

算術幾何平均と円周率

上越教育大学 中川 仁

平成 21 年 9 月 18 日

1 アルキメデスの方法による円周率の計算

定義 1.1. 正の実数 a, b に対して,

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2}, \quad G(a, b) = \sqrt{ab}, \quad H(a, b) = \frac{2ab}{a+b} = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1}$$

とおく. $A(a, b)$ を算術平均, $G(a, b)$ を幾何平均, $H(a, b)$ を調和平均という.

次の不等式が成り立つ.

$$A(a, b) \geq G(a, b) \geq H(a, b) \quad (\text{等号は } a = b \text{ のときに限り成立}).$$

[証明] $A(a, b) \geq G(a, b)$ はよく知られている. これから, $A(a^{-1}, b^{-1}) \geq G(a^{-1}, b^{-1})$ を得る. 逆数をとれば, $H(a, b) = A(a^{-1}, b^{-1})^{-1} \leq G(a^{-1}, b^{-1})^{-1} = G(a, b)$. \square

命題 1.2 (アルキメデスの方法). 半径 1 の円に外接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を a_n , 内接する正 $6 \cdot 2^n$ 角形の周の長さの半分を b_n とする. このとき, 次のような漸化式と不等式が成り立つ.

$$a_{n+1} = H(a_n, b_n) \quad (a_n \text{ と } b_n \text{ の調和平均}),$$

$$b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n) \quad (a_{n+1} \text{ と } b_n \text{ の幾何平均}),$$

$$3 = b_0 < \cdots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \cdots < a_0 = 2\sqrt{3} = 3.4 \dots$$

[証明] $\theta = \frac{2\pi}{6 \cdot 2^{n+2}}$ とおけば, $a_n = 6 \cdot 2^n \tan 2\theta$, $b_n = 6 \cdot 2^n \sin 2\theta$,

$$\tan \theta = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{2 \cos^2 \theta} = \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} = \frac{\sin 2\theta \tan 2\theta}{\sin 2\theta + \tan 2\theta},$$

$$2 \sin^2 \theta = 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \sin 2\theta \tan \theta.$$

これから, $a_{n+1} = H(a_n, b_n)$, $b_{n+1} = G(a_{n+1}, b_n)$. 相似を使った初等幾何的な証明については, [3], [5] を参照. \square

$\{a_n\}$ は下に有界な単調減少数列, $\{b_n\}$ は上に有界な単調増加数列であるから収束する. それらは同じ極限值に収束することがわかり, その共通の極限值が π である. この方法で円周率 π を 1 千万桁計算するには, 約 1 千 7 百万回の乗除と平方根の計算を要する ([4]).

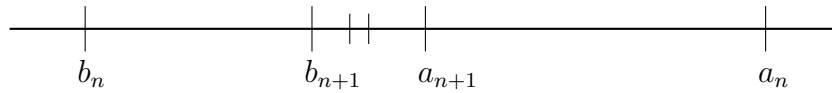
2 算術幾何平均

与えられた正の実数 $a > b$ から, $a_0 = a, b_0 = b,$

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

によって数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を定義する. アルキメデスの方法のときと同様に,

$$b < b_1 < b_2 < \dots < b_n < b_{n+1} < a_{n+1} < a_n < \dots < a_2 < a_1 < a.$$



よって, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ が存在する. さらに,

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

より, $\alpha = \beta$ を得る. 極限值 α を a と b の算術幾何平均といい, $\text{AGM}(a, b)$ で表す.

