3次体のイデアル類群と3元2次形式のペア

上越教育大学　中川 仁

0　Introduction

k を2次体とし，D_k をその判別式とする．そのとき，よく知られているように，k の狭義イデアル類群は判別式 D_k の整数係数2元2次形式の狭義同値類の集合と1対1対応する．$f(u,v)=au^2+buv+cv^2$, $a>0$ を判別式 D_k の整数係数2元2次形式とする．2次方程式 $f(u,1)=au^2+bu+c=0$ の根を

$$\theta=\frac{-b+\sqrt{D_k}}{2a},\quad \theta'=\frac{-b-\sqrt{D_k}}{2a}$$

とし，$\omega=a\theta$ とおけば，$\{1,\omega\}$ は k の整数環の基底であり，$\mathfrak{a}=[a,\omega]$ はノルム a の整イデアルである．$f(u,v)$ の狭義同値類と $\mathfrak{a}$ の狭義同値類を対応させることによって，上の1対1対応が得られる．

次に，k を虚2次体，$k\neq\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ とする．2元3次形式

$$x(u,v)=x_1u^3+3x_2u^2v+3x_3uv^2+x_4v^3,\quad x_i\in\mathbb{Z} \tag{1}$$

の判別式が $27|D_k|$ であるとする．

$$\begin{aligned}H_x(u,v)&=-\frac{1}{36}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2x}{\partial u^2} & \dfrac{\partial^2x}{\partial u\partial v}\\ \dfrac{\partial^2x}{\partial u\partial v} & \dfrac{\partial^2x}{\partial v^2}\end{vmatrix}\quad\text{(Hessian of }x\text{)},\\ &=(x_2^2-x_1x_3)u^2+(x_2x_3-x_1x_4)uv+(x_3^2-x_2x_4)v^2,\end{aligned}$$

とおけば，$H_x(u,v)$ は判別式 D_k の正定値2元2次形式である．C_k を k のイデアル類群とし，$C_k^{(3)}$ をその3-torsion部分群とする．

$$C_k^{(3)}=\{c\in C_k; c^3=1\}.$$

そのとき，$x(u,v)$ の $SL_2(\mathbb{Z})$-同値類に対して，$H_x(u,v)$ の同値類に対応する k のイデアル類を対応させることによって，(1)の形の判別式 $27|D_k|$ の2元3次形式の $SL_2(\mathbb{Z})$-同値類の集合から $C_k^{(3)}$ の上への全単射が得られる (cf. [2], Prop. 2.4)．本講演では，3次体のイデアル類群の2-torsion部分群に対して，このようなことの類似が成り立つことを報告したい．

1　3元2次形式のペアのなす概均質ベクトル空間

$\tilde{V}$ によって，3 次実対称行列全体のなすベクトル空間を表す．$\tilde{x} \in \tilde{V}$ に対して，$g_1 \in GL_3(\mathbb{R})$ の作用を，

$$g_1 \cdot \tilde{x} = g_1 \tilde{x}\, {}^t g_1 \tag{2}$$

によって定義する．2 元 3 次形式 $F(u,v)$ に対して，$g_2 \in GL_2(\mathbb{R})$ の作用を

$$(g_2 F)(u,v) = \frac{1}{\det g_2} F((u,v)g_2) \tag{3}$$

によって定義する．

$G = GL_3(\mathbb{R}) \times GL_2(\mathbb{R})$, $V = \tilde{V} \oplus \tilde{V}$ とおく．$x = (x_1, x_2) \in V$ に対して，$g = (g_1, g_2) \in G$, $g_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$，の作用を，

$$gx = (ag_1 \cdot x_1 + bg_1 \cdot x_2,\, cg_1 \cdot x_1 + dg_1 \cdot x_2) \tag{4}$$

