

# 四面体と球の Minkowski 和の体積

中川仁

上越教育大学

2022 年 9 月 30 日

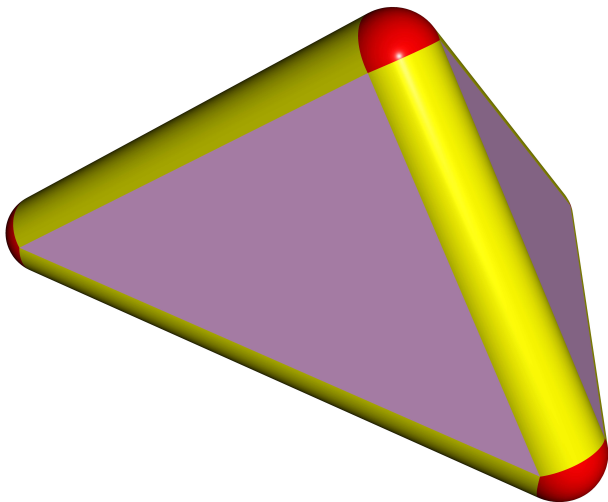
# Steiner の公式

体積  $V_0$  の四面体  $K$  と半径  $r$  の閉球  $B(r)$  の Minkowski 和  $K + B(r)$  の体積  $V$  は次のような  $r$  の 3 次式になる.

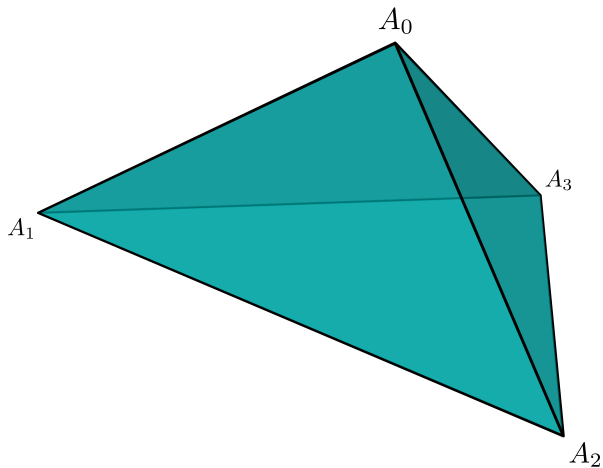
$$V = V_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \frac{4\pi}{3} r^3.$$

- 定数項は四面体  $K$  の体積  $V_0$ .
- $r$  の係数  $a_1$  は四面体  $K$  の表面積である (Steiner の公式).
- $r^2$  の係数  $a_2$  は  $K$  の**平均幅**  $b(K)$  の  $2\pi$  倍. (平均幅の例)
- $r^3$  の係数  $\frac{4\pi}{3}$  は半径 1 の閉球  $B(1)$  の体積.

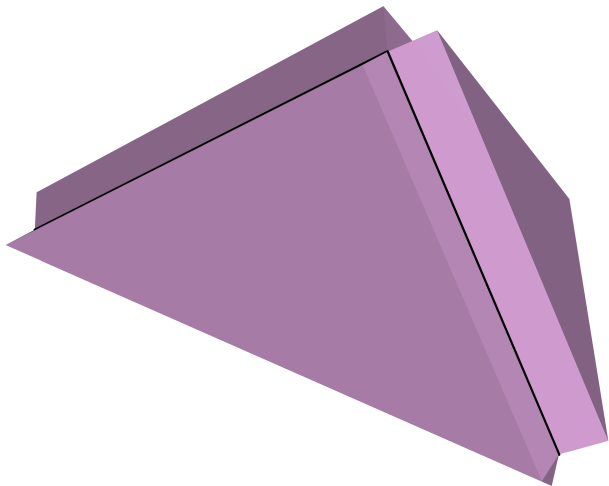
# 四面体と半径 $r$ の球の Minkowski 和



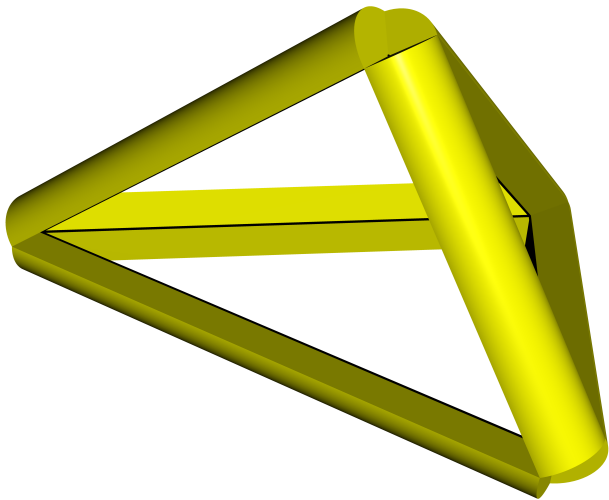
# 四面体 (定数項)