例 2.1. $\text{AGM}(2, 1)$ を計算してみよう. 収束はかなり速いことがわかる.

n	a_n	b_n	$a_n - b_n$
0	2.000000000000	1.000000000000	1.000000000000
1	1.500000000000	1.41421356237	0.08578643763
2	1.45710678119	1.45647531512	0.00063146606
3	1.45679104815	1.45679101394	0.00000003421
4	1.45679103105	1.45679103105	0.00000000000

定理 2.2 (ガウスの公式). $a_0 = 1, b_0 = c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n},$

$c_{n+1} = \frac{a_n - b_n}{2}, n = 0, 1, \dots$ とすれば,

$$\pi = \frac{2 \text{AGM}\left(1, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2}.$$

$$s_n = \sum_{k=0}^n 2^k c_k^2, \quad p_n = \frac{2a_n^2}{1 - s_n} \text{ とおけば,}$$

p_1	3.	18767	26427	12108	62720	19299	70525	36923	26510
p_2	3.	14168	02932	97653	29391	80704	24560	00938	27957
p_3	3.	14159	26538	95446	49600	29147	58818	04348	61088
p_4	3.	14159	26535	89793	23846	63606	02706	63132	17577
p_5	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971
π	3.	14159	26535	89793	23846	26433	83279	50288	41971

p_3 は小数第 9 位まで, p_4 は小数第 20 位まで, p_5 は小数第 40 位まで, π と一致している. このように, 算術幾何平均を用いたガウスの公式は, 円周率 π を高速に計算することに適している. この公式によれば, p_{20} 程度で π を約 100 万桁計算できる. ガウスは数値計算によって, 1799 年にこの公式を発見して日記に「この事実の証明は必ず解析学の全く新しい分野を開くであろう」と記している. 以下, [1],[2],[4] にしたがって, ガウスの公式の証明を紹介する.

3 楕円積分と算術幾何平均の関係

3.1 楕円の弧長

$a > b > 0$ とし, 楕円

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (3.1)$$

を考える. この楕円の第 1 象限の部分の弧長を L とすると,

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

である. (3.1) を x で微分して,

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

(3.1) より, $a^2 y^2 = b^2(a^2 - x^2)$ であるから,

$x = at$, $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$ とおけば,

$$L = \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} dx = \int_0^a \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}} dx = a \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - k^2 t^2}{1 - t^2}} dt.$$

ここで, $0 \leq k < 1$ であり, $k = 0$ のときが円の場合である. このような形の積分を楕円積分という.

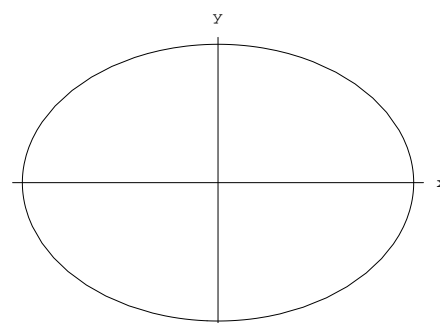


図 1: 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

定義 3.1. 次の楕円積分をルジャンドル-ヤコビの標準型という.

$$K(k) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \quad (\text{第 1 種楕円積分}),$$

$$E(k) = \int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2x^2}{1-x^2}} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta} d\theta \quad (\text{第 2 種楕円積分}).$$

いずれも, $x = \sin \theta$ と置換することによって, 右側の表示を得る.

定義 3.2.

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}},$$

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} d\theta$$

とおけば, $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ より,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = \frac{1}{a} K(k),$$

$$J(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta} d\theta = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = aE(k).$$

よって,

$$I(a, b) = \frac{1}{a} K(k), \quad J(a, b) = aE(k) \quad (= L). \quad (3.2)$$

命題 3.3.

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = I(a, b).$$

[証明] $u = b \tan \theta$ とおけば, $\frac{du}{d\theta} = \frac{b}{\cos^2 \theta}$, $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{b}{\sqrt{b^2 + u^2}}$, $\frac{1}{\cos \theta} \frac{d\theta}{du} = \frac{\cos \theta}{b \cos^2 \theta} = \frac{\cos \theta}{b} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + u^2}}$. よって,

$$I(a, b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta}}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\cos \theta \sqrt{a^2 + b^2 \tan^2 \theta}}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}} du = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + u^2)(b^2 + u^2)}} du.$$

