

円周率の連分数展開について

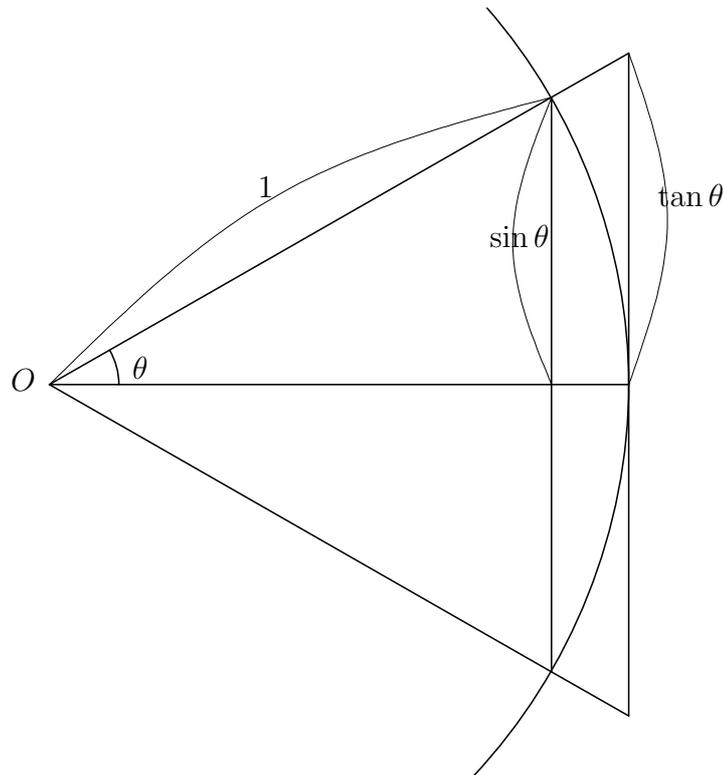
上越教育大学 中川仁

2002年9月27日

人類は何千年も前から円周率を求めようと考えてきた。円は美しい基本的図形であるから、円周の長さや円の面積を求めようとするのは、人間の知的本能からみれば当然であるかもしれない。円周の素朴な実測や、円の面積を小さな正方形のマス目の数で求めることによっては、3.14まで求めることも困難である。円周率を計算する方法について、どのような工夫がなされてきたか、アルキメデス、グレゴリー、ガウスの方法を説明しよう。

1 アルキメデスの方法

半径1の円に内接する正 $n(\geq 3)$ 角形の周の長さを p_n 、外接する正 n 角形の周の長さを q_n とする。 $\theta = \frac{\pi}{n}$ ラジアンとおく。 $p_n = 2n \sin \theta$, $q_n = 2n \tan \theta$ である。



同様に, $p_{2n} = 4n \sin \frac{\theta}{2}$, $q_{2n} = 4n \tan \frac{\theta}{2}$ である. このとき, p_n, q_n, p_{2n}, q_{2n} の間には次のような漸化式が成り立つ.

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad (p_n \text{ と } q_n \text{ の調和平均}), \quad (1)$$

$$p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}} \quad (p_n \text{ と } q_{2n} \text{ の幾何平均}). \quad (2)$$

[証明]

$$\begin{aligned} (1) \text{ の右辺} &= \frac{2(2n)^2 \sin \theta \tan \theta}{2n(\sin \theta + \tan \theta)} = \frac{4n \sin \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \frac{4n \cdot 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = 4n \tan \frac{\theta}{2} = q_{2n}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \text{ の右辺} &= \sqrt{8n^2 \sin \theta \tan \frac{\theta}{2}} = \sqrt{16n^2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \tan \frac{\theta}{2}} \\ &= \sqrt{16n^2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 4n \sin \frac{\theta}{2} = p_{2n}. \end{aligned}$$

□

$n = 6$ のとき, $p_6 = 6$, $q_6 = 4\sqrt{3}$ である. (1) より,

$$q_{12} = \frac{2 \cdot 6 \cdot 4\sqrt{3}}{6 + 4\sqrt{3}} = 24(2 - \sqrt{3}).$$

(2) より,

$$p_{12} = \sqrt{6 \cdot 24(2 - \sqrt{3})} = 12\sqrt{2 - \sqrt{3}}.$$

これを繰り返して小数で計算すれば, $\frac{1}{2}p_n < \pi < \frac{1}{2}q_n$ より,

$$\begin{aligned} n = 12, & \quad 3.1058 \dots < \pi < 3.2153 \dots, \\ n = 24, & \quad 3.1326 \dots < \pi < 3.1596 \dots, \\ n = 48, & \quad 3.1393 \dots < \pi < 3.1460 \dots, \\ n = 96, & \quad 3.1410 \dots < \pi < 3.1427 \dots, \\ n = 192, & \quad 3.1414 \dots < \pi < 3.1418 \dots. \end{aligned}$$

円周率 π の値として, 正 96 角形の計算から, 3.14 まで, 正 192 角形の計算から, 3.141 までわかる.

