曲面積について

上越教育大学　中川仁

平成 26 年 8 月 2 日

曲線の長さの場合と異なり，3 次元空間内の曲面の面積を内接する多面体の面積の上限としては定義できないことを有名な例で説明し，どのように曲面の面積を定義したらよいかについて述べる．本講演の内容は主に小林 [2] を参考にしている．

1　シュワルツの提灯

半径 1，高さ 1 の円柱 $x^2 + y^2 = 1,\ 0 \leq z \leq 1$ を考える．その (側) 面積は明らかに 2π である．この円柱を高さの方向に m 等分したときの切り口の円を C_k $(k = 0, 1, \ldots, m)$ とする．これらの円周を次のように n 等分する．まず，一番下の円 C_0 を n 個の円弧に等分する．これらの円弧の中点の真上に等分点がくるように C_1 を n 等分する．$C_2, C_4, C_6, \ldots$ の等分点は C_0 の等分点の真上に，$C_3, C_5, C_7 \ldots$ の等分点は C_1 の等分点の真上にとる．各円周 C_k の等分点を線分で結び，C_k に内接する正 n 角形を描く．C_k の等分点 p とその隣りにある等分点 q を円弧 pq の中点の真上にある C_{k+1} 上の等分点 r と結び三角形 $\triangle pqr$ を描く．これをすべての隣り合う等分点について行うことにより，円柱に内接する $2mn$ 個の同じ大きさの 2 等辺三角形からなる多面体 $F_{m,n}$ を得る．

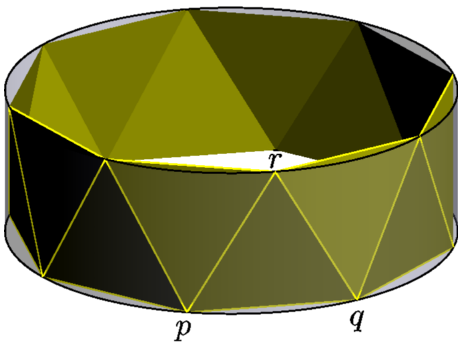

図 1: シュワルツの提灯

1つの三角形 $\triangle pqr$ の面積を求める．底辺 pq の長さは $2\sin\dfrac{\pi}{n}$ であり，高さは

$$\sqrt{\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)^2+\frac{1}{m^2}}=\sqrt{4\sin^4\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{m^2}}.$$

よって，面積は

$$\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4\sin^4\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{m^2}}$$

である．したがって，多面体 $F_{m,n}$ の面積 $A_{m,n}$ は次の式で与えられる．

$$\begin{aligned}A_{m,n}&=2mn\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4\sin^4\frac{\pi}{2n}+\frac{1}{m^2}}\\&=2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}+1}.\end{aligned}\tag{$*$}$$

n を固定して $m\to\infty$ とすれば，$A_{m,n}\to\infty$ となるから，$\{A_{m,n}\}$ に上限はない．n を固定して m を大きくしていくと，円柱の側面は垂直なのに内接する三角形はだんだん水平に近づいていくためこのようなことが起こる．

例えば，正の実数 a を固定して，$m=an^2$ とおいて，$n\to\infty$ とすれば

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}A_{an^2,n}&=\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4a^2n^4\sin^4\frac{\pi}{2n}+1}\\&=\lim_{n\to\infty}2\pi\left(\frac{n}{\pi}\right)\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{\frac{a^2\pi^4}{4}\left(\frac{2n}{\pi}\right)^4\sin^4\frac{\pi}{2n}+1}\\&=2\pi\sqrt{\frac{a^2\pi^4}{4}+1}>2\pi.\end{aligned}$$

同様に，$m=an$ とおいて，$n\to\infty$ とすれば

$$\lim_{n\to\infty}A_{an,n}=\lim_{n\to\infty}2n\sin\frac{\pi}{n}\sqrt{4a^2n^2\sin^4\frac{\pi}{2n}+1}=2\pi.$$

