2元3次形式の概均質ゼータ関数に関する 大野予想の証明

上越教育大学　　中川 仁

1　大野予想の証明

予想 1.1.

$$\text{(i)}\qquad \hat{h}_1(27n)+\frac{1}{3}\hat{h}_2(27n)=h(-n)\quad \forall n>0;$$
$$\text{(ii)}\qquad \hat{h}(-27n)=3h_1(n)+h_2(n)\quad \forall n>0.$$

$\tilde{h}(27n)=\hat{h}_1(27n)+\frac{1}{3}\hat{h}_2(27n)$ とおく．$\tilde{h}(27n)=h(-n), \forall n>0$ を証明すればよい．$k=\mathbb{Q}(\sqrt{-n})$ とおけば，k は虚2次体であり，$n=|D_k|m^2, m\in\mathbb{N}$ の形である．

$c\in\mathbb{Z}, c>0$ に対して，$\mathcal{O}_{k,c}$ によって，k の導手 c の整環を表し，$Cl_{k,c}$ によって，$\mathcal{O}_{k,c}$ のイデアル類群を表す.

1.1　3次体の整環

$x(u,v)$ を $\mathbb{Q}$ 上既約とし，θ を3次方程式

$$x(u,1)=x_1u^3+x_2u^2+x_3u+x_4=0$$

の根とする．$K_x=\mathbb{Q}(\theta)$ とおく．$\eta_0=1, \eta_1=x_1\theta, \eta_2=x_1\theta^2+x_2\theta+x_3$ とおき，η_0,η_1,η_2 によって生成される3次体 K_x の格子を $\mathcal{O}_x$ とする．そのとき，

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \eta_1^2 &= -x_1x_3-x_2\eta_1+x_1\eta_2,\\ \eta_2^2 &= -x_2x_4-x_4\eta_1+x_3\eta_2,\\ \eta_1\eta_2 &= -x_1x_4 \end{cases}$$

が成り立つ．よって，$\mathcal{O}_x$ は K_x の整環である．次に，x は $\mathbb{Q}$ 上可約な整数係数2元3次形式で，$D(x)\neq 0$ とする．もし，x が $\mathbb{Q}$ 上で1次式と既約2次式の積に分解されるならば，$K_x=\mathbb{Q}\oplus k$, k は x の2次因子の分解体とする．もし，x が $\mathbb{Q}$ 上で1次式の3個の積に分解されるならば，$K_x=\mathbb{Q}^3$ とおく．そのとき，$\{\eta_0=1,\eta_1,\eta_2\}$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群 $\mathcal{O}_x$ は (1.1) によって，K_x の整環になる．逆に，階数3の自由 $\mathbb{Z}$-加群であるような，単位元1を持つ結合的可換環は，ある整数係数2元3次形式 x に対する $\mathcal{O}_x$ に同型である．さらに，$D(\mathcal{O}_x)=D(x)$ である．次の補題は Delone and Faddeev [2] による．

補題 1.2. 写像 $x \longmapsto \mathcal{O}_x$ は 0 でない判別式を持つ整数係数 2 元 3 次形式 x の $GL(2)_{\mathbb{Z}}$-同値類の集合から，階数 3 の自由 $\mathbb{Z}$-加群であるような，単位元 1 を持つ結合的可換環の同型類の集合の上への全単射を引き起こす.

$m=1$ のとき，証明のアイディアは次の通り.
補題 1.2 と類体論から，

$$\begin{aligned} h(D_k) &= 2\#\{\text{ 判別式 } D_k \text{ の } 3 \text{ 次体 (の整環)}\}+1 \\ &= |Cl_k/Cl_k^3| = |Cl_k^{(3)}|. \end{aligned}$$

そこで，次の図の下の二つの全単射 (Eisenstein は知っていた？) を示せば，予想の等式

$$h(27|D_k|) = |Cl_k^{(3)}| = h(D_k)$$

を得る.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Gamma\backslash\{\text{ 判別式 } D_k \text{ の } 2 \text{ 元 } 2 \text{ 次形式 }\} & \longleftrightarrow & Cl_k \\ & & \bigcup & & \bigcup \\ \Gamma\backslash L(27|D_k|) & \longleftrightarrow & \Gamma\backslash\{H_x|\, x\in \hat{L}(27n)\} & \longleftrightarrow & Cl_k^{(3)} \end{array}$$

$m=1$ の場合，m が平方因数を持たない場合，一般の場合の 3 段階に分けて証明する.