2 グレゴリー・ライプニッツの公式

ヨーロッパでは、17世紀になり微積分的方法によって、ようやくアルキメデスの方法から脱却することができた。それは逆三角関数のテイラー展開を利用するものである。

三角関数 $x = \tan \theta$ は区間 $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ において単調増加関数であるから、その逆関数として、 $\theta = \arctan x$ を考えることができる。与えられた $-\infty < x < \infty$ に対して、 $x = \tan \theta$ となる $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$ が一意的に定まる。この θ を $\arctan x$ で表す。 $x = \tan \theta$ について、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + x^2$$

より、

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{1+x^2} \quad (3)$$

を得る。等比数列の和の公式より、 $|x| < 1$ に対して、

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

が成り立つ。(3)より、これを積分して、 $\arctan x$ のテイラー展開

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (4)$$

を得る。この等式は、 $|x| < 1$ のときに成り立っているが、 $x = 1$ でも成り立つことが示され、 $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ より、 $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であるから、(4)で $x = 1$ を代入して、グレゴリー・ライプニッツの公式

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} \quad (5)$$

を得る。

[証明]

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} = \frac{1 + (-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2}$$

を0から1まで積分して、

$$\int_0^1 \sum_{k=0}^n (-1)^k x^{2k} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{(-1)^n x^{2n+2}}{1+x^2} dx.$$

この左辺は、

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

に等しく，右辺の第 1 項の積分は $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$ であり，第 2 項の積分は不等式

$$0 < \int_0^1 \frac{x^{2n+2}}{1+x^2} dx < \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{1}{2n+3}$$

を満たすから，

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} - \frac{\pi}{4} \right| < \frac{1}{2n+3}$$

を得る．したがって， $n \rightarrow \infty$ として，(5) を得る． □

級数 (5) の収束は非常に遅いので，実際の計算には適していない．マチンは $\tan x$ の加法定理を用いて，これを次のように改良した．

$$\frac{\pi}{4} = 4 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)5^{2n+1}} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n+1)239^{2n+1}}. \quad (6)$$

これはグレゴリー・ライプニッツの公式 (5) よりもずっと収束が速く， $n = 4$ までの項の和から

$$\pi = 3.14159 \dots$$

を得る．グレゴリー・ライプニッツの公式 (5) は，インドで既に微積分を使わないで得られていた．

3 連分数

補題 1. $a_n, n \geq 1$ を複素数からなる数列として， x, y を変数として，

$$f_n(x, y) = 1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{\ddots 1 + \frac{a_{n-1} x}{1 + \frac{a_n x}{1 + y}}}}}, \quad n \geq 1,$$

$f_n(x) = f_n(x, 0)$ とおけば， x の形式べき級数に展開したとき，任意の $N \geq n$ に対して，各 $1 \leq k \leq n$ について， $f_N(x)$ の x^k の係数は $f_n(x)$ の x^k の係数と等しい．したがって，形式べき級数として，

$$f(x) = 1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \frac{a_4 x}{1 + \ddots}}}}$$

は意味を持つ．また， $g(x)$ を x から始まる形式べき級数とすれば，各 $1 \leq k \leq n$ について， $f_n(x, g(x))$ の x^k の係数は $f(x)$ の x^k の係数と等しい．

[証明] A_n, B_n を漸化式

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + a_n x A_{n-2}, \\ B_n = B_{n-1} + a_n x B_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$A_0 = 1, A_1 = 1 + a_1 x, B_0 = 1, B_1 = 1$ によって定義する． B_n は定数項が 1 の x の多項式であることがわかる． n に関する帰納法によって

$$f_n(x, y) = \frac{A_{n-1}y + A_n}{B_{n-1}y + B_n} \quad (7)$$

が成り立つことを証明する． $n = 1$ に対して，

$$\frac{A_0 + A_1 y}{B_0 + B_1 y} = \frac{1 + (1 + a_1 x)y}{1 + y} = 1 + \frac{a_1 x}{1 + y} = f_1(x, y).$$

