリンの球 B_1 との接点を P_1 とする. 平面 H と球 B_1 の接点を F とする (図 12). F および P_1 はともに P を通る球 B_1 へ接線の接点であるから $PF = PP_1$ である. 球面 B_1 と円錐 S の交線である円を含む平面を K とする. H と K の交線である直線を ℓ とする. ℓ 上に点 Q を PQ が ℓ と直交するようにとる. 平面 K 上に点 R を PR が K と直交するようにとる. 円錐の中心線と円錐の側面 S のなす角を α とすると円錐の中心線と平面 H のなす角も α に等しい. したがって $\angle P_1PR = \alpha = \angle QPR$ である. よって直角三角形 $\triangle PP_1R$ と直角三角形 $\triangle PQR$ は合同である. ゆえに $PQ = PP_1$ である. したがって $PF = PP_1 = PQ$ である. ゆえに円錐 S と平面 H の交線は F を焦点とし ℓ を準線とする放物線である.

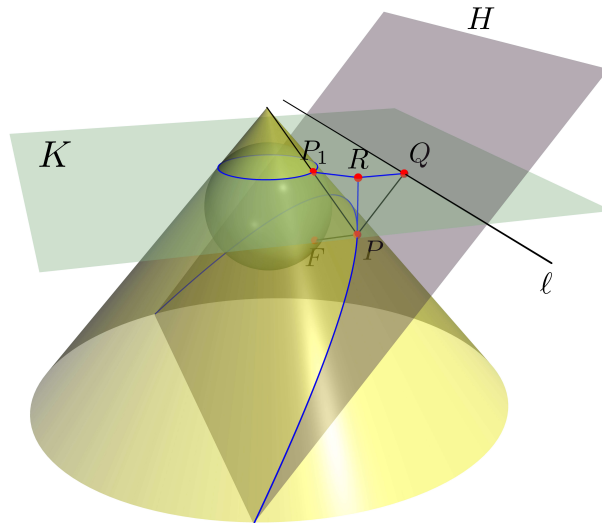


図 12

2 放物運動と惑星の運動

2.1 一様な重力場における放物体の運動

xy 平面上をうごく質点の時刻 t における位置を $(x(t), y(t))$ とする. 時刻 t におけるこの質点の速度は $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ であり, 加速度は $\left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ である.

いま鉛直方向上向きに y 軸をとり, 運動を開始する位置を $y = h > 0$ とする. 物体を xy 平面内で投射角 θ , 初速 v_0 で投げ上げた場合, 空気の抵抗を無視すれば, 質量 m のボールが受ける力は y 軸の負の方向に向かう一様な重力で, 重力加速度を g とすると $(0, -mg)$ であるから, ボールの運動方程式は

$$(2.1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g.$$

この場合は 2 個の方程式を別々に考えることができる. (2.1) を初期条件

$$(2.2) \quad \begin{aligned} (x(0), y(0)) &= (0, h), \\ \left(\frac{dx}{dt}(0), \frac{dy}{dt}(0)\right) &= (v_0 \cos \theta, v_0 \sin \theta) \end{aligned}$$

のもとで考える. (2.1) より x は t の高々 1 次式, y は 2 次式であることがわかる. これらがさらに (2.2) をみたすとする

$$(2.3) \quad x(t) = (v_0 \cos \theta)t, \quad y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \theta)t + h$$

である. $v_0 \cos \theta \neq 0$ のときは, t を消去するとボールの軌跡は

$$y = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \theta} x^2 + (\tan \theta)x + h$$

となり, これは放物線である (図 13). $v_0 \cos \theta = 0$ のときは

$$y = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \sin \theta)t + h, \quad x = 0$$

となる. $v_0 = 0$ のときは高さ h のところから自由落下させた運動であり, 時刻 $\sqrt{2h/g}$ のとき地表に達する.

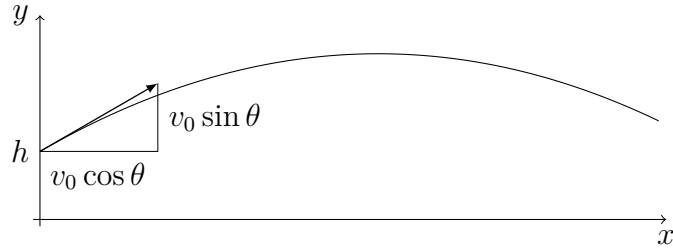


図 13 放物運動

2.2 中心力場における運動

1つの惑星と太陽が万有引力に支配されて運動しているとき、惑星は、初期条件から決まる太陽を原点とするある平面上を、原点からの距離の2乗に反比例する引力を受けて運動している。すなわち、この平面を (x, y) 平面とすると、惑星の位置 $(x(t), y(t))$ は次の微分方程式

$$(2.4) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -k \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -k \frac{y}{r^3}$$

によって決まる。ただし $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。 k は惑星と太陽の質量および万有引力定数から決まる定数である。初期条件を

$$(2.5) \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad \frac{dx}{dt}(0) = x_1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = y_1$$

とする。以下、 $x = x(t)$, $y = y(t)$ は (2.5) をみたす (2.4) の解とする。

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

と極座標表示して、 $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ が満たす微分方程式を求めると

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta, \\ \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \theta - r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos \theta, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos \theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

これから

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \theta \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} \cos^2 \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \cos \theta - r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cos^2 \theta \\
&\quad + \frac{d^2r}{dt^2} \sin^2 \theta + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin \theta \cos \theta + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin \theta \cos \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin^2 \theta \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.
\end{aligned}$$

一方, (2.4) から

$$\frac{d^2x}{dt^2} \cos \theta + \frac{d^2y}{dt^2} \sin \theta = -k \frac{r \cos^2 \theta}{r^3} - k \frac{r \sin^2 \theta}{r^3} = -\frac{k}{r^2}.$$

よって

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k}{r^2} = 0.$$

また

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2x}{dt^2} \sin \theta - \frac{d^2y}{dt^2} \cos \theta \\
&= \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \sin^2 \theta - r \frac{d^2\theta}{dt^2} \sin^2 \theta - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \\
&\quad - \frac{d^2r}{dt^2} \sin \theta \cos \theta - 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \cos^2 \theta - r \frac{d^2\theta}{dt^2} \cos^2 \theta + r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \\
&= -2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} - r \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right).
\end{aligned}$$

一方, (2.4) から

$$\frac{d^2x}{dt^2} \sin \theta - \frac{d^2y}{dt^2} \cos \theta = -k \frac{r \sin \theta \cos \theta}{r^3} + k \frac{r \sin \theta \cos \theta}{r^3} = 0.$$

よって

$$\frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0.$$

したがって

$$(2.6) \quad \frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 + \frac{k}{r^2} = 0, \quad \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

が得られる。この連立2階微分方程式を連立1階微分方程式に書き換えるために、 p, q を

$$(2.7) \quad p = \frac{dr}{dt}, \quad q = r^2 \frac{d\theta}{dt}$$

により定める。このとき(2.6)は

$$(2.8) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= p, & \frac{dp}{dt} &= \frac{q^2}{r^3} - \frac{k}{r^2}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{q}{r^2}, & \frac{dq}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

となる。

ここで4変数 r, p, θ, q の関数 H を

$$(2.9) \quad H = \frac{1}{2} \left(p^2 + \frac{q^2}{r^2} \right) - \frac{k}{r}$$

によって定義する。 H は θ によらない。このとき(2.8)は

$$(2.10) \quad \begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial p}, & \frac{dp}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial r}, \\ \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial q}, & \frac{dq}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

と同値である。

このような H を考えると都合がよいのは、(2.8)の解 $(r(t), p(t), \theta(t), q(t))$ に対して

$$H(t) = H(r(t), p(t), \theta(t), q(t))$$

が t によらない定数となるからである。実際、(2.10)より

$$\begin{aligned} \frac{dH(t)}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial r} \frac{dr}{dt} + \frac{\partial H}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial H}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial H}{\partial q} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{\partial H}{\partial r} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{\partial H}{\partial p} \frac{\partial H}{\partial r} = 0. \end{aligned}$$

H は本質的にエネルギーとよばれる関数である。実際

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = p^2 + \frac{q^2}{r^2}$$

であるから

$$mH = \frac{1}{2}m \left(p^2 + \frac{q^2}{r^2} \right) - \frac{km}{r} = \frac{1}{2}m \left[\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 \right] - \frac{km}{r}$$

となり, これは mH が運動エネルギーと位置エネルギーの和であることを示している.

さて $\frac{dq}{dt} = 0$ より q は定数である. 初期条件 (2.5) から決まるこの定数を

$$(2.11) \quad q = h$$

と表すことにする. H も初期条件 (2.5) から決まる定数であるからこれを E とすると, $H(r, p, \theta, q) = E$, これは $h \neq 0$ ならば

$$(2.12) \quad \left(\frac{1}{r} - \frac{k}{h^2} \right)^2 + \frac{p^2}{h^2} = \frac{2E}{h^2} + \left(\frac{k}{h^2} \right)^2$$

とかける. 特に

$$(2.13) \quad -\frac{k^2}{2h^2} \leq E < 0$$

の場合を考えることにする. このとき $(1/r, p)$ 平面において (2.12) は楕円を表すので, 変数 ϕ を導入して (2.12) を

$$(2.14) \quad \frac{1}{r} - \frac{k}{h^2} = \left(\frac{k}{h^2} \right) e \cos \phi, \quad p = \left(\frac{k}{h} \right) e \sin \phi$$

と表すことにする. ここで

$$(2.15) \quad e = \sqrt{1 + \frac{2h^2 E}{k^2}}.$$

とおいた. (2.13) より $0 \leq e < 1$ である. (2.8) より $\frac{dr}{dt} = p$ であるから (2.14) の第 1 式を t で微分して第 2 式を用いると

$$\begin{aligned} -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} &= -\left(\frac{k}{h^2} \right) e \sin \phi \frac{d\phi}{dt}, \\ \frac{1}{r^2} p &= \frac{1}{h} p \frac{d\phi}{dt}, \\ \frac{d\phi}{dt} &= \frac{h}{r^2}. \end{aligned}$$

(2.8) より $\frac{d\theta}{dt} = \frac{q}{r^2}$ であり, (2.11) より $q = h$ は定数であるから

$$(2.16) \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{h}{r^2}, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}.$$

これより

$$\frac{d\phi}{d\theta} = 1$$

となり, ϕ と θ の関係は θ_0 をある定数として

$$(2.17) \quad \phi = \theta + \theta_0$$

となる. これを (2.14) に代入すると r と θ の関係式

$$(2.18) \quad r = \frac{h^2/k}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)}$$

が得られる. (2.16) より θ は t について単調であり ($h > 0$ なら単調増大), さらに $E < 0$ であるから $0 \leq e < 1$ である. よって (2.18) より軌道は原点を1つの焦点とする楕円であることがわかる. e は離心率とよばれ, $e = 0$ のときは円である. また楕円の長径 a は (1.5) より $l = h^2/k = a(1 - e^2)$, したがって

$$(2.19) \quad a = \frac{h^2/k}{1 - e^2}$$

で与えられる.

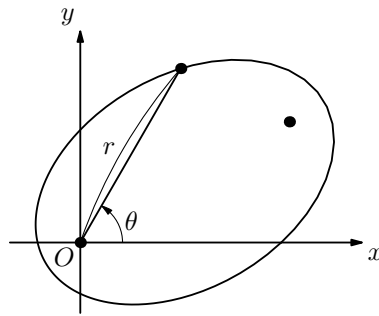


図 14 惑星の軌道

次にこの楕円軌道の周期 T を計算してみよう. (2.16) と (2.18) を用いると

$$\begin{aligned} T &= \int_0^{2\pi} \frac{dt}{d\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{h} d\theta \\ &= \frac{h^3}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos(\theta + \theta_0))^2} d\theta = \frac{h^3}{k^2} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta. \end{aligned}$$

$e = 0$ ならば $T = \frac{2\pi h^3}{k^2}$ である. $0 < e < 1$ とする. この積分は次のように求まる.
 $\cos \theta$ は周期 2π をもつ偶関数であるから

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta.$$

$w = \tan(\theta/2)$ とおけば

$$\frac{dw}{d\theta} = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2 \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2}(1 + w^2), \quad \cos \theta = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\cos^2 \frac{\theta}{2} + \sin^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{1 - w^2}{1 + w^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta &= 4 \int_0^{\infty} \frac{1}{\left(1 + e \frac{1 - w^2}{1 + w^2}\right)^2} \frac{dw}{1 + w^2} \\ &= 4 \int_0^{\infty} \frac{1 + w^2}{\{1 + e + (1 - e)w^2\}^2} dw. \end{aligned}$$

$c = \sqrt{(1 - e)/(1 + e)}$ とおけば

$$2 \int_0^{\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{4}{(1 + e)^2} \int_0^{\infty} \frac{1 + w^2}{(1 + c^2 w^2)^2} dw.$$

ここで $cw = u$ とおけば

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{1 + w^2}{(1 + c^2 w^2)^2} dw &= \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \frac{1 + c^{-2} u^2}{(1 + u^2)^2} du = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \frac{c^{-2}(1 + u^2) + 1 - c^{-2}}{(1 + u^2)^2} du \\ &= \frac{1}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + u^2} du + \frac{c^2 - 1}{c^3} \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + u^2)^2} du \\ &= \frac{1}{c^3} [\arctan u]_0^{\infty} + \frac{c^2 - 1}{c^3} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{u}{1 + u^2} + \arctan u \right) \right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{c^3} \frac{\pi}{2} + \frac{c^2 - 1}{c^3} \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \frac{c^2 + 1}{c^3} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1 + e)c^3}, \end{aligned}$$

$$2 \int_0^{2\pi} \frac{1}{(1 + e \cos \theta)^2} d\theta = \frac{4}{(1 + e)^2} \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1 + e)c^3} = \frac{2\pi}{(1 + e)^3 c^3} = \frac{2\pi}{(1 - e^2)^{3/2}}.$$

よって

$$(2.20) \quad T = \frac{2\pi h^3}{k^2(1 - e^2)^{3/2}}.$$

(2.19) と (2.20) より

$$(2.21) \quad \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k}.$$

この右辺は (2.4) に現れる定数 k に依存するが、初期条件には依存しない。したがって、(2.21) は楕円軌道の周期の 2 乗はその長径の 3 乗に比例することを表している。

