代数学特論

– リーマンのゼータ関数と素数分布について –

中川 仁

2010 年度前期

素数はどれくらいたくさんあるか，という問題を考える強力な道具としてリーマンのゼータ関数がある．この講義では，ゼータ関数に関する基本的な性質を解説し，それを用いて，素数の分布を調べる．

記号

$\mathbb{Z}$:有理整数環，$\mathbb{Q}$:有理数全体の集合，$\mathbb{R}$:実数全体の集合，$\mathbb{C}$:複素数全体の集合．

目 次

1 素数の無限性 **1**

2 リーマンのゼータ関数 **3**

3 ガンマ関数 **7**

4 ガンマ関数と $\sin x$ の関係 **16**

5 $\zeta(2)$ の値 **19**

6 ゼータ関数の関数等式 **20**

6.1 フーリエ級数 20

6.2 フーリエ変換 21

6.3 ゼータ関数の関数等式 24

7 オイラー積表示 **26**

8 素数定理 **28**

9 複素関数としてのゼータ関数 **30**

10 素数定理の証明 **33**

1 素数の無限性

自然数 a, b について，$a = bc$ となる自然数 c があるとき，b は a の**約数**，a は b の**倍数**という．例えば，$15 = 3 \times 5$ だから，3 は 15 の約数，15 は 3 の倍数である．

$a = 1 \times a$ より，1 と a は a の約数である．自然数 $p > 1$ について，p の約数が 1 と p だけのとき，p は**素数**であるという．素数を小さい方から順に挙げると，

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 11, \quad 13, \quad 17, \quad 19, \quad 23, \quad 29, \quad 31, \quad \ldots$$

となっている．このように，素数は非常に不規則に現れる．ここで，次の素朴な疑問が自然にでてくる．

素数は無数に存在するか？

補題 1.1. $a > 1$ を自然数とする．p を a の 1 より大きな約数で最小のものとする．そのとき，p は素数である．

[証明]　$a = bp$, b は自然数とかける．もし，p が素数でないとすると，$p = cq$, c, q は自然数, $1 < q < p$ とかける．$a = bp = bcq$ より，q は a の約数，$1 < q < p$. これは，p のとり方に矛盾する．ゆえに，p は素数である．　□

定理 1.2 (ユークリッド). 素数は無数に存在する．

[証明]　$p_1, p_2, \cdots, p_n$ を相異なる素数とするとき，これら以外の素数が必ず存在することを示せばよい．

$$A = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

とおく．もし, Aが素数ならば, Aはどのp_iよりも大きいから，これは, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ と異なる素数である．また，A が素数でないとすると，A の 1 と A 以外の約数が存在する．そのような約数で最小のものを p とすると，補題 1.1 より，p は素数である．A は素数 p で割り切れる．しかし,

$$A = p_i(p_1 \cdots p_{i-1} p_{i+1} \cdots p_n) + 1$$

であるから，A を p_i で割ると 1 余る．ゆえに，$p \neq p_i$, $i = 1, \ldots, n$ である．　□

素数を大きさの順に並べたとき，n 番目の素数を p_n とする．$p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, $\ldots$ である．

系 1.3.

$$p_n < 2^{2^n}.$$

[証明]　定理 1.2 の証明から,

$$p_{n+1} \leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1$$

である．$p_1 = 2 < 4 = 2^{2^1}$ であるから，$n = 1$ について主張は正しい．$n \geq 1$ とし，$1 \leq k \leq n$ について，$p_k < 2^{2^k}$ であるとする．そのとき,

$$\begin{aligned} p_{n+1} &\leq p_1 p_2 \cdots p_n + 1 \\ &< 2^{2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n} + 1 = 2^{2^{n+1} - 2} + 1 \\ &< 2^{2^{n+1} - 1} + 2^{2^{n+1} - 1} = 2^{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

□

正の実数 x に対して，

$$\pi(x) = (x \text{ 以下の素数の個数})$$

とする．例えば，10 以下の素数は $2, 3, 5, 7$ だから，$\pi(10) = 4$．20 以下の素数は，$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ だから，$\pi(20) = 8$．$\pi(100) = 25$, $\pi(1000) = 168$, $\pi(10000) = 1229$．x を大きくしていくとき，$\pi(x)$ はどうなるか？

命題 1.4.

$$\pi(x) \geq \log\log x \qquad (x \geq 2).$$

[証明]　$2 \leq x \leq 3$ に対して，$\pi(x) \geq 1 > \log\log 3 > \log\log x$ である．$x \geq 3$ に対して，$n = \pi(x)$ とおけば，$p_n \leq x < p_{n+1}$, $n \geq 2$ である．系 1.3 より，$p_{n+1} < 2^{2^{n+1}}$ であり，したがって，$x < 2^{2^{n+1}}$ である．対数をとれば，$\log x < 2^{n+1} \log 2$ を得る．もう一度，対数をとれば，

$$\begin{aligned}
\log\log x &< (n+1)\log 2 + \log\log 2 \\
&= n + (\log 2 - 1)n + \log 2 + \log\log 2 \\
&\leq n + (\log 2 - 1)2 + \log 2 + \log\log 2 \\
&= n + 3\log 2 + \log\log 2 - 2 < n = \pi(x).
\end{aligned}$$

□

2　リーマンのゼータ関数

リーマンのゼータ関数は，$s > 1$ に対して，収束する級数

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \tag{2.1}$$

によって定義される．実際，$s > 1$ に対して，

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^s} &\leq 1 + \sum_{n=2}^{N} \int_{n-1}^{n} \frac{1}{x^s}\,dx \\
&= 1 + \int_1^N x^{-s}\,dx = 1 + \left[\frac{1}{1-s} x^{1-s}\right]_1^N \\
&= 1 + \frac{1}{s-1}\left(1 - \frac{1}{N^{s-1}}\right) < 1 + \frac{1}{s-1}.
\end{aligned}$$

したがって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$ は収束する．同様に，

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^s} &\geq \sum_{n=1}^{N}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}\,dx = \int_1^{N+1}x^{-s}\,dx \\
&= \left[\frac{1}{1-s}x^{1-s}\right]_1^{N+1} = \frac{1}{s-1}\left(1-\frac{1}{(N+1)^{s-1}}\right).
\end{aligned}
$$

ここで，$N\to\infty$ とすれば，

$$\zeta(s)\geq\frac{1}{s-1}\qquad(s>1)$$

を得る．以上によって，

$$\frac{1}{s-1}\leq\zeta(s)\leq 1+\frac{1}{s-1}\qquad(s>1)$$

が示された．これから，

$$\lim_{s\to 1+0}\zeta(s)=\infty,\qquad\lim_{s\to 1+0}(s-1)\zeta(s)=1$$

がわかる．

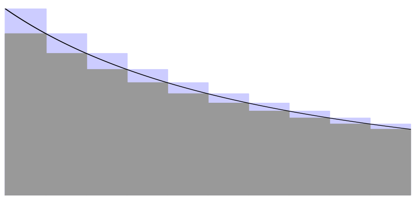


図 1: $\zeta(s)$ の評価

ゼータ関数 $\zeta(s)$ の定義域をもう少し広げることができる．

補題 2.1. $f(x)$ を $x>0$ における微分可能な関数で，導関数 $f'(x)$ も $x>0$ で連続であるとする．そのとき，自然数 n に対して，次が成り立つ．

$$\int_0^1\left(\sum_{k=1}^{n-1}f'(x+k)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx+\frac{f(1)+f(n)}{2}=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)\,dx$$

[証明]　$g(x)$ を $f(x)$ と同様な条件を満たす関数とする．部分積分によって，

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 g'(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx &= \left[g(x)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 g(x)\,dx \\
&= \frac{g(0)+g(1)}{2} - \int_0^1 g(x)\,dx
\end{aligned}
$$

を得る．これを $g(x)=f(x+k)$ について適用すれば，$g(0)=f(k)$, $g(1)=f(k+1)$ だから，

$$
\int_0^1 f'(x+k)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx = \frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_0^1 f(x+k)\,dx.
$$

これを $1\leq k\leq n-1$ について加えれば，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} f'(x+k)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 f'(x+k)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx + \frac{f(1)+f(n)}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{f(k)+f(k+1)}{2} - \int_0^1 f(x+k)\,dx\right) + \frac{f(1)+f(n)}{2} \\
&= \frac{f(n)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k)}{2} + \frac{f(1)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1}\frac{f(k+1)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1}\int_0^1 f(x+k)\,dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

□

$s>0$ として，関数 $f(x)=x^{-s}$ に対して補題 2.1 を適用する．$B_1(x)=\{x\}-\frac{1}{2}$ とおく．ここで，$\{x\}=x-[x]$ は x の小数部分である．$f'(x)=-sx^{-s-1}$ より，

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n-1} f'(x+k)\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)dx \\
&= -s\int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{x-\frac{1}{2}}{(x+k)^{s+1}}\right)dx = -s\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_1(x)}{(x+k)^{s+1}}dx \\
&= -s\int_0^1 \sum_{k=1}^{n-1}\frac{B_1(x+k)}{(x+k)^{s+1}}dx = -s\int_1^n \frac{B_1(x)}{x^{s+1}}dx,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-s\int_1^n \frac{B_1(x)}{x^{s+1}}dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^s}\right) &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}-\int_1^n \frac{1}{x^s}\,dx \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}-\begin{cases} \left[\dfrac{1}{1-s}\dfrac{1}{x^{s-1}}\right]_1^n, & (s\neq 1), \\ [\log x]_1^n, & (s=1), \end{cases} \\
&= \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}-\frac{1}{1-s}\left(1-\frac{1}{n^{s-1}}\right), & (s\neq 1), \\ \displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n, & (s=1), \end{cases}
\end{aligned}
$$

を得る．この左辺を $\varphi_n(s)$ とおく．いま，$s>1$ とする．そのとき，右辺において，$n\to\infty$ とすれば，$\displaystyle\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^s}\to\zeta(s)$ であり，$\dfrac{1}{n^{s-1}}\to 0$ であるから，右辺は，$\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ に収束する．一方，$\varphi_n(s)$ は，$s\geq\epsilon>0$ に対して，

$$
\begin{aligned}
|\varphi_n(s)| &\leq |s|\int_1^n \frac{|B_1(x)|}{x^{s+1}}dx+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^s}\right) \\
&\leq \frac{|s|}{2}\int_1^n \frac{1}{x^{\epsilon+1}}+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^\epsilon}\right)=\frac{|s|}{2}\left[-\frac{1}{\epsilon x^\epsilon}\right]_1^n+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^\epsilon}\right) \\
&= \frac{|s|}{2\epsilon}\left(1-\frac{1}{n^\epsilon}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n^\epsilon}\right).
\end{aligned}
$$

よって，$n\to\infty$ のとき，s の連続関数 $\varphi_n(s)$ は正の実数の任意の閉区間 $\epsilon\leq s\leq\delta$ において，関数 $\varphi(s)$ に一様収束する．したがって，$\varphi(s)$ は $s>0$ において連続関数である．以上によって，$s>1$ に対して，

$$
\varphi(s)=\zeta(s)-\frac{1}{s-1}
$$

であり，$\varphi(s)$ は $s>0$ において連続関数である．特に，

$$
\varphi(1)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(1)=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}-\log n\right)=\gamma
$$