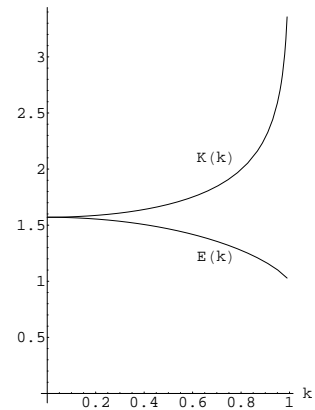


図 2: $K(k), E(k)$ のグラフ

したがって,

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\left(\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2\right)(ab + u^2)}} du.$$

ここで, $u = \frac{1}{2}\left(v - \frac{ab}{v}\right)$ とおけば, $ab + u^2 = \frac{1}{4v^2}(ab + v^2)^2$, $\frac{1}{\sqrt{ab + u^2}} \frac{du}{dv} = \frac{1}{v}$,
 $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + u^2 = \frac{1}{4}(a^2 + v^2)(1 + b^2v^{-2}) = \frac{1}{4v^2}(a^2 + v^2)(b^2 + v^2)$ であり, v が 0 から ∞ まで動くとき, u は $-\infty$ から ∞ まで単調増加する. よって,

$$I\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(a^2 + v^2)(b^2 + v^2)}} dv = I(a, b).$$

□

命題 3.4. $k' = \sqrt{1 - k^2}$ とおけば, $K(k) = \frac{\pi}{2\text{AGM}(1, k')}$.

[証明] $a_0 = 1, b_0 = k'$ として, $n \geq 0$ について, $a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$, $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ とする. $m = \text{AGM}(1, k')$ とおけば, 定義から, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = m$ である. 命題 3.3 の等式

$$I(1, k') = I(a_1, b_1) = \cdots = I(a_n, b_n)$$

において, $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$I(1, k') = I(m, m) = \frac{1}{m} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta = \frac{\pi}{2m} = \frac{\pi}{2\text{AGM}(1, k')}.$$

ここで,

$$I(1, k') = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \theta + k'^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = K(k).$$

□

次に, $J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right)$ と $J(a, b)$ の関係を調べよう.

補題 3.5. $\frac{dE}{dk} = \frac{1}{k}(E - K)$, $\frac{dK}{dk} = \frac{1}{kk'^2}(E - k'^2 K)$.

[証明]

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dk} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -\frac{k \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= \frac{1}{k}(E - K), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dK}{dk} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{dk} \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin \theta}{(1-k^2 \sin^2 \theta)^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta = \frac{k}{k'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{\cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \right) \sin \theta d\theta \\
&= \frac{k}{k'^2} \left[-\frac{\cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \sin \theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{k}{k'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos \theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} \cos \theta d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-k^2 \sin^2 \theta + k^2 - 1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta} d\theta - \frac{1}{kk'^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k'^2}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\
&= \frac{1}{kk'^2} (E - k'^2 K).
\end{aligned}$$

□

補題 3.6.

$$\begin{aligned}
\text{(a)} \quad K(k) &= \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right), & \text{(b)} \quad K(k) &= \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right), \\
\text{(c)} \quad E(k) &= \frac{1+k}{2} E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right) + \frac{k'^2}{2} K(k), & \text{(d)} \quad E(k) &= (1+k') E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - k' K(k).
\end{aligned}$$

[証明] (b) $k_1 = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{k'}}{\frac{1+k'}{2}}\right)^2} = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおけば, $k'_1 = \sqrt{1 - k_1^2} = \frac{2\sqrt{k'}}{1+k'}$ である.

命題 3.3 と (3.2) より,

$$\begin{aligned}
K(k) &= I(1, k') = I\left(\frac{1+k'}{2}, \sqrt{k'}\right) = \frac{2}{1+k'} I(1, k'_1) \\
&= \frac{2}{1+k'} K(k_1) = \frac{2}{1+k'} K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right).
\end{aligned}$$

(a) $\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおく. $k' = \frac{1-\ell}{1+\ell}$, $k = \sqrt{1 - k'^2} = \frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}$. (b) より,

$$K(\ell) = K\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = \frac{1+k'}{2} K(k) = \frac{1}{1+\ell} K\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right).$$

ℓ を k で置き換えれば, $K(k) = \frac{1}{1+k} K\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$ を得る.