以上はニュートンが惑星の運動に関するケプラーの法則を、運動の基本法則と万有引力の法則とから完全に数学的に導き出した見事な過程の主要部分を再現したものである。

ケプラーはティコ・ブラーエの観測記録を解析し次のような法則を発見した。

- (i) 惑星は太陽をひとつの焦点とする楕円軌道上を動く。
- (ii) 惑星と太陽を結ぶ線分が描く図形の面積の変化率、すなわち面積速度は一定である。
- (iii) 惑星の公転周期の 2 乗は軌道の長半径の 3 乗に比例する。

(2.18) が (i) に、(2.7) の第 2 式と (2.11) から得られる等式 $r^2 \frac{d\theta}{dt} = h$ が (ii) に、(2.21) が (iii) に対応している。

表 1 太陽系惑星の定数

惑星	離心率	軌道長半径 (AU)	公転周期 (年)
水星	0.2056	0.3871	0.24085
金星	0.0068	0.7233	0.61521
地球	0.0167	1.0000	1.00004
火星	0.0934	1.5237	1.88089
木星	0.0485	5.2026	11.8622
土星	0.0555	9.5549	29.4578
天王星	0.0463	19.2184	84.0223
海王星	0.0090	30.1104	164.774

注意 2.1. $E \geq 0$ の場合は $e \geq 1$ となって (2.18) で表される軌道は放物線 ($E = 0$) または双曲線 ($E > 0$) になる。1980 年に発見されたボーエル彗星の離心率は $e = 1.05$

をもっている。これは木星に近づいた際に軌道が変わり離心率が変化したと考えられていて生まれたのは太陽系の中だったと考えられている。これに対して2017年に発見されたC/2017 U1という彗星の離心率は $e = 1.19$ であり、もともと太陽系内にあった天体、すなわち離心率1以下の天体の軌道を離心率1.19の軌道に変えるためには、木星などの影響ではエネルギーが足りない。そのため太陽系外からやってきたものと考えられている (news.mynavi.jp より)。

3 サイクロイド

円が直線上を滑ることなく回転するとき、円上の点 P の軌跡をサイクロイドという。

xy 平面上の原点 O で $(0, c)$ を中心とする半径 c の円が接しているとする。このとき円上の点 P は O であるとする。円の中心は角度 θ 回転すると $c\theta$ だけ進むからそのときの中心の座標は $(c\theta, c)$ であり、 P の座標は $(c(\theta - \sin \theta), c(1 - \cos \theta))$ である。

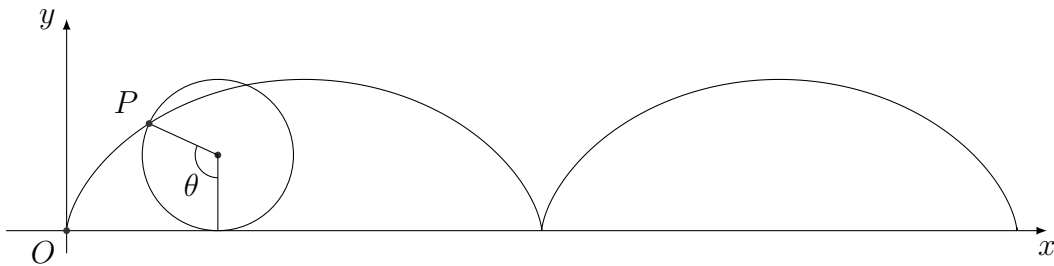


図 15 サイクロイド

3.1 最速降下線

曲線に沿って質量 m の質点を転がしたときに物が一番速く転がり落ちる曲線のことを**最速降下線**という。ガリレオは1638年に著書で最速降下線は円弧であると述べたが誤りであった。ヨハン・ベルヌーイはこの問題を解いた後、1696年に著書で読者に対してこの問題を提示した。ニュートン、ヤコブ・ベルヌーイ (ヨハンの兄)、ライプニッツ、ロピタルの4人の数学者がこれに応じて解答した。以下、サイクロイドとよばれる曲線が最速降下線であることを説明する。

問題を正確に述べると次のようになる：

鉛直面内にある2点 O, A を結ぶ曲線を考える. ただし A は O の真下にはなく, また O より高くはないとする. 一様な重力のもと質点が初速度0で点 O から曲線にそって空気抵抗や摩擦なしにすべり落ちるとき, 点 A に到達するのに要する時間が最も短いような曲線を求めよ.

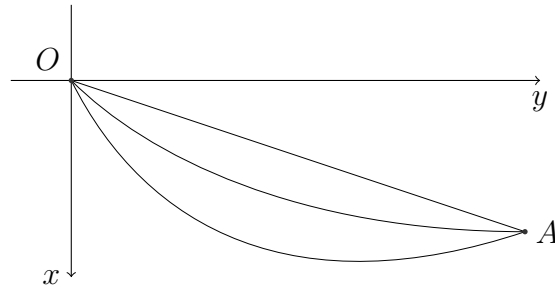


図 16 最速降下線の問題

出発点 O を原点にとり, 鉛直下方に x 軸を, 水平方向に y 軸をとる. 求める経路の曲線を $y = f(x)$ とし, O から $(x, f(x))$ までの曲線の長さを s とする.

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$$

である. $A = (a, b)$, $a > 0, b > 0$ とし, O から A までの曲線 $y = f(x)$ の長さを L とすると

$$L = \int_0^L ds = \int_0^a \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

出発点 O から x だけ下がった点における速さを v とするとエネルギー保存法則により

$$\frac{1}{2}mv^2 - mgx = 0.$$

したがって $v = \sqrt{2gx}$ である. ここで g は重力加速度である. 曲線 $y = f(x)$ に沿って目的地 A までに到達する時間を $T = T(f)$ とすると

$$T(f) = \int_0^L \frac{dt}{ds} ds = \int_0^L \frac{ds}{v} = \int_0^a \frac{1}{v} \frac{ds}{dx} dx = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (f'(x))^2}}{\sqrt{2gx}} dx.$$

最速降下線の問題は, このように積分で表示される $T(f)$ を最小にするような関数 $f(x)$ を求めよ, という問題になる.

T を最小にする曲線を $y = \tilde{f}(x)$ とする. $\eta(x)$ を $\eta(0) = \eta(a) = 0$ を満たす任意の微分可能な関数とする. $-1 < \varepsilon < 1$ として, $f_\varepsilon(x) = \tilde{f}(x) + \varepsilon\eta(x)$ とおけば, $y = f_\varepsilon(x)$ も O と A を通る曲線である. $T(f_\varepsilon)$ を ε の関数として考えると, $T(f_\varepsilon) \geq T(\tilde{f}) = T(f_0)$ であるから, $\varepsilon = 0$ のとき $T(f_\varepsilon)$ は最小になる. したがって ε の関数 $H(\varepsilon) = T(f_\varepsilon)$ は

$$H'(0) = 0$$

を満たす. $z = \tilde{f}'(x)$ とおくと

$$H(\varepsilon) = \int_0^a \frac{\sqrt{1 + (z + \varepsilon\eta'(x))^2}}{\sqrt{2gx}} dx$$

である. これを ε で微分して $\varepsilon = 0$ とおけば

$$H'(\varepsilon) = \int_0^a \frac{\eta'(x)(z + \varepsilon\eta'(x))}{\sqrt{2gx}\sqrt{1 + (z + \varepsilon\eta'(x))^2}} dx,$$

$$H'(0) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^a \frac{\eta'(x)z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} dx.$$

よって

$$\int_0^a \frac{\eta'(x)z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} dx = 0$$

である. この左辺を部分積分すると

$$\left[\eta(x) \frac{z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} \right]_0^a - \int_0^a \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} \right) dx = 0.$$

$\eta(0) = \eta(a) = 0$ より左辺の第 1 項は 0 であり, したがって

$$\int_0^a \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} \right) dx = 0$$

を得る. ここで $\eta(0) = \eta(a) = 0$ を満たす任意の関数 $\eta(x)$ について上の積分が 0 であるためには

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{z}{\sqrt{x}\sqrt{1 + z^2}} \right) = 0$$

でなければならない。したがって $\frac{z}{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2}}$ は定数である。よって

$$\frac{\sqrt{x}\sqrt{1+z^2}}{z} = \sqrt{2c} \quad (c > 0 \text{ は定数}),$$

$$x(1+z^2) = 2cz^2, \quad (2c-x)z^2 = x, \quad z = \sqrt{\frac{x}{2c-x}}.$$

$z = \tilde{f}'(x)$ であるから

$$\tilde{f}'(x) = \sqrt{\frac{x}{2c-x}}, \quad \tilde{f}(x) = \int_0^x \sqrt{\frac{u}{2c-u}} du.$$

この右辺の積分において $u = c(1 - \cos \varphi)$, $x = c(1 - \cos \theta)$ とおけば

$$2c - u = c(1 + \cos \varphi), \quad \sqrt{\frac{u}{2c-u}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}} = \frac{\sin \varphi}{1 + \cos \varphi},$$

$$\frac{du}{d\varphi} = c \sin \varphi$$

となるから

$$y = \tilde{f}(x) = \int_0^\theta \frac{c \sin^2 \varphi}{1 + \cos \varphi} d\varphi = c \int_0^\theta (1 - \cos \varphi) d\varphi$$

$$= c[\varphi - \sin \varphi]_0^\theta = c(\theta - \sin \theta).$$

したがって最速降下線は

$$(3.1) \quad x = c(1 - \cos \theta), \quad y = c(\theta - \sin \theta)$$

とパラメータ表示される曲線である。この曲線はサイクロイドである。

θ の関数 $h(\theta) = \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta}$ は $h(0) = 0$ とすれば, $0 \leq \theta < 2\pi$ で連続であり, $0 < \theta < 2\pi$ で微分可能で, 単調増加である。実際,

$$\lim_{\theta \rightarrow +0} h(\theta) = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\theta - \sin \theta}{1 - \cos \theta} = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} \quad (\text{ロピタルの定理})$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = 0.$$

$$h'(\theta) = \frac{(1 - \cos \theta)^2 - (\theta - \sin \theta) \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}$$

$$= \frac{2 - 2 \cos \theta - \theta \sin \theta}{(1 - \cos \theta)^2}.$$

右辺の分子を $k(\theta) = 2 - 2\cos\theta - \theta\sin\theta$ とおくと, $0 < \theta < \pi/2$ においては

$$\begin{aligned} k'(\theta) &= 2\sin\theta - \sin\theta - \theta\cos\theta = \sin\theta - \theta\cos\theta \\ &= (\tan\theta - \theta)\cos\theta > 0. \end{aligned}$$

$\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ でも $k'(\theta) > 0$ である. よって $k(\theta)$ は $0 \leq \theta \leq \pi$ で単調増加であり, $k(0) = 0$ であるから $0 \leq \theta \leq \pi$ で $k(\theta) \geq 0$ である. $\pi \leq \theta < 2\pi$ のとき, $2 - 2\cos\theta \geq 0$ かつ $\sin\theta \leq 0$ であるから $k(\theta) \geq 0$ である. よって $0 \leq \theta < 2\pi$ においてつねに $h'(\theta) \geq 0$ である. したがってそこで $h(\theta)$ は単調増加である. $\theta \rightarrow 2\pi - 0$ のとき $h(\theta) \rightarrow +\infty$ であるから, h は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数を 0 以上の実数全体に 1 対 1 に対応させる. よって $0 < \theta_0 < 2\pi$ で

$$\frac{\theta_0 - \sin\theta_0}{1 - \cos\theta_0} = \frac{b}{a}$$

となるものがただ 1 つ存在する. このとき

$$c = \frac{a}{1 - \cos\theta_0}$$

とおけば

$$a = c(1 - \cos\theta_0), \quad b = c(\theta_0 - \sin\theta_0)$$

を満たすから, (3.1) で定義される曲線は点 $A = (a, b)$ を通る.

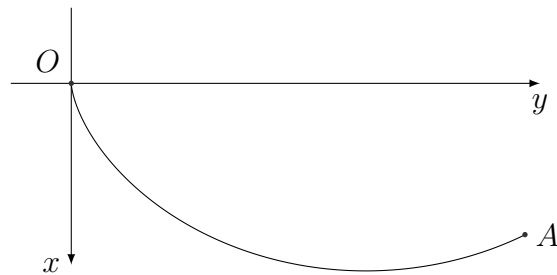


図 17 最速降下線としてのサイクロイド

3.2 サイクロイドに沿った往復運動

図 18 のようなパラメータ表示

$$(3.2) \quad x = a(\theta + \sin \theta), \quad y = a(1 - \cos \theta) \quad (-\pi < \theta < \pi, a > 0)$$

によって定義されるサイクロイド曲線に沿って往復運動する質量 m の質点の運動を調べる ((3.2) において θ を $\theta + \pi$ で置き換えると, $x = a(\theta + \pi - \sin \theta)$, $y = a(1 + \cos \theta)$ となる. これを x 軸に関して対称移動してさらにベクトル $(-a\pi, 2a)$ によって平行移動すれば, $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ となる).

θ は時刻 t の関数である.

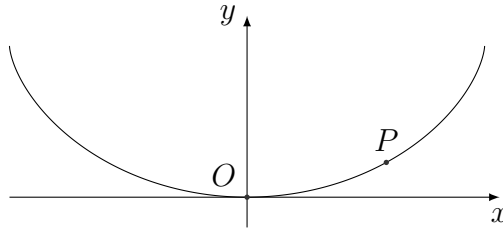


図 18 サイクロイドに沿って往復運動する質点

P における速さを v とし, 最下点 O における質点の速さを v_0 とするとエネルギー保存則より

$$(3.3) \quad \frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2$$

が成り立つ. $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$ より

$$(3.4) \quad y = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

(3.2) より

$$\frac{dx}{d\theta} = a(1 + \cos \theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = a \sin \theta, \quad 1 + \cos \theta = 2 \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

であるから, O から P までの弧の長さを s とすると

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2(1 + \cos \theta)^2 + a^2 \sin^2 \theta} \\ &= a\sqrt{2 + 2 \cos \theta} = 2a \cos \frac{\theta}{2}. \end{aligned}$$

よって

$$(3.5) \quad s = \int_0^\theta 2a \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = 4a \left[\sin \frac{\varphi}{2} \right]_0^\theta = 4a \sin \frac{\theta}{2}.$$

(3.4) と (3.5) より

$$(3.6) \quad y = 2a \left(\frac{s}{4a} \right)^2 = \frac{s^2}{8a}.$$

エネルギー保存則 (3.3) において, $v = \frac{ds}{dt}$ であるから

$$\frac{1}{2} \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 + \frac{g}{8a} s^2 = \frac{1}{2} v_0^2.$$

両辺をさらに t で微分すれば

$$\frac{ds}{dt} \frac{d^2s}{dt^2} + \frac{g}{4a} s \frac{ds}{dt} = 0.$$

両辺を $\frac{ds}{dt}$ で割れば

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\frac{g}{4a} s$$

を得る. ここで $\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$ とおくと

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -\omega^2 s$$

となって, θ に無関係な単振動の微分方程式が得られる. これは $t = 0$ で位置 O , すなわち $s = 0$ であるとすれば, $\frac{ds}{dt}(0) = v_0$ より

$$s = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

となる. この運動の周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{a}{g}}$$

である.