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を用いた．このように任意の $A\geq 2\pi$ に対して，適当に $m,n\to\infty$ とすれば $\lim_{m,n\to\infty}A_{m,n}=A$ にできる．一方，$(*)$ より

$$A_{m,n}\geq 2n\sin\frac{\pi}{n}$$

だから，どのように $m,n\to\infty$ としても $A_{m,n}$ が円柱の面積 2π より小さな数に収束することはない．**曲面の面積を近似するには外接するような多面体を考えるべきなのである．**

2　曲面とその接平面

U を $\mathbb{R}^2$ の領域とし，$\varphi(u,v)$, $\psi(u,v)$, $\chi(u,v)$ は領域 U において定義された微分可能な関数であって，その偏導関数たち φ_u, φ_v, ψ_u, ψ_v, χ_u, χ_v はすべて連続であるとする．$(u,v) \in U$ に対して

$$P(u,v) = (\varphi(u,v), \psi(u,v), \chi(u,v))$$

とおき，$S \subset \mathbb{R}^3$ を

$$S = \{P(u,v) : (u,v) \in U\}$$

で定義する． $P(u,v)$ の各成分を u, v について偏微分して得られるベクトルを

$$P_u(u,v) = (\varphi_u(u,v), \psi_u(u,v), \chi_u(u,v)),$$
$$P_v(u,v) = (\varphi_v(u,v), \psi_v(u,v), \chi_v(u,v))$$

とかくとき，すべての $(u,v) \in U$ において $P_u(u,v)$ と $P_v(u,v)$ が 1 次独立であるとき，S は**滑らかな曲面**であるといい，$P(u,v)$ をそのパラメータ表示という．

U の点 (u_0, v_0) を固定し，対応する S の点を $P_0 = P(u_0,v_0) = (x_0,y_0,z_0)$ とする．$x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$, $z_0 = \chi(u_0,v_0)$ である．v を v_0 に固定し，u を動かせば曲面 S 上の曲線 $P(u,v_0)$ が得られるが，この曲線の点 P_0 における**接ベクトル**は

$$P_u(u_0,v_0) = (\varphi_u(u_0,v_0), \psi_u(u_0,v_0), \chi_u(u_0,v_0))$$

である．同様に，u を u_0 に固定し，v を動かせば曲面 S 上の曲線 $P(u_0,v)$ が得られ，この曲線の点 P_0 における接ベクトルは

$$P_v(u_0,v_0) = (\varphi_v(u_0,v_0), \psi_v(u_0,v_0), \chi_v(u_0,v_0))$$

である．仮定によりベクトル $P_u(u_0,v_0)$ と $P_v(u_0,v_0)$ は 1 次独立だから，この 2 つのベクトルによって張られる平面 T_0 が決まる．これを曲面 S の点 P_0 における**接平面**とよぶ．P_0 における接平面 T_0 の法ベクトルを $\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}(u_0,v_0)$ とする．

$$\boldsymbol{n}_0 = \boldsymbol{n}(u_0,v_0) = P_u(u_0,v_0) \times P_v(u_0,v_0).$$

$\boldsymbol{n}_0$ を点 P_0 における曲面 S の**法ベクトル**とよぶ．$\boldsymbol{n}_0 \neq \boldsymbol{0}$ である．$\boldsymbol{e}_1 = P_u(u_0,v_0) = (a_1,b_1,c_1)$, $\boldsymbol{e}_2 = P_v(u_0,v_0) = (a_2,b_2,c_2)$ とおけば，接平面 T_0 は 2 つのパラメータ u, v を用いて