$n = k - 1$ について正しいとすれば，

$$\begin{aligned} f_k(x, y) &= f_{k-1}\left(x, \frac{a_k x}{1 + y}\right) = \frac{A_{k-2} \frac{a_k x}{1 + y} + A_{k-1}}{B_{k-2} \frac{a_k x}{1 + y} + B_{k-1}} \\ &= \frac{A_{k-1}y + A_{k-1} + a_k x A_{k-2}}{B_{k-1}y + B_{k-1} + a_k x B_{k-2}} = \frac{A_{k-1}y + A_k}{B_{k-1}y + B_k} \end{aligned}$$

となって， $n = k$ のときも正しい．帰納法により，すべての n に対して，(7) が成り立つ． $y = 0$ とすれば， $f_n(x) = \frac{A_n}{B_n}$ を得る．

$$\begin{aligned} A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k &= (A_{k-1} + a_k x A_{k-2}) B_{k-1} - A_{k-1} (B_{k-1} + a_k x B_{k-2}) \\ &= -a_k x (A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1}). \end{aligned}$$

これを， $k = m, m - 1, \dots, 2$ に対して繰り返し用いれば， $A_1 B_0 - A_0 B_1 = a_1 x$ に注意すると，

$$A_m B_{m-1} - A_{m-1} B_m = (-1)^{m-1} a_1 a_2 \cdots a_m x^m \quad (8)$$

を得る．したがって，

$$f_m(x) - f_{m-1}(x) = \frac{A_m}{B_m} - \frac{A_{m-1}}{B_{m-1}} = \frac{(-1)^{m-1} a_1 a_2 \cdots a_m x^m}{B_{m-1} B_m}. \quad (9)$$

ここで，漸化式から， B_{m-1}, B_m は定数項が 1 の x の多項式であるから，(9) の右辺を x の形式べき級数に展開すると， x^m から始まるべき級数になる．したがって，

$$f_N(x) - f_n(x) = \sum_{m=n+1}^N (f_m(x) - f_{m-1}(x))$$

は x^{n+1} から始まるべき級数になる .

$$f_n(x, g(x)) - f_n(x) = \frac{(-1)^n a_1 \cdots a_n x^n g(x)}{B_n(B_n + B_{n-1}g(x))}$$

であり , 分母は定数項 1 のべき級数だから , この右辺は x^{n+1} から始まる形式べき級数に展開される . □

補題 2. $a_n, n \geq 1$ を正の実数からなる数列で , $0 < \delta_1 \leq a_n \leq \delta_1 < 1, n \geq 1$ を満たすとする . そのとき , 連分数

$$f(x) = 1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \frac{a_4 x}{1 + \ddots}}}}$$

は $0 \leq x \leq 1$ において一様収束して , 区間 $[0, 1]$ における連続関数を定義する .

[証明] $f(x)$ の n 番目の近似分数を $\frac{A_n}{B_n}$ とすれば , 漸化式

$$\begin{cases} A_n = A_{n-1} + a_n x A_{n-2}, & A_0 = 1, A_1 = 1 + a_1 x, \\ B_n = B_{n-1} + a_n x B_{n-2}, & B_0 = B_1 = 1, \quad n = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

から , B_n は係数がすべて正で , 定数項が 1 の x の多項式であることがわかる . したがって , $0 \leq x \leq 1$ に対して , $B_n \geq 1, n \geq 0$. さらに , 漸化式から ,

$$B_k - B_{k-1} = a_k x B_{k-2} \geq a_k x.$$

したがって ,

$$B_n = B_1 + \sum_{k=2}^n (B_k - B_{k-1}) \geq 1 + (a_2 + \cdots + a_n)x \geq 1 + (n-1)\delta_1 x.$$

□

補題 3. $a_k, b_k (b_k \neq 0), k \geq 1$ を複素数からなる数列として , 連分数

$$\lambda = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \ddots}}}}$$

を考える．もし，すべての $k \geq 1$ に対して，

$$|b_k| \geq |a_k| + 1$$

が成り立てば，この連分数は収束して， $|\lambda| \leq 1$ を満たす．

[証明] A_k, B_k を漸化式

$$\begin{cases} A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}, \\ B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$A_0 = 0, A_1 = a_1, B_0 = 1, B_1 = b_1$ によって定義する．そのとき，補題 1 の証明と同様にして， λ の k 番目の近似連分数

$$\lambda_k = \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{\ddots + \frac{a_{k-1}}{b_{k-1} + \frac{a_k}{b_k}}}}}$$