3.3 サイクロイドの伸開線とサイクロイド振り子

振幅に依らず厳密に等しい時間で振動させるためには、おもりがどのような曲線に沿えばよいかを問う問題を等時曲線問題という。この問題の答えはサイクロイドであることがオランダの数学者ホイヘンス (1629 年–1695 年) により導かれた。

一般に、与えられた曲線 C に沿ってピンと張った糸を端点を固定したまま剥がしたときのもう一方の端点の軌跡を曲線 C の伸開線とよぶ。

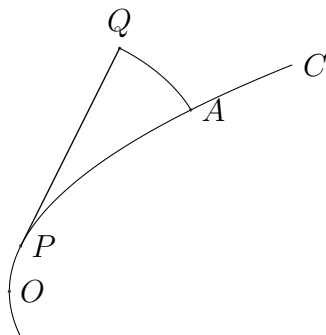


図 19 伸開線

曲線 C 上の 2 点 O と A を端点として C に沿ってピンと張った糸を、 A をピント張ったまま Q まで剥がす (図 19)。このとき曲線 C の弧 AP と線分 PQ の長さは等しい。また直線 PQ は点 P における C の接線である。したがって曲線 C が

$$x = x(\varphi), \quad y = y(\varphi)$$

とパラメータ表示されているとき、 $A = (x(a), y(a))$, $P = (x(\theta), y(\theta))$, $Q = (X(\theta), Y(\theta))$ ($\theta < a$) とすると

$$\begin{aligned}
 PQ &= \int_{\theta}^a \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} d\varphi, \\
 X(\theta) - x(\theta) &= \frac{PQ}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}(\theta)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}(\theta)\right)^2}} \frac{dx}{d\varphi}(\theta), \\
 Y(\theta) - y(\theta) &= \frac{PQ}{\sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}(\theta)\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}(\theta)\right)^2}} \frac{dy}{d\varphi}(\theta).
 \end{aligned}
 \tag{3.7}$$

である.

(3.7) を用いてサイクロイドの伸開線を求めてみる. サイクロイド C は

$$x = c(\varphi - \sin \varphi), \quad y = c(1 - \cos \varphi)$$

とパラメータ表示されているとする.

$$\frac{dx}{d\varphi} = c(1 - \cos \varphi), \quad \frac{dy}{d\varphi} = c \sin \varphi$$

より

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2} &= c\sqrt{(1 - \cos \varphi)^2 + \sin^2 \varphi} = c\sqrt{2 - 2 \cos \varphi} \\ &= 2c \sin \frac{\varphi}{2}. \end{aligned}$$

$A = (c\pi, 2c)$, $P = (c(\theta - \sin \theta), c(1 - \cos \theta))$, $-\pi \leq \theta \leq \pi$ とすると

$$\begin{aligned} (3.8) \quad PQ &= \int_{\theta}^{\pi} 2c \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi = 2c \left[-2 \cos \frac{\varphi}{2} \right]_{\theta}^{\pi} = 4c \cos \frac{\theta}{2}, \\ X(\theta) &= c(\theta - \sin \theta) + \frac{4c \cos(\theta/2)}{2c \sin(\theta/2)} \cdot c(1 - \cos \theta) \\ &= c(\theta - \sin \theta) + 2c \sin \theta = c(\theta + \sin \theta), \\ Y(\theta) &= c(1 - \cos \theta) + \frac{4c \cos(\theta/2)}{2c \sin(\theta/2)} \cdot c \sin \theta \\ &= c(1 - \cos \theta) + 4c \cos^2(\theta/2) = c(1 - \cos \theta) + 2c(\cos \theta + 1) \\ &= c(1 + \cos \theta) + 2c. \end{aligned}$$

したがってサイクロイド C の伸開線は次のようにパラメータ表示されるサイクロイド C' である (図 20).

$$(3.9) \quad x = c(\theta + \sin \theta), \quad y = c(1 + \cos \theta) + 2c.$$

(3.8) より特にサイクロイド C の O から A までの弧長は $4c$ であることがわかる.

図 20 の上下を逆にした次のような図 21 を考える. 薄く塗りつぶした部分は壁であるとして, 長さ $l = 4c$ (= サイクロイド C の O から A までの弧の長さ) の糸に質量 m のおもりを付けて点 O からつり下げる. このときおもりはサイクロイド C の

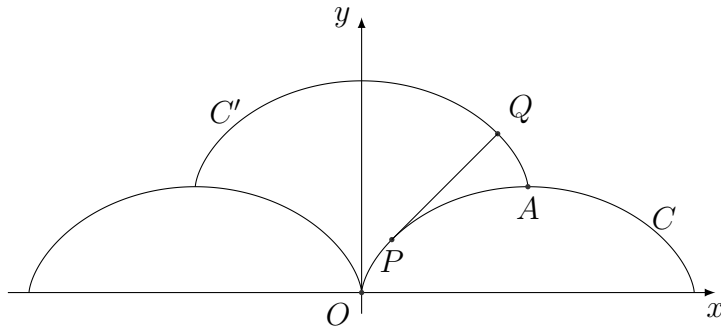


図 20 サイクロイド C の伸開線としてのサイクロイド C'

伸開線であるサイクロイド C' に沿って運動するから、§ 3.2 でみたようにこの振り子は周期

$$(3.10) \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

の周期運動をする。この周期は振幅によらない。これをサイクロイド振り子の**等時性**とよぶ。

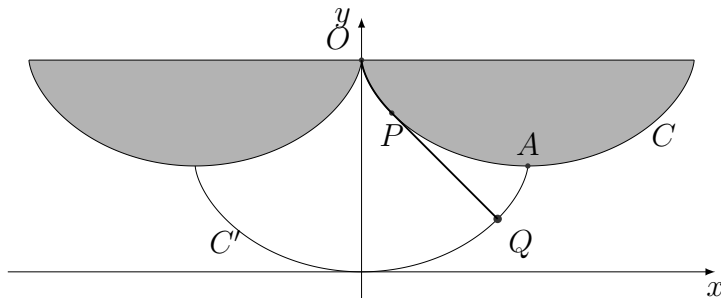


図 21 サイクロイド振り子

4 楕円積分

$0 < k < 1$ に対して積分

$$F(k, \theta) = \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}},$$

$$E(k, \theta) = \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

をそれぞれ母数 k の第 1 種楕円積分, 第 2 種楕円積分とよぶ. また定積分

$$K(k) = F(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},$$

$$E(k) = E(k, \pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} dt$$

をそれぞれ母数 k の第 1 種完全楕円積分, 第 2 種完全楕円積分とよぶ.

4.1 単振り子

サイクロイド振り子が等時性をもつことを述べたが, 通常の振り子についてはそうでないことを説明する. 伸び縮みしない長さ l の糸の一端を点 O に固定し, 他端に質量 m のおもりをつけて重力の作用でひとつの鉛直面内を振動するようにした振り子を, **単振り子**とよぶ. 図 22 のように鉛直下方と点 P のなす角を θ とする. θ は時刻 t の関数である. $t=0$ のとき $\theta=0$ とする. $P = (l \sin \theta, -l \cos \theta)$ である. 質点 P の速さを v とし, 最下点 P_0 における速さを v_0 とするとエネルギー保存則より

$$(4.1) \quad \frac{1}{2}mv^2 - mgl \cos \theta = \frac{1}{2}mv_0^2 - mgl$$

が成り立つ. P_0 から P までの円弧の長さを s とすると

$$(4.2) \quad s = l\theta, \quad \frac{ds}{dt} = l \frac{d\theta}{dt}.$$

エネルギー保存則 (4.1) において, $v = \frac{ds}{dt}$ であるから

$$(4.3) \quad \frac{1}{2} \left(l \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - gl \cos \theta = \frac{1}{2}v_0^2 - gl.$$

両辺をさらに t で微分すれば

$$l^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{d^2\theta}{dt^2} + gl \sin \theta \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

両辺を $l^2 \frac{d\theta}{dt}$ で割れば

$$(4.4) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

となる．この右辺で θ が十分小さいとして $\sin \theta$ を θ で置き換えてしまえば

$$(4.5) \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{l}\theta$$

なって，単振動の方程式が得られる．微分方程式 (4.5) は $t = 0$ のとき，初期条件 $\theta = 0, \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_0}{l}$ を満たす解

$$\theta = \frac{v_0}{\sqrt{gl}} \sin \sqrt{\frac{g}{l}}t$$

をもち，この運動の周期は

$$(4.6) \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

である．しかし振り子の振幅が大きい場合は， $\sin \theta$ を θ で置き換えることはできな

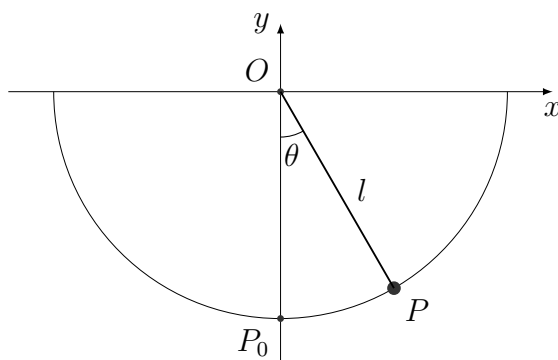


図 22 振り子

い．このとき微分方程式 (4.4) をそのまま解いてみる．(4.3) より

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{2g}{l}(1 - \cos \theta) = \frac{v_0^2}{l^2} - \frac{4g}{l} \sin^2 \frac{\theta}{2}.$$

ここで $k = \frac{v_0}{2l}\sqrt{\frac{l}{g}}$ とおくと， $\frac{v_0}{l} = 2k\sqrt{\frac{g}{l}}$ であるから上の方程式は

$$(4.7) \quad \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{4g}{l} \left(k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}\right)$$

とかきなおせる． $k > 0$ は， $0 < k < 1$ のとき， $k = 1$ のとき， $k > 1$ の3つの場合があるが以下，まず $0 < k < 1$ の場合について考える．このとき $k = \sin \frac{\alpha}{2}$ となる

$0 < \alpha < \pi$ がただ 1 つ定まる. (4.7) から $\theta = \alpha$ のとき $\frac{d\theta}{dt} = 0$ となるから振り子はここまで振れると瞬間的に停止し, またもとの方向に引き返す運動をする. したがって $0 \leq \theta < \alpha$ のときは $\frac{d\theta}{dt} > 0$ となり, (4.7) から

$$(4.8) \quad \frac{dt}{d\theta} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\theta/2)}}$$

となる. これを積分して

$$(4.9) \quad t = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{d\varphi}{\sqrt{k^2 - \sin^2(\varphi/2)}}$$

を得る. この右辺で $\sin(\varphi/2) = ku$ とおけば

$$k \frac{du}{d\varphi} = \frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - k^2 u^2}, \quad \sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}} = k \sqrt{1 - u^2}$$

となるから

$$(4.10) \quad t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{k^{-1} \sin(\theta/2)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

を得る. 最高点に達するまでの時間は, $\theta = \alpha$ に対応するから

$$\sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{k^{-1} \sin(\alpha/2)} \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} = \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

で与えられる. ここで積分

$$K(k) = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}}$$

は第 1 種完全楕円積分である. 物理的な意味から明らかなように, 質点 P は周期的な振動をし, その周期 (1 往復する時間) T は次の式で与えられる.

$$(4.11) \quad T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} K(k)$$

$l = 1\text{m}$, $g = 9.8\text{m/s}^2$ のときの, α と T の関係を表 2 に示す. これから大きい α に対しては等時性が成り立たないことがわかる.

表2 単振り子の周期

α	0	$\frac{\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{9}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{9}$	$\frac{5\pi}{9}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{9}$	$\frac{8\pi}{9}$	π
T	2.01	2.02	2.07	2.15	2.28	2.47	2.76	3.20	4.03	∞
T/T_0	1.00	1.01	1.03	1.07	1.14	1.23	1.37	1.59	2.01	∞

次に $k = 1$ の場合を考える. (4.9) で $k = 1$ とおくと

$$\begin{aligned} t &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{1}{\cos \frac{\varphi}{2}} d\varphi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sin \left(\frac{\varphi + \pi}{2} \right)} d\varphi \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\theta \frac{1}{\sin \left(\frac{\varphi + \pi}{4} \right) \cos \left(\frac{\varphi + \pi}{4} \right)} d\varphi = \sqrt{\frac{l}{g}} \left[\log \tan \left(\frac{\varphi + \pi}{4} \right) \right]_0^\theta \\ &= \sqrt{\frac{l}{g}} \log \tan \left(\frac{\theta + \pi}{4} \right). \end{aligned}$$

これから $\theta \rightarrow \pi$ のとき $t \rightarrow \infty$ となることがわかる. このとき質点 P は次第に上昇して O の真上の点に限りなく近づくが, それと同時に速度は 0 に近づき, 最高点に達するには理論上無限の時間がかかる.

最後に $k > 1$ の場合を考える. このとき (4.7) より $\frac{d\theta}{dt} \neq 0$ である. これは質点 P が点 O のまわりの回転運動を示す. (4.9) より

$$t = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^{\theta/2} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \varphi}} d\varphi = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\frac{1}{k}, \frac{\theta}{2} \right).$$

したがって周期 (1 回転に要する時間) は

$$T = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} F \left(\frac{1}{k}, \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{k} \sqrt{\frac{l}{g}} K \left(\frac{1}{k} \right)$$

で与えられる.

4.2 楕円の弧長

楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0$$

は

$$x = a \sin \theta, \quad y = b \cos \theta$$

とパラメータ表示される. $P_0 = (0, b)$ から $P_\theta = (a \sin \theta, b \cos \theta)$ までの楕円の弧長を s とする. $k = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$ をこの楕円の離心率とする. $0 < k < 1$ である.

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\theta} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} = a\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

であるから

$$(4.12) \quad s = a \int_0^\theta \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = aE(k, \theta)$$

と第 2 種楕円積分で表される.