$$P = P_0 + u\boldsymbol{e}_1 + v\boldsymbol{e}_2$$

と表示される．接平面 T_0 の方程式は行列式を用いて次のように表される．

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$$

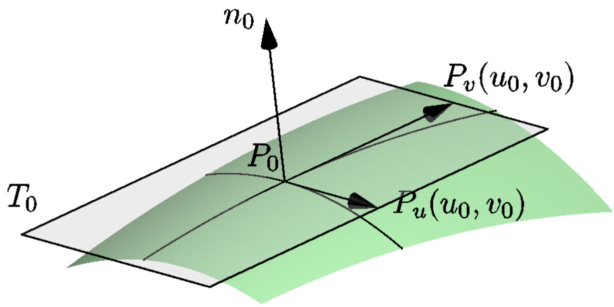

図 2: 接ベクトルと法ベクトル

これは 3 つのベクトル $P - P_0$, $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ が 1 次従属であることを表している．$\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ は 1 次独立だから，$P - P_0$ が $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ の 1 次結合としてかけることを意味する．また，法ベクトルは

$$\boldsymbol{n}_0 = (b_1c_2 - b_2c_1, c_1a_2 - c_2a_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

で与えられる．

$P_u(u, v)$, $P_v(u, v)$ たちの内積として，$E(u, v)$, $F(u, v)$, $G(u, v)$ を

$$\begin{aligned} E(u, v) &= P_u(u, v) \cdot P_u(u, v), \\ F(u, v) &= P_u(u, v) \cdot P_v(u, v), \\ G(u, v) &= P_v(u, v) \cdot P_v(u, v) \end{aligned}$$

によって定義する．点 $P_0 = P(u_0, v_0)$ における接ベクトル

$$\xi P_u(u_0, v_0) + \eta P_v(u_0, v_0) \qquad (\xi, \eta \in \mathbb{R})$$

の長さの 2 乗は

$$\|\xi P_u(u_0, v_0) + \eta P_v(u_0, v_0)\|^2 = E(u_0, v_0)\xi^2 + 2F(u_0, v_0)\xi\eta + G(u_0, v_0)\eta^2$$

で与えられる．これは $(\xi, \eta) \neq (0, 0)$ ならば正である．よって，

$$E(u_0, v_0) > 0, \quad G(u_0, v_0) > 0, \quad E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2 > 0$$

である．

3 接平面への正射影

点 P を接平面 T_0 に正射影した点を P^* とする．すなわち，P から平面 T_0 におろした垂線の足を P^* とする．$P - P^* = t\boldsymbol{n}_0$ となる実数 t があるから

$$P^* - P_0 = (P - P_0) - t\boldsymbol{n}_0.$$

$P^* - P_0$ は $\boldsymbol{n}_0$ と垂直だから内積をとれば

$$0 = (P^* - P_0)\cdot \boldsymbol{n}_0 = \{(P - P_0) - t\boldsymbol{n}_0\}\cdot \boldsymbol{n}_0 = (P - P_0)\cdot \boldsymbol{n}_0 - t\boldsymbol{n}_0\cdot \boldsymbol{n}_0.$$

よって，

$$t = \frac{(P - P_0)\cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{n}_0\|^2}, \qquad P^* - P_0 = P - P_0 - \frac{(P - P_0)\cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{n}_0\|^2}\boldsymbol{n}_0.$$

一方，T_0 上のベクトル $P^* - P_0$ は $P_u(u_0, v_0)$ と $P_v(u_0, v_0)$ の 1 次結合の形にかけるから

$$\xi P_u(u_0, v_0) + \eta P_v(u_0, v_0) = P - P_0 - \frac{(P - P_0)\cdot \boldsymbol{n}_0}{\|\boldsymbol{n}_0\|^2}\boldsymbol{n}_0 \tag{1}$$

となる (ξ, η) が $P = (x, y, z)$ によって決まる．対応

$$P \longmapsto \xi P_u(u_0, v_0) + \eta P_v(u_0, v_0)$$

が $\mathbb{R}^3$ から T_0 への正射影である．(1) の両辺と $P_u(u_0, v_0)$, $P_v(u_0, v_0)$ との内積をとれば

$$\begin{aligned} E(u_0, v_0)\xi + F(u_0, v_0)\eta &= (P - P_0)\cdot P_u(u_0, v_0), \\ F(u_0, v_0)\xi + G(u_0, v_0)\eta &= (P - P_0)\cdot P_v(u_0, v_0). \end{aligned} \tag{2}$$