1.2 $m=1$ の場合

n を正整数とする．$x(u,v)$ を $\hat{L}(27n)$ に属する整数係数 2 元 3 次形式とし，これを

$$x(u,v) = x_1u^3 + 3x_2u^2v + 3x_3uv^2 + x_4v^3, \quad x_1,x_2,x_3,x_4 \in \mathbb{Z}$$

とかく．x の Hessian H_x を次の式で定義する.

$$H_x(u,v) = -\frac{1}{36}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} \\ \dfrac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \dfrac{\partial^2 x}{\partial v^2} \end{vmatrix}. \tag{1.2}$$

そのとき，$H_x(u,v) = Au^2 + Buv + Cv^2$,

$$A = x_2^2 - x_1x_3, \quad B = x_2x_3 - x_1x_4, \quad C = x_3^2 - x_2x_4 \tag{1.3}$$

である．H_x は正定値 2 元 2 次形式であり，その判別式は $-n$ に等しいことがわかる．さらに，

$$H_{\gamma x}(u,v)=(\gamma H_x)(u,v),\quad \forall\gamma\in\Gamma$$

が成り立つ．H_x は原始的とは限らないので，$f=(A,B,C)$ とおき，

$$A=fA_1,\ B=fB_1,\ C=fC_1,\quad A_1,B_1,C_1\in\mathbb{Z}$$

とかく．そのとき，ある自然数 c に対して，$B_1^2-4A_1C_1=D_kc^2$ となる．よって，$-n=D(H_x)=D_kc^2f^2$, $m=cf$ である．

$$\alpha_x=\frac{-B_1+c\sqrt{D_k}}{2},\quad \mathfrak{a}_x=[A_1,\alpha_x]$$

とおく．そのとき，$\mathbb{Z}[\alpha_x]=\mathcal{O}_{k,c}$ であり，$\mathfrak{a}_x$ は原始的 2 元 2 次形式 $f^{-1}H_x$ に対応した proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであり，$N(\mathfrak{a}_x)=A_1$ である．次の補題は重要である．

補題 1.3. $\beta_x=x_2A_1+x_1\alpha_x$ とおき，$\mathfrak{b}_x=\beta_x\mathfrak{a}_x^{-3}$ とおく．そのとき，$\mathfrak{b}_x$ は整 *proper* $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアルであり，$N(\mathfrak{b}_x)=f$ である．

特に，$m=1$ の場合は，$c=f=1$ であるから，補題 1.3 より，$\mathfrak{a}_x^3=(\beta_x)$ であり，イデアル類 $[\mathfrak{a}_x]$ は $Cl_k^{(3)}$ の元である．$H_{\gamma x}=\gamma H_x$ であるから，$[\mathfrak{a}_x]$ は Γx のみで定まる．$k\neq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば，この対応 $\Gamma x\longmapsto[\mathfrak{a}_x]$ は $\Gamma\backslash L(27|D_k|)$ から $Cl_k^{(3)}$ の上への全単射を与える (このことは，もう少し一般的に，m が平方因数を持たない場合に後で説明する)．したがって，$\hat{h}(27|D_k|)=|Cl_k^{(3)}|$ である．

1.3 m が平方因数を持たない場合

補題 1.4. $\mathfrak{b}_{\gamma x}=\mathfrak{b}_x$, $\forall\gamma\in\Gamma$.

[証明] Γ の生成元 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}$ についてチェックすればよい． □

$\hat{L}_{k,c}(f)$ によって，$x\in\hat{L}(27|D_k|c^2f^2)$ で，H_x の係数の最大公約数が f であるようなもの全体のなす集合を表す．これは Γ-不変である．そのとき，任意の自然数 m に対して，次の分解を得る．

$$\hat{L}(27|D_k|m^2)=\bigcup_{cf=m}\hat{L}_{k,c}(f)\quad\text{(disjoint)}.\tag{1.4}$$

$\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する 2 元 3 次形式の同値類の個数を求めよう．$\omega_{k,c}(f)$ によって，整 proper $\mathcal{O}_{k,c}$-イデアル $\mathfrak{b}$ で，$N(\mathfrak{b})=f$, $[\mathfrak{b}]\in Cl_{k,c}^3$ を満たすようなもの全体のなす集合を表す．$S_{k,c}(f)$ によって，$(\xi,\mathfrak{b})\in Cl_{k,c}\times\omega_{k,c}(f)$ で，$\xi^3[\mathfrak{b}]=1$ を満たすもの全体のなす集合を表す．各 $\mathfrak{b}\in\omega_{k,c}(f)$ に対して，イデアル類 ξ で，$\xi^3[\mathfrak{b}]=1$ を満たすものが丁度 $|Cl_{k,c}^{(3)}|$ 個存在する．したがって，$|S_{k,c}(f)|=|Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$ である．写像 $\Phi:\hat{L}_{k,c}(f)\longrightarrow S_{k,c}(f)$ を $\Phi(x)=([\mathfrak{a}_x],\mathfrak{b}_x)$ によって定義する．