である．この定数 γ を**オイラー定数**という．$\gamma=0.5772156649\ldots$ である．以上によっての次の命題を得る．

命題 2.2. $s>0$ における連続関数 $\varphi(s)$ が存在して，

$$
\zeta(s)=\frac{1}{s-1}+\varphi(s)
$$

とかける．さらに，$\varphi(1)=\gamma$ である．

3　ガンマ関数

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ は正の実数 x に対して，積分

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt \tag{3.1}$$

によって定義される．この積分が収束することは次のように示される．$\epsilon > 0$ とすると，$t > 0$ のとき，$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}$ であるから，

$$\int_\epsilon^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt < \int_\epsilon^1 t^{x-1}\,dt = \left[\frac{1}{x}t^x\right]_\epsilon^1 = \frac{1}{x} - \frac{\epsilon^x}{x}.$$

したがって，$x > 0$ のとき，

$$\int_\epsilon^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt < \frac{1}{x}.$$

x を固定し，$\epsilon \to 0$ とすれば，この積分は単調に増大し，上に有界であるから，

$$\int_0^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

が存在する．次に，e^t のテイラー展開は

$$e^t = \sum_{n=0}^\infty \frac{t^n}{n!}$$

であり，$t > 0$ のとき，すべての項は正であるから，任意の自然数 n に対して，$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ が成り立つ．したがって，$e^{-t} < \dfrac{n!}{t^n}$ $(t > 0)$ が成り立つ．x を固定して，自然数 n を $n > x + 1$ にとれば，

$$t^{x-1}e^{-t} < t^{x-1}\frac{n!}{t^n} = \frac{n!}{t^{n+1-x}} \quad (t > 0)$$

が成り立つ．したがって，

$$\int_1^u t^{x-1}e^{-t}\,dt < \int_1^u \frac{n!}{t^{n+1-x}}\,dt = \left[\frac{n!}{(x-n)t^{n-x}}\right]_1^u = \frac{n!}{n-x}\left(1 - \frac{1}{u^{n-x}}\right) < \frac{n!}{n-x}.$$

u が増大するとき，この積分も単調に増大し，上に有界であるから，

$$\int_1^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \lim_{u\to\infty}\int_1^u t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

が存在する．以上によって，(3.1) が $x > 0$ に対して意味を持つことがわかった．

特に，$x=1$ とおけば,

$$\begin{aligned}\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-t}\,dt = \lim_{u\to\infty}\int_0^u e^{-t}\,dt \\ &= \lim_{u\to\infty}\left[-e^{-t}\right]_0^u = \lim_{u\to\infty}(1-e^{-u}) = 1.\end{aligned}$$

さらに，ガンマ関数は

$$\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x) \qquad (x>0) \tag{3.2}$$

を満たす．実際，部分積分によって，$x>0$ に対して,

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^u t^x e^{-t}\,dt &= \left[-e^{-t}t^x\right]_\epsilon^u + x\int_\epsilon^u t^{x-1}e^{-t}\,dt \\ &= -e^{-u}u^x + e^{-\epsilon}\epsilon^x + x\int_\epsilon^u t^{x-1}e^{-t}\,dt.\end{aligned}$$

$n>x+1$ とすれば，$e^{-u}u^x < \dfrac{n!}{u^{n-x}}$ であるから，$u\to\infty$ のとき，$e^{-u}u^x \to 0$ である．また，$x>0$ であるから，$\epsilon\to 0$ のとき，$e^{-\epsilon}\epsilon^x\to 0$ である．したがって，$\epsilon\to 0$, $u\to\infty$ とすれば,

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^x e^{-t}\,dt = x\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = x\,\Gamma(x).$$

(3.2) を繰り返せば，自然数 n に対して，$x>0$ のとき,

$$\begin{aligned}\Gamma(x+n) &= (x+n-1)\Gamma(x+n-1) \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\Gamma(x+n-2) \\ &= \cdots\cdots \\ &= (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x\,\Gamma(x) \qquad (3.3)\end{aligned}$$

が成り立つ．特に，$x=1$ とおけば,

$$\Gamma(n+1) = n!\,\Gamma(1) = n!,$$

したがって，$\Gamma(n)=(n-1)!$ である．これから，ガンマ関数は自然数の集合上の関数 $n\longmapsto(n-1)!$ を正の実数全体へ拡張したものであると考えられる．また，(3.3) より,

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x(x+1)\cdots(x+n-2)(x+n-1)}\Gamma(x+n)$$

と表せば，この右辺は，$x>-n$ において，$x=0,-1,\ldots,-(n-1)$ を除いたところで定義される．n は任意の自然数であるから，これによって，$\Gamma(x)$ は 0 以下の整数を除いたすべての実数 x に対して定義される．

ガンマ関数の別の定義を与えよう．そのために，いくつかの定義と補題を準備する．

定義 3.1. $x>0$ で定義された関数 $f(x)$ が**凸関数**であるとは，任意の $0<x_1<x_2$, $0\leq t\leq 1$ に対して，不等式

$$(1-t)f(x_1)+tf(x_2)\geq f((1-t)x_1+tx_2)$$

が成り立つことである．すなわち，$x_1\leq x\leq x_2$ における関数 $y=f(x)$ のグラフが図 2 のように点 $(x_1,f(x_1))$ と点 $(x_2,f(x_2))$ を結ぶ線分の下側にあることである．

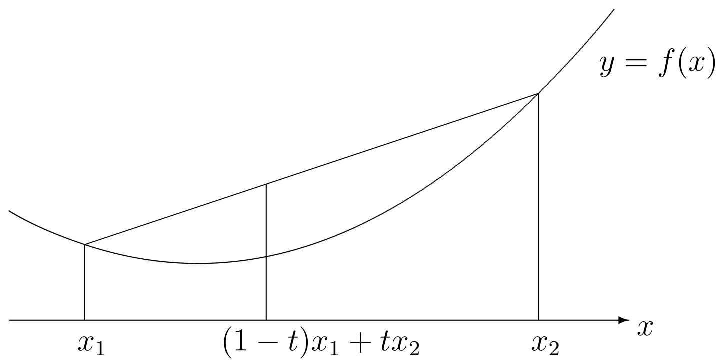


図 2: 凸関数

1 次関数 $f(x)=ax+b$ は明らかに凸関数である．同様に，x^2 の係数が正であるような 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a>0)$ も凸関数である．

命題 3.2. $x>0$ で定義された関数 $f(x)$ と $g(x)$ が凸関数ならば，$f(x)+g(x)$ も凸関数である．また，$f(x)$ が凸関数ならば，$a>0,\ b\geq 0$ を定数とするとき，$f(ax+b)$ も凸関数である．

[証明]　$x_1,x_2>0,\ 0\leq t\leq 1$ とする．$h(x)=f(x)+g(x)$ とすれば，

$$\begin{aligned}(1-t)h(x_1)+th(x_2)&=(1-t)\left(f(x_1)+g(x_1)\right)+t\left(f(x_2)+g(x_2)\right)\\&=(1-t)f(x_1)+tf(x_2)+(1-t)g(x_1)+tg(x_2)\\&\geq f((1-t)x_1+tx_2)+g((1-t)x_1+tx_2)\\&=h((1-t)x_1+tx_2).\end{aligned}$$

$h(x)=f(ax+b)$ とすれば，

$$\begin{aligned}(1-t)h(x_1)+th(x_2)&=(1-t)f(ax_1+b)+tf(ax_2+b)\\&\geq f((1-t)(ax_1+b)+t(ax_2+b))\\&=f(a((1-t)x_1+tx_2)+b)=h((1-t)x_1+tx_2).\end{aligned}$$

□

定義 3.3. $x>0$ で定義された正の値をとる関数 $f(x)$ に対して，$\log f(x)$ が凸関数であるとき，$f(x)$ は**対数的凸**であるという．

$f(x)$ と $g(x)$ が対数的凸ならば，命題3.2 より，$\log f(x)g(x) = \log f(x) + \log g(x)$ も凸関数であるから，$f(x)g(x)$ は対数的凸である．

ガンマ関数 $\Gamma(x)$ が対数的凸であることを示すために，ヘルダーの不等式が必要になる．ヘルダーの不等式を証明するために，まず，次のヤングの不等式を証明する．

補題 3.4 (ヤングの不等式)**.** $a,b>0$, $p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とすると，

$$\frac{1}{p}a^p+\frac{1}{q}b^q \geq ab$$

が成り立つ．　等号は $a^p=b^q$ のときに限り成り立つ．

[証明]　$x>0$ に対して，$f(x)=\dfrac{1}{q}x^q+\dfrac{1}{p}a^p-ax$ とおく．

$$f'(x)=x^{q-1}-a$$

であるから，$x=a^{1/(q-1)}$ のときに，$f'(x)=0$ であり，$f(x)$ は $x=a^{1/(q-1)}$ で最小値をとる．最小値は，$\dfrac{q}{q-1}=\dfrac{1}{1-1/q}=p$ より，

$$f\left(a^{1/(q-1)}\right)=\frac{1}{q}a^{\frac{q}{q-1}}+\frac{1}{p}a^p-aa^{\frac{1}{q-1}}=\frac{1}{q}a^p+\frac{1}{p}a^p-a^p=\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1\right)a^p=0.$$

ゆえに，$f(x)\geq 0$ である．等号は，$x=a^{1/(q-1)}$ のときに限り成り立つ．　$\square$

補題 3.5 (ヘルダーの不等式)**.** $p,q>1$, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ とする．$f(x)$, $g(x)$ を $x>0$ で定義された連続関数で，$\displaystyle\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx$, $\displaystyle\int_0^\infty |g(x)|^q\,dx$ は収束するとする．そのとき，

$$\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \geq \int_0^\infty |f(x)g(x)|\,dx.$$

[証明]

$$\|f\|_p=\left(\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}},\quad \|g\|_q=\left(\int_0^\infty |g(x)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

とおく．

$$a=\frac{|f(x)|}{\|f\|_p},\quad b=\frac{|g(x)|}{\|g\|_q}$$

に対して，補題 3.4 を適用すれば，

$$\frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}+\frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \geq \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}.$$

これを積分すれば，

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\int_0^\infty |f(x)|^p\,dx+\frac{1}{q}\frac{1}{\|g\|_q^q}\int_0^\infty |g(x)|^q\,dx \geq \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_0^\infty |f(x)g(x)|\,dx.$$

この左辺は

$$\frac{1}{p}\frac{1}{\|f\|_p^p}\|f\|_p^p+\frac{1}{q}\frac{1}{\|a\|_q^q}\|g\|_q^q=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

である．ゆえに，

$$1 \geq \frac{1}{\|f\|_p\|g\|_q}\int_0^\infty |f(x)g(x)|\,dx,$$

$$\|f\|_p\|g\|_q \geq \int_0^\infty |f(x)g(x)|\,dx.$$

□

命題 3.6. $\Gamma(x)$ は対数凸である．

[証明]　$x_1, x_2 > 0$, $p > 1$, $q > 1$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ とすると，補題 3.5 より，

$$\begin{aligned}\Gamma(x_1)^{\frac{1}{p}}\Gamma(x_2)^{\frac{1}{q}} &= \left(\int_0^\infty \left(t^{(x_1-1)\frac{1}{p}}e^{-\frac{1}{p}t}\right)^p dt\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_0^\infty \left(t^{(x_2-1)\frac{1}{q}}e^{-\frac{1}{q}t}\right)^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\geq \int_0^\infty t^{(x_1-1)\frac{1}{p}}e^{-\frac{1}{p}t}\,t^{(x_2-1)\frac{1}{q}}e^{-\frac{1}{q}t}\,dt \\ &= \int_0^\infty t^{\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2-1}e^{-t}\,dt = \Gamma\left(\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2\right).\end{aligned}$$

したがって，対数をとれば，

$$\frac{1}{p}\log\Gamma(x_1)+\frac{1}{q}\log\Gamma(x_2)=\log\left(\Gamma(x_1)^{\frac{1}{p}}\Gamma(x_2)^{\frac{1}{q}}\right) \geq \log\Gamma\left(\frac{1}{p}x_1+\frac{1}{q}x_2\right).$$

□

次の定理は，ガンマ関数は，関数等式 $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ と対数的凸であること，および $\Gamma(1)=1$ であることによって特徴付けられることを示している．

定理 3.7. $x>0$ における関数 $f(x)$ が次の 3 条件を満たすならば，$f(x)=\Gamma(x)$ である．

(1) $f(x+1)=xf(x)$.