4.3 レムニスケートの弧長

2 定点 F と F' の距離が $2a$ であるとする. F, F' からの距離の積が a^2 であるような点の軌跡をレムニスケートとよぶ. F, F' の中点を原点 O とし $F'F$ を x 軸とする座標をとり, $F = (a, 0), F' = (-a, 0)$ とする. F, F' から $P = (x, y)$ までの距離はそれぞれ $\sqrt{(x-a)^2 + y^2}, \sqrt{(x+a)^2 + y^2}$ であるから

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x+a)^2 + y^2} = a^2.$$

両辺を 2 乗すれば

$$\begin{aligned} \{(x-a)^2 + y^2\} \{(x+a)^2 + y^2\} &= a^4, \\ (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 &= a^4, \\ (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) &= 0. \end{aligned}$$

よってレムニスケートは方程式

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0$$

によって定義される曲線である. $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ とすれば

$$\begin{aligned} r^4 - 2a^2r^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) &= 0, \\ r^2 &= 2a^2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) = 2a^2 \cos 2\theta. \end{aligned}$$

したがってレムニスケートは極座標では方程式

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta \quad (-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4)$$

によって定義される。

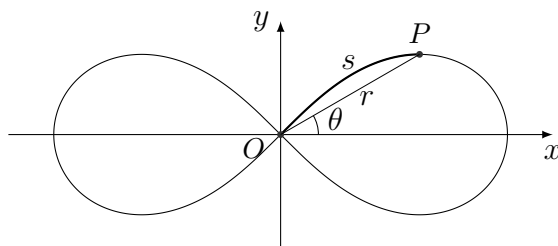


図 23 レムニスケート

以下、計算を簡単にするために $a = 1/\sqrt{2}$ とする。このときレムニスケートの方程式は

$$(4.13) \quad (x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

であり、極座標では

$$(4.14) \quad r^2 = \cos 2\theta \quad (-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4, 3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4)$$

となる。レムニスケート上の点 P の極座標を (r, θ) とする。 $\theta = 0$ のとき $r = 1$ である。点 P が第 1 象限にあるとき、原点 O から P までのレムニスケートの弧長を s とする。 $\cos 2\theta$ は $0 \leq \theta \leq \pi/4$ のとき 1 から 0 まで単調に減少する。 (4.14) より $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ であるから、 θ は r の関数と考えることができ、 r が 0 から 1 までうごくとき、 θ は $\pi/4$ から 0 まで単調に減少する。 (4.14) の両辺を r で微分すれば

$$2r = -2 \sin 2\theta \frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{d\theta}{dr} = -\frac{r}{\sin 2\theta} = -\frac{r}{\sqrt{1 - \cos^2 2\theta}} = -\frac{r}{\sqrt{1 - r^4}}$$

となるから、 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を r で微分して

$$\frac{dx}{dr} = \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dr}, \quad \frac{dy}{dr} = \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dr}.$$

したがって

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dr} &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dr}\right)^2} = \sqrt{\left(\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dr}\right)^2 + \left(\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dr}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} = \sqrt{1 + r^2\frac{r^2}{1-r^4}} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}.\end{aligned}$$

したがって

$$(4.15) \quad s = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

この右辺で $u = \sqrt{1-t^2}$ とおけば $t = \sqrt{1-u^2}$ であり

$$\frac{dt}{du} = -\frac{u}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$\sqrt{1-t^4} = \sqrt{(1-t^2)(1+t^2)} = \sqrt{u^2(2-u^2)} = \sqrt{2}u\sqrt{1-\frac{1}{2}u^2}.$$

したがって

$$(4.16) \quad \begin{aligned}s &= \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int_1^{\sqrt{1-r^2}} \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\sqrt{1-r^2}}^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)}}.\end{aligned}$$

特に $r=1$ とすれば、レムニスケートの第1象限の部分の弧長は

$$(4.17) \quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)\left(1-\frac{1}{2}u^2\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2}} K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

で与えられる。これは広義積分であるが収束することは次のようにわかる。

$r=1-\delta$, $0 < \delta < 1/2$ とする。 $r \leq t < 1$ のとき

$$\sqrt{1-t^4} = \sqrt{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \geq \sqrt{(1+r)(1+r^2)} \cdot \sqrt{1-t}$$

であるから

$$\begin{aligned}\int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &\leq \frac{1}{\sqrt{(1+r)(1+r^2)}} \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1+r)(1+r^2)}} \left[-2\sqrt{1-t}\right]_r^1 = \frac{2\sqrt{1-r}}{\sqrt{(1+r)(1+r^2)}}.\end{aligned}$$

同様に

$$\sqrt{1-t^4} = \sqrt{(1-t)(1+t)(1+t^2)} \leq 2\sqrt{1-t}$$

であるから

$$\begin{aligned} \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} &\geq \frac{1}{2} \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= \frac{1}{2} [-2\sqrt{1-t}]_r^1 = \sqrt{1-r}. \end{aligned}$$

よって

$$(4.18) \quad \sqrt{1-r} \leq \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \leq \frac{2\sqrt{1-r}}{\sqrt{(1+r)(1+r^2)}}$$

を得る. これから特に広義積分 (4.17) は収束することがわかる.

5 楕円曲線

方程式

$$(5.1) \quad y^2 = x^3 - x$$

によって定義される曲線を考える. この曲線を E_1 で表す. E_1 上の異なる 2 点 $P = (x_1, y_1), Q = (x_2, y_2)$ をとる. ただし $x_1 \neq x_2$ とする. 直線 PQ の方程式は

$$(5.2) \quad y = mx + n, \quad m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad n = y_1 - mx_1 = \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$$

となる. このとき直線 PQ と曲線 E_1 の交点は P, Q 以外にもう 1 つある. それを $R' = (x_3, y_3)$ とする. x_3 は x_1, x_2, y_1, y_2 を用いて表すことができる. $y = mx + n$ を $y^2 = x^3 - x$ に代入すれば

$$(5.3) \quad \begin{aligned} (mx + n)^2 &= x^3 - x, \\ x^3 - m^2 x^2 - (2mn + 1)x - n^2 &= 0. \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 は 3 次方程式 (5.3) の 3 根であるから

$$x^3 - m^2 x^2 - (2mn + 1)x - n^2 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$$

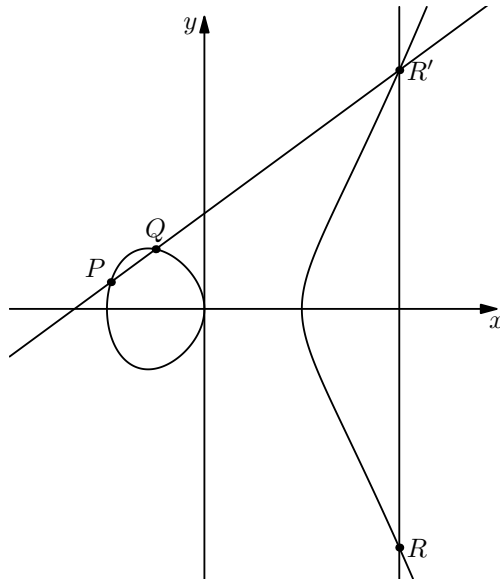


図 24 楕円曲線上の点の加法 $P + Q = R$

と因数分解される. 右辺を展開して x^2 の係数を左辺と比較すれば (5.2) より

$$x_1 + x_2 + x_3 = m^2 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2.$$

これから

$$(5.4) \quad \begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \right)^2 - x_1 - x_2, \\ y_3 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_3 + \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

を得る. x 軸に関して R' と対称な点を R とすると, $R = (x_3, -y_3)$ である. このとき E_1 上の点の加法を

$$(5.5) \quad P + Q = R$$

と定義する. $P = Q$ のとき, P における E_1 の接線は

$$(5.6) \quad y = mx + n, \quad m = \frac{3x_1^2 - 1}{2y_1}, \quad n = y_1 - mx_1 = -\frac{x_1^3 + x_1}{2y_1}$$

となる. このとき直線 PQ と曲線 E_1 の交点は P 以外にもう 1 つある. それを $R' = (x_3, y_3)$ とする. $y = mx + n$ を $y^2 = x^3 - x$ に代入すれば

$$x^3 - m^2 x^2 - (2mn + 1)x - n^2 = 0.$$

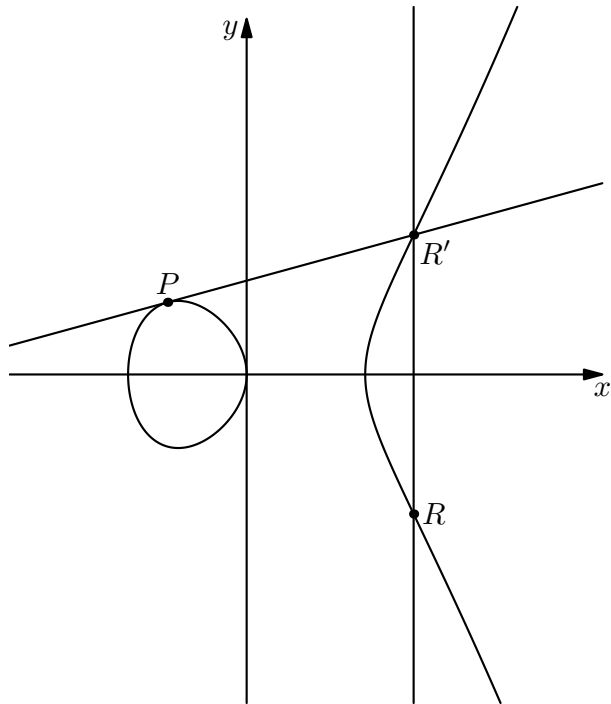


図 25 楕円曲線上の加法 $P + P = R$

x_1, x_3 はこの 3 次方程の根で x_1 は重根であるから

$$x^3 - m^2x^2 - (2mn + 1)x - n^2 = (x - x_1)^2(x - x_3)$$

と因数分解される．右辺を展開して定数項を左辺と比較すれば

$$x_1^2x_3 = n^2, \quad x_3 = \left(\frac{x_1^2 + 1}{2y_1}\right)^2.$$

これから

$$(5.7) \quad \begin{aligned} x_3 &= \left(\frac{x_1^2 + 1}{2y_1}\right)^2, \\ y_3 &= \frac{3x_1^2 - 1}{2y_1}x_3 - \frac{x_1^3 + x_1}{2y_1}. \end{aligned}$$

を得る． x 軸に関して R' と対称な点を R とすると、 $R = (x_3, -y_3)$ である．このとき E_1 上の点の加法 $P + P$ を

$$(5.8) \quad P + P = R$$

によって定義する. また E_1 上の点 $P = (x_1, y_1)$ のマイナス元は

$$-P = (x_1, -y_1)$$

と定義する. 以上のように E_1 上の点同士の加法を定義することによって E_1 上の点の全体はアーベル群をなす. この群の単位元は無有限遠点 ∞ である.

一般に $a \neq 0$ として $ax^3 + bx^2 + cx + d$ を重根をもたない 3 次多項式とするとき, 方程式

$$y^2 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

によって定義される曲線 E を **楕円曲線** とよぶ. 上の E_1 の場合と同様に楕円曲線 E 上の点全体はアーベル群をなす. 特に x 座標, y 座標とも有理数であるような E の点全体を $E(\mathbb{Q})$ で表すと, $E(\mathbb{Q})$ はアーベル群になる. モーデルは 1922 年に次のことを証明した.

定理 5.1 (モーデルの定理). 有限個の $E(\mathbb{Q})$ の点 P_1, \dots, P_r が存在して, $E(\mathbb{Q})$ の任意の点は P_1, \dots, P_r たちを何回か足し算引き算したものとして表される.

フェルマー予想のワイルスによる解決にも楕円曲線に関する整数論が用いられた. 楕円曲線の整数論については, 三辺の長さが有理数の直角三角形の面積となるような自然数を決定するという **合同数問題** や **BSD 予想** などまだ多くの未解決問題が残されている.

A 微積分の基本事項と公式

A.1 微分

関数 $f(x)$ が $x = c$ で **連続** であるとは, x を c に近づけるととき $f(x)$ が $f(c)$ に近づくことをいう. このことを記号で

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$$

と表す. 区間 $a < x < b$ の任意の点 c において $f(x)$ が連続であるとき $f(x)$ は $a < x < b$ において連続であるという.

$a \leq x \leq b$ で定義された関数 $f(x)$ が $a < x < b$ で連続であり, $x > a$ で x を a に近づけるととき $f(x)$ が $f(a)$ に近づき, かつ $x < b$ で x を b に近づけるととき $f(x)$ が $f(b)$

に近づくとき、すなわち

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b)$$

であるとき、 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であるという。

$f(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続であるとする。このとき与えられた $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小さくとれば、 $a \leq x, x' \leq b$ なる x と x' が $|x' - x| < \delta$ である限りどこにあって、 $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ を満たすことが証明される ([3, 2.1 連続関数] を参照)。このことを $f(x)$ は**一様連続**であるという。

関数 $f(x)$ が $x = c$ で**微分可能**であるとは x を c に近づけるとき $\frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ がある一定の値 γ に近づくことをいう。このときの γ を $f(x)$ の $x = c$ における**微分係数**とよび、 $f'(c)$ で表す。記号でかけば

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

となる。これは

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

とかくこともできる。区間 $a < x < b$ の任意の点 c において $f(x)$ が微分可能であるとき $f(x)$ は $a < x < b$ で微分可能であるという。このとき関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の**導関数**とよぶ。 $f'(x)$ が $a < x < b$ で微分可能であるとき、 $f'(x)$ の導関数を $f''(x)$ で表す。 $f''(x)$ を $f(x)$ の**第2次導関数**とよぶ。 $y = f(x)$ とおくと

$$y' = f'(x), \quad y'' = f''(x)$$

とかく。これを

$$\frac{dy}{dx} = f'(x), \quad \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$$

とかくこともある。

命題 A.1. $f(x)$ が $a < x < b$ で微分可能ならば、 $f(x)$ は $a < x < b$ で連続である。

[証明] $a < c < b$ とする。 $f(x)$ は $x = c$ で微分可能であるから

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$$

である。したがって

$$\lim_{x \rightarrow c} (f(x) - f(c)) = \lim_{x \rightarrow c} \left[(x - c) \cdot \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \right] = 0 \cdot f'(c) = 0.$$

よって $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ である。 □

関数 $f(x)$ と $g(x)$ が $a < x < b$ でともに微分可能であるとき、 c を定数とすると $cf(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ も $a < x < b$ で微分可能であり、それらの導関数は次のように与えられる。

$$(cf(x))' = cf'(x),$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x),$$

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x),$$

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \quad (\text{積の微分}).$$

$g(x)$ が $a < x < b$ で 0 にならないときは、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ も $a < x < b$ で微分可能であり