特に P が曲面 S 上の点 $P(u, v)$ である場合は，正射影 (1) による $P(u, v)$ の像を $P^*(u, v)$ とかいて，$P^*(u, v) - P_0$ を $P_u(u_0, v_0)$ と $P_v(u_0, v_0)$ の 1 次結合として表せば，ξ, η は u, v の関数となるから，それらを $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$ とかくと

$$P^*(u, v) - P_0 = \xi(u, v)P_u(u_0, v_0) + \eta(u, v)P_v(u_0, v_0)$$

と表される．この式と $P_u(u_0, v_0)$, $P_v(u_0, v_0)$ との内積をとれば，(2) において，ξ, η, P を $\xi(u, v)$, $\eta(u, v)$, $P(u, v)$ にした式になる．

4　曲面積の定義

S を接平面 T_0 に正射影してできる T_0 内の領域を S^* とする．$S^* \subset T_0$ の面積を計算しよう．まず，法ベクトル $\boldsymbol{n}_0$ について

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{n}_0\|^2 &= (b_1c_2 - b_2c_1)^2 + (c_1a_2 - c_2a_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)(a_2^2 + b_2^2 + c_2^2) - (a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2)^2 \\ &= (\boldsymbol{e}_1\cdot \boldsymbol{e}_1)(\boldsymbol{e}_2\cdot \boldsymbol{e}_2) - (\boldsymbol{e}_1\cdot \boldsymbol{e}_2)^2 = \|^2 E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2. \end{aligned}$$

したがって，ベクトル $P_u(u_0, v_0)$ と $P_v(u_0, v_0)$ で張られる平行四辺形の面積は

$$\|P_u(u_0, v_0) \times P_v(u_0, v_0)\| = \|\boldsymbol{n}_0\| = \sqrt{E(u_0, v_0)G(u_0, v_0) - F(u_0, v_0)^2}$$

だから，S^* の面積は

$$A(S^*) = \int_{S^*} \sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2}\, d\xi d\eta$$

で与えられる．さらに，変数変換 $(u,v) \longrightarrow (\xi(u,v), \eta(u,v))$ をすれば $A(S^*)$ を U 上の積分として次のようにかける．

$$\begin{aligned} A(S^*) = \int_{U} & \sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2} \\ & \times |\xi_u(u,v)\eta_v(u,v) - \xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|\, dudv. \end{aligned}$$

$$A(S^*) = \int_{U} \sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0) - F(u_0,v_0)^2} |\xi_u(u,v)\eta_v(u,v) - \xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|\, dudv.$$

右辺の $|\xi_u(u,v)\eta_v(u,v) - \xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|$ をヤコビ行列の連鎖律を使って計算する．すなわち

$$\begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(2) の両辺を x で微分すると，$P = (x,y,z)$ だから $P_x = (1,0,0)$,

$$\begin{aligned} E(u_0,v_0)\xi_x + F(u_0,v_0)\eta_x &= (1,0,0)\cdot P_u(u_0,v_0) = \varphi_u(u_0,v_0), \\ F(u_0,v_0)\xi_x + G(u_0,v_0)\eta_x &= (1,0,0)\cdot P_v(u_0,v_0) = \varphi_v(u_0,v_0). \end{aligned}$$

y, z で微分して同様な式をあと 4 本得る．これらを行列で表せば

$$\begin{pmatrix} E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0) \\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_x & \xi_y & \xi_z \\ \eta_x & \eta_y & \eta_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0,v_0) & \psi_u(u_0,v_0) & \chi_u(u_0,v_0) \\ \varphi_v(u_0,v_0) & \psi_v(u_0,v_0) & \chi_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}.$$