(2) $f(x)$ は対数的凸である．

(3) $f(1)=1$.

[証明]　$\Gamma(x)$ はこの3条件を満たしている．(1) と (3) から，任意の自然数 n に対して，$f(n)=(n-1)!$ である．$0<x\leq 1$ に対して，$f(x)=\Gamma(x)$ が成り立てば，(1) によって，すべての $x>0$ に対して，$f(x)=\Gamma(x)$ が成り立つことがわかる．よって，$0<x\leq 1$ に対して，$f(x)$ が $\Gamma(x)$ と一致することを示せばよい．$0<x\leq 1$ とし，n を2以上の自然数とする．$x+n=(1-x)n+x(n+1)$ であるから，(2) より，

$$\begin{aligned}(1-x)\log f(n)+x\log f(n+1) &\geq \log f(x+n),\\ x\left(\log f(n+1)-\log f(n)\right) &\geq \log f(x+n)-\log f(n),\\ \log f(n+1)-\log f(n) &\geq \frac{\log f(x+n)-\log f(n)}{x}.\end{aligned}$$

同様に，$n=\dfrac{x}{x+1}(n-1)+\dfrac{1}{x+1}(x+n)$ であるから，

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+1}\log f(n-1)+\frac{1}{x+1}\log f(x+n) &\geq \log f(n),\\ x\log f(n-1)+\log f(x+n) &\geq (x+1)\log f(n),\\ \frac{\log f(x+n)-\log f(n)}{x} &\geq \log f(n)-\log f(n-1).\end{aligned}$$

したがって，

$$\log f(n)-\log f(n-1)\leq \frac{\log f(x+n)-\log f(n)}{x}\leq \log f(n+1)-\log f(n).$$

ここで，$f(n)=(n-1)!$, $f(n+1)=n!$ であるから，

$$\log(n-1)\leq \frac{\log f(x+n)-\log(n-1)!}{x}\leq \log n,$$

$$(n-1)^x(n-1)!\leq f(x+n)\leq n^x(n-1)!. \tag{3.4}$$

(1) より，

$$\begin{aligned}f(x+n) &= (x+n-1)f(x+n-1)=(x+n-1)(x+n-2)f(x+n-2)\\ &= \cdots\cdots\\ &= (x+n-1)\cdots(x+1)xf(x).\end{aligned}$$

したがって，(3.4) を $(x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x$ で割って，

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\leq f(x) &\leq \frac{n^x(n-1)!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)}\\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n-1)(x+n)}\frac{x+n}{n}.\end{aligned}$$

これがすべての $n \geq 2$ について成り立つから，左辺の n を $n+1$ でおきかえてもよく，

$$\frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{x+n}{n}.$$

を得る．これを書き直せば，

$$\frac{n}{x+n}f(x) \leq \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \leq f(x).$$

ここで，$n \to \infty$ とすれば，$\dfrac{n}{x+n} \to 1$ であるから，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = f(x)$$

を得る．$\Gamma(x)$ も $f(x)$ と同じ条件を満たすから，

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

である．ゆえに，$f(x) = \Gamma(x)$ である． □

系 3.8.

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

[証明]　定理 3.7 の証明において，$0 < x \leq 1$ に対して，

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

が成り立つことを証明した．一般の x に対してもこれが成り立つことを示すために，

$$\Gamma_n(x) = \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$$

とおく．

$$\begin{aligned}\Gamma_n(x+1) &= \frac{n^{x+1} n!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n+1)} \\ &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}\frac{nx}{x+n+1} = x\,\Gamma_n(x)\frac{n}{x+n+1}.\end{aligned}$$

これから，$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x)$ ならば，$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x+1) = x\,\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ がわかる．これを繰り返せば，すべての $x > 0$ に対して，$\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x) = \Gamma(x)$ を得る．$x < 0,\ x \neq 0, -1, -2, \ldots$ のときも同様である． □

系 3.8 の公式を書き直す．$n^x = e^{x\log n}$ であるから，

$$\begin{aligned}
\Gamma_n(x) &= \frac{n^x n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} \\
&= e^{x\log n - x - \frac{x}{2} - \cdots - \frac{x}{n}} \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x}{x+1} \cdot \frac{2e^{\frac{x}{2}}}{x+2} \cdots \frac{ne^{\frac{x}{n}}}{x+n} \\
&= e^{x(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})} \frac{1}{x} \cdot \frac{e^x}{1+x} \cdot \frac{e^{\frac{x}{2}}}{1+\frac{x}{2}} \cdots \frac{e^{\frac{x}{n}}}{1+\frac{x}{n}}.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right) = \gamma$$

であるから，$\lim_{n\to\infty} e^{x(\log n - 1 - \frac{1}{2} - \cdots - \frac{1}{n})} = e^{-\gamma x}$ であり，

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}} = e^{-\gamma x}\frac{1}{x}\prod_{\nu=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}. \tag{3.5}$$

最後に，$\Gamma(x)$ が何回でも微分可能であることを示そう．このことは関数等式 (3.2) によって，$x > 0$ に対して証明すればよい．$\Gamma(x) > 0$ であるから，$\log\Gamma(x)$ が定義できる．対数関数は連続であるから，(3.5) より，

$$\begin{aligned}
\log\Gamma(x) &= -\gamma x - \log x + \log\left(\lim_{n\to\infty}\prod_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}\right) \\
&= -\gamma x - \log x + \lim_{n\to\infty}\log\left(\prod_{\nu=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}\right) \\
&= -\gamma x - \log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\log\left(\frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1+\frac{x}{\nu}}\right) \\
&= -\gamma x - \log x + \lim_{n\to\infty}\sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{x}{\nu} - \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right).
\end{aligned}$$

よって，

$$\log\Gamma(x) = -\gamma x - \log x + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{x}{\nu} - \log\left(1+\frac{x}{\nu}\right)\right). \tag{3.6}$$

無限和と微分の順序が交換できれば，この右辺を項別に微分すればよい．これは，項別に微分して得られる級数

$$-\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu+x}\right) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{x}{\nu(\nu+x)}$$

が区間 $0 < x \leq r$ ($r > 0$ は任意にとる) において一様収束することを示せばよい．

$$\frac{x}{\nu(\nu+x)} < \frac{x}{\nu^2} \leq \frac{r}{\nu^2}$$

であり，$\dfrac{r}{\nu^2}$ は x によらず，級数

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r}{\nu^2} = r\left(\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots\right)$$

は収束する．したがって，項別微分した級数は区間 $0 < x \leq r$ において一様収束する．以上によって，区間 $0 < x \leq r$ において

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + x}\right)$$

が成り立つ．$r > 0$ は任意であるから，$x > 0$ において，

$$\frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + x}\right)$$

が成り立つ．$\log \Gamma(x)$ は微分可能であるから，$\Gamma(x) = e^{\log \Gamma(x)}$ も微分可能であり，

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x) \frac{d}{dx} \log \Gamma(x),$$

したがって，

$$\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \frac{d}{dx} \log \Gamma(x) = -\gamma - \frac{1}{x} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\nu} - \frac{1}{\nu + x}\right). \tag{3.7}$$

これを項別微分して得られる級数は

$$\frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu + x)^2}$$

である．$\dfrac{1}{(\nu + x)^2} \leq \dfrac{1}{\nu^2}$ であるから，この級数は $x > 0$ で一様収束する．ゆえに，$\dfrac{d}{dx} \log \Gamma(x)$ も微分可能であり，

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{(\nu + x)^2}.$$

微分を繰り返すごとに，得られる級数は収束がよくなり，$\log \Gamma(x)$ は何回でも微分可能であることがわかる．こうして，導関数の公式

$$\frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (k-1)!}{(\nu + x)^k} \tag{3.8}$$

を得る．

4　ガンマ関数と $\sin x$ の関係

$c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ とおき，$x > 0$ に対して，

$$f(x) = c^{-1}2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$$

とおく．そのとき，$\log(c^{-1}2^{x-1}) = x\log 2 - \log(2c)$ は 1 次関数であるから凸関数であり，したがって，$c^{-1}2^{x-1}$ は対数的凸である．命題 3.6 と命題 3.2 より，$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)$ と $\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)$ も対数凸である．したがって，それらの積である $f(x)$ も対数的凸である．また，$f(1) = c^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(1) = 1$ である．さらに，

$$\begin{aligned} f(x+1) &= c^{-1}2^{x}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}+1\right) \\ &= c^{-1}2^{x}\frac{x}{2}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x}{2}\right) \\ &= xc^{-1}2^{x-1}\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = xf(x) \end{aligned}$$

である．したがって，定理 3.7 より，$f(x) = \Gamma(x)$ である．以上によって次を得た．

定理 4.1 (ルジャンドルの関係式)．$c = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ とおけば，

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{c}{2^{x-1}}\Gamma(x).$$

ガンマ関数と $\sin x$ の関係を導くために，

$$\varphi(x) = \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x \tag{4.1}$$

とおく．そのとき，

$$\varphi(x+1) = \varphi(x). \tag{4.2}$$

実際，

$$\begin{aligned} \varphi(x+1) &= \Gamma(x+1)\Gamma(-x)\sin(\pi x+\pi) \\ &= x\Gamma(x)\Gamma(-x)(-1)\sin\pi x = \Gamma(x)(-x)\Gamma(-x)\sin\pi x \\ &= \Gamma(x)\Gamma(1-x)\sin\pi x = \varphi(x). \end{aligned}$$

ルジャンドルの関係式で，x を $1-x$ で置き換えると，

$$\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right) = \frac{c}{2^{-x}}\Gamma(1-x). \tag{4.3}$$