補題 1.5. 写像 Φ は全射である．

これらの準備のもとで，$\hat{L}_{k,c}(f)$ に属する 2 元 3 次形式の同値類の個数をイデアル類群 $\mathcal{O}_{k,c}$ のことばで表示する公式を与えることができる．

命題 1.6. $D_k c^2 \neq -3$ とする．そのとき，写像 Φ は $\Gamma\backslash\hat{L}_{k,c}(f)$ と $S_{k,c}(f)$ の間の全単射を引き起こす．特に，

$$|\Gamma\backslash\hat{L}_{k,c}(f)| = |Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ．

命題 1.6 で除外した場合に対しては，次が成り立つ．

命題 1.7. $k = \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, $c = 1$, $f \in \mathbb{Z}$, $f > 0$ とする．そのとき，

$$\hat{h}_2(81f^2) = |\Gamma\backslash\hat{L}_{k,1}(f)| = 3|Cl_{k,1}^{(3)}||\omega_{k,1}(f)|$$

が成り立つ．

(1.4) と命題 1.6, 1.7 より，次を得る．

命題 1.8. k を虚 2 次体，m を正整数とし，$n = |D_k|m^2$ とおく．そのとき，

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} |Cl_{k,c}^{(3)}||\omega_{k,c}(f)|$$

が成り立つ．

ここで，m は平方因数を持たないとする．これによって，$m = cf$ のとき，$(c, f) = 1$ が保証される．

$$\Omega_{k,c}(f) = \bigcup_{g|f} \omega_{k,c}(g)$$

とおけば，

$$|\omega_{k,c}(f)| = \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |\Omega_{k,c}(g)|$$

とかける．したがって，命題 1.8 の等式は次のように書き直せる．

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |\Omega_{k,c}(g)||Cl_{k,c}^{(3)}|. \tag{1.5}$$

χ を k に対応する Dirichlet 指標とすると，(1.5) は，次のように書き直せる．

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m} \sum_{g|f} \mu\left(\frac{f}{g}\right) |Cl_{k,c}^{(3)}| \frac{\prod_{p|g}(2 + \chi(p))}{|X_{k,c}(g)|}. \tag{1.6}$$

ここで，$X_{k,c}(g) = H_{k,c}(g)/Cl_{k,c}^3$, $H_{k,c}(g)$ は $N(\mathfrak{p})|g$ を満たす素イデアル $\mathfrak{p}$ のイデアル類たちと $Cl_{k,c}^3$ とによって生成される $Cl_{k,c}$ の部分群を表す．

補題 1.9. $\xi_i(s,L)$ $(i=1,2)$ は次のように表示される:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\xi_1(L,s) &= \sum_{K\in\mathcal{K}_1^+}|D_K|^{-s}\eta_K(2s)+\frac{1}{3}\sum_{K\in\mathcal{K}_2}|D_K|^{-s}\eta_K(2s)\\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{Q}^+}|D_k|^{-s}\eta_{\mathbb{Q}\oplus k}(2s)+\frac{1}{6}\eta_{\mathbb{Q}^3}(2s),\\ \frac{1}{2}\xi_2(L,s) &= \sum_{K\in\mathcal{K}_1^-}|D_K|^{-s}\eta_K(2s)+\frac{1}{2}\sum_{k\in\mathcal{Q}^-}|D_k|^{-s}\eta_{\mathbb{Q}\oplus k}(2s).\end{aligned}$$

$$\eta_A(s)=\prod_p \eta_{A_p}(s),\quad \eta_{A_p}(s)=\sum_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_{A_p}:\mathcal{O})^{-s}, \tag{1.7}$$

が成り立つ．ここで，$\mathcal{O}$ は A_p のすべての整環をわたる．

補題 1.10. K を 3 次体，k を 2 次体とし，A を K, $\mathbb{Q}\oplus k$, $\mathbb{Q}^3$ のいずれかとすれば，

$$\eta_A(s)=\frac{\zeta_A(s)}{\zeta_A(2s)}\zeta(2s)\zeta(3s-1)$$

が成り立つ．

K を 3 次体，k を 2 次体とし，A を K, $\mathbb{Q}\oplus k$, $\mathbb{Q}^3$ のいずれかとするとき，

$$\eta_A(s)=\sum_{f=1}^{\infty}\frac{a_A(f)}{f^s}$$

とかく．

補題 1.9 より，

$$h(-n)=\sum_{cf=m}\sum_{K\in\mathcal{K}_{k,c}}2a_K(f)+a_{\mathbb{Q}\oplus k}(m). \tag{1.8}$$