この両辺に右から行列 $\begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{pmatrix}$ をかけて (3) を使えば

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0) \\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \varphi_u(u_0,v_0) & \psi_u(u_0,v_0) & \chi_u(u_0,v_0) \\ \varphi_v(u_0,v_0) & \psi_v(u_0,v_0) & \chi_v(u_0,v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_u & \varphi_v \\ \psi_u & \psi_v \\ \chi_u & \chi_v \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる．右辺の積を計算すれば 2 次行列になる．その成分はベクトルの内積を用いて表せる．それを変数 (u,v) を省略しないでかけば

$$\begin{pmatrix} E(u_0,v_0) & F(u_0,v_0) \\ F(u_0,v_0) & G(u_0,v_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_u & \xi_v \\ \eta_u & \eta_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_u(u_0,v_0)\cdot P_u(u,v) & P_u(u_0,v_0)\cdot P_v(u,v) \\ P_v(u_0,v_0)\cdot P_u(u,v) & P_v(u_0,v_0)\cdot P_v(u,v) \end{pmatrix}$$

となる．両辺の行列式をとって整理すれば

$$
\begin{aligned}
&\xi_u(u,v)\eta_v(u,v)-\xi_v(u,v)\eta_u(u,v)\\
&=\frac{1}{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2}\\
&\quad\times\{(P_u(u_0,v_0)\cdot P_u(u,v))(P_v(u_0,v_0)\cdot P_v(u,v))\\
&\quad-(P_u(u_0,v_0)\cdot P_v(u,v))(P_v(u_0,v_0)\cdot P_u(u,v))\}\,.
\end{aligned}
\tag{4}
$$

これを $A(S^*)$ の公式に代入すれば S^* の面積が得られる．

E,F,G の定義から，(u,v) が (u_0,v_0) に近づくとき，(4) の右辺の分子は分母に近づく．すなわち，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分小さい $\delta>0$ をとれば，(u_0,v_0) を含む横 $\varDelta u<\delta$，縦 $\varDelta v<\delta$ の区間 $U_1\subset U$ において次の不等式が成り立つ．

$$
\Big||\xi_u(u,v)\eta_v(u,v)-\xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|-1\Big|<\varepsilon. \tag{5}
$$

したがって，曲面 S のうち U_1 に対応する部分を S_1 とし，それを接平面 T_0 に正射影した像を S_1^* とすれば，S_1^* の面積 $A(S_1^*)$ は $A(S^*)$ の公式を S_1^* に適用して，上の評価 (5) を使えば

$$
\begin{aligned}
&\left|A(S_1^*)-\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2}\,\varDelta u\varDelta v\right|\\
&<\varepsilon\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2}\,\varDelta u\varDelta v
\end{aligned}
\tag{6}
$$

が成り立つ．実際，$C=\sqrt{E(u_0,v_0)G(u_0,v_0)-F(u_0,v_0)^2}$ とおけば

$$
\begin{aligned}
|A(S_1^*)-C\,\varDelta u\varDelta v|&=\left|A(S_1^*)-\int_{U_1}C\,dudv\right|\\
&=\left|C\int_{U_1}\big(|\xi_u(u,v)\eta_v(u,v)-\xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|-1\big)\,dudv\right|\\
&\le C\int_{U_1}\Big||\xi_u(u,v)\eta_v(u,v)-\xi_v(u,v)\eta_u(u,v)|-1\Big|\,dudv\\
&<\varepsilon\,C\varDelta u\varDelta v.
\end{aligned}
$$

以上で，領域 U 上で定義された曲面 S の面積を定義する準備ができた．まず，U が長方形 $\{(u,v)\in\mathbb{R}^2: a\le u\le b,\ c\le v\le d\}$ の場合を考える．長方形 U をさいの目に分割する．どの程度小さくするかを指定しよう．コンパクト集合 U 上で連続関数は最大値をとるから，適当な定数 K が存在して，U 上で

$$
\frac{1}{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}\le K \tag{7}
$$