ルジャンドルの関係式と (4.3) から，

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\sin\frac{\pi(x+1)}{2} \\
&= \Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-x}{2}\right)\Gamma\left(1-\frac{x}{2}\right)\sin\frac{\pi x}{2}\cos\frac{\pi x}{2} \\
&= \frac{c}{2^{x-1}}\Gamma(x)\frac{c}{2^{-x}}\Gamma(1-x)\frac{1}{2}\sin\pi x \\
&= c^2\varphi(x).
\end{aligned}$$

よって，

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right)\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = c^2\varphi(x) \tag{4.4}$$

を得る．

$\Gamma(x)$ と $\sin x$ は何回でも微分可能であるから，$\varphi(x)$ もそうである．関数等式 (3.2) と $\sin\pi x$ のテイラー展開から，

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x}\Gamma(1-x)\sin\pi x = \Gamma(x+1)\Gamma(1-x)\left(\pi - \frac{\pi^3x^2}{3!} + \frac{\pi^5x^4}{5!} - \cdots\right)$$

を得る．この右辺は $x=0$ でも定義され，$x=0$ で何回でも微分可能である．したがって，$\varphi(0)=\pi$ と定義すれば，$\varphi(x)$ は $x=0$ で連続で，何回でも微分可能である．$\varphi(x)$ は周期 1 を持つから，任意の整数 m に対して，$\varphi(m)=\pi$ と定義すれば，$\varphi(x)$ はすべての実数 x に対して定義され，連続であり何回でも微分可能である．関係式 (4.4) は整数でない x に対して証明されたが，連続性によってすべての x に対して成り立つ．(4.1) より，$0<x<1$ に対して，$\varphi(x)>0$ である．(4.2) より，これはすべての x に対して成り立つ．$\varphi(x)$ は定数であることを証明する．そのために，

$$g(x) = \frac{d^2}{dx^2}\log\varphi(x)$$

とおく．$\varphi(x)$ は周期 1 を持つから，$g(x)$ も周期 1 を持つ．また，(4.4) より，

$$\log\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \log\varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\log c + \log\varphi(x).$$

これを 2 回微分して，

$$\frac{1}{4}\left(g\left(\frac{x}{2}\right) + g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) = g(x) \tag{4.5}$$

を得る．$g(x)$ は区間 $0\le x\le 1$ で連続であるから，そこで有界である．すなわち，定数 $M>0$ が存在して，$|g(x)|\le M\ (0\le x\le 1)$ である．しかし，$g(x)$ は周期 1 を持つから，すべての実数 x に対して，$|g(x)|\le M$ である．そのとき，(4.5) より，

$$|g(x)| \le \frac{1}{4}\left(\left|g\left(\frac{x}{2}\right)\right| + \left|g\left(\frac{x+1}{2}\right)\right|\right) \le \frac{M}{2}.$$

この議論を繰り返せば，$n = 1, 2, \ldots$ に対して，

$$|g(x)| \leq \frac{M}{2^n}$$

を得る．すなわち，$|g(x)|$ の上界はいくらでも小さくなる．これは，$g(x) = 0$ を意味する．$g(x)$ は $\log \varphi(x)$ の 2 回導関数であるから，これは，$\log \varphi(x)$ が x の 1 次関数であることを意味する．しかし，$\log \varphi(x)$ は周期関数であるから，$\log \varphi(x)$ は定数である．ゆえに，$\varphi(x)$ も定数である．$\varphi(0) = \pi$ であるから，この定数は π である．よって，$\varphi(x) = \pi$ である．以上によって，次の関係式が証明された．

定理 4.2.

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

系 4.3.

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

[証明]　定理 4.2 より，

$$\sin \pi x = \frac{\pi}{\Gamma(x)\Gamma(1-x)} = \frac{\pi}{(-x)\Gamma(x)\Gamma(-x)}.$$

(3.5) より，

$$\Gamma(x) = e^{-\gamma x} \frac{1}{x} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{x}{\nu}}}{1 + \frac{x}{\nu}},$$

$$\Gamma(-x) = e^{\gamma x} \frac{1}{(-x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \frac{e^{\frac{-x}{\nu}}}{1 - \frac{x}{\nu}}$$

したがって，

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\nu^2}\right).$$

□

系 4.4. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.

[証明]　定理 4.2 において，$x = 1/2$ とおけば，

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{2}} = \pi.$$

$x > 0$ のとき，$\Gamma(x) > 0$ であるから，系を得る．　□

系 4.4 より，定理 4.1 のルジャンドルの関係式は

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \tag{4.6}$$

となる．

5　$\zeta(2)$ の値

オイラーは 1731 年に,

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

の値を $1.644934\cdots$ まで計算し，結局，1735 年には

$$1.64493406684822643647\cdots$$

まで計算を進めたが，近似値を得ただけでこの値についてこれ以上新しいことが見つかるとは思っていなかった．しかし，オイラーは思いがけなくその年の年末に，次のような真の値を発見した．

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

オイラーは，1748 年には,

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(8) = \frac{\pi^8}{9450},$$

のように, $2n = 2, 4, 6, 8, \ldots, 26$ まで $\zeta(2n)$ を求めた．1750 年には，オイラーは一般の偶数 $2n$ に対して,

$$\zeta(2n) = \pi^{2n} \times \text{有理数}$$

であることを証明した．その証明には，系 4.3 の三角関数 $\sin \pi x$ の無限積展開を用いる．系 4.3 の右辺の積を展開したときの x^3 の係数は,

$$-\pi \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} = -\pi\zeta(2)$$

である．一方，$\sin \pi x$ のテイラー展開は,

$$\sin \pi x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\pi x)^{2n+1} = \pi x - \frac{1}{3!}\pi^3 x^3 + \frac{1}{5!}\pi^5 x^5 + \cdots$$

であるから，x^3 の係数を比較して,

$$-\pi\zeta(2) = -\frac{1}{3!}\pi^3, \quad \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$$

を得る．同様に，系 4.3 の右辺の積を展開したときの x^5 の係数は,

$$\pi \sum_{\mu > \nu \geq 1} \frac{1}{\mu^2 \nu^2} = \frac{\pi}{2} \left(\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^2} \right)^2 - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu^4} \right) = \frac{\pi}{2} \left(\zeta(2)^2 - \zeta(4) \right)$$

である．これと $\sin \pi x$ の x^5 の係数を比較して,

$$\frac{\pi}{2} \left(\zeta(2)^2 - \zeta(4) \right) = \frac{1}{5!}\pi^5, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{36} - \frac{\pi^4}{60} = \frac{\pi^4}{90}.$$

6　ゼータ関数の関数等式

6.1　フーリエ級数

三角関数 $\sin(2n\pi x)$, $\cos(2n\pi x)$ $(n=1,2,\ldots)$ は周期 1 を持つ関数の典型的な例である．いま，$f(x)$ を周期 1 を持つ関数とする．

$$f(x+1)=f(x).$$

そのとき，ある条件の下で，

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi x)+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n\pi x) \tag{6.1}$$

と表せる．ここで，a_n, b_n は定数である．(6.1) を $f(x)$ の**フーリエ級数展開**と呼ぶ．簡単のために，$f(x)$ は偶関数とする．すなわち，$f(-x)=f(x)$ とする．そのとき，(6.1) において，x に $-x$ を代入して

$$f(-x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi x)-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(2n\pi x)$$

となるから，

$$f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+f(-x))=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi x)$$

を得る．この係数 a_n は次のようにして定まる．まず，a_0 については，

$$\int_0^1\cos(2n\pi x)\,dx=\left[\frac{1}{2n\pi}\sin(2n\pi x)\right]_0^1=0,$$

より，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\int_0^1\left(a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(2n\pi x)\right)\\&=\int_0^1 a_0\,dx+\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 a_n\cos(2n\pi x)\,dx\\&=a_0.\end{aligned}$$

他の係数は，

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,\\\cos(\alpha-\beta)&=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\\\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)&=2\cos\alpha\cos\beta\end{aligned}$$

より，$n, m \geq 1$ について，

$$\int_0^1 \cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (\cos 2(n+m)\pi x + \cos 2(n-m)\pi x)\,dx$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x)\cos(2m\pi x)\,dx &= \int_0^1 \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n\pi x) \right) \cos(2m\pi x)\,dx \\ &= \int_0^1 a_0 \cos(2m\pi x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 a_n \cos(2n\pi x)\cos(2m\pi x)\,dx \\ &= \frac{1}{2} a_m. \end{aligned}$$

以上まとめると，

$$\begin{aligned} a_0 &= \int_0^1 f(x)\,dx, \\ a_m &= 2\int_0^1 f(x)\cos(2m\pi x)\,dx, \quad (m = 1, 2, \ldots) \end{aligned} \tag{6.2}$$

6.2 フーリエ変換

関数 $f(x)$ の**フーリエ変換** $\hat{f}(y)$ を次のように定義する．

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)(\cos(-2\pi xy) + i\sin(-2\pi xy))\,dx. \tag{6.3}$$

ここで，i は虚数単位である．関数 $|f(x)|$ は $|x| \to \infty$ のとき，急激に 0 に近づくとする．$f(x)$ が偶関数ならば，$f(x)\sin(-2\pi xy)$ は奇関数であり，その積分は 0 になるから，

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(2\pi xy)\,dx$$

である．いま，t を正の実数とし，

$$f(x) = e^{-\pi t x^2}$$

とおけば，$f(x)$ は偶関数であるから，そのフーリエ変換は

$$\hat{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi xy)\,dx$$

である．$\hat{f}(y)$ の導関数は部分積分によって，

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dy}\hat{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dy}\left(e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi xy)\right) dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi x) e^{-\pi t x^2}\sin(2\pi xy)\, dx = \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi t x) e^{-\pi t x^2}\sin(2\pi xy)\, dx \\
&= \frac{1}{t}\left[e^{-\pi t x^2}\sin(2\pi xy)\right]_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi xy)(2\pi y)\, dx \\
&= -\frac{2\pi y}{t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\cos(2\pi xy)\, dx = -\frac{2\pi y}{t}\hat{f}(y).
\end{aligned}
$$

一方，

$$\frac{d}{dy}e^{-\pi t^{-1}y^2} = -\frac{2\pi y}{t}e^{-\pi t^{-1}y^2}$$

であるから，$\hat{f}(y)$ と $e^{-\pi t^{-1}y^2}$ は同じ微分方程式を満たす．したがって，微分方程式の解の一意性によって，

$$\hat{f}(y) = Ce^{-\pi t^{-1}y^2}, \qquad C \text{ は定数}$$

である．$y = 0$ とおけば，

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\, dx = 2\int_{0}^{\infty} e^{-\pi t x^2}\, dx.$$

ここで，$x = u/\sqrt{\pi t}$ とおけば，系 4.4 より，

$$C = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^{\infty} u^{\frac{1}{2}-1}e^{-u}\, du = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{t}}.$$

ゆえに，$f(x) = e^{-\pi t x^2}$ $(t > 0)$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi t^{-1}y^2} \tag{6.4}$$

である．**テータ関数** $\theta(t)$ を

$$\theta(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\pi t n^2} \tag{6.5}$$

によって定義する．$f(x) = e^{-\pi t x^2}$ とおき，

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$$

とおけば，

$$g(0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t n^2} = \theta(t) \tag{6.6}$$