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \quad (\text{商の微分})$$

が成り立つ。

x の関数 $y = f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続、 $a < x < b$ で微分可能であるとする。また u の関数 $x = g(u)$ は $c \leq u \leq d$ で連続、 $c < u < d$ で微分可能であり、 $a \leq g(u) \leq b$ ($c \leq u \leq d$), $g(c) = a$, $g(d) = b$ であるとする。このとき合成関数 $f(g(u))$ が定義されて、 $c < u < d$ で微分可能であり、その導関数は

$$\{f(g(u))\}' = f'(g(u))g'(u) \quad (\text{合成関数の微分})$$

で与えられる。これは

$$\frac{dy}{du} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{du}$$

とかくこともできる。

x の関数 $y = f(x)$ が $a < x < b$ で単調増加または単調減少であり、そこで $c < f(x) < d$ であるとする。このとき $c < y < d$ に対して $y = f(x)$ となる $a < x < b$ がただ 1 つ定まる。 y に対してこの x を対応させる関数を $x = g(y)$ とする。 $x = g(y)$ を $y = f(x)$ の**逆関数**とよぶ。ここで $y = f(x)$ が微分可能であるとすれば、 $f'(x)$ は $a < x < b$ でつねに正またはつねに負であり、逆関数 $x = g(y)$ は微分可能であって

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))} \quad (\text{逆関数の微分})$$

が成り立つ。これは

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

とかくこともできる。

$f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとする。導関数 $f'(x)$ の符号を調べることによって関数 $f(x)$ の増減の様子が変わることを説明する。

$a < c < b$ とする。 c に十分近い $x \neq c$ に対して $f(x) < f(c)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = c$ で極大であるといい、 $f(c)$ を極大値とよぶ。同様に c に十分近い $x \neq c$ に対して $f(x) > f(c)$ が成り立つとき、 $f(x)$ は $x = c$ で極小であるといい、 $f(c)$ を極小値とよぶ。

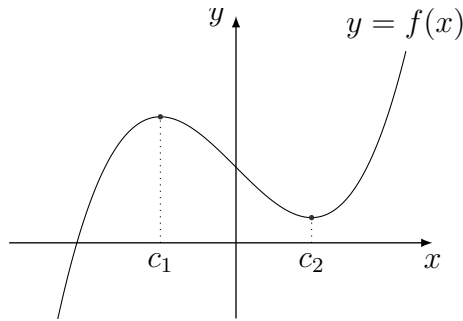


図 26 $f(x)$ は $x = c_1$ で極大, $x = c_2$ で極小

命題 A.2. $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとし、 $a < c < b$ とする。このとき $f(x)$ が $x = c$ で極大または極小ならば、 $f'(c) = 0$ である。

[証明] $f(x)$ が $x = c$ で極大とすると、十分小さい $h > 0$ に対して $f(c+h) < f(c)$, $f(c-h) < f(c)$ である、したがって

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leq 0, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h} \geq 0$$

となるが

$$f'(c) = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}$$

であるから、 $f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$ となり、 $f'(c) = 0$ を得る。 $f(x)$ が $x = c$ で極小のときも同様に $f'(c) = 0$ となることがわかる。 \square

連続関数について次が成り立つ (証明は [3, pp.40–42] を参照)。

定理 A.3. $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続とする. このとき $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ において最大値および最小値をとる.

定理 A.4 (ロルの定理). $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとする. このとき $f(a) = f(b)$ ならば, c ($a < c < b$) で $f'(c) = 0$ を満たすものが存在する.

[証明] $f(x)$ が定数ならば $f'(x) = 0$ となるので c として $a < c < b$ の任意の点をとればよい. $f(x)$ が定数でないとする. 定理 A.3 より $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で最大値と最小値をとるが, 最大値と最小値の少なくとも一方は $f(a) = f(b)$ と異なる. $x = c$ でその最大値または最小値をとるとする. このとき $f(x)$ は $x = c$ で極大または極小となるので命題 A.2 より $f'(c) = 0$ である. \square

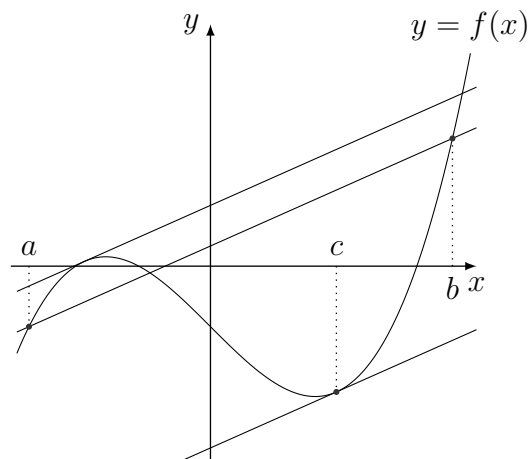


図 27 平均値の定理

定理 A.5 (平均値の定理). $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとする. このとき c ($a < c < b$) で

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

となるものが存在する.

[証明] $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ とおけば, $g(x)$ も $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能である. さらに $g(a) = f(a)$, $g(b) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$ となり, $g(b) = g(a)$ である. したがってロルの定理 (定理 A.4) により $g'(c) = 0$ と

なる c ($a < c < b$) が存在する.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

より, $f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = g'(c) = 0$, $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ である. \square

系 A.6. $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとする. このとき次が成り立つ.

- (1) $a < x < b$ で $f'(x) > 0$ ならば $f(x)$ は単調増加, すなわち $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ に対して $f(x_1) < f(x_2)$ である.
- (2) $a < x < b$ で $f'(x) < 0$ ならば $f(x)$ は単調減少, すなわち $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ に対して $f(x_1) > f(x_2)$ である.
- (3) $a < x < b$ で $f'(x) = 0$ ならば $f(x)$ は定数である.

[証明] $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ とする. 平均値の定理 (定理 A.5) により $x_1 \leq c \leq x_2$ で

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

となるものが存在する. $a < x < b$ で $f'(x) > 0$ ならば左辺は正であるから右辺も正であり, $x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) > 0$, $f(x_2) > f(x_1)$ となる. 同様に $a < x < b$ で $f'(x) < 0$ ならば左辺は負であるから右辺も負であり, $x_2 - x_1 > 0$ より $f(x_2) - f(x_1) < 0$, $f(x_2) < f(x_1)$ となる. また $a < x < b$ で $f'(x) = 0$ ならば左辺は 0 であるから右辺も 0 であり, $f(x_2) = f(x_1)$ となる. これが任意の $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ について成り立つから $f(x)$ は定数である. \square

系 A.6 により導関数 $f'(x)$ の符号の変化がわかれば関数 $f(x)$ の増減の様子がわかることになる.

以下, いくつかの具体的な関数の導関数を示す.

n を自然数とするとき

$$(A.1) \quad (x^n)' = nx^{n-1}.$$

n が負の整数でも上の公式は成り立つ.

$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.71828\dots$ を底とする指数関数 e^x について

$$(A.2) \quad (e^x)' = e^x.$$

e を底とする対数関数 $y = \log x = \log_e x$ について, $x = e^y$ であるから (A.2) と逆関数の微分の公式により

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

である. すなわち

$$(A.3) \quad (\log x)' = \frac{1}{x}.$$

$a > 0, a \neq 1$ とするとき, 指数関数 $y = a^x$ について, $a = e^{\log a}$ より $a^x = e^{x \log a}$ とかけるので, 合成関数の微分の公式により

$$(A.4) \quad (a^x)' = e^{x \log a} \log a = (\log a) a^x.$$

a を底とする対数関数 $y = \log_a x$ について, $x = a^y = e^{y \log a}$ であるから, $y(\log a) = \log x$ である. この両辺を x で微分すれば (A.3) より

$$(\log a) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{(\log a)x}$$

である. すなわち

$$(A.5) \quad (\log_a x)' = \frac{1}{(\log a)x}.$$

任意の実数 α に対して, べき乗関数 x^α を

$$x^\alpha = e^{\alpha \log x}$$

によって定義する. (A.2), (A.3) と合成関数の微分の公式により

$$(x^\alpha)' = e^{\alpha \log x} (\alpha \log x)' = e^{\alpha \log x} \frac{\alpha}{x} = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

よって

$$(A.6) \quad (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$$

を得る. すなわち公式 (A.1) は n が任意の実数の場合にも成り立つ.

三角関数の微分については積分のところで述べる.

A.2 積分

まず定積分 (リーマン積分) を定義する. 関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であると
する. この区間を分割して $a_0 = a < a_1 < a_2 < \dots < a_n = b$ とする. この分割を Δ
で表す. 各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{i-1} \leq x_i \leq a_i$ となる x_i をとって, 和

$$S(f, \Delta, \{x_i\}) = \sum_{i=1}^n f(x_i)(a_i - a_{i-1})$$

を考える. この和 $S(f, \Delta, \{x_i\})$ をリーマン和とよぶ. 分割 Δ の幅を

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i - a_{i-1})$$

によって定義する. $|\Delta|$ を 0 に近づけるととき, $f(x)$ が連続であることから $\{x_i\}$ の選
び方によらずにリーマン和 $S(f, \Delta, \{x_i\})$ はある一定の値 α に近づくことが一様連
続性を用いて証明される ([3, pp.177–179]). この値 α を $f(x)$ の a から b までの定積
分とよび

$$\int_a^b f(x) dx$$

で表す. 特に $f(x) = c$ が定数関数ならば任意の分割 Δ と $\{x_i\}$ のとり方に対して

$$S(f, \Delta, \{x_i\}) = \sum_{i=1}^n c(a_i - a_{i-1}) = c \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = c(a_n - a_0) = c(b - a)$$

となるから, 定数 c の a から b までの定積分は

$$(A.7) \quad \int_a^b c dx = c(b - a)$$

となる.

定積分は次のような性質をもつ. $f(x), g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であるとし, c を
定数とする. このとき

$$\begin{aligned} \int_a^b cf(x) dx &= c \int_a^b f(x) dx, \\ \int_a^b (f(x) + g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx, \\ \int_a^b (f(x) - g(x)) dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx. \end{aligned}$$

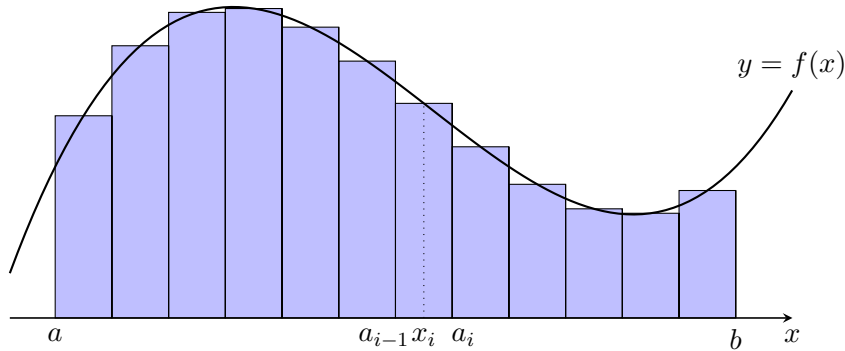


図 28 リーマン和 $S(f, \Delta, \{x_i\})$

また $a < c < b$ とするとき

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

$a \leq x \leq b$ において $m \leq f(x) \leq M$ であるとすれば

$$(A.8) \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

が成り立つ.

定理 A.7 (微積分の基本定理). $f(x)$ を $a \leq x \leq b$ で連続な関数とする. $a \leq x \leq b$ に対して関数 $F(x)$ を

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

によって定義すれば, $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続, $a < x < b$ で微分可能であり

$$F'(x) = f(x)$$

を満たす.

[証明] $a < c < b$ とする. $h > 0$ を十分小さくとって $h < c - a$, $h < b - c$ を満たすとする. このとき $a < c - h < c < c + h < b$ であり

$$F(c+h) = \int_a^{c+h} f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^{c+h} f(t) dt = F(c) + \int_c^{c+h} f(t) dt$$

より

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f(t) dt.$$

同様に

$$F(c) = \int_a^c f(t) dt = \int_a^{c-h} f(t) dt + \int_{c-h}^c f(t) dt = F(c-h) + \int_{c-h}^c f(t) dt$$

より

$$F(c) - F(c-h) = \int_{c-h}^c f(t) dt.$$

また (A.7) より

$$\begin{aligned} \int_c^{c+h} f(c) dt &= f(c)(c+h-c) = f(c)h, \\ \int_{c-h}^c f(c) dt &= f(c)\{c-(c-h)\} = f(c)h. \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} F(c+h) - F(c) - f(c)h &= \int_c^{c+h} f(t) dt - \int_c^{c+h} f(c) dt \\ &= \int_c^{c+h} (f(t) - f(c)) dt, \\ F(c-h) - F(c) + f(c)h &= -\int_{c-h}^c f(t) dt + \int_{c-h}^c f(c) dt \\ &= \int_{c-h}^c (f(c) - f(t)) dt. \end{aligned}$$

$f(t)$ は連続であるから, $\varepsilon > 0$ に対して $h > 0$ を十分小さくとれば, $c-h \leq t \leq c+h$ において $-\varepsilon \leq f(t) - f(c) \leq \varepsilon$ が成り立つ. (A.8) より

$$\begin{aligned} -\varepsilon h &\leq \int_c^{c+h} (f(t) - f(c)) dt \leq \varepsilon h, \\ -\varepsilon h &\leq \int_{c-h}^c (f(c) - f(t)) dt \leq \varepsilon h \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって

$$\begin{aligned} -\varepsilon &\leq \frac{F(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \leq \varepsilon, \\ -\varepsilon &\leq f(c) - \frac{F(c-h) - F(c)}{-h} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

これは

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} &= f(c), \\ \lim_{h \rightarrow -0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} &= f(c) \end{aligned}$$

を示している。ゆえに

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c)$$

が成り立つ。これは $F(x)$ が $x = c$ で微分可能で $F'(c) = f(c)$ が成り立つことを示している。 c は $a < c < b$ を満たす任意の実数であるから $f(x)$ は $a < x < b$ で微分可能である。命題 A.1 より $f(x)$ は $a < x < b$ で連続である。 $a \leq x \leq b$ における $f(x)$ の最大値、最小値をそれぞれ M, m とする。 $0 < h < b - a$ とすると $a + h < b$, $a < b - h$ である。(A.8) より

$$\begin{aligned} mh &\leq \int_a^{a+h} f(t) dt = F(a+h) - F(a) \leq Mh, \\ mh &\leq \int_{b-h}^b f(t) dt = F(b) - F(b-h) \leq Mh. \end{aligned}$$

したがって

$$\lim_{h \rightarrow +0} \{F(a+h) - F(a)\} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow +0} \{F(b) - F(b-h)\} = 0.$$