(d) (a) と同じく, $\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおく. $\frac{dk'}{dk} = -\frac{k}{k'}$,

$$\begin{aligned}
\frac{d\ell}{dk} &= \frac{d\ell}{dk'} \frac{dk'}{dk} = \frac{(-2)}{(1+k')^2} \frac{(-k)}{k'} = \frac{2k^2}{(1+k')^2 k' k} = \frac{2(1-k'^2)}{(1+k')^2 k' k} \\
&= \frac{2(1-k')}{(1+k') k k'} = \frac{2\ell}{k k'}
\end{aligned}$$

に注意する . $g(k) = K(\ell)$ とおく . (b) より , $(1+k')K = 2g$ である . これを k で微分して ,

$$-\frac{k}{k'}K + (1+k')\frac{dK}{dk} = 2\frac{dK}{dk}(\ell)\frac{2\ell}{kk'}.$$

これと補題 3.5 の第 2 式から ,

$$-\frac{k}{k'}K + (1+k')\frac{1}{kk'^2}(E - k'^2K) = 2\frac{1}{\ell\ell'^2}(E(\ell) - \ell'^2g)\frac{2\ell}{kk'}.$$

$(1+k')K = 2g$ に注意すれば ,

$$\begin{aligned} \frac{1+k'}{kk'^2}E &= \left(\frac{1+k'}{k} + \frac{k}{k'}\right)K + \frac{4}{kk'\ell'^2}(E(\ell) - \ell'^2g) \\ &= \frac{k' + k'^2 + k^2}{kk'}K + \frac{4}{\ell'^2kk'}E(\ell) - \frac{2(1+k')}{kk'}K \\ &= \frac{1+k'}{kk'}K + \frac{4}{\ell'^2kk'}E(\ell) - \frac{2(1+k')}{kk'}K \\ &= \frac{(1+k')^2}{kk'^2}E(\ell) - \frac{1+k'}{kk'}K. \end{aligned}$$

よって , (d) を得る .

(c) (d) より ,

$$(1+k')E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) = E(k) + k'K(k).$$

ここで , $\ell = \frac{1-k'}{1+k'}$ とおけば , $k' = \frac{1-\ell}{1+\ell}$, $k = \frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}$ であるから , (a) より ,

$$\frac{2}{1+\ell}E(\ell) = E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{1-\ell}{1+\ell}K\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) = E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + (1-\ell)K(\ell).$$

よって ,

$$E(\ell) = \frac{1+\ell}{2}E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{1-\ell^2}{2}K(\ell) = \frac{1+\ell}{2}E\left(\frac{2\sqrt{\ell}}{1+\ell}\right) + \frac{\ell'^2}{2}K(\ell).$$

ℓ を k でおきかえれば , (c) を得る . □

命題 3.7.

$$2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a, b) = abI(a, b).$$

[証明] $k' = \frac{b}{a}$, $k = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$, $\frac{1-k'}{1+k'} = \frac{a-b}{a+b}$, (3.2) の $J(a, b) = aE(k)$ より ,

$$J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\sqrt{1 - \frac{4ab}{(a+b)^2}}\right) = \frac{a+b}{2}E\left(\frac{a-b}{a+b}\right).$$

よって, $J(a, b) = aE(k)$ と $I(a, b) = \frac{1}{a}K(k)$ に注意すれば, 補題 3.6 の (d) より,

$$\begin{aligned} & 2J\left(\frac{a+b}{2}, \sqrt{ab}\right) - J(a, b) \\ &= (a+b)E\left(\frac{a-b}{a+b}\right) - aE(k) = (a+b)E\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right) - aE(k) \\ &= \frac{a+b}{1+k'}(E(k) + k'K(k)) - aE(k) = ak'K(k) = bK(k) = abI(a, b). \quad \square \end{aligned}$$

補題 3.8. $c_n = \sqrt{a_n^2 - b_n^2}$ ($n \geq 0$) とおけば, $n \geq 1$ のとき, $c_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n^2 = 0$ が成り立つ.