である．$g(x)$ は明らかに周期 1 を持つ周期関数である．また，$n=-m$ とおけば，$f(x)$ は偶関数であるから，

$$g(-x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(-x+n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(-x-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}f(x+m)=g(x).$$

よって，$g(x)$ も偶関数である．$g(x)$ のフーリエ級数展開を

$$g(x)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(2\pi mx)$$

とすると，

$$\begin{aligned}
a_0&=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)\,dx\\
&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)\,dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\,dx\\
&=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx=\hat{f}(0).
\end{aligned}$$

$m\geq 1$ に対して，

$$\begin{aligned}
a_m&=2\int_0^1 g(x)\cos(2m\pi x)\,dx=2\int_0^1\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(x+n)\cos(2m\pi x)\,dx\\
&=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_0^1 f(x+n)\cos(2m\pi(x+n))\,dx\\
&=2\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_n^{n+1}f(x)\cos(2m\pi x)\,dx\\
&=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos(2\pi xm)\,dx=2\hat{f}(m).
\end{aligned}$$

したがって，

$$g(x)=\hat{f}(0)+2\sum_{m=1}^{\infty}\hat{f}(m)\cos(2\pi mx).$$

ここで，$x=0$ とおけば，

$$g(0)=\hat{f}(0)+2\sum_{m=1}^{\infty}\hat{f}(m). \tag{6.7}$$

(6.4) より，

$$\hat{f}(0)=\frac{1}{\sqrt{t}},\quad \hat{f}(m)=\frac{1}{\sqrt{t}}e^{-\pi t^{-1}m^2}$$

であるから，

$$g(0)=\frac{1}{\sqrt{t}}\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\pi t^{-1}m^2}\right)=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right). \tag{6.8}$$

(6.6) と (6.8) より，次を得る．

定理 6.1 (テータ関数の関数等式)**.**

$$\theta(t)=\frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right).$$

6.3　ゼータ関数の関数等式

$\theta(t)$ は

$$\Psi(t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi tn^2}$$

を用いて，

$$\theta(t)=1+2\Psi(t)$$

と表せる．ガンマ関数の定義

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}e^{-x}\,dx \qquad (s>0)$$

において，n を自然数とし，$x=\pi n^2t$ と変数変換すれば，$dx=\pi n^2\,dt$ であるから，

$$\Gamma(s)=\int_0^{\infty}(\pi n^2t)^{s-1}e^{-\pi n^2t}\pi n^2\,dt=\pi^s n^{2s}\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-\pi n^2t}\,dt.$$

s を $s/2$ で置き換えて，

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)=\pi^{\frac{s}{2}}n^s\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2t}\,dt.$$

両辺を $\pi^{\frac{s}{2}}n^s$ で割って，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\frac{1}{n^s}=\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2t}\,dt.$$

これをすべての自然数 n について加えれば，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}-1}e^{-\pi n^2t}\,dt=\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}-1}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\pi n^2t}\,dt=\int_0^{\infty}t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt$$

を得る．右辺の積分を $(0,1]$ と $[1,\infty)$ の 2 つに分けて，$(0,1]$ における積分において，$t=1/u$ と変数変換すれば，

$$\begin{aligned}\int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt &= \int_\infty^1 u^{-\frac{s}{2}+1}\Psi\left(\frac{1}{u}\right)(-u^{-2})\,du \\ &= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\Psi\left(\frac{1}{u}\right)\,du.\end{aligned}$$

ここで，定理 6.1 より，

$$1+2\Psi(u)=\theta(u)=\frac{1}{\sqrt{u}}\theta\left(\frac{1}{u}\right)=\frac{1}{\sqrt{u}}\left(1+2\Psi\left(\frac{1}{u}\right)\right).$$

よって，

$$\Psi\left(\frac{1}{u}\right)=u^{\frac{1}{2}}\Psi(u)+\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}.$$

したがって，$s>1$ に対して，

$$\begin{aligned}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \int_0^1 t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt+\int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\ &= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\Psi\left(\frac{1}{u}\right)\,du+\int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\ &= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\left(u^{\frac{1}{2}}\Psi(u)+\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\right)du+\int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\ &= \int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\Psi(u)\,du+\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\,du-\frac{1}{2}\int_1^\infty u^{-\frac{s}{2}-1}\,du \\ &\quad +\int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\ &= \int_1^\infty t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}\Psi(t)\,dt+\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}u^{-\frac{s}{2}+\frac{1}{2}}\right]_1^\infty-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{-\frac{s}{2}}u^{-\frac{s}{2}}\right]_1^\infty \\ &\quad +\int_1^\infty t^{\frac{s}{2}-1}\Psi(t)\,dt \\ &= \int_1^\infty (t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+t^{\frac{s}{2}-1})\Psi(t)\,dt+\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s} \\ &= \int_1^\infty (t^{-\frac{s}{2}-\frac{1}{2}}+t^{\frac{s}{2}-1})\Psi(t)\,dt-\frac{1}{s(1-s)}.\end{aligned}$$

以上によって，$s>1$ に対して，

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\int_1^\infty\left(t^{\frac{s}{2}}+t^{\frac{1-s}{2}}\right)\Psi(t)\,\frac{dt}{t}-\frac{1}{s(1-s)} \tag{6.9}$$

が成り立つことが示された．しかし，この右辺の積分は，すべての実数 s に対して，収束して意味を持つ．さらに，s を $1-s$ で置き換えても，(6.9) の右辺は変わらない．以上によって，次の定理を得る．

定理 6.2 (ゼータ関数の関数等式).

$$\tilde{\zeta}(s) = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$$

とおけば，$\tilde{\zeta}(s) + \dfrac{1}{s(1-s)}$ はすべての実数 s に対して定義され，関数等式

$$\tilde{\zeta}(s) = \tilde{\zeta}(1-s)$$

を満たす.

この関数等式を書き直す.

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

この両辺に $(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)$ をかければ,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

定理 4.2 より,

$$\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(1-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}$$

であり，(4.6) より,

$$(-s)\Gamma\left(-\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}(-s)\Gamma(-s) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}\Gamma(1-s)$$

であるから,

$$\pi^{-\frac{s}{2}}2\frac{\pi}{\sin\frac{\pi s}{2}}\zeta(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\frac{\sqrt{\pi}}{2^{-s-1}}\Gamma(1-s)\zeta(1-s),$$

$$\zeta(s) = 2^s\pi^{s-1}\ \sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\ \Gamma(1-s)\ \zeta(1-s).$$

7 オイラー積表示

$s > 1$ に対して，$N > 1$ を自然数とし，N 以下の素数 p にわたる積

$$P_N(s) = \prod_{p\leq N}\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

を考える．$0 < \dfrac{1}{p^s} < 1$ であるから，

$$\frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \cdots$$

である．したがって，有限積 $P_N(s)$ を展開すれば，

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} < P_N(s) = \sum_{n\ \text{の各素因数} \leq N} \frac{1}{n^s} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

である．$N \to \infty$ とすれば，

$$\lim_{N\to\infty} P_N(s) = \zeta(s)$$

を得る．以上によって，次を得た．

命題 7.1 ($\zeta(s)$ のオイラー積表示)**.**

$$\zeta(s) = \prod_p \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}} \qquad (s > 1)$$

が成り立つ．ここで，右辺はすべての素数 p にわたる無限積を表す．

命題 7.1 によって，リーマンのゼータ関数と素数が結びつくことがわかる．オイラー積表示の対数をとれば，$s > 1$ において，

$$\begin{aligned}
\log\zeta(s) = \log\left(\lim_{N\to\infty} P_N(s)\right) &= \lim_{N\to\infty} \log P_N(s) \\
&= \lim_{N\to\infty} \sum_{p \leq N} -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right) \\
&= \sum_p -\log\left(1 - \frac{1}{p^s}\right).
\end{aligned}$$

ここで，$-\log(1-x)$ のテイラー展開

$$-\log(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k \qquad (|x| < 1)$$

を用いれば，

$$\begin{aligned}
\log\zeta(s) &= \sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{p^{ks}} \\
&= \sum_p \frac{1}{p^s} + \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\frac{1}{p^{ks}}.
\end{aligned}$$

ここで，$s \geq 1$ に対して，

$$
\begin{aligned}
0 < \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{ks}} &\leq \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{p^{ks}} \leq \sum_p \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{p^k} \\
&= \sum_p \frac{1}{2} \frac{1}{p^2 \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)} = \sum_p \frac{1}{2} \frac{1}{p(p-1)} \\
&\leq \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

したがって，

$$
0 < \log \zeta(s) - \sum_p \frac{1}{p^s} < \frac{1}{2} \qquad (s > 1)
$$

を得る．同様な計算を有限積 $P_N(1)$ に対して行えば，

$$
0 < \log P_N(1) - \sum_{p \leq N} \frac{1}{p} < \frac{1}{2}
$$

を得る．一方，

$$
P_N(1) = \sum_{n \text{ の各素因数} \leq N} \frac{1}{n} > \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \geq \int_1^{N+1} \frac{1}{x} \, dx = \log(N+1) > \log N
$$

が成り立つから，結局，次を得る．

命題 7.2.

$$
\sum_{p \leq N} \frac{1}{p} > \log \log N - \frac{1}{2} \qquad (N > 1).
$$

特に，すべての素数の逆数の和 $\displaystyle\sum_p \frac{1}{p}$ は ∞ に発散する．

8　素数定理

次の素数定理は，ガウスによって予想され，プーサンとアダマールによって 1896 年に証明された．

定理 8.1 (素数定理)**.** $\log x$ を自然対数 (底 $e = 2.718281\ldots$ の対数) とすると，

$$
\frac{\pi(x)}{\left(\dfrac{x}{\log x} \right)} \longrightarrow 1 \quad (x \to \infty).
$$

対数積分

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt \qquad (x \geq 2)$$

を考える．$t = e^u$ とおけば,

$$\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{e^u}{u}\,du.$$

ここで，指数関数のテイラー展開

$$e^u = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^k}{k!}$$

を用いれば,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}(x) &= \int_{\log 2}^{\log x} \left(\frac{1}{u} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u^{k-1}}{k!} \right) du = \int_{\log 2}^{\log x} \frac{1}{u}\,du + \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\log 2}^{\log x} \frac{u^{k-1}}{k!}\,du \\
&= [\log u]_{\log 2}^{\log x} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{u^k}{kk!} \right]_{\log 2}^{\log x} \\
&= \log\log x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log x)^k}{kk!} + c.
\end{aligned}$$

ここで,

$$c = -\log\log 2 - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\log 2)^k}{kk!}$$

とおいた．一方，部分積分によって対数積分を変形すれば,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Li}(x) = \int_2^x \frac{1}{\log t}\,dt &= \left[\frac{t}{\log t} \right]_2^x - \int_2^x \frac{t}{(\log t)^2} \frac{(-1)}{t}\,dt \\
&= \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + \int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt.
\end{aligned}$$