は $\frac{A_k}{B_k}$ に等しいことを示せる．

$$\begin{aligned} |B_k| &\geq |b_k| |B_{k-1}| - |a_k| |B_{k-2}| \\ &\geq |b_k| |B_{k-1}| - (|b_k| - 1) |B_{k-2}|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |B_k| - |B_{k-1}| &\geq (|b_k| - 1)(|B_{k-1}| - |B_{k-2}|) \\ &\geq (|b_k| - 1) \cdots (|b_2| - 1)(|B_1| - |B_0|) \\ &= (|b_k| - 1) \cdots (|b_2| - 1)(|b_1| - 1) \geq |a_1 a_2 \cdots a_k| \geq 0. \end{aligned}$$

したがって，

$$0 < |b_1| = |B_1| \leq |B_2| \leq |B_3| \leq \cdots$$

ここで，

$$\begin{aligned} A_k B_{k-1} - A_{k-1} B_k &= (b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}) B_{k-1} - A_{k-1} (b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}) \\ &= -a_k (A_{k-1} B_{k-2} - A_{k-2} B_{k-1}) \\ &= (-1)^{k-1} a_1 a_2 \cdots a_k. \end{aligned}$$

に注意すれば，

$$\begin{aligned} \frac{A_k}{B_k} &= \frac{A_1}{B_1} + \left(\frac{A_2}{B_2} - \frac{A_1}{B_1} \right) + \cdots + \left(\frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right) \\ &= \frac{A_1}{B_1} - \frac{a_1 a_2}{B_1 B_2} + \cdots + (-1)^{k-1} \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k}. \end{aligned} \tag{10}$$

また,

$$\left| \frac{a_1 a_2 \cdots a_k}{B_{k-1} B_k} \right| \leq \frac{|B_k| - |B_{k-1}|}{|B_{k-1}| |B_k|} = \frac{1}{|B_{k-1}|} - \frac{1}{|B_k|}. \quad (11)$$

したがって,

$$\begin{aligned} \left| \frac{A_1}{B_1} \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{A_k}{B_k} - \frac{A_{k-1}}{B_{k-1}} \right| &\leq \left| \frac{A_1}{B_1} \right| + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{|B_{k-1}|} - \frac{1}{|B_k|} \right) \\ &\leq \left| \frac{A_1}{B_1} \right| + \frac{1}{|B_1|} = \frac{|a_1| + 1}{|b_1|} \leq 1. \end{aligned} \quad (12)$$

ゆえに, $\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A_k}{B_k}$ は収束して, $|\lambda| \leq 1$ を満たす. \square

補題 4. $c_k, k \geq 1$ を 0 でない複素数からなる数列とすると,

$$\frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \frac{a_4}{b_4 + \ddots}}}} = \frac{c_1 a_1}{c_1 b_1 + \frac{c_1 c_2 a_2}{c_2 b_2 + \frac{c_2 c_3 a_3}{c_3 b_3 + \frac{c_3 c_4 a_4}{c_4 b_4 + \ddots}}}}.$$

[証明] 左辺の k 番目の近似連分数を $\frac{A_k}{B_k}$, 右辺の k 番目の近似連分数を $\frac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k}$ とすれば, それぞれ漸化式

$$\begin{cases} A_k = b_k A_{k-1} + a_k A_{k-2}, \\ B_k = b_k B_{k-1} + a_k B_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$$A_0 = 0, A_1 = a_1, B_0 = 1, B_1 = b_1,$$

$$\begin{cases} \tilde{A}_k = c_k b_k \tilde{A}_{k-1} + c_{k-1} c_k a_k \tilde{A}_{k-2}, \\ \tilde{B}_k = c_k b_k \tilde{B}_{k-1} + c_{k-1} c_k a_k \tilde{B}_{k-2}, \quad k = 2, 3, \dots, \end{cases}$$