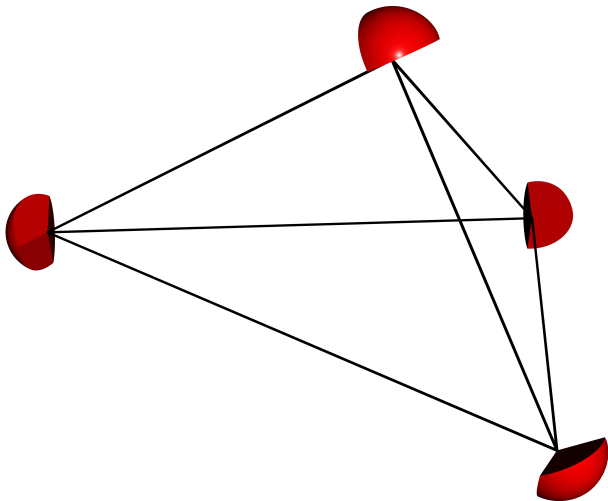
# $r$ の 1 次 の 項



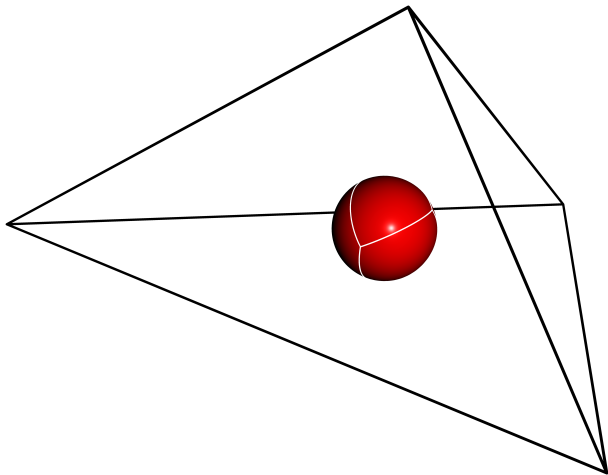
# $r$ の 2 次の項



# $r$ の 3 次の項

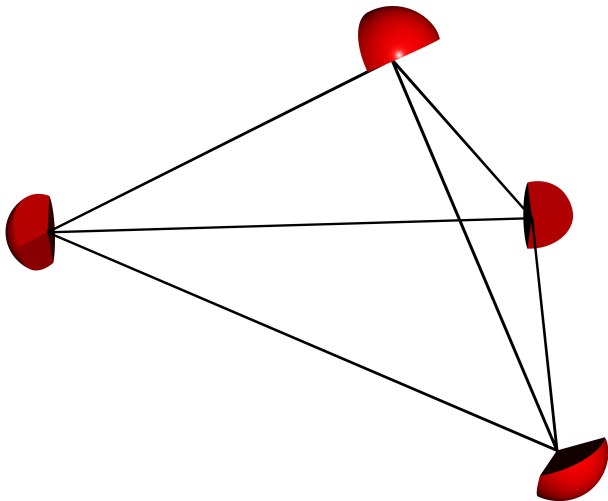


# $r$ の 3 次の項を集めると球になる

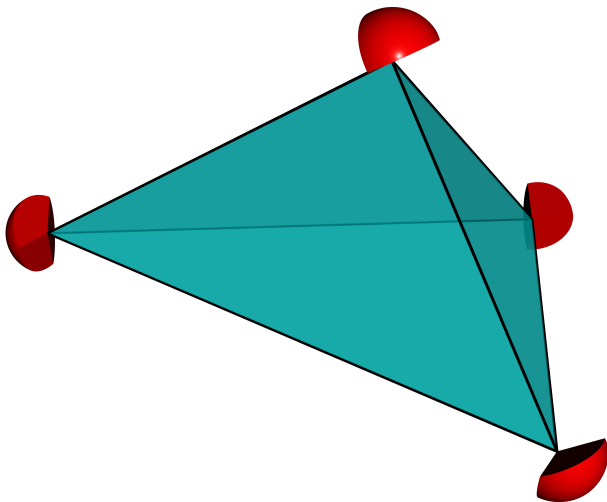




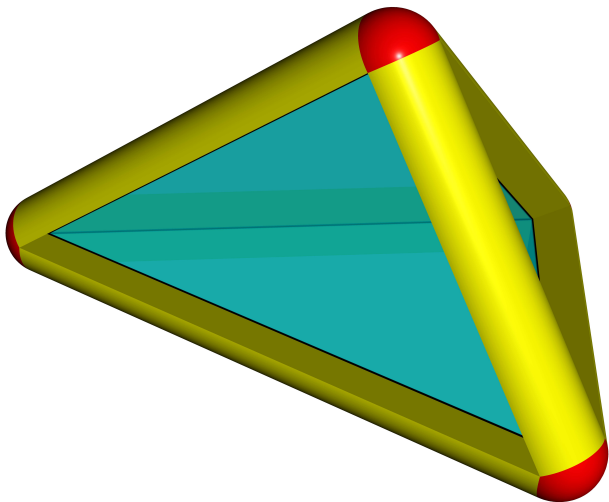
# $r$ の 3 次 の 項



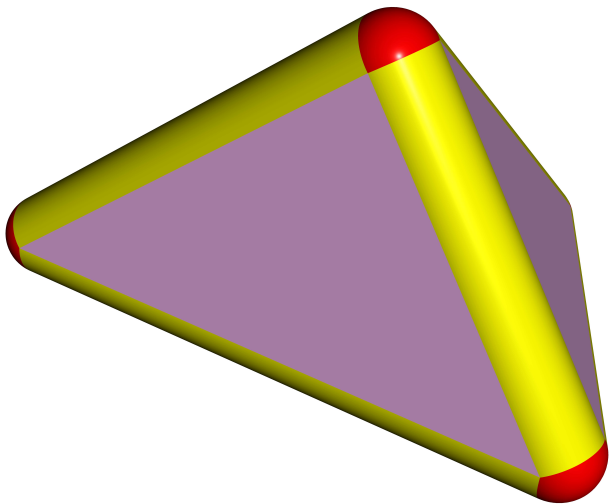