ここで，最後の積分は

$$\begin{aligned}
\int_2^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\log t)^2}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\log t)^2}\,dt \\
&\leq \int_2^{\sqrt{x}} \frac{1}{(\log 2)^2}\,dt + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{1}{(\log \sqrt{x})^2}\,dt \\
&\leq \frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^2} + \frac{x}{(\log \sqrt{x})^2} \\
&= \frac{\sqrt{x}}{(\log 2)^2} + \frac{4x}{(\log x)^2} \\
&= \left(\frac{\log x}{\sqrt{x}(\log 2)^2} + 4 \right) \frac{x}{(\log x)^2} \leq C \frac{x}{(\log x)^2}.
\end{aligned}$$

ここで，$C = \dfrac{2}{e(\log 2)^2} + 4$ とおいた．以上によって，

$$\frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} \leq \mathrm{Li}(x) \leq \frac{x}{\log x} - \frac{2}{\log 2} + C\frac{x}{(\log x)^2},$$

$$1 - \frac{2\log x}{(\log 2)x} \leq \frac{\mathrm{Li}(x)}{(x/\log x)} \leq 1 - \frac{2}{\log 2} + C\frac{1}{\log x}.$$

したがって，

$$\frac{\mathrm{Li}(x)}{(x/\log x)} \longrightarrow 1 \quad (x \to \infty).$$

これから，定理 8.1 は次のように書き直せる．

定理 8.2 (素数定理)**.**

$$\frac{\pi(x)}{\mathrm{Li}(x)} \longrightarrow 1 \quad (x \to \infty).$$

9　複素関数としてのゼータ関数

べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots \qquad (z = x + iy \in \mathbb{C})$$

は任意の複素数 z に対して絶対収束する．指数関数 e^z は複素関数として，このべき級数によってによって定義される．

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n.$$

そのとき，指数法則

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2} \qquad (z_1, z_2 \in \mathbb{C})$$

が成り立つ．特に，$z = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とかけば，

$$e^z = e^x e^{yi}.$$

ここで，定義より，

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(yi)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n)!}(yi)^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)!}(yi)^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} y^{2n} + i\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} y^{2n+1} \\ &= \cos y + i \sin y. \end{aligned}$$

したがって，

$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y), \qquad |e^z| = e^x \qquad (z = x + iy)$$

を得る．s を複素変数として，$s = \sigma + i\tau$ $(\sigma, \tau \in \mathbb{R})$ とかく．正の実数 t に対して，

$$t^s = e^{s\log t}$$

とする．そのとき，

$$|t^s| = \left|e^{\sigma\log t + i\tau\log t}\right| = e^{\sigma\log t} = t^\sigma \qquad (s = \sigma + i\tau)$$

である．$\sigma_0 > 1$ を任意にとって，$\sigma \geq \sigma_0$ とすれば，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n^s|} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma_0}} = \zeta(\sigma_0)$$

は収束するから，リーマンのゼータ関数の定義式

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

の右辺の級数は領域 $\Re(s) = \sigma \geq \sigma_0$ において一様収束する．部分和

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{N} e^{-s\log n}$$

は指数関数の和であるから，正則関数 (複素変数 s の関数として微分可能な関数) である．したがってその一様収束極限として，$\zeta(s)$ は $\Re(s) > \sigma_0$ において正則である．$\sigma_0 > 1$ は任意であったから，結局，$\zeta(s)$ は $\Re(s) > 1$ において正則である．

次に，ガンマ関数を複素関数としてみる．$s = \sigma + i\tau$ とし，$0 < \sigma_0 < \sigma_1$ を任意にとって，$\sigma_0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ とすれば，積分

$$\int_0^1 |t^{s-1}|e^{-t}\,dt = \int_0^1 t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^1 t^{\sigma_0-1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^\infty t^{\sigma_0-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(\sigma_0),$$

$$\int_1^\infty |t^{s-1}|e^{-t}\,dt = \int_1^\infty t^{\sigma-1}e^{-t}\,dt \leq \int_1^\infty t^{\sigma_1-1}e^{-t}\,dt \leq \int_0^\infty t^{\sigma_1-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(\sigma_1)$$

であるから，ガンマ関数を定義する積分

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

は $\sigma_0 \leq \Re(s) \leq \sigma_1$ において，一様収束する．有限区間での積分

$$\int_\epsilon^R t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

は s の正則関数であるから，その一様収束極限である

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t}\, dt$$

も $\sigma_0 < \Re(s) < \sigma_1$ における s の正則関数である．$\sigma_0 < \sigma_1$ は任意であったから，結局，$\Gamma(s)$ は $\Re(s) > 0$ における正則関数である．n を自然数とすれば，

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s(s+1)\cdots(s+n-2)(s+n-1)}\Gamma(s+n)$$

によって，$\Gamma(s)$ は $\Re(s) > -n$ における有理型関数で，$s = 0, -1, \ldots, -(n-1)$ を 1 位の極とする以外は，そこで正則である．n は任意の自然数であるから，結局，$\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有理型関数であり，$s = 0, -1, -2, \ldots$ を 1 位の極とする以外は正則である．さらに，定理 4.2 より，整数でない実数 s に対して，

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$$

が成り立つことから，一致の定理により，整数でない複素数 s に対しても，この等式が成り立つ．特に，この等式から，ガンマ関数 $\Gamma(s)$ は零点を持たない有理型関数であることがわかる．よって，$1/\Gamma(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則である．

リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ については，(6.9) の右辺の積分

$$\int_1^\infty \left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}} \right) \Psi(t)\, \frac{dt}{t}$$

は上と同様な議論によって，$\mathbb{C}$ 全体で正則な関数である．したがって，

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\tilde{\zeta}(s) = \frac{s(s-1)}{2}\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) \tag{9.1}$$

とおけば，(6.9) より，

$$\xi(s) = \frac{s(s-1)}{2}\int_1^\infty \left(t^{\frac{s}{2}} + t^{\frac{1-s}{2}} \right) \Psi(t)\, \frac{dt}{t} + \frac{1}{2} \tag{9.2}$$

は $\mathbb{C}$ 全体で正則な関数であり，関数等式

$$\xi(s) = \xi(1-s)$$

を満たす．

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1}\frac{\pi^{\frac{s}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{s}{2}\right)}\xi(s)$$

より，$\zeta(s)$ は $\mathbb{C}$ 全体で有理型関数であり，$s = 1$ 以外では正則である．§ 2 でみたように，

$$\lim_{s\to 1}(s-1)\zeta(s) = 1$$

であるから，$s=1$ において $\zeta(s)$ は 1 位の極を持ち，そこでの留数は 1 である．

また，オイラー積表示

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-\dfrac{1}{p^s}}$$

も $\Re(s)>1$ で収束することがわかり，これから，$\Re(s)>1$ において，$\zeta(s)$ は零点を持たないことがわかる．$\Gamma(s)$ は零点を持たないから，$\xi(s)$ は $\Re(s)>1$ において零点を持たない．関数等式 $\xi(s)=\xi(1-s)$ によって，$\xi(s)$ は $\Re(s)<0$ においても零点を持たない．したがって，$\xi(s)$ の零点はすべて $0\le\Re(s)\le 1$ にある．以下，リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ と素数定理の関係を解説しよう．

10　素数定理の証明

Newman による素数定理の短い証明を紹介する．x 以下の素数の個数は漸近的に $x/\log x$ に等しいという素数定理は，Hadamard と de la Valée Poussin によって 1896 年に独立に証明された．彼らの証明は 2 つの要素からなる：リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ は $\Re(s)=1$ 上に零点を持たないことを示すことと，それから素数定理を導くことである．第一の主張の独創的な短い証明は同じ著者たちと Mertens によってすぐ後に発見された．ここにそれを再録する．しかし，素数定理を導くことは難しい解析を含み続けた．複素解析の使用を避けたという技術的な意味で初等的証明は，1949 年に Selberg と Erdös によって発見された．しかし，この証明は非常に複雑であり，解析的なものよりも動機付けが明らかではない．しかし，数年前に D. J. Newman は素数定理の解析的な証明に必要な Tauber 型の議論の非常に単純なバージョンを発見した．我々はそれから得られる証明を述べる．それは美しい単純な構造を持ち，Cauchy の定理以上のものをほとんど使わない．

$\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x)=1$ のとき，$f(x)\sim g(x)$ と表す．正の定数 C が存在して，$|f(x)|\le C|g(x)|$ であるとき，$f(x)=O(g(x))$ と表す．$\pi(x)$ によって，x 以下の素数の個数を表す．

定理 10.1 (素数定理)**.** $x\to\infty$ のとき，$\pi(x)\sim\dfrac{x}{\log x}$ である．

次の 3 つの関数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s},\quad \Phi(s)=\sum_p\frac{\log p}{p^s},\quad \vartheta(x)=\sum_{p\le x}\log p\quad (s\in\mathbb{C},\ x\in\mathbb{R})$$

の性質を調べる．p は常に素数を表すとする．リーマンのゼータ関数 $\zeta(s)$ を定義する級数と $\Phi(s)$ を定義する級数は，$\Re(s)>1$ において広義一様に絶対収束する．実際，$\delta>0$ とすれば，$\Re(s)\ge 1+\delta$ において，

$$|n^s|=|e^{s\log n}|=e^{\Re(s)\log n}=n^{\Re(s)}\ge n^{1+\delta}.$$

したがって，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|n^s|}\le\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}&=1+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta}}\\&\le 1+\sum_{n=2}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{1}{x^{1+\delta}}\,dx=1+\int_{1}^{\infty}\frac{1}{x^{1+\delta}}\,dx\\&=1+\lim_{R\to\infty}\int_{1}^{R}\frac{1}{x^{1+\delta}}\,dx=1+\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{\delta x^{\delta}}\right]_1^R=1+\frac{1}{\delta}.\end{aligned}$$

同様に，$\log x\le x-1<x$ $(x\ge 1)$ であるから，$x\ge 1$ のとき，

$$\log x^{\delta/2}<x^{\delta/2},\quad \log x<\frac{2}{\delta}x^{\delta/2}$$

である．したがって，$\Re(s)\ge 1+\delta$ において，

$$\begin{aligned}\sum_p\frac{\log p}{|p^s|}=\sum_p\frac{\log p}{p^{\Re(s)}}\le\sum_p\frac{\log p}{p^{1+\delta}}&\le\frac{2}{\delta}\sum_p\frac{p^{\delta/2}}{p^{1+\delta}}\\&=\frac{2}{\delta}\sum_p\frac{1}{p^{1+\delta/2}}\le\frac{2}{\delta}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\delta/2}}\le\left(\frac{2}{\delta}\right)^2.\end{aligned}$$

したがって，$\zeta(s)$ と $\Phi(s)$ は $\Re(s)>1$ において正則関数を定義する．

命題 10.2. $\Re(s)>1$ において，$\zeta(s)=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}$ である．

[証明]　素因数分解の一意性と $\zeta(s)$ が絶対収束することから，

$$\zeta(s)=\sum_{r_2,r_3,\cdots\ge 0}\frac{1}{(2^{r_2}3^{r_3}\cdots)^s}=\prod_p\left(\sum_{r=0}^{\infty}p^{-rs}\right)=\prod_p\frac{1}{1-p^{-s}}\quad(\Re(s)>1).$$

□

命題 10.3. $\zeta(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $\Re(s)>0$ における正則関数に拡張される．

[証明]　$\Re(s)>1$ に対して，

$$\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{R\to\infty}\int_1^{R}\frac{1}{x^s}\,dx=\lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{(1-s)x^{s-1}}\right]_1^R=\frac{1}{s-1}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\zeta(s)-\frac{1}{s-1}&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\int_1^{\infty}\frac{1}{x^s}\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}-\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\frac{1}{x^s}\,dx\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx.\end{aligned}\tag{10.1}$$

この右辺の級数は，$\Re(s)>0$ に対して，絶対収束する．実際，

$$\int_n^x \frac{s}{u^{s+1}}\,du = \left[-\frac{1}{u^s}\right]_n^x = \frac{1}{n^s} - \frac{1}{x^s} \quad (n \le x \le n+1)$$

より，

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{n+1}\left(\frac{1}{n^s}-\frac{1}{x^s}\right)dx\right| &= \left|\int_n^{n+1}\int_n^x \frac{s}{u^{s+1}}\,du\,dx\right| \\ &\le \int_n^{n+1}\int_n^x \left|\frac{s}{u^{s+1}}\right| du\,dx \\ &\le \max_{n\le u\le n+1}\left|\frac{s}{u^{s+1}}\right| = \frac{|s|}{n^{\Re(s)+1}}.\end{aligned}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s|}{n^{\Re(s)+1}} < \infty$ であるから，(10.1) の右辺の級数は，$\Re(s)>0$ に対して絶対収束する． □

命題 10.4. $\vartheta(x) = O(x)$.