$\tilde{A}_0 = 0, \tilde{A}_1 = c_1 a_1, \tilde{B}_0 = 1, \tilde{B}_1 = c_1 b_1$ を満たす. このとき, 数列 $A'_k = c_1 c_2 \cdots c_k A_k, B'_k = c_1 c_2 \cdots c_k B_k, k \geq 1$ は \tilde{A}_k, \tilde{B}_k と同じ漸化式を満たし, 初期値も等しいから, $\tilde{A}_k = c_1 c_2 \cdots c_k A_k, \tilde{B}_k = c_1 c_2 \cdots c_k B_k, k \geq 1$ を得る. したがって, $\frac{\tilde{A}_k}{\tilde{B}_k} = \frac{A_k}{B_k}$ である. \square

4 超幾何級数の連分数展開

以下, ガウスによる超幾何級数の連分数展開 (1813 年) を用いて得られる公式について説明する. 実数 α と自然数 n に対して,

$$(\alpha; n) = \alpha(\alpha + 1) \cdots (\alpha + n - 1)$$

とおく . さらに , $(\alpha; 0) = 1$ とする . $(1; n) = n!$ である . $\alpha, \beta, \gamma \neq 0, -1, -2, \dots$ に
 対して , べき級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha; n)(\beta; n)}{(\gamma; n)n!} x^n \quad (13)$$

は , $|x| < 1$ において収束する .

[証明] $a_n = \frac{(\alpha; n)(\beta; n)}{(\gamma; n)n!}$ とおけば ,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(\alpha; n)(\beta; n)(\gamma; n+1)(n+1)!}{(\alpha; n+1)(\beta; n+1)(\gamma; n)n!} = \frac{(\gamma+n)(n+1)}{(\alpha+n)(\beta+n)}$$

より , 収束半径は $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$ である . □

このべき級数によって定義される関数 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)$ をガウスの超幾何関数と呼ぶ . パラメータ α, β, γ に特別な値を与えることによって , いろいろな初等関数が超幾何関数を用いて表せる . 例えば ,

$$\begin{aligned} F(\alpha, 0, \alpha; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(0; n)}{n!} x^n = 1, \\ F(\alpha, \beta, \beta; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha; n)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} (-x)^n = (1-x)^{-\alpha}, \\ xF(1, 1, 2; x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!n!}{(n+1)!n!} x^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} = -\log(1-x), \\ xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (-1)^n x^{2n+1} = \arctan x. \end{aligned}$$

超幾何関数の定義から容易に , 次の関係式を導くことができる .

命題 5 (ガウスの隣接関係式).

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x) - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} xF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x), \quad (14)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\alpha+1, \beta, \gamma+1; x) - \frac{\beta(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)} xF(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x). \quad (15)$$

[証明] $(\alpha+1; n) = \alpha^{-1}(\alpha; n+1)$, $(\beta+1; n) = \beta^{-1}(\beta+n)(\beta; n) = \beta^{-1}(\beta; n+1)$,
 $(\gamma+1; n) = \gamma^{-1}(\gamma+n)(\gamma; n)$, $(\gamma+2; n) = (\gamma+1)^{-1}(\gamma+n+1)(\gamma+1; n) =$
 $\gamma^{-1}(\gamma+1)^{-1}(\gamma+n+1)(\gamma; n+1)$ より ,

$$\begin{aligned}
(14) \text{ の右辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha; n)(\beta+1; n)}{(\gamma+1; n)n!} x^n - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+1; n)(\beta+1; n)}{(\gamma+2; n)n!} x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(\beta+n)(\alpha; n)(\beta; n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma; n)n!} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma-\beta)(\alpha; n+1)(\beta; n+1)}{\beta(\gamma+1+n)(\gamma; n+1)n!} x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\gamma(\beta+n)(\alpha; n)(\beta; n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma; n)n!} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\gamma-\beta)n(\alpha; n)(\beta; n)}{\beta(\gamma+n)(\gamma; n)n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma(\beta+n) - (\gamma-\beta)n}{\beta(\gamma+n)} \right) \frac{(\alpha; n)(\beta; n)}{(\gamma; n)n!} x^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha; n)(\beta; n)}{(\gamma; n)n!} x^n = F(\alpha, \beta, \gamma; x).
\end{aligned}$$

$F(\alpha, \beta, \gamma; x) = F(\beta, \alpha, \gamma; x)$ に注意すれば, (14) で α と β を交換することによって (15) を得る. □

(14) の両辺を $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)$ で割れば,

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 - \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x \frac{1}{\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}}.$$