[証明] $n \geq 1$ のとき, $c_n^2 = \left(\frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}\right)^2 - a_{n-1}b_{n-1} = \left(\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}\right)^2$ より, $c_n = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2}$ である. $a_{n-1} > b_{n-1} \geq b$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \text{AGM}(a, b)$ より, $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ である. 特に, ある番号 n_0 が存在して, $n \geq n_0$ ならば, $0 < c_n < b$ である. よって, $n > n_0$ のとき, $a_{n-1} + b_{n-1} \geq 2b_{n-1} \geq 2b$ であるから,

$$0 < \frac{c_n}{b} = \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2b} = \frac{a_{n-1}^2 - b_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} = \frac{c_{n-1}^2}{2b(a_{n-1} + b_{n-1})} < \frac{1}{4} \left(\frac{c_{n-1}}{b}\right)^2.$$

これから,

$$0 < c_{n_0+m} < b \left(\frac{1}{4}\right)^{1+2+\dots+2^{m-1}} \left(\frac{c_{n_0}}{b}\right)^{2^m} < 4b \left(\frac{1}{4}\right)^{2^m} = \frac{4b}{2^{2^{m+1}}}.$$

よって, $\lim_{m \rightarrow \infty} 2^{n_0+m} c_{n_0+m}^2 = 0$ を得る. □

命題 3.9.

$$J(a, b) = \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2\right) I(a, b).$$

[証明] $A_n = 2^n (J(a_n, b_n) - a_n^2 I(a_n, b_n))$ とおく. 命題 3.7 と命題 3.3 より,

$$\begin{aligned} A_{n+1} - A_n &= 2^n (2J(a_{n+1}, b_{n+1}) - J(a_n, b_n)) - 2^{n+1} a_{n+1}^2 I(a_{n+1}, b_{n+1}) + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n) \\ &= 2^n a_n b_n I(a_n, b_n) - 2^{n+1} a_{n+1}^2 I(a_n, b_n) + 2^n a_n^2 I(a_n, b_n) \\ &= 2^{n-1} (2a_n b_n - (a_n + b_n)^2 + 2a_n^2) I(a_n, b_n) \\ &= 2^{n-1} (a_n^2 - b_n^2) I(a_n, b_n) = 2^{n-1} c_n^2 I(a, b). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -2^{-n} A_n &= a_n^2 I(a_n, b_n) - J(a_n, b_n) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a_n^2 - a_n^2 \cos^2 \theta - b_n^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(a_n^2 - b_n^2) \sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta \\ &= c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 \theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} d\theta \leq c_n^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{a_n^2 \cos^2 \theta + b_n^2 \sin^2 \theta}} = c_n^2 I(a_n, b_n). \end{aligned}$$

したがって, $0 < -A_n \leq 2^n c_n^2 I(a_n, b_n) = 2^n c_n^2 I(a, b)$. 補題 3.8 より, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n c_n = 0$ が成り立つから, $A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = \lim_{N \rightarrow \infty} A_{N+1} = 0$. これから,

$$\begin{aligned} J(a, b) - a^2 I(a, b) &= A_0 = - \sum_{n=0}^{\infty} (A_{n+1} - A_n) = - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 I(a, b) \\ &= -I(a, b) \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2, \\ J(a, b) &= \left(a^2 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(a, b). \end{aligned}$$

□

次のルジャンドルの関係式の証明は次節で与える.

命題 3.10 (ルジャンドルの関係式).

$$E(k)K(k') + E(k')K(k) - K(k)K(k') = \frac{\pi}{2}.$$

[定理 2.2(ガウスの公式) の証明]

$a = 1, b = \frac{1}{\sqrt{2}}$ とおけば, $k = k' = \frac{1}{\sqrt{2}} = b$ である. 命題 3.10 より,

$$2E(b)K(b) - K(b)^2 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.3)$$

命題 3.9 より,

$$E(b) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) I(1, b) = \left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n-1} c_n^2 \right) K(b). \quad (3.4)$$

(3.4) を (3.3) に代入すれば,

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2 \right) K(b)^2 = \frac{\pi}{2}. \quad (3.5)$$