ゆえに $F(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続である。 □

関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続であるとする。定理 A.7 より

$$F_0(x) = \int_a^x f(t) dt$$

は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であって $F_0'(x) = f(x)$ を満たす。さらに $F_0(a) = 0$ である。関数 $F(x)$ が $a \leq x \leq b$ で連続、 $a < x < b$ で微分可能であって $F'(x) = f(x)$ を満たすとき、 $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数**あるいは**不定積分**とよぶ。上の $F_0(x)$ は $f(x)$ の1つの原始関数である。 $F(x)$ を $f(x)$ の任意の原始関数とすれば $F'(x) = f(x)$ であるから、 $G(x) = F(x) - F_0(x)$ とおけば、 $G(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であって、 $G'(x) = F'(x) - F_0'(x) = f(x) - f(x) = 0$ を満たす。系 A.6 の (3) より $G(x)$ は定数 C である：

$$G(x) = F(x) - F_0(x) = C.$$

ここで $x = a$ とおけば、 $C = F(a) - F_0(a) = F(a)$ である。したがって

$$F(x) - F_0(x) = F(a), \quad F_0(x) = F(x) - F(a).$$

すなわち $a \leq x \leq b$ に対して

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a)$$

である。特に $x = b$ とおけば

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

左辺の定積分の変数 t を x でかきなおして、右辺の $F(b) - F(a)$ を $[F(x)]_a^b$ と表せば、次の系を得る。

系 A.8. $f(x)$ の定積分は $f(x)$ の任意の原始関数 $F(x)$ を用いて次のように表せる。

$$(A.9) \quad \int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

関数 $f(x), g(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続で $a < x < b$ で微分可能であるとする。このとき積の微分の公式により

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

これは $f(x)g(x)$ が $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の原始関数であることを示している。したがって系 A.8 により

$$\int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = [f(x)g(x)]_a^b.$$

左辺の積分を 2 つの積分の和に書き直して一方を右辺に移項すれば

$$(A.10) \quad \int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx \quad (\text{部分積分})$$

を得る。

x の関数 $f(x)$ は $a \leq x \leq b$ で連続、 $a < x < b$ で微分可能であるとする。また u の関数 $g(u)$ は $c \leq u \leq d$ で連続、 $c < u < d$ で微分可能であり、 $g'(u)$ はそこで連続、 $a \leq g(u) \leq b$ ($c \leq u \leq d$)、 $g(c) = a$ 、 $g(d) = b$ であるとする。 $a \leq x \leq b$ に対して

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

とおけば、 $F'(x) = f(x)$ 、 $F(a) = 0$ である。また

$$\varphi(u) = \int_c^u f(g(v))g'(v) dv$$

とおけば、 $\varphi'(u) = f(g(u))g'(u)$, $\varphi(c) = 0$ である。このとき $F(g(u)) - \varphi(u)$ を u で微分すれば合成関数の微分の公式により

$$F'(g(u))g'(u) - \varphi'(u) = f(g(u))g'(u) - f(g(u))g'(u) = 0$$

である。したがって系 A.6 の (3) より $F(g(u)) - \varphi(u)$ は定数である。 $u = c$ とおけば $F(g(c)) - \varphi(c) = F(a) - \varphi(c) = 0 - 0 = 0$ である。よって $F(g(u)) - \varphi(u) = 0$, $F(g(u)) = \varphi(u)$ である。特に $u = d$ とおけば $g(d) = b$ であるから $F(b) = \varphi(d)$ を得る。すなわち

$$\int_a^b f(t) dt = \int_c^d f(g(v))g'(v) dv$$

が成り立つ。左辺の積分の変数を x , 右辺の積分の変数を u に書き直せば

$$(A.11) \quad \int_a^b f(x) dx = \int_c^d f(g(u))g'(u) du \quad (\text{置換積分})$$

を得る。

A.3 曲線の弧長

曲線の弧の長さを積分で表せることを説明する。曲線 C は $x = f(t)$, $y = g(t)$ ($a \leq t \leq b$) とパラメータ表示されているとする。ここで $f(t)$, $g(t)$ は $a \leq t \leq b$ で微分可能で $f'(t)$, $g'(t)$ は $a \leq t \leq b$ で連続であるとし

$$h(t) = \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2}$$

とおく。このとき区間 $a \leq t \leq b$ の分割 $a_0 = a < a_1 < \dots < a_n = b$ を Δ とし、各 $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_{i-1} \leq t_i \leq a_i$ となる t_i をとってリーマン和

$$S(h, \Delta, \{t_i\}) = \sum_{i=1}^n h(t_i)(a_i - a_{i-1})$$

を考える。曲線 C 上の $P_i = (f(a_i), g(a_i))$ ($i = 0, 1, \dots, n$) について三平方の定理により P_{i-1} と P_i を結ぶ線分の長さは

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(f(a_i) - f(a_{i-1}))^2 + (g(a_i) - g(a_{i-1}))^2}$$

である。

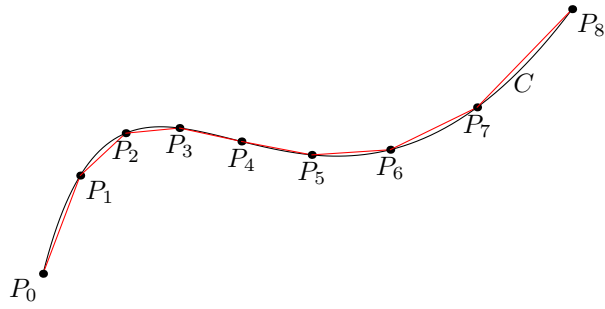


図 29 折線による曲線の弧長の近似

平均値の定理により, $a_{i-1} < c_i < a_i$, $a_{i-1} < d_i < a_i$ となる c_i, d_i で

$$f(a_i) - f(a_{i-1}) = f'(c_i)(a_i - a_{i-1}),$$

$$g(a_i) - g(a_{i-1}) = g'(d_i)(a_i - a_{i-1})$$

を満たすものがとれる. このとき

$$P_{i-1}P_i = \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} (a_i - a_{i-1})$$

と表される. ここで平面上の点 $O = (0, 0)$, $P = (p, q)$, $Q = (p, r)$ について三角不等式により

$$\left| \sqrt{p^2 + q^2} - \sqrt{p^2 + r^2} \right| = |OP - OQ| \leq PQ = |q - r|$$

が成り立つ. この不等式を $p = f'(c_i)$, $q = g'(d_i)$, $r = g'(c_i)$ として適用すれば

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - h(c_i) \right| \\ &= \left| \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(c_i))^2} \right| \\ &\leq |g'(d_i) - g'(c_i)| \end{aligned}$$

を得る. したがって折線 $P_0P_1 \cdots P_n$ の長さとしリーマン和 $S(h, \Delta, \{c_i\})$ の差について

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i - S(h, \Delta, \{c_i\}) \right| \\ &= \left| \sum_{i=1}^n \left(\sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - h(c_i) \right) (a_i - a_{i-1}) \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left| \sqrt{(f'(c_i))^2 + (g'(d_i))^2} - h(c_i) \right| (a_i - a_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |g'(d_i) - g'(c_i)| (a_i - a_{i-1}). \end{aligned}$$

すなわち

$$(A.12) \quad \left| \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i - S(h, \Delta, \{c_i\}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |g'(d_i) - g'(c_i)| (a_i - a_{i-1})$$

が成り立つ。 $g'(t)$ は $a \leq t \leq b$ で連続としたから一様連続であり、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を十分小さくとれば、 $a \leq t \leq t' \leq b$ で $|t' - t| < \delta$ ならば $|g'(t) - g'(t')| < \varepsilon$ が成り立つ。したがって $|\Delta| < \delta$ なる分割 Δ に対して $|d_i - c_i| \leq a_i - a_{i-1} \leq |\Delta| < \delta$ となるから、 $|g'(d_i) - g'(c_i)| < \varepsilon$ である。よって

$$\sum_{i=1}^n |g'(d_i) - g'(c_i)| (a_i - a_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \varepsilon (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon \sum_{i=1}^n (a_i - a_{i-1}) = \varepsilon (b - a)$$

が成り立つ。これは

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |g'(d_i) - g'(c_i)| (a_i - a_{i-1}) = 0$$

を示している。これと $|\Delta| \rightarrow 0$ のとき $S(h, \Delta, \{c_i\}) \rightarrow \int_a^b h(t) dt$ となることから (A.12) より

$$\lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n P_{i-1}P_i = \int_a^b h(t) dt$$

が成り立つ。すなわち曲線 C の弧の長さを $l(C)$ とすれば

$$(A.13) \quad l(C) = \int_a^b \sqrt{(f'(t))^2 + (g'(t))^2} dt$$

が成り立つ。

単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の第1象限の部分は

$$x = \sqrt{1 - t^2}, \quad y = t \quad (0 \leq t \leq 1)$$

とパラメータ表示される。第1象限の点 $P = (\sqrt{1 - y^2}, y)$ を考える。点 $P_0 = (1, 0)$ から P までの円弧の長さ θ は (A.13) を $f(t) = \sqrt{1 - t^2}$, $g(t) = t$ として適用すれば

$$f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}, \quad g'(t) = 1$$

であるから

$$(A.14) \quad \theta = \int_0^y \sqrt{\left(\frac{t}{\sqrt{1 - t^2}}\right)^2 + 1} dt = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$$

によって与えられる. $\theta = \theta(y)$ の導関数は

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} > 0 \quad (0 < y < 1)$$

であるから, $0 < y < 1$ で $\theta(y)$ は y の単調増加関数である. $y = 1$ として単位円の第 1 象限の部分の弧の長さを $\pi/2$ と定義する.

$$(A.15) \quad \frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

これは広義積分であるが, この積分が収束することは次のようにわかる. $0 < t < 1$ のとき

$$1 - t^2 = (1+t)(1-t), \quad 1-t \leq 1-t^2 \leq 2(1-t)$$

より $\sqrt{1-t} \leq \sqrt{1-t^2} \leq \sqrt{2}\sqrt{1-t}$ である. したがって

$$\begin{aligned} \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &\leq \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = [-2\sqrt{1-t}]_y^1 = 2\sqrt{1-y}, \\ \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} &\geq \frac{1}{\sqrt{2}} \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = \sqrt{2}\sqrt{1-y}. \end{aligned}$$

すなわち

$$(A.16) \quad \sqrt{2}\sqrt{1-y} \leq \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \leq 2\sqrt{1-y} \leq 2.$$

ゆえに積分 (A.15) は収束する.

y が 0 から 1 までうごくとき $\theta(y)$ は 0 から $\pi/2$ まで単調に増加する. したがって y は θ の関数と考えることができる. この θ の関数 y を

$$y = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

と表す. これが正弦関数 $\sin \theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi/2$ における定義である.

$P_0 = (1, 0)$ とおき, 点 P が P_0 を出発して単位円を反時計回りにうごき, P は第 1 象限, 第 2 象限, 第 3 象限, 第 4 象限を通過して P_0 に戻るとき, 弧長 θ は 0 から $\pi/2, \pi, 3\pi/2, 2\pi$ と増大する. これを逆向きにたどるとき, 弧長 θ は 0 から $-\pi/2, -\pi, -3\pi/2, -2\pi$ と減少すると考える. このようにして弧長 θ をパラメータとして単位円上の点 P を表すことができる. $0 \leq \theta \leq \pi/2$ のとき, P_0 からの弧長が θ であるような単位円上の点 P の y 座標が $\sin \theta$ で x 座標が $\sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ である. そこで任

意の実数 θ について、弧長 θ を上のような意味にとらえて P_0 からの弧長が θ であるような単位円上の点 P の y 座標を $\sin \theta$ と定義することができる。このとき明らかに $\sin \theta$ は周期 2π をもつ:

$$(A.17) \quad \sin(\theta + 2\pi) = \sin \theta.$$

さらに次が成り立つことわかる:

$$(A.18) \quad \sin(-\theta) = -\sin \theta,$$

$$(A.19) \quad \sin(\pi - \theta) = \sin \theta.$$

(A.19) で θ に $-\theta$ を代入すれば (A.18) より

$$(A.20) \quad \sin(\theta + \pi) = -\sin \theta$$

を得る。

$-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$ において $y = \sin \theta$ は単調増加であり、閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ から閉区間 $[-1, 1]$ への 1 対 1 対応を与える。その逆関数は積分

$$y \mapsto \theta = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

である。したがって

$$\frac{d\theta}{dy} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

であり、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ において $y = \sin \theta$ は微分可能であり逆関数の微分の公式により、 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ において

$$\frac{d}{d\theta} \sin \theta = \frac{dy}{d\theta} = \frac{1}{\frac{d\theta}{dy}} = \sqrt{1-y^2} = \sqrt{1-\sin^2 \theta}$$

となる。(A.19) により $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ に対して $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$ であるから、 $\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ においても $\sin \theta$ は微分可能である。 $\theta = \pi/2$ においては、 $\sin(\pi/2) = 1$ であるから、 $h > 0$ が十分小さいとき、 $y = \sin(\pi/2 - h)$ とおけば

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad \frac{\pi}{2} - h = \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

であるから、この両辺の差をとれば

$$h = \int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

となる。このとき

$$\frac{\sin(\pi/2 - h) - \sin(\pi/2)}{-h} = \frac{y - 1}{-h} = \frac{1 - y}{h} = \frac{1 - y}{\int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}$$

であるが、(A.16) より

$$\int_y^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \geq \sqrt{2}\sqrt{1-y}$$

であり、したがって

$$0 < \frac{\sin(\pi/2 - h) - \sin(\pi/2)}{-h} < \frac{1 - y}{\sqrt{2}\sqrt{1-y}} = \frac{\sqrt{1-y}}{\sqrt{2}}$$

となる。 $h \rightarrow +0$ のとき $y \rightarrow 1 - 0$ のなるから上の不等式から

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi/2 - h) - \sin(\pi/2)}{-h} = 0$$

を得る。(A.19) より $\sin(\pi/2 + h) = \sin(\pi/2 - h)$ となるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\sin(\pi/2 + h) - \sin(\pi/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} -\frac{\sin(\pi/2 - h) - \sin(\pi/2)}{-h} = 0$$

である。ゆえに $\sin \theta$ は $\theta = \pi/2$ においても微分可能であって、 $\sin'(\pi/2) = 0$ である。以上により $\sin \theta$ は $-\pi/2 < \theta < 3\pi/2$ で微分可能である。(A.18) より $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ であるから、 $\sin \theta$ は $-3\pi/2 < \theta < \pi/2$ でも微分可能であり、周期 2π をもつことから結局、 $\sin \theta$ は \mathbb{R} 上で微分可能である。