# 四面体と $r$ の 3 次の項



# 四面体, $r$ の 3 次, 2 次の項

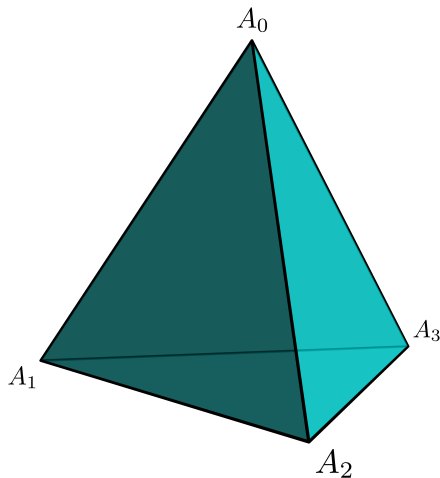


# 四面体, $r$ の 3 次, 2 次, 1 次の項



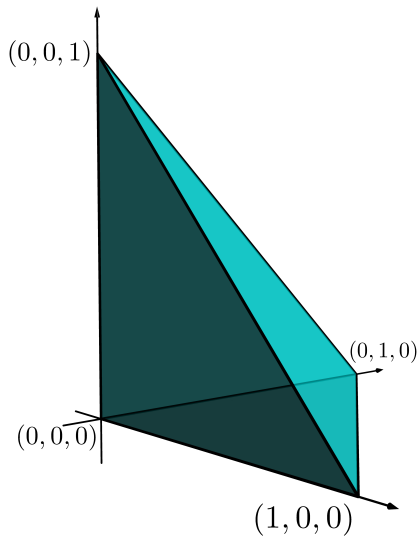
([main pdf](#) に戻る)

# 平均幅の例 1 正四面体



1 辺の長さ 1 の正四面体  $K$  の平均幅は  $b(K) = 0.91226\dots$

# 平均幅の例 2 四面体 $K: x + y + z \leq 1, x, y, z \geq 0$



$$b(K) = 1.113127\dots \quad (\text{戻る})$$