が成り立つ．また，コンパクト集合 U 上で連続関数は一様連続だから，任意の $\varepsilon>0$ に対して十分小さい $\delta>0$ をとれば，$|u-u'|<\delta,\ |v-v'|<\delta$ となる U 上の 2 点

(u,v), (u',v') に対して

$$
\begin{aligned}
&\Big|(P_u(u',v')\cdot P_u(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_v(u,v)) \\
&\quad - (P_u(u',v')\cdot P_u(u',v'))(P_v(u',v')\cdot P_v(u',v'))\Big| < \frac{\varepsilon}{2K}, \\
&\Big|(P_u(u',v')\cdot P_v(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_u(u,v)) \\
&\quad - (P_u(u',v')\cdot P_v(u',v'))(P_v(u',v')\cdot P_u(u',v'))\Big| < \frac{\varepsilon}{2K}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．したがって，(7) と上の 2 つの不等式から

$$
\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{E(u',v')G(u',v')-F(u',v')^2} \\
&\qquad \times \{(P_u(u',v')\cdot P_u(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_v(u,v)) \\
&\qquad\quad - (P_u(u',v')\cdot P_v(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_u(u,v))\} - 1\Big| \\
&= \frac{1}{E(u',v')G(u',v')-F(u',v')^2} \\
&\qquad \times \Big\{\Big|(P_u(u',v')\cdot P_u(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_v(u,v)) - E(u',v')G(u',v') \\
&\qquad\quad - (P_u(u',v')\cdot P_v(u,v))(P_v(u',v')\cdot P_u(u,v)) + F(u',v')^2\Big|\Big\} \\
&< K\left(\frac{\varepsilon}{2K}+\frac{\varepsilon}{2K}\right) = \varepsilon
\end{aligned} \tag{8}
$$

が成り立つ．U を縦横の長さが上で考えた δ よりも小さい長方形 U_i $(i=1,2,\dots,n)$ に分割する．そのとき，曲面 S は U_i に対応する部分 S_i $(i=1,2,\dots,n)$ に分割される．$(u_i,v_i)\in U_i$ を任意にとり，点 $P(u_i,v_i)\in S_i$ における接平面 T_i に S_i を正射影した像を S_i^* とする．U_i の横の長さを $\Delta_i u$，縦の長さを $\Delta_i v$ とかく．連続関数 $\sqrt{E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2}$ の U における最大値を M とすれば，各 U_i に (6) を適用して

$$
\left|A(S_i^*) - \sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F(u_i,v_i)^2}\,\Delta_i u\Delta_i v\right| < \varepsilon M \Delta_i u\,\Delta_i v
$$

を得る．長方形 U の面積を A と表せば，$\sum_{i=1}^n \Delta_i u\Delta_i v = A$ である．よって，上の不等式から

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{i=1}^n A(S_i^*) - \sum_{i=1}^n \sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F(u_i,v_i)^2}\,\Delta_i u\Delta_i v\right| \\
&\le \sum_{i=1}^n \left|A(S_i^*) - \sqrt{E(u_i,v_i)G(u_i,v_i)-F(u_i,v_i)^2}\,\Delta_i u\Delta_i v\right| \\
&< \sum_{i=1}^n \varepsilon M \Delta_i u\,\Delta_i v = \varepsilon M A
\end{aligned} \tag{9}
$$

となる．ε を小さくするにしたがって U の分割をより細かくすれば，2 重積分の定義によって

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{E(u_i, v_i)G(u_i, v_i) - F(u_i, v_i)^2}\, \Delta_i u \Delta_i v$$
$$\longrightarrow \int_U \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2}\, dudv$$

となる．和 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} A(S_i^*)$ は S の面積に近づくと考えるのが妥当だから，S の**面積** $A(S)$ を

$$A(S) = \int_U \sqrt{E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2}\, dudv \tag{10}$$