補助の関数として $\cos \theta$ を $\sin \theta$ の導関数として定義する：

$$(A.21) \quad \cos \theta = \sin' \theta = \frac{d}{d\theta} \sin \theta.$$

$\sin \theta$ が周期 2π をもつことから $\cos \theta$ も周期 2π をもつことがわかる。(A.18) より $\sin(-\theta) = -\sin \theta$ であるから両辺を微分して

$$-\cos(-\theta) = -\cos \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

となる。また (A.19) とり $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$ であるから両辺を微分して

$$-\cos(\pi - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta.$$

まとめると $\cos \theta$ は

$$(A.22) \quad \cos(-\theta) = \cos \theta,$$

$$(A.23) \quad \cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$$

を満たす。 $y = \sin \theta$ は $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ において

$$\frac{dy}{d\theta} = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$$

を満たした。 $\sin \pi/2 = 1, \sin(-\pi/2) = -1$ であるから

$$(A.24) \quad \cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2)$$

が成り立つ。 (A.22) と (A.23) より $\cos(\theta + \pi) = -\cos(-\theta) = -\cos \theta$ であり, (A.24) より

$$(A.25) \quad \cos \theta = -\sqrt{1 - \sin^2 \theta} \quad (\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2)$$

を得る。 (A.24), (A.25) と $\cos \theta$ が周期 2π をもつことから, \mathbb{R} 全体で

$$\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$$

が成り立つことと, P_0 からの弧長が θ であるような単位円上の点 P の x 座標は $\cos \theta$ であることがわかる。したがってこのような P は $(\cos \theta, \sin \theta)$ と表される。単位円 $x^2 + y^2 = 1$ が直線 $y = x$ に関して対称であることから

$$(A.26) \quad \sin(\pi/2 - \theta) = \cos \theta, \quad \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$$

が成り立つ。これを微分すれば

$$(A.27) \quad \frac{d}{d\theta} \cos \theta = -\cos(\pi/2 - \theta) = -\sin \theta$$

を得る。

(A.21) と (A.27) より

$$(A.28) \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \sin \theta = -\sin \theta, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \cos \theta = -\cos \theta.$$

これから ω を定数とするとき

$$(A.29) \quad x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \quad A, B \text{ は定数}$$

は微分方程式

$$(A.30) \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x$$

の解であることがわかる。

B ニュートンの運動方程式

古典力学において物体の運動はニュートンの運動方程式とよばれる次の微分方程式で記述される。

$$(B.1) \quad m\mathbf{a} = \mathbf{f}.$$

ここで m は物体の質量, \mathbf{a} は加速度, \mathbf{f} は物体にかかる力である. \mathbf{p} を時刻 t における物体の位置とすれば, 速度は $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}$ であり, 加速度は $\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{p}}{dt^2}$ である.

以下, \mathbf{p} は 3 次元ベクトル (x, y, z) であるとする. このとき

$$\mathbf{p} = (x, y, z), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \quad \mathbf{a} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right)$$

である. $\mathbf{f} = (f_x, f_y, f_z)$ とすれば (B.1) は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = f_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = f_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = f_z$$

と各成分ごとにかける.

3 次元ベクトル $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ の内積を

$$\mathbf{p}_1 \cdot \mathbf{p}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

によって定義する.

以下、力 \mathbf{f} が**保存力**の場合、すなわち、時刻 t によらない位置座標についてだけのある実数値関数 $U = U(x, y, z)$ を用いて

$$\mathbf{f} = - \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -\nabla U$$

と表される場合を考える。このとき $U(\mathbf{p}(t))$ をその物体の**位置エネルギー**とよび、 $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$ をその物体の**運動エネルギー**とよぶ。ここで

$$v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

である。運動エネルギー $K(t)$ を t で微分すると

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{1}{2}m \frac{d}{dt} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\} \\ &= m \left(\frac{dx}{dt} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \frac{d^2z}{dt^2} \right) \\ &= m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a}. \end{aligned}$$

また位置エネルギー $U(\mathbf{p}(t))$ を t で微分すると

$$\frac{dU}{dt} = \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{dt} = (\nabla U) \cdot \mathbf{v} = -\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}.$$

したがって運動方程式 (B.1) より

$$\frac{d}{dt}(K(t) + U(\mathbf{p}(t))) = \frac{dK}{dt} + \frac{dU}{dt} = m\mathbf{v} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot (m\mathbf{a} - \mathbf{f}) = 0.$$

よって運動エネルギーと位置のエネルギーの和 $K(t) + U(\mathbf{p}(t))$ は一定である。これが**エネルギー保存則**である。

例えば太陽の位置を原点 $O = (0, 0, 0)$ とし惑星の位置を $\mathbf{p} = (x, y, z)$ とするとき、 $r = \sqrt{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ である。惑星にはたらく力 \mathbf{f} は r^2 に反比例する O へ向かう引力であるから

$$\mathbf{f} = -\frac{k}{r^3}\mathbf{p} \quad (k > 0 \text{ は定数})$$

とかける。このとき $U = -\frac{k}{r}$ とおけば

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{r^2} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{k}{r^2} \frac{x}{r} = k \frac{x}{r^3},$$

である。同様に

$$\frac{\partial U}{\partial y} = k \frac{y}{r^3}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = k \frac{z}{r^3}$$

であるから

$$\nabla U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) = \left(k \frac{x}{r^3}, k \frac{y}{r^3}, k \frac{z}{r^3} \right) = \frac{k}{r^3} \mathbf{p}$$

である。よって

$$\mathbf{f} = -(\nabla U)$$

が成り立ち、 \mathbf{f} は保存力である。

3次元ベクトル $\mathbf{p}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\mathbf{p}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ の外積を

$$\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1, x_2 z_1 - x_1 z_2, x_1 y_2 - x_2 y_1)$$

によって定義する。 $\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2$ は \mathbf{p}_1 および \mathbf{p}_2 と直交し、その大きさは \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 のなす角を θ とするとき

$$|\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2| = \sqrt{(\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2) \cdot (\mathbf{p}_1 \times \mathbf{p}_2)} = |\mathbf{p}_1| |\mathbf{p}_2| \sin \theta$$

で与えられる。ベクトルの外積は次の性質をもつ。

$$\mathbf{q} \times \mathbf{p} = -\mathbf{p} \times \mathbf{q},$$

$$\mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0,$$

$$\mathbf{p} \times (\mathbf{q} + \mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{q} + \mathbf{p} \times \mathbf{r},$$

$$(\mathbf{p} + \mathbf{q}) \times \mathbf{r} = \mathbf{p} \times \mathbf{r} + \mathbf{q} \times \mathbf{r}.$$

惑星の運動に戻って、**角運動量**を

$$\mathbf{L} = \mathbf{p} \times m\mathbf{v}$$

によって定義する。このとき

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times m\mathbf{v} + \mathbf{p} \times m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \\ &= \mathbf{v} \times m\mathbf{v} + \mathbf{p} \times m\mathbf{a} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{p} \times \mathbf{f} \\ &= 0 + \mathbf{p} \times \left(-\frac{k}{r^3} \mathbf{p} \right) = -\frac{k}{r^3} \mathbf{p} \times \mathbf{p} = 0 \end{aligned}$$

となる。したがって角運動量 \mathbf{L} は一定のベクトル \mathbf{L}_0 である。これを**角運動量の保存**という。

$\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ のときは位置ベクトル \mathbf{p} と速度ベクトル \mathbf{v} が平行であることになる。このとき $c(t)$ を実数値関数として

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v} = c(t)\mathbf{p}$$

となる。これは成分ごとにみれば

$$\frac{dx}{dt} = c(t)x, \quad \frac{dy}{dt} = c(t)y, \quad \frac{dz}{dt} = c(t)z$$

となり、指数関数 $\exp(u) = e^u$ を用いて

$$x = x_0 \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right), \quad y = y_0 \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right), \quad z = z_0 \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right)$$

と解ける。すなわち

$$\mathbf{p}(t) = \exp\left(\int_0^t c(s) ds\right) \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$$

となる。これは原点 O を通る直線上を運動するものである。

$\mathbf{L}_0 = \mathbf{0}$ のときは周期的な運動にはならないので、惑星の運動では $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$ である。 $\mathbf{L}_0 \neq \mathbf{0}$ のとき \mathbf{L}_0 は \mathbf{p} および \mathbf{v} と直交するから、惑星は \mathbf{L}_0 と垂直な平面内を運動することがわかる。時刻 0 から t までうごいたときに原点と惑星を結ぶ線分がうごく部分の面積 $A(t)$ を考える (図 30)。 $\mathbf{p}(0)$ と $\mathbf{p}(t)$ のなす角を $\theta(t)$ として $r = |\mathbf{p}(t)|$ とおけば、 $\theta = \theta(s)$ と置換積分することにより

$$A(t) = \int_0^{\theta(t)} \frac{1}{2} r^2 d\theta = \int_0^t \frac{1}{2} |\mathbf{p}(s)|^2 \theta'(s) ds$$

と表される。これから**面積速度** $V(t)$ は

$$V(t) = \frac{d}{dt} A(t) = \frac{1}{2} |\mathbf{p}(t)|^2 \theta'(t)$$

となる。一方、

$$|\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h)| = |\mathbf{p}(t)| |\mathbf{p}(t+h)| \sin(\theta(t+h) - \theta(t))$$

であるから

$$\begin{aligned}
 & \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h)|}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{p}(t)| |\mathbf{p}(t+h)| \sin(\theta(t+h) - \theta(t))}{h} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} |\mathbf{p}(t)| |\mathbf{p}(t+h)| \frac{\sin(\theta(t+h) - \theta(t))}{\theta(t+h) - \theta(t)} \frac{\theta(t+h) - \theta(t)}{h} \\
 &= |\mathbf{p}(t)|^2 \theta'(t).
 \end{aligned}$$

ここで $\varepsilon = \theta(t+h) - \theta(t)$ とおけば $h \rightarrow 0$ のとき $\varepsilon \rightarrow 0$ となるので

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta(t+h) - \theta(t))}{\theta(t+h) - \theta(t)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \cos 0 = 1$$

となることを用いた。また

$$\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h) = \mathbf{p}(t) \times (\mathbf{p}(t+h) - \mathbf{p}(t))$$

より

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\mathbf{p}(t) \times \frac{\mathbf{p}(t+h) - \mathbf{p}(t)}{h} \right) \\
 &= \mathbf{p}(t) \times \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t+h) - \mathbf{p}(t)}{h} = \mathbf{p}(t) \times \mathbf{v}(t) = \frac{1}{m} \mathbf{L} = \frac{1}{m} \mathbf{L}_0
 \end{aligned}$$

を得る。したがって

$$\begin{aligned}
 V(t) &= \frac{1}{2} |\mathbf{p}(t)|^2 \theta'(t) = \frac{1}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h)|}{h} \\
 &= \frac{1}{2} \left| \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{p}(t) \times \mathbf{p}(t+h)}{h} \right| = \frac{1}{2} \left| \frac{1}{m} \mathbf{L}_0 \right| = \frac{1}{2m} |\mathbf{L}_0|
 \end{aligned}$$

となる。すなわち面積速度は一定である (ケプラーの第2法則)。

C レムニスケート関数とその加法定理

単位円の第1象限の部分は

$$y = \sqrt{1-x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

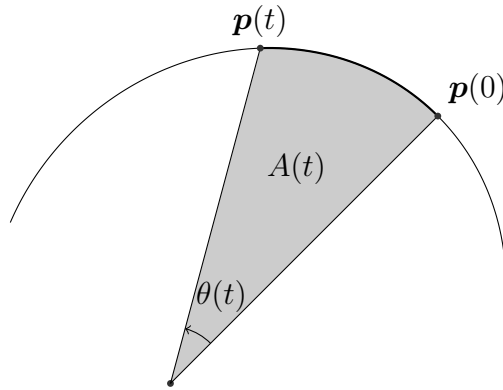


図 30 面積 $A(t)$

と表され

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから, $(0, 1)$ から $(x, \sqrt{1-x^2})$ までの円弧の長さを θ とすれば

$$\frac{d\theta}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

したがって

$$(C.1) \quad \theta = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

である. 半径 1 の円の周の長さは 2π であるから単位円 $x^2 + y^2 = 1$ の第 1 象限の部分の弧長は $\pi/2$ である. これは

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

を意味する. x が 0 から 1 までうごくとき, (C.1) で定まる x の関数 θ は 0 から $\pi/2$ まで単調に増加する. したがって x は θ の関数と考えることができる. この θ の関数 x を

$$x = \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi/2)$$

と表す. これが正弦関数 $\sin \theta$ の定義である. すなわち円弧の長さを表す積分 (C.1) によって定義される関数の逆関数として $\sin \theta$ を定義することができる.