[証明]　自然数 n に対して，

$$2^{2n} = (1+1)^{2n} = \sum_{r=0}^{2n}\binom{2n}{r} \ge \binom{2n}{n}$$

である．$n < p \le 2n$ ならば，$p|\binom{2n}{n}$ であるから，$\binom{2n}{n}$ は $\prod_{n<p\le 2n} p$ で割り切れる．したがって，$\binom{2n}{n} \ge \prod_{n<p\le 2n} p$ である．また，

$$\log\left(\prod_{n<p\le 2n} p\right) = \sum_{n<p\le 2n}\log p = \vartheta(2n) - \vartheta(n)$$

であるから，

$$2n\log 2 \ge \log\binom{2n}{n} \ge \log\left(\prod_{n<p\le 2n} p\right) = \vartheta(2n) - \vartheta(n)$$

を得る．$[x/2] = n$ とおけば，$2n \le x < 2n+2$, $[x]$ は $2n$ または $2n+1$ である．したがって，

$$\vartheta(x) - \vartheta(x/2) = \vartheta([x]) - \vartheta([x/2]) = \begin{cases} \vartheta(2n) - \vartheta(n), \\ \vartheta(2n+1) - \vartheta(n), \end{cases}$$

よって，

$$\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \le \vartheta(2n) - \vartheta(n) + \log x \le 2n\log 2 + \log x \le x\log 2 + \log x.$$

任意の $C > \log 2$ に対して，すべての $x \geq x_0 = x_0(C)$ について，$\log x \leq (C - \log 2)x$ が成り立つから，結局，$\vartheta(x) - \vartheta(x/2) \leq Cx \ (\forall x \geq x_0)$ が成り立つ．$x \geq x_0$ とし，$r \geq 0$ を $x/2^r \geq x_0 > x/2^{r+1}$ となるように定める．

$$\vartheta(x/2^{k-1}) - \vartheta(x/2^k) \leq C\frac{x}{2^{k-1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, r+1)$$

について加えれば,

$$\vartheta(x) - \vartheta(x/2^{r+1}) \leq C\sum_{k=1}^{r+1} \frac{x}{2^{k-1}} \leq C\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{2^{k-1}} = 2Cx,$$

$$\vartheta(x) \leq 2Cx + \vartheta(x/2^{r+1}) \leq 2Cx + \vartheta(x_0) = 2Cx + O(1).$$

□

命題 10.5. $\Re(s) \geq 1$ に対して，$\zeta(s) \neq 0$ であり，$\Phi(s) - \dfrac{1}{s-1}$ は正則である．

[証明]　$\Re(s) > 1$ に対して，命題 10.2 の積は収束するから，$\zeta(s) \neq 0$ である．また，

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\log p}{p^s - 1} = \sum_p \frac{\log p}{p^s} + \sum_p \left(\frac{\log p}{p^s - 1} - \frac{\log p}{p^s}\right) = \Phi(s) + \sum_p \frac{\log p}{p^s(p^s - 1)}.$$

最後の和は $\Re(s) > \frac{1}{2}$ において収束し，そこでの正則関数を定義する．命題 10.3 より，$-\zeta'(s)/\zeta(s)$ は $\Re(s) > 0$ で有理型であり，その極は，$s = 1$ と $\zeta(s)$ の零点だけである．したがって，この等式により，$\Phi(s)$ は $\Re(s) > \frac{1}{2}$ に有理型に拡張され，そこでの極は $s = 1$ と $\zeta(s)$ の零点だけである．$\zeta(s) - \dfrac{1}{s-1} = \varphi(s)$ とおけば，$\Re(s) > 0$ において $\varphi(s)$ は正則である．

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\frac{-(s-1)^{-2} + \varphi'(s)}{(s-1)^{-1} + \varphi(s)} = \frac{1 - (s-1)^2\varphi'(s)}{(s-1)(1 + (s-1)\varphi(s))}$$

であるから，$\lim_{s\to 1} -(s-1)\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = 1$ である．$\zeta(s)$ が $s = 1 + i\alpha \ (\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq 0)$ において μ 位の零点を持ち，$s = 1 + 2i\alpha$ において，ν 位の零点を持つとする．命題 10.3 より，$\mu, \nu \geq 0$ である．補題 10.6 より，$s = 1 - i\alpha$ は μ 位の零点であり，$s = 1 - 2i\alpha$ は ν 位の零点である．$-\dfrac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$，したがって，$\Phi(s)$ は，$s = 1$ で留数 1 の 1 位の極であり，$s = 1 \pm i\alpha$ で留数 $-\mu$ の 1 位の極であり，$s = 1 \pm 2i\alpha$ で留数 $-\nu$ の 1 位の極である．よって，

$$\lim_{\epsilon\to+0} \epsilon\Phi(1+\epsilon) = 1, \quad \lim_{\epsilon\to+0} \epsilon\Phi(1+\epsilon \pm i\alpha) = -\mu, \quad \lim_{\epsilon\to+0} \epsilon\Phi(1+\epsilon \pm 2i\alpha) = -\nu.$$

これと不等式

$$\sum_{r=-2}^{2}\binom{4}{2+r}\Phi(1+\epsilon+ir\alpha)=\sum_{p}\frac{\log p}{p^{1+\epsilon}}\left(p^{i\alpha/2}+p^{-i\alpha/2}\right)^4\geq 0$$

から，$6-8\mu-\nu\geq 0$，$6\geq 8\mu+\nu\geq 8\mu$ を得る．よって，$\mu=0$ である．すなわち，$\zeta(1+i\alpha)\neq 0$ である．

$$\Phi(s)=-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}-\sum_{p}\frac{\log p}{p^s(p^s-1)}$$

から，$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$ は $s=1$ で留数 1 の 1 位の極を持つ以外では，$\Re(s)\geq 1$ で正則であるから，$\Phi(s)-\dfrac{1}{s-1}$ は $\Re(s)\geq 1$ で正則である． □

補題 10.6 (Schwarz の鏡像の原理)**.** 複素平面上の領域 D が実軸上の線分を含み，実軸に関して対称であるとし，$f(z)$ は D で正則であり，D に含まれる実軸上では実数値をとるとする．そのとき，$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ である．

[証明]　$F(z)=\overline{f(\bar{z})}$ とおくと，$f(z)$ が正則であることから，コーシー・リーマンの方程式によって，$F(z)$ も正則であることがわかる．z が D に含まれる実軸上にあるとき，$f(z)$ は実数であるから，$F(z)=\overline{f(\bar{z})}=\overline{f(z)}=f(z)$ である．一致の定理により，$F(z)=f(z)$ である．よって，$f(\bar{z})=\overline{f(z)}$ である． □

定理 10.7 (解析的定理)**.** $f(t)$ $(t\geq 0)$ を有界かつ局所可積分な関数とし，

$$g(z)=\int_0^\infty f(t)e^{-zt}\,dt\quad(\Re(z)>0)$$

は $\Re(z)\geq 0$ に正則に拡張されるとする．そのとき，積分 $\int_0^\infty f(t)\,dt$ は収束して，$g(0)$ に等しい．

命題 10.8. $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\vartheta(x)-x}{x^2}\,dx$ は収束する．

[証明]　自然数 n に対して，$n=p$ が素数ならば，$\lambda(n)=\log p$，そうでなければ，$\lambda(n)=0$ と定義する．そのとき，$\lambda(n)=\vartheta(n)-\vartheta(n-1)$ である．$\Re(s)>1$

に対して，

$$
\begin{aligned}
\Phi(s) &= \sum_p \frac{\log p}{p^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\vartheta(n)-\vartheta(n-1)}{n^s} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\vartheta(n)}{n^s} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\vartheta(n-1)}{n^s} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta(n)}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\vartheta(n)}{(n+1)^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n) \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{(n+1)^s} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \vartheta(n) \int_n^{n+1} \frac{s}{x^{s+1}}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} s \int_n^{n+1} \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\, dx \\
&= s \int_1^{\infty} \frac{\vartheta(x)}{x^{s+1}}\, dx \qquad (x = e^t) \\
&= s \int_0^{\infty} e^{-st} \vartheta(e^t)\, dt.
\end{aligned}
$$

ここで，

$$
f(t) = \vartheta(e^t)e^{-t} - 1 \quad (t \geq 0), \qquad g(z) = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} \quad (\Re(z) > 0)
$$

とおく．命題 10.5 より，$\Phi(z+1) - \dfrac{1}{z} = h(z)$ は $\Re(z) \geq 0$ で正則である．したがって，

$$
g(z) = \frac{h(z) + z^{-1}}{z+1} - \frac{1}{z} = \frac{h(z)}{z+1} - \frac{1}{z+1}
$$

は $\Re(z) \geq 0$ で正則である．さらに，$\Re(z) > 0$ において，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\infty} f(t)e^{-zt}\, dt &= \int_0^{\infty} (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)e^{-zt}\, dt \\
&= \int_0^{\infty} \vartheta(e^t)e^{-(z+1)t}\, dt - \int_0^{\infty} e^{-zt}\, dt \\
&= \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \left[-\frac{1}{z} e^{-zt} \right]_0^{\infty} = \frac{\Phi(z+1)}{z+1} - \frac{1}{z} = g(z).
\end{aligned}
$$

よって，定理 10.7 より，積分

$$
\int_0^{\infty} f(t)\, dt = \int_0^{\infty} (\vartheta(e^t)e^{-t} - 1)\, dt = \int_1^{\infty} (\vartheta(x)x^{-1} - 1)x^{-1}\, dx
$$

は収束する． □

命題 10.9. $\vartheta(x) \sim x$.