命題 3.4 より, $K(b) = \frac{\pi}{2AGM(1, b)}$ であるから, これを (3.5) に代入して,

$$\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} 2^n c_n^2 \right) \frac{\pi^2}{4AGM(1, b)^2} = \frac{\pi}{2}. \quad \square$$

4 ルジャンドルの関係式の証明

定義 4.1. $a, b, c \in \mathbb{C}$, c は 0 以下の整数ではないとする. $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 1$ に対して, $a^{(n)} = a(a+1) \cdots (a+n-2)(a+n-1)$, $a^{(0)} = 1$ とおく ($1^{(n)} = n!$ である). そのとき, 級数

$$F(a, b, c; u) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{(n)} b^{(n)}}{n! c^{(n)}} u^n \quad (4.1)$$

をガウスの超幾何級数と呼ぶ.

命題 4.2. 超幾何級数 $f(u) = F(a, b, c; u)$ は $|u| < 1$ において収束し, 単位円板上の正則関数を表す. さらに, これは微分方程式

$$u(1-u)\frac{d^2f}{du^2} + (c - (a+b+1)u)\frac{df}{du} - abf = 0 \quad (4.2)$$

を満たす.

[証明] $A_n = \frac{a^{(n)}b^{(n)}}{n!c^{(n)}}$ とおくと,

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)(c+n)}{(a+n)(b+n)} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \quad (4.3)$$

であるから, $f(u) = F(a, b, c; u)$ の収束半径は 1 である. 次に, 微分作用素 $D = u\frac{d}{du}$ を考える. $Du^n = nu^n$ が成り立つことに注意する. そのとき,

$$\left[(a+D)(b+D) - (c+D)(1+D)\frac{1}{u} \right] f(u) = 0 \quad (4.4)$$

が成り立つ. 実際,

$$\begin{aligned} (4.4) \text{ の左辺} &= \sum_{n=0}^{\infty} (a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=0}^{\infty} (c+D)(1+D)A_n u^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a+D)(b+D)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty} (c+D)(1+D)A_{n+1} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (a+n)(b+n)A_n u^n - \sum_{n=-1}^{\infty} (c+n)(1+n)A_{n+1} u^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(a+n)(b+n)A_n - (c+n)(1+n)A_{n+1}] u^n = 0. \end{aligned}$$

ここで, 最後に (4.3) を用いた. (4.4) を通常の微分方程式にかきなおそう.

$$D^2 f = D(Df) = u\frac{d}{du} \left(u\frac{df}{du} \right) = u\frac{df}{du} + u^2\frac{d^2f}{du^2}$$

であるから,

$$(a+D)(b+D)f = (D^2 + (a+b)D + ab)f = u\frac{df}{du} + u^2\frac{d^2f}{du^2} + (a+b)u\frac{df}{du} + abf.$$

一方, $D\left(\frac{1}{u}f\right) = u\left(-\frac{1}{u^2}f + \frac{1}{u}\frac{df}{du}\right) = -\frac{1}{u}f + \frac{df}{du}$ であるから,

$$(c+D)(1+D)\frac{1}{u}f = (c+D)\left[\frac{1}{u}f + D\left(\frac{1}{u}f\right)\right] = (c+D)\frac{df}{du} = c\frac{df}{du} + u\frac{d^2f}{du^2}.$$

したがって,

$$(u^2 - u) \frac{d^2 f}{du^2} + ((a + b + 1)u - c) \frac{df}{du} + abf = 0.$$

□

命題 4.3. $K(k) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right)$.