円の場合にならってレムニスケート (4.13) の第 1 象限の部分の弧長を $\varpi/2$ で表す：

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}.$$

よってレムニスケート (4.13) の弧の全長は $4 \times \varpi/2 = 2\varpi$ であり、 $\varpi = 2.622057\dots$ である。

点 P が原点 O を出発してレムニスケートの第 1 象限の部分を通り、レムニスケートに沿って第 4 象限、第 2 象限、第 3 象限を通って原点 O に戻るとき、 O からの弧長 s は 0 から、 $\varpi/2, \varpi, 3\varpi/2, 2\varpi$ と増大する。これを逆向きにたどるとき、弧長 s は 0 から、 $-\varpi/2, -\varpi, -3\varpi/2, -2\varpi$ と減少すると考える。このように弧長 s をパラメータとしてレムニスケート上の点 P を表すことができる。

線分 OP の長さ r は P が第 1, 4 象限にあるとき正であるとし、 P が第 2, 3 象限にあるとき負であるとする。このように符号を付けた r は s の関数として定まるから、それを $r = \text{sl}(s)$ で表す。 $\text{sl}(s)$ は実数全体で定義され、 -1 から 1 までの値をとる。また s と $s + 2\varpi$ はレムニスケート上の同じ点を与えるので $\text{sl}(s)$ は周期 2ϖ をもつ周期関数になる。さらに次が成り立つ。

$$(C.2) \quad \text{sl}(-s) = -\text{sl}(s),$$

$$(C.3) \quad \text{sl}(\varpi - s) = \text{sl}(s).$$

実際、 s と $-s$ は原点 O に関して対称なレムニスケート上の点を与えるので (C.2) が成り立つ。また s と $\varpi - s$ は x 軸に関して対称なレムニスケート上の点を与えるので (C.3) が成り立つ。この関数 $\text{sl}(s)$ を**レムニスケートサイン関数**とよぶ。関数 $r = \text{sl}(s)$ は $-\varpi/2 \leq s \leq \varpi/2$ において単調増加であり、閉区間 $[-\varpi/2, \varpi/2]$ から閉区間 $[-1, 1]$ への 1 対 1 対応を与える。その逆関数は (4.15) の積分

$$r \mapsto s = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

である。したがって

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

であり、 $-\varpi/2 < s < \varpi/2$ において $r = \text{sl}(s)$ は微分可能であって

$$\frac{dr}{ds} = \frac{1}{\frac{ds}{dr}} = \sqrt{1-r^4} = \sqrt{1-\text{sl}^4(s)}$$

が成り立つ. (C.3) より $\varpi/2 < s < 3\varpi/2$ に対して $\text{sl}(s) = \text{sl}(\varpi - s)$ であるから, $\varpi/2 < s < 3\varpi/2$ においても $\text{sl}(s)$ は微分可能である. $s = \varpi/2$ においては, $\text{sl}(\varpi/2) = 1$ であるから, $h > 0$ が十分小さいとき, $r = \text{sl}(\varpi/2 - h)$ とおけば

$$\frac{\varpi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad \frac{\varpi}{2} - h = \int_0^r \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

であるから, この両辺の差をとれば

$$h = \int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$$

となる. このとき

$$\frac{\text{sl}(\varpi/2 - h) - \text{sl}(\varpi/2)}{-h} = \frac{r - 1}{-h} = \frac{1 - r}{h} = \frac{1 - r}{\int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}}$$

であるが, (4.18) より

$$0 \leq \frac{1 - r}{\int_r^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}} \leq \sqrt{1 - r}.$$

$h \rightarrow +0$ のとき $r \rightarrow 1$ となるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\text{sl}(\varpi/2 - h) - \text{sl}(\varpi/2)}{-h} = 0$$

を得る. (C.3) より $\text{sl}(\varpi/2 + h) = \text{sl}(\varpi/2 - h)$ となるから

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{\text{sl}(\varpi/2 + h) - \text{sl}(\varpi/2)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} -\frac{\text{sl}(\varpi/2 - h) - \text{sl}(\varpi/2)}{-h} = 0$$

である. ゆえに $\text{sl}(s)$ は $s = \varpi/2$ においても微分可能であり, $\text{sl}'(\varpi/2) = 0$ である. 以上により $\text{sl}(s)$ は $-\varpi/2 < s < 3\varpi/2$ において微分可能である. (C.2) より $\text{sl}(-s) = -\text{sl}(s)$ であるから, $\text{sl}(s)$ は $-3\varpi/2 < s < \varpi/2$ においても微分可能であり, 周期 2ϖ をもつことから結局, $\text{sl}(s)$ は \mathbb{R} 上で微分可能である.

補助の関数として

$$(C.4) \quad \text{cl}(s) = \text{sl}'(s) = \frac{d}{ds} \text{sl}(s)$$

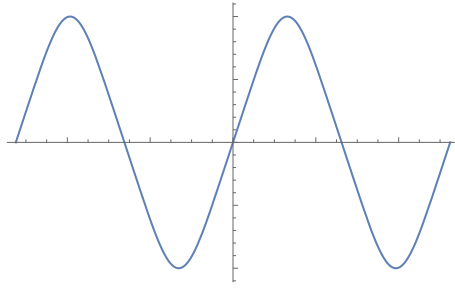


図 31 $r = \text{sl}(s)$ のグラフ

を導入する. $\text{cl}(s)$ をレムニスケートコサイン関数とよぶ. (C.2) より $\text{sl}(-s) = -\text{sl}(s)$ であり, この両辺を微分すれば

$$-\text{cl}(-s) = -\text{cl}(s), \quad \text{cl}(-s) = \text{cl}(s)$$

となる. また (C.3) より $\text{sl}(\varpi - s) = \text{sl}(s)$ であり, この両辺を微分すれば

$$-\text{cl}(\varpi - s) = \text{cl}(s), \quad \text{cl}(\varpi - s) = -\text{cl}(s).$$

まとめると $\text{cl}(s)$ は

$$(C.5) \quad \text{cl}(-s) = \text{cl}(s),$$

$$(C.6) \quad \text{cl}(\varpi - s) = -\text{cl}(s)$$

を満たす. $r = \text{sl}(s)$ は (4.15) より

$$\frac{ds}{dr} = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}$$

を満たすから, $-\varpi/2 < s < \varpi/2$ において

$$\frac{dr}{ds} = \sqrt{1-r^4} = \sqrt{1-\text{sl}^4(s)}$$

となる. $\text{cl}(\pm\varpi/2) = \text{sl}'(\pm\varpi/2) = 0$ であるから

$$(C.7) \quad \text{cl}(s) = \sqrt{1-\text{sl}^4(s)} \quad (-\varpi/2 \leq s \leq \varpi/2)$$

が成り立つ. (C.5) と (C.6) より $\text{cl}(s+\varpi) = -\text{cl}(-s) = -\text{cl}(s)$ であり, (C.7) より

$$(C.8) \quad \text{cl}(s) = -\sqrt{1-\text{sl}^4(s)} \quad (\varpi/2 \leq s \leq 3\varpi/2)$$

を得る. $\text{cl}^2(s) = 1 - \text{sl}^4(s)$ の両辺を微分すれば

$$2 \text{cl}(s) \text{cl}'(s) = -4 \text{sl}^3(s) \text{sl}'(s) = -4 \text{sl}^3(s) \text{cl}(s)$$

となり

$$(C.9) \quad \text{cl}'(s) = -2 \text{sl}^3(s)$$

を得る.

レムニスケートサイン関数 $\text{sl}(u)$ は三角関数と同様に加法定理を満たすことを示す. 以下, アーベルによる証明を紹介する.

補題 C.1. $g(u, v)$ を \mathbb{R}^2 上の微分可能な関数とする. このとき次の 2 条件は互いに同値である.

(i) \mathbb{R}^2 上で $g(u, v) = g(u + v, 0)$ が成り立つ.

(ii) \mathbb{R}^2 上で $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}$ が成り立つ.

[証明] まず $h(x, y) = g(x + y, x - y)$ とおくと

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y).$$

(ii) \Rightarrow (i). \mathbb{R}^2 上で $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}$ が成り立つとすれば \mathbb{R}^2 上で

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0$$

が成り立つ. したがって任意の実数 a, b, c に対して

$$0 = \int_b^c \frac{\partial h}{\partial y}(a, t) dt = [h(a, t)]_b^c = h(a, c) - h(a, b).$$

すなわち $h(a, b) = h(a, c)$ である. よって任意の $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ に対して $c = a = (u + v)/2$, $b = (u - v)/2$ とおけば

$$h(a, b) = g(a + b, a - b) = g(u, v), \quad h(a, c) = g(a + c, a - c) = g(2a, 0) = g(u + v, 0)$$

であるから $g(u, v) = g(u + v, 0)$ を得る.

(i) \Rightarrow (ii). 逆に $g(u, v) = g(u + v, 0)$ が \mathbb{R}^2 上で成り立つとすれば

$$\begin{aligned} h(x, y) &= g(x + y, x - y) = g(2x, 0), \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}(x + y, x - y) - \frac{\partial g}{\partial v}(x + y, x - y) \end{aligned}$$

が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について成り立つ. $x = (u + v)/2$, $y = (u - v)/2$ とおけば

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial v}(u, v).$$

□

命題 C.2 (加法定理). 任意の実数 u, v に対して

$$\operatorname{sl}(u + v) = \frac{\operatorname{sl}(u) \operatorname{cl}(v) + \operatorname{cl}(u) \operatorname{sl}(v)}{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)}$$

が成り立つ.

[証明]

$$g(u, v) = \frac{\operatorname{sl}(u) \operatorname{cl}(v) + \operatorname{cl}(u) \operatorname{sl}(v)}{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)}$$

とおくと $g(u, v)$ は \mathbb{R}^2 上の微分可能な関数である. (C.4), (C.9) より

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= \frac{\{\operatorname{cl}(u) \operatorname{cl}(v) + \operatorname{cl}'(u) \operatorname{sl}(v)\} \{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}}{\{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}^2} \\ &\quad - \frac{2 \operatorname{sl}(u) \operatorname{cl}(u) \operatorname{sl}^2(v) \{\operatorname{sl}(u) \operatorname{cl}(v) + \operatorname{sl}(v) \operatorname{cl}(u)\}}{\{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}^2} \\ &= \frac{\{\operatorname{cl}(u) \operatorname{cl}(v) - 2 \operatorname{sl}^3(u) \operatorname{sl}(v)\} \{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}}{\{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}^2} \\ &\quad - \frac{2 \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v) \operatorname{cl}(u) \operatorname{cl}(v) + 2 \operatorname{sl}(u) \operatorname{sl}^3(v) (1 - \operatorname{sl}^4(u))}{\{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}^2} \\ &= \frac{\operatorname{cl}(u) \operatorname{cl}(v) \{1 - \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\} - 2 \operatorname{sl}(u) \operatorname{sl}(v) \{\operatorname{sl}^2(u) + \operatorname{sl}^2(v)\}}{\{1 + \operatorname{sl}^2(u) \operatorname{sl}^2(v)\}^2}. \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial v} &= \frac{\{\text{sl}(u) \text{cl}'(v) + \text{cl}(u) \text{cl}(v)\} \{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)\}}{\{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)\}^2} \\ &\quad - \frac{2 \text{sl}^2(u) \text{sl}(v) \text{cl}(v) \{\text{sl}(u) \text{cl}(v) + \text{cl}(u) \text{sl}(v)\}}{\{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)\}^2} \\ &= \frac{\text{cl}(u) \text{cl}(v) \{1 - \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)\} - 2 \text{sl}(u) \text{sl}(v) \{\text{sl}^2(u) + \text{sl}^2(v)\}}{\{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)\}^2}.\end{aligned}$$

したがって $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial g}{\partial v}$ である. 補題 C.1 より $g(u, v) = g(u + v, 0)$ である. $\text{sl}(0) = 0$, $\text{cl}(0) = 1$ より $g(u + v, 0) = \text{sl}(u + v)$ である. ゆえに

$$\text{sl}(u + v) = g(u + v, 0) = g(u, v) = \frac{\text{sl}(u) \text{cl}(v) + \text{sl}(v) \text{cl}(u)}{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)}.$$

□

系 C.3. 次の公式が成り立つ.

$$(C.10) \quad \text{sl}(u - v) = \frac{\text{sl}(u) \text{cl}(v) - \text{cl}(u) \text{sl}(v)}{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)},$$

$$(C.11) \quad \text{sl}(u + v) + \text{sl}(u - v) = \frac{2 \text{sl}(u) \text{cl}(v)}{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)},$$

$$(C.12) \quad \text{sl}(2u) = \frac{2 \text{sl}(u) \text{cl}(u)}{1 + \text{sl}^4(u)},$$

$$(C.13) \quad \text{sl}\left(\frac{\varpi}{2} - u\right) = \frac{\text{cl}(u)}{1 + \text{sl}^2(u)}.$$

[証明] (C.2), (C.5) より $\text{sl}(-v) = -\text{sl}(v)$, $\text{cl}(-v) = \text{cl}(v)$ である. よって加法定理 (命題 C.2) において v を $-v$ で置き換えれば

$$\text{sl}(u - v) = \frac{\text{sl}(u) \text{cl}(v) - \text{cl}(u) \text{sl}(v)}{1 + \text{sl}^2(u) \text{sl}^2(v)}$$

を得る. これと加法定理の和をとれば (C.11) を得る. 加法定理で, $v = u$ とおけば (C.12) を得る. (C.10) において u に $\varpi/2$ を, v に u を代入すれば, $\text{sl}(\varpi/2) = 1$, $\text{cl}(\varpi/2) = 0$ であるから

$$\text{sl}\left(\frac{\varpi}{2} - u\right) = \frac{\text{cl}(u)}{1 + \text{sl}^2(u)}.$$

□

$r = \text{sl}(\varpi/4)$ とおくと (C.13) より

$$\begin{aligned} r &= \frac{\sqrt{1-r^4}}{1+r^2}, \\ r(1+r^2) &= \sqrt{1-r^4}, \\ r^2(1+2r^2+r^4) &= 1-r^4, \\ r^6+3r^4+r^2-1 &= 0, \\ (r^2+1)(r^4+2r^2-1) &= 0. \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ より $r^2 = -1 + \sqrt{2}$, $r = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ を得る. すなわちレムニスケート (4.13) の第 1 象限の弧長を 2 等分する点 $P_1 = (x, y)$ は $r = \sqrt{\sqrt{2}-1}$ のときである. (4.13) より

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 = r^2 = \sqrt{2} - 1, \quad x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2 = 3 - 2\sqrt{2}, \\ 2x^2 = 2 - \sqrt{2}, \quad 2y^2 = 3\sqrt{2} - 4, \\ x = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{\sqrt{2}}, \quad y = \frac{\sqrt{3\sqrt{2} - 4}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

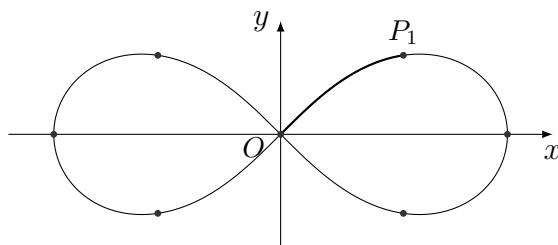


図 32 レムニスケートの周の 8 等分点

レムニスケート関数を用いて

$$x = \text{sl}(u), \quad y = \text{cl}(u)$$

とパラメータ表示される曲線は (C.7), (C.8) より

$$(C.14) \quad y^2 = 1 - x^4$$

となる. $X = 1/x^2$, $Y = y/x^3$ とおけば

$$Y^2 = \frac{y^2}{x^6} = \frac{1-x^4}{x^6} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^3 - \frac{1}{x^2} = X^3 - X$$

となる. (5.1) で定義された楕円曲線 E_1 はこのように (C.14) から簡単な変数変換によって得られるものである.

参考文献

- [1] 安藤四朗, 楕円積分・楕円関数入門, 日新出版, 1970.
- [2] 磯田正美 (編), 曲線の事典, 共立出版, 2009.
- [3] 小林昭七, 微分積分読本 1 変数, 裳華房, 2000.
- [4] 松下泰雄, 曲線の秘密, 講談社, 2016.
- [5] 高桑昇一郎, 微分方程式と変分法, 共立出版, 2003.
- [6] 高野恭一, 常微分方程式, 朝倉書店, 1994.
- [7] 遠山啓, 数学の広場 4 3次元の世界, 日本図書センター, 2013.