[証明]　まず，$\displaystyle\limsup_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}\le 1$ を示す．もしそうでないとすると，$\lambda>1$ が存在して，$\vartheta(x)\ge\lambda x$ を満たすようないくらでも大きな x が存在する．そのような x を固定する．定義から，$\vartheta(x)$ は広義単調増加関数であるから，$t\ge x$ ならば，$\vartheta(t)\ge\vartheta(x)\ge\lambda x$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\int_x^{\lambda x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt &\ge \int_x^{\lambda x}\frac{\lambda x-t}{t^2}\,dt \qquad (t=xu)\\ &=\int_1^{\lambda}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du>0.\end{aligned}$$

これは，命題 10.8 に矛盾する．なぜなら，積分 $\displaystyle\int_1^{\infty}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt$ は収束するから，ϵ を $\displaystyle 0<\epsilon<\int_1^{\lambda}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du$ にとるとき，$R>0$ を十分大きくとれば，任意の $y'>y>R$ に対して，

$$-\epsilon<\int_y^{y'}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt<\epsilon$$

が成り立つ．特に，$x>R$ とし，$y=x,\ y'=\lambda x$ とすれば，

$$\epsilon<\int_1^{\lambda}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du\le\int_x^{\lambda x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt<\epsilon$$

となって，矛盾である．したがって，$\displaystyle\limsup_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}\le 1$ である．

次に，$\displaystyle\liminf_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x}\ge 1$ を示す．もしそうでないとすると，$\lambda<1$ が存在して，$\vartheta(x)\le\lambda x$ を満たすようないくらでも大きな x が存在する．そのような x を固定する．そのとき，$\vartheta(x)$ は広義単調増加関数であるから，$t\le x$ ならば，$\vartheta(t)\le\vartheta(x)\le\lambda x$ である．したがって，

$$\begin{aligned}\int_{\lambda x}^{x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt &\le \int_{\lambda x}^{x}\frac{\lambda x-t}{t^2}\,dt \qquad (t=xu)\\ &=\int_{\lambda}^{1}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du<0.\end{aligned}$$

これも，命題 10.8 に矛盾する．なぜなら，ϵ を $\displaystyle 0<\epsilon<-\int_{\lambda}^{1}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du$ にとるとき，$R>0$ を十分大きくとれば，任意の $y'>y>R$ に対して，

$$-\epsilon<\int_y^{y'}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt<\epsilon$$

が成り立つ．特に，$x>R$ とし，$y=\lambda x,\ y'=x$ とすれば，

$$\epsilon<-\int_{\lambda}^{1}\frac{\lambda-u}{u^2}\,du\le-\int_{\lambda x}^{x}\frac{\vartheta(t)-t}{t^2}\,dt<\epsilon$$

となって，矛盾である．したがって，$\liminf_{x\to\infty}\dfrac{\vartheta(x)}{x} \geq 1$ である．以上によって，$\limsup_{x\to\infty}\dfrac{\vartheta(x)}{x} = \liminf_{x\to\infty}\dfrac{\vartheta(x)}{x} = 1$，したがって，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\vartheta(x)}{x} = 1$ が示された． □

<u>定理 10.1 の証明</u>

任意の $\epsilon > 0$ に対して，

$$\vartheta(x) = \sum_{p\leq x}\log p \leq \sum_{p\leq x}\log x = \pi(x)\log x,$$

$$\vartheta(x) \geq \sum_{x^{1-\epsilon}<p\leq x}\log p \geq \sum_{x^{1-\epsilon}<p\leq x}(1-\epsilon)\log x = (1-\epsilon)\big(\pi(x)-\pi(x^{1-\epsilon})\big)\log x$$

より，

$$\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon}\frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\pi(x^{1-\epsilon})\log x}{x} \leq \frac{1}{1-\epsilon}\frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\epsilon}}.$$

これから，

$$\begin{aligned}1 &= \lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} \leq \liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x}\\ &\leq \limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} \leq \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1-\epsilon}\frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log x}{x^{\epsilon}}\right) = \frac{1}{1-\epsilon}\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} + 0 = \frac{1}{1-\epsilon}\end{aligned}$$

$\epsilon > 0$ は任意であるから，

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = \limsup_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\log x}{x} = 1,$$

したがって，$\lim_{x\to\infty}\dfrac{\pi(x)\log x}{x} = 1$ である． □

<u>定理 10.7 の証明</u>

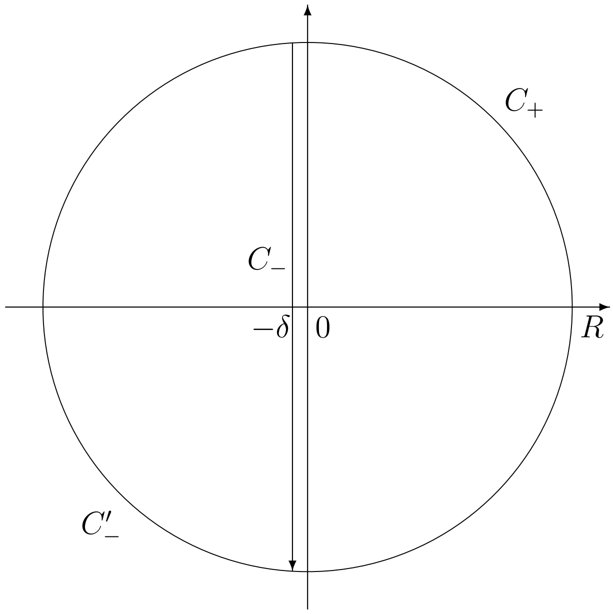
$T > 0$ に対して，

$$g_T(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt}\,dt$$

とおく．明らかに，$g_T(z)$ はすべての z において正則である．我々の目標は，

$$\lim_{T\to\infty} g_T(0) = \int_0^{\infty} f(t)\,dt = g(0)$$

を示すことである．R を大きくとり，$\delta > 0$ を R に応じて十分小さくとって，領域 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R,\ \Re(z) \geq -\delta\}$ の境界を C とするとき，$g(z)$ は C の内部および C 上で正則であるとする．



このとき，コーシーの積分公式から，

$$g(0) - g_T(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \big(g(z) - g_T(z)\big) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z}$$

を得る．半円 $C_+ = C \cap \{\Re(z) > 0\}$ 上では，

$$\left| \big(g(z) - g_T(z)\big) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| \leq \frac{2B}{R^2}, \quad B = \max_{t \geq 0} |f(t)|$$

が成り立つ．実際，$z \in C_+$ に対して，

$$\begin{aligned}
|g(z) - g_T(z)| &= \left| \int_T^\infty f(t) e^{-zt}\, dt \right| \leq B \int_T^\infty \left| e^{-zt} \right| dt \\
&= B \int_T^\infty e^{-\Re(z)t}\, dt = B \left[-\frac{1}{\Re(z)} e^{-\Re(z)t} \right]_T^\infty \\
&= \frac{B e^{-\Re(z)T}}{\Re(z)} \qquad (\Re(z) > 0).
\end{aligned}$$

また，$z = Re^{i\theta}$ とかけるから，

$$\begin{aligned}
\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| &= e^{\Re(z)T} \left| \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{1}{z} \right| = e^{\Re(z)T} \left| \left(1 + e^{2i\theta}\right) \frac{e^{-i\theta}}{R} \right| \\
&= e^{\Re(z)T} \left| e^{i\theta} + e^{-i\theta} \right| \frac{1}{R} = e^{\Re(z)T} \frac{|z + \bar{z}|}{R^2} = e^{\Re(z)T} \frac{2|\Re(z)|}{R^2}
\end{aligned}$$

であるから，非積分関数の絶対値は $\dfrac{2B}{R^2}$ 以下である．したがって，

$$\frac{1}{2\pi} \left| \int_{C_+} \big(g(z) - g_T(z)\big) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{2B}{R^2} \pi R = \frac{B}{R}.$$

$C_- = C \cap \{\Re(z) < 0\}$ 上では，$g(z)$ と $g_T(z)$ を別々に扱う．$g_T(z)$ は整関数であるから，C_- 上の積分は，半円 $C'_- = \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| = R,\ \Re(z) < 0\}$ 上の積分で置き換えられる．$z \in C'_-$ に対して，

$$\begin{aligned}
|g_T(z)| &= \left| \int_0^T f(t) e^{-zt}\, dt \right| \le B \int_0^T \left| e^{-zt} \right| \, dt \\
&\le B \int_{-\infty}^T e^{-\Re(z) t}\, dt = B \left[-\frac{1}{\Re(z)} e^{-\Re(z) t} \right]_{-\infty}^T \\
&= \frac{B e^{-\Re(z) T}}{|\Re(z)|} \qquad (\Re(z) < 0).
\end{aligned}$$

また，前と同様に，

$$\left| e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{1}{z} \right| = e^{\Re(z) T} \frac{2|\Re(z)|}{R^2}$$

であるから，非積分関数の絶対値は $\dfrac{2B}{R^2}$ 以下である．したがって，

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C'_-} g_T(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| \le \frac{B}{R}.$$

最後に，C_- 上の $g(z)$ に関する積分

$$\int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z}$$

は $T \to \infty$ のとき，0 に収束することを示そう．関数 $g(z) \left(1 + \dfrac{z^2}{R^2} \right) \dfrac{1}{z}$ は T によらない．したがって，コンパクト集合 $C \cap \{\Re(z) \le 0\}$ ($\supset C_-$) 上の $\left| g(z) \left(1 + \dfrac{z^2}{R^2} \right) \dfrac{1}{z} \right|$ の最大値を M とすれば，

$$\begin{aligned}
\left| \int_{C_-} g(z) e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2} \right) \frac{dz}{z} \right| &\le M \int_{C_-} \left| e^{zT} \right| |dz| = M \int_{C_-} e^{\Re(z) T} \, |dz| \\
&\le 2MRe^{-\delta T} + 2M \int_0^{\arcsin(\delta/R)} e^{-RT \sin\theta} R \, d\theta \\
&\le 2MRe^{-\delta T} + 2M \int_0^{\arcsin(\delta/R)} e^{-2RT\theta/\pi} R \, d\theta \\
&= 2MRe^{-\delta T} + 2MR \left[-\frac{\pi}{2RT} e^{-2RT\theta/\pi} \right]_0^{\arcsin(\delta/R)} \\
&= 2MRe^{-\delta T} + \frac{\pi M}{T} \left(1 - e^{-2RT \arcsin(\delta/R)/\pi} \right) \\
&\le 2MRe^{-\delta T} + \frac{\pi M}{T} \to 0 \quad (T \to \infty).
\end{aligned}$$

以上によって,

$$
\begin{aligned}
|g(0)-g_T(0)| &= \left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \bigl(g(z)-g_T(z)\bigr)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_+} \bigl(g(z)-g_T(z)\bigr)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} \bigl(g(z)-g_T(z)\bigr)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \frac{B}{R} + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g_T(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\quad + \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C_-} g(z)e^{zT}\left(1+\frac{z^2}{R^2}\right)\frac{dz}{z}\right| \\
&\le \frac{B}{R}+\frac{B}{R}+\frac{MR}{\pi}e^{-\delta T}+\frac{M}{2T}.
\end{aligned}
$$

よって,

$$\limsup_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)| \le \frac{2B}{R}.$$

ここで,R は任意の正の実数であったから,$R\to\infty$ として,

$$\lim_{T\to\infty}|g(0)-g_T(0)| = 0$$

を得る.