によって定義する．U が長方形でないもっと一般の面積をもつような領域の場合も (10) によって曲面 S の面積 $A(S)$ を定義する．

例 4.1. 半径 1，高さ 2 の円柱 $x^2 + y^2 = 1,\ -1 \leq z \leq 1$ は

$$P(u, v) = (\cos u, \sin u, \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

とパラメータ表示される．$P_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0)$, $P_v(u, v) = (0, 0, \cos v)$ より

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = \cos^2 v.$$

よって，$E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = \cos^2 v$ である．したがって，

$$U = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi,\ -\pi/2 \leq v \leq \pi/2\}$$

とすれば，円柱の面積は

$$\int_U \cos v\, dudv = \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv = 2\pi \Big[\sin v\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

例 4.2. 半径 1 の球面は方程式 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ によって定義される．これは

$$P(u, v) = (\cos u \cos v, \sin u \cos v, \sin v), \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ -\frac{\pi}{2} \leq v \leq \frac{\pi}{2}$$

とパラメータ表示される．

$P_u(u, v) = (-\sin u \cos v, \cos u \cos v, 0), \quad P_v(u, v) = (-\cos u \sin v, -\sin u \sin v, \cos v),$
$E(u, v) = \cos^2 v, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1,$
$E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 = \cos^2 v.$

したがって，U を例 4.1 と同じものとすると球面の面積は

$$\int_U \cos v\, dudv = \int_0^{2\pi} du \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos v\, dv = 2\pi \Big[\sin v\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\pi.$$

定理 4.3 (アルキメデス). $-1 \leq h_1 < h_2 \leq 1$ とする．半径 1 の球面 $x^2+y^2+z^2=1$ の $h_1 \leq z \leq h_2$ の部分の面積と半径 1，高さ 2 の円柱 $x^2+y^2=1$, $-1 \leq z \leq 1$ の $h_1 \leq z \leq h_2$ の部分の面積は等しく，それは $2\pi(h_2-h_1)$ である．

[証明]　$\gamma_i = \arcsin h_i$ とおく．例 4.1 における円柱のパラメータ表示と例 4.2 における球面のパラメータ表示において，$E(u,v)$，$F(u,v)$，$G(u,v)$ は異なるが $E(u,v)G(u,v)-F(u,v)^2$ はともに $\cos^2 v$ である．したがって，

$$U_1 = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq u \leq 2\pi,\ \gamma_1 \leq v \leq \gamma_2\}$$

に対応する部分 ($h_1 \leq z \leq h_2$ の部分) の面積はともに

$$\int_{U_1} \cos v \, dudv = \int_0^{2\pi} du \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \cos v \, dv = 2\pi \Big[\sin v \Big]_{\gamma_1}^{\gamma_2} = 2\pi(h_2-h_1).$$

□

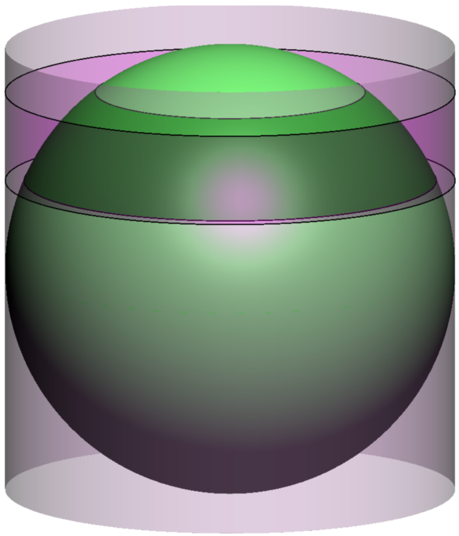

図 3: 球面の面積と円柱の側面積

参考文献

[1] 小平邦彦，軽装版　解析入門 II，岩波書店，2003.

[2] 小林昭七，続　微分積分読本，裳華房，2010.

[3] 高木貞治，定本　解析概論，岩波書店，2010.