[証明] 拡張された 2 項係数

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{(-1/2)(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!} \\ &= \frac{(-1)^n (1/2)(1/2+1)\cdots(1/2+n-1)}{n!} = \frac{(-1)^n (1/2)^{(n)}}{n!} \end{aligned}$$

を用いれば,

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{(n)}}{n!} x^n$$

である. また, 部分積分によって,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta = \frac{(1/2)^{(n)} \pi}{n! 2}$$

がわかる. したがって,

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \theta}} = \int_0^{\pi/2} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{(n)}}{n!} k^{2n} \sin^{2n} \theta \right) d\theta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{(n)}}{n!} k^{2n} \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta d\theta \\ &= \frac{\pi}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)^{(n)} (1/2)^{(n)}}{n! n!} k^{2n} = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; k^2\right). \end{aligned}$$

□

補題 4.4. $K'(k) = K(k')$ とおけば, $K(k)$, $K'(k)$ は 2 階線形微分方程式

$$(k^3 - k) \frac{d^2 y}{dk^2} + (3k^2 - 1) \frac{dy}{dk} + ky = 0 \quad (4.5)$$

の解である.

[証明] $F(u) = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-ux^2)}}$ とおけば, 命題 4.3 より,

$$F(u) = \frac{\pi}{2} F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; u\right)$$

である．命題 4.2 より， $y = F(u)$ は微分方程式

$$(u - u^2) \frac{d^2 y}{du^2} + (1 - 2u) \frac{dy}{du} - \frac{1}{4} y = 0 \quad (4.6)$$

を満たす． $G(u) = F(1 - u)$ とおけば， $\frac{dG}{du} = -\frac{dF}{du}(1 - u)$ ， $\frac{d^2 G}{du^2} = \frac{d^2 F}{du^2}(1 - u)$ ， $(1 - u) - (1 - u)^2 = u - u^2$ ， $1 - 2(1 - u) = -(1 - 2u)$ より，

$$(u - u^2) \frac{d^2 G}{du^2} + (1 - 2u) \frac{dG}{du} - \frac{1}{4} G = 0$$

を得る．すなわち， $y = G(u)$ も微分方程式 (4.6) の解である． $K(k) = F(k^2)$ であるから，

$$\frac{dK}{dk} = 2k \frac{dF}{du}(k^2), \quad \frac{d^2 K}{dk^2} = 4k^2 \frac{d^2 F}{du^2}(k^2) + 2 \frac{dF}{du}(k^2).$$

したがって， $\frac{d^2 F}{du^2}(k^2) = \frac{1}{4k^2} \frac{d^2 K}{dk^2} - \frac{1}{4k^3} \frac{dK}{dk}$ ， $\frac{dF}{du}(k^2) = \frac{1}{2k} \frac{dK}{dk}$ である．これを

$$(k^2 - k^4) \frac{d^2 F}{du^2}(k^2) + (1 - 2k^2) \frac{dF}{du}(k^2) - \frac{1}{4} F(k^2) = 0$$

に代入して整理すれば，

$$(k^3 - k) \frac{d^2 K}{dk^2} + (3k^2 - 1) \frac{dK}{dk} + kK = 0$$

を得る． $K'(k) = K(\sqrt{1 - k^2}) = F(1 - k^2) = G(k^2)$ であり， G は F と同じ微分方程式を満たすから， K' は K と同じ微分方程式を満たす． \square

補題 4.5. $K'(k) = K(k')$ ， $E'(k) = E(k')$ とおけば， $EK' + E'K - KK'$ は定数である．

[証明] 微分方程式 (4.5) において， $u = k^{-\frac{1}{2}} k'^{-1}$ ， $y = uz$ とおく．そのとき， $(k^3 - k)u^2 = -1$ であるからこれを k で微分して，

$$2(k^3 - k) \frac{du}{dk} + (3k^2 - 1)u = 0,$$

$$(k^3 - k) \frac{d^2 u}{dk^2} + \frac{3(3k^2 - 1)}{2} \frac{du}{dk} + 3ku = 0.$$

また，

$$\frac{dy}{dk} = u \frac{dz}{dk} + \frac{du}{dk} z, \quad \frac{d^2 y}{dk^2} = u \frac{d^2 z}{dk^2} + 2 \frac{du}{dk} \frac{dz}{dk} + \frac{d^2 u}{dk^2} z$$

であるから， z は次の微分方程式を満たす．

$$(k^3 - k) \left(u \frac{d^2 z}{dk^2} + 2 \frac{du}{dk} \frac{dz}{dk} + \frac{d^2 u}{dk^2} z \right) + (3k^2 - 1) \left(u \frac{dz}{dk} + \frac{du}{dk} z \right) + kuz = 0.$$