同様に, (15) で (α, β, γ) を $(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ で置き換えて,

$$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x) = F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x) - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3; x).$$

この両辺を $F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)$ で割れば,

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)}{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)} = 1 - \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x \frac{1}{\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3; x)}}.$$

したがって,

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 - \frac{\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x}{1 - \frac{\frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x}{\frac{F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2; x)}{F(\alpha+1, \beta+2, \gamma+3; x)}}}.$$

(α, β, γ) を $(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)$ で置き換えることを繰り返せば,

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1; x)} = 1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{\ddots \frac{a_{2n} x}{1 + \frac{F(\alpha+n, \beta+n, \gamma+2n; x)}{F(\alpha+n, \beta+n+1, \gamma+2n+1; x)}}}}. \quad (16)$$

ここで,

$$a_1 = -\frac{\alpha(\gamma - \beta)}{\gamma(\gamma + 1)}, \quad a_2 = -\frac{(\beta + 1)(\gamma + 1 - \alpha)}{(\gamma + 1)(\gamma + 2)},$$

であり, (α, β, γ) を $(\alpha + n - 1, \beta + n - 1, \gamma + 2n - 2)$ で置き換えることによって, $n \geq 1$ に対して,

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= -\frac{(\alpha + n - 1)(\gamma + n - 1 - \beta)}{(\gamma + 2n - 2)(\gamma + 2n - 1)}, \\ a_{2n} &= -\frac{(\beta + n)(\gamma + n - \alpha)}{(\gamma + 2n - 1)(\gamma + 2n)}. \end{aligned} \quad (17)$$

定理 6 (Gauss). 超幾何関数の比 $F(\alpha, \beta, \gamma; x)/F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)$ は $|x| < 1$ における有理型関数として, 連分数展開

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)} = 1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \frac{a_4 x}{1 + \ddots}}}}$$

を持つ. ここで, 係数 a_{2n-1}, a_{2n} は (17) によって与えられる.

[証明] $c_k = 2, k \geq 1$ として補題 4 を適用すれば,

$$1 + \frac{a_1 x}{1 + \frac{a_2 x}{1 + \frac{a_3 x}{1 + \frac{a_4 x}{1 + \ddots}}}} = 1 + \frac{2a_1 x}{2 + \frac{4a_2 x}{2 + \frac{4a_3 x}{2 + \frac{4a_4 x}{2 + \ddots}}}} \quad (18)$$

とかける. $0 < r < 1$ を固定する. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = -\frac{1}{4}$ であるから, N を十分大きくとれば,

$$|4a_{2n-1}x| \leq 4|a_{2n-1}|r \leq 1, \quad |4a_{2n}x| \leq 4|a_{2n}|r \leq 1, \quad n \geq N, |x| \leq r$$

が成り立つ. $a'_k = 4a_{2N+k-1}x, b'_k = 2$ とおけば, $b'_k = 2 \geq |a'_k| + 1, k \geq 1$ であるから, 補題 3 より, 連分数

$$g_N(x) = \frac{4a_{2N}x}{2 + \frac{4a_{2N+1}x}{2 + \frac{4a_{2N+2}x}{2 + \dots}}} = \frac{a'_1}{b'_1 + \frac{a'_2}{b'_2 + \frac{a'_3}{b'_3 + \dots}}} \quad (19)$$

は収束する．さらに，(19)の右辺の k 番目の近似連分数を $\frac{A'_k}{B'_k}$ とすれば，補題3の証明から，

$$|B'_k| - |B'_{k-1}| \geq (|b'_k| - 1) \cdots (|b'_2| - 1)(|b'_1| - 1) = 1 \geq |a'_1 a'_2 \cdots a'_k|$$

を得る．これから， $|B'_k| \geq k + 1$ を得る． $m > n$ に対して，

$$\sum_{k=n+1}^m \left| \frac{A'_k}{B'_k} - \frac{A'_{k-1}}{B'_{k-1}} \right| \leq \sum_{k=n+1}^m \left(\frac{1}{|B'_{k-1}|} - \frac{1}{|B'_k|} \right) = \frac{1}{|B'_n|} - \frac{1}{|B'_m|} < \frac{1}{n+1}$$