ここで，$\mathcal{K}_{k,c}$ は判別式 $D_k c^2$ の 3 次体全体であった．$m=cf$ は平方因数を持たないから，f もそうであり，$(c,f)=1$ である．特に，素数 $p|f$ は $K\in\mathcal{K}_{k,c}$ において完全分岐しない．$\eta_A(s)$ はオイラー積を持つから，

$$a_A(f)=\prod_{p|f}a_A(p).$$

補題 1.10 より，

$$a_{\mathbb{Q}\oplus k}(p)=2+\chi(p),$$

$$a_K(p)=\begin{cases}1, & p=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2, \quad \chi(p)=-1,\\ 2, & p=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2^2, \quad \chi(p)=0,\\ 3, & p=\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3, \quad \chi(p)=1,\\ 0, & p=\mathfrak{p}, \quad \chi(p)=1,\end{cases}$$

したがって，(1.8) は $p|f$, $\chi(p) = 1$ が完全分解するような K をわたる和になる．$\mathcal{K}_{k,c}(f) = \{K \in \mathcal{K}_{k,c} | \, p = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_3 \ \forall p|f, \chi(p) = 1\}$ であったから，(1.8) は類体論を用いれば，次のように変形される．

$$\begin{aligned} h(-n) &= \sum_{cf=m} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k,c}(f)} 2 \prod_{p|f} (2 + \chi(p)) + \prod_{p|m} (2 + \chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m} 2|\mathcal{K}_{k,c}(f)| \prod_{p|f} (2 + \chi(p)) + \prod_{p|m} (2 + \chi(p)) \\ &= \sum_{cf=m} \sum_{d|c} \mu\left(\frac{c}{d}\right) \frac{|Cl_{k,d}^{(3)}|}{|X_{k,d}(f)|} \prod_{p|f} (2 + \chi(p)). \end{aligned}$$

この右辺は，和の変数を書き直せば，(1.6) の右辺と一致する．以上によって，

命題 1.11. k を虚 2 次体，m を平方因数を持たない自然数として，$n = |D_k|m^2$ とおく．そのとき，$\tilde{h}(27n) = h(-n)$ が成り立つ．

同様にして，

命題 1.12. k を虚 2 次体，m_0 を平方因数を持たない 3 と素な自然数として，$m = 9m_0$, $n = |D_k|m^2$ とおく．そのとき，$\tilde{h}(27n) = h(-n)$ が成り立つ．

1.4 一般の場合

$\eta_A(s)$ の $p = 3$ におけるオイラー因子を適当に修正することによって得られる $\hat{\eta}_A(s)$ を用いて，ゼータ関数 $\xi_i(\hat{L}, s)$, $i = 1, 2$ に対しても補題 1.9 と同様な表示が得られる．

$$\hat{\eta}_A(s) = \sum_{f=1}^{\infty} \frac{\hat{a}_A(f)}{f^s}$$

とかく．$k \neq \mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ ならば，

$$\tilde{h}(27n) = \sum_{cf=m'} \sum_{K \in \mathcal{K}_{k',c}} 2\hat{a}_K(f) + \hat{a}_{\mathbb{Q}\oplus k'}(m'). \tag{1.9}$$

ここで，

$$k' = \mathbb{Q}(\sqrt{3n}), \quad m' = \begin{cases} 3m, & 3 \nmid D_k, \\ 9m, & 3|D_k \end{cases} \qquad (27n = D_{k'}(m')^2)$$

とおいた．

m を任意の自然数とする．$n = |D_k|m^2$, q は m と素な素数とする．

(1.8), (1.9) と補題 1.10 による $a_A(q^N)$ の具体的表示から，二つの数列 $\{\tilde{h}(27nq^{2N})\}_{N\geq 0}$ と $\{h(-nq^{2N})\}_{N\geq 0}$ は全く同じ漸化式を満たすことがわかる．

参考文献

[1] B. Datskovsky and D. J. Wright, The adelic zeta function associated with the space of binary cubic forms. II: Local theory, J. Reine Angew. Math. **367** (1986), 27–75.

[2] B. N. Delone and D. K. Faddeev, The Theory of Irrationalities of the Third Degree, Amer. Math. Soc. Transl. **10**, 1964.

[3] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, Invent. math. **119** (1998), 101–138.

[4] Y. Ohno, A conjecture on coincidence among the zeta functions associated with the space of binary cubic forms, Amer. J. Math. **119** (1997), 1083–1094.

[5] T. Shintani, On Dirichlet series whose coefficients are class numbers of integral binary cubic forms, J. Math. Soc. Japan **24** (1972), 132–188.