これを整理すれば,

$$\frac{d^2 z}{dk^2} + \frac{1}{4k^2} \left(\frac{1+k^2}{1-k^2} \right)^2 z = 0. \quad (4.7)$$

補題 4.4 より, $y = K, y = K'$ はともに微分方程式 (4.5) の解であった. したがって, $H_1(k) = k^{\frac{1}{2}} k' K(k), H_2(k) = k^{\frac{1}{2}} k' K'(k)$ とおけば, $z = H_i(k), i = 1, 2$ は微分方程式 (4.7) の解である. よって, $W = \frac{dH_1}{dk} H_2 - H_1 \frac{dH_2}{dk}$ とおけば,

$$\frac{dW}{dk} = \frac{d^2 H_1}{dk^2} H_2 - H_1 \frac{d^2 H_2}{dk^2} = 0$$

より, W は定数である. $\frac{d}{dk} k^{\frac{1}{2}} k' = \frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} k' - k^{\frac{3}{2}} k'^{-1}$ に注意すれば, 補題 3.5 より,

$$\begin{aligned} W &= \left(\frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} k' - k^{\frac{3}{2}} k'^{-1} \right) K k^{\frac{1}{2}} k' K' + k^{\frac{1}{2}} k' \frac{dK}{dk} k^{\frac{1}{2}} k' K' \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} k^{-\frac{1}{2}} k' - k^{\frac{3}{2}} k'^{-1} \right) K' k^{\frac{1}{2}} k' K - k^{\frac{1}{2}} k' \frac{dK'}{dk} k^{\frac{1}{2}} k' K \\ &= k k'^2 \left(\frac{dK}{dk} K' - K \frac{dK'}{dk} \right). \end{aligned}$$

ここで, 補題 3.5 より, $k k'^2 \frac{dK}{dk} = E - k'^2 K$ である. さらに,

$$k k'^2 \frac{dK'}{dk} = -k k'^2 \frac{dK}{dk} (k') \frac{k}{k'} = -k^2 k' \frac{dK}{dk} (k') = -E(k') + k^2 K(k').$$

よって, $k^2 + k'^2 = 1$ より,

$$W = (E - k'^2 K) K' - K(-E(k') + k^2 K(k')) = EK' + E'K - KK'. \quad \square$$

[ルジャンドルの関係式の証明] 補題 4.5 より, $W = EK' + E'K - KK'$ は定数である. $\lim_{k \rightarrow 0} W$ を計算することによってこの定数を求めよう. $K(0) = \frac{\pi}{2}$ である. また,

$$E(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = [\sin \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1.$$

$W = (E - K)K' + E'K$ であるから,

$$\lim_{k \rightarrow 0} W = \lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' + E(1)K(0) = \lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' + \frac{\pi}{2}.$$

よって, $\lim_{k \rightarrow 0} (E - K)K' = 0$ を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 (K - E)K' &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} d\theta \right) \times K(k') \\
 &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 \sin^2 \theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - (1 - k^2) \sin^2 \theta}} \right) \\
 &\leq k \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} d\theta \right) \times \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}} \right) \\
 &= kK \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k d\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}} \\
 &\leq kK \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k d\theta}{\sqrt{k^2 \cos^2 \theta + k^2 \sin^2 \theta}} = kK \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$0 < (K - E)K' \leq kK \frac{\pi}{2} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow 0).$$

□

参考文献

- [1] 竹之内修・伊藤隆, $-\pi$ の計算 アルキメデスから現代まで, 共立出版, 2007.
- [2] 梅村浩, 楕円関数論, 東京大学出版会, 2000.
- [3] 小林昭七, 円の数学, 裳華房, 1999.
- [4] 大浦拓哉, 円周率の公式と計算法, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/ooura/pi04.pdf>
- [5] 中川仁, <http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi.pdf>
- [6] 中川仁, <http://www.juen.ac.jp/math/nakagawa/pi2002.pdf>