であるから，この連分数は $|x| \leq r$ において一様収束する． $|B'_k| \neq 0$ より，各項 $\frac{A'_k}{B'_k}$ は $|x| < r$ における正則関数であり，その極限 $g_N(x)$ も $|x| < r$ における正則関数である． B_{2N-2}, B_{2N-1} は定数項が0でない x の多項式であり， $g_N(0) = 0$ であるから，

$$(18) \text{ の右辺} = \frac{A_{2N-2}g_N(x) + A_{2N-1}}{B_{2N-2}g_N(x) + B_{2N-1}}$$

は $|x| < r$ において有理型であり， $x = 0$ で正則な関数である． $0 < r < 1$ は任意であったから，(18)は $|x| < 1$ で有理型である．(18)の右辺の k 番目の近似連分数を $\frac{A_k}{B_k}$ とすれば，補題1の証明より，

$$f_{2n}(x, y) - f_{2n}(x) = \frac{A_{2n-1}y + A_{2n}}{B_{2n-1}y + B_{2n}} - \frac{A_{2n}}{B_{2n}} = \frac{a_1 \cdots a_{2n} x^{2n} y}{B_{2n}(B_{2n} + B_{2n-1}y)}$$

であるから，

$$y = -1 + \frac{F(\alpha + n, \beta + n, \gamma + 2n; x)}{F(\alpha + n, \beta + n + 1, \gamma + 2n + 1; x)}$$

とおけば， y は x から始まるべき級数であり，したがって，

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)} - f_{2n}(x) = f_{2n}(x, y) - f_{2n}(x) = \frac{a_1 \cdots a_{2n} x^{2n} y}{B_{2n}(B_{2n} + B_{2n-1}y)}$$

は x^{2n+1} から始まるべき級数である．よって， $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)}$ と(18)のべき級数展開の係数は， x^{2n} の係数まで一致する． n は任意だから，これらは同じべき級数展開を持ち， $x = 0$ の近傍で一致する．ゆえに， $|x| < 1$ における有理型関数として， $\frac{F(\alpha, \beta, \gamma; x)}{F(\alpha, \beta + 1, \gamma + 1; x)}$ と連分数(18)は一致する． \square

特に， $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ ， $\beta = 0$ とすれば，

$$F\left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}; -x^2\right) = 1, \quad xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}; -x^2\right) = \arctan x$$

であるから，定理 6 より，

$$\frac{1}{x^{-1} \arctan x} = 1 + \frac{-a_1 x^2}{1 + \frac{-a_2 x^2}{1 + \frac{\ddots}{1 + \frac{-a_{2n} x^2}{1 + \ddots}}}}$$

この逆数をとってから，両辺に x をかければ，

$$\arctan x = \frac{x}{1 + \frac{-a_1 x^2}{1 + \frac{-a_2 x^2}{1 + \frac{\ddots}{1 + \frac{-a_{2n} x^2}{1 + \ddots}}}}$$

ここで，

$$\begin{aligned} a_{2n-1} &= -\frac{\left(\frac{1}{2} + n - 1\right) \left(\frac{1}{2} + n - 1\right)}{\left(\frac{1}{2} + 2n - 2\right) \left(\frac{1}{2} + 2n - 1\right)} = -\frac{(2n - 1)^2}{(4n - 3)(4n - 1)}, \\ a_{2n} &= -\frac{n \left(\frac{1}{2} + n - \frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2} + 2n - 1\right) \left(\frac{1}{2} + 2n\right)} = -\frac{(2n)^2}{(4n - 1)(4n + 1)}, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

したがって，

$$-a_n = \frac{n^2}{(2n - 1)(2n + 1)}, \quad n \geq 1$$

とまとめられる．以上によって， $|x| < 1$ における正則関数として， $\arctan x$ の連

によって定めるとき，

$$\frac{A_n}{B_n} = \frac{4}{1 + \frac{1^2}{3 + \frac{2^2}{5 + \frac{\ddots}{7 + \frac{\ddots}{\ddots + \frac{n^2}{2n+1}}}}}}$$

$n = 5$ まで計算してみると，次のような π の近似分数を得る．

n	A_n	B_n	A_n/B_n	
1	3	1	3	3
2	19	6	19/6	3.166...
3	160	51	160/51	3.137...
4	1744	555	1744/555	3.142...
5	23184	7380	644/205	3.1414...

$A_{12}/B_{12} = 30594128896/9738413685 = 3.14159265416\dots$ であり，これは小数点以下 8 桁まで正しい．

参考文献

- [1] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.
- [2] 青本和彦・喜多通武, 超幾何関数論, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1994.