によって定義する．また，$x = (x_1, x_2) \in V$ に対して，2 元 3 次形式 $F_x(u,v)$ を

$$F_x(u,v) = \det(ux_1 + vx_2) \tag{5}$$

によって定義する．そのとき，

$$F_{gx}(u,v) = (\det g_1)^2 (\det g_2)(g_2 F_x)(u,v) \tag{6}$$

が成り立つ．2 元 3 次形式 $F(u,v) = f_1 u^3 + f_2 u^2 v + f_3 u v^2 + f_4 v^3$ の判別式 $D(F)$ は

$$D(F) = 18 f_1 f_2 f_3 f_4 + f_2^2 f_3^2 - 4 f_1 f_3^3 - 4 f_2^3 f_4 - 27 f_1^2 f_4^2$$

によって与えられる．$F_x(u,v)$ の判別式を $P(x)$ と表せば，$P(x)$ は $x = (x_1, x_2)$ の成分 (12 変数) の整数係数の 12 次同次式であり，

$$P(gx) = (\det g_1)^8 (\det g_2)^6 P(x) \tag{7}$$

を満たす．$V_{\mathbb{C}} = V \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ とすれば，$V_{\mathbb{C}} - \{P(x) = 0\}$ は一つの $G_{\mathbb{C}} = GL_3(\mathbb{C}) \times GL_2(\mathbb{C})$-軌道であり，$(V, G)$ は概均質ベクトル空間である．$P(x)$ は (V, G) の基本相対不変式である．この概均質ベクトル空間 (V, G) は Wright-雪江 [3] において 4 次体をパラメトライズするものとして調べられている．

$\Gamma = SL_3(\mathbb{Z}) \times GL_2(\mathbb{Z})$ とおく．$\hat{L}$ によって，整数係数の 3 次対称行列のペア全体のなす V の格子を表す．$\hat{L}_{irr}$ によって，$F_x(u,v)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であるような x のなす $\hat{L}$ の部分集合を表す．明らかに，$\hat{L}$, $\hat{L}_{irr}$ は Γ-不変である．$\Gamma \backslash \hat{L}_{irr}$ と 3 次体のイデアル類群の関連を調べたい．次の 2 つの節はそのための準備である．

2　2元3次形式に付随する整環とそのイデアル

$F(u,v)=f_1u^3+f_2u^2v+f_3uv^2+f_4v^3$ を整数係数2元3次形式とする．$f_1>0$ かつ $F(u,v)$ は $\mathbb{Q}$ 上既約であるとする．$F(u,1)=0$ の一つの根 $\theta\in\overline{\mathbb{Q}}\subset\mathbb{C}$ をとり，3次体 $K=\mathbb{Q}(\theta)$ を考える．

$$\omega_1=f_1\theta,\quad \omega_2=f_1\theta^2+f_2\theta+f_3=-\frac{f_4}{\theta}$$

とおくと，

$$\begin{cases}\omega_1^2=-f_1f_3-f_2\omega_1+f_1\omega_2,\\ \omega_2^2=-f_2f_4-f_4\omega_1+f_3\omega_2,\\ \omega_1\omega_2=-f_1f_4.\end{cases}\tag{8}$$

よって，

$$\mathcal{O}=[1,\omega_1,\omega_2]=\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\omega_1+\mathbb{Z}\omega_2$$

とおけば，$\mathcal{O}$ は K の整環である．また，$\mathcal{O}$ の判別式は $F(u,v)$ の判別式 $D(F)$ に等しいことも容易にわかる．$(f_1,f_2,f_3,f_4)=1$ であるとき，$F(u,v)$ は**原始的**であるという．等式 (8) から，次の2つの補題が容易にでる．

補題 2.1. $\mathfrak{b}=[f_1,\omega_1+f_2,\omega_2]$ は $\mathcal{O}$-イデアルであり，$(\mathcal{O}:\mathfrak{b})=f_1$ である．

補題 2.2. $F(u,v)$ が原始的ならば，補題 *2.1* の $\mathfrak{b}$ は可逆 $\mathcal{O}$-イデアルであり，その逆イデアル $\mathfrak{b}^{-1}$ は $\mathfrak{b}^{-1}=[1,f_1^{-1}\omega_1,\omega_2]$ によって与えられる．

補題 2.3. $F(u,v)$ が原始的ならば，$\mathfrak{b}^{-2}=[1,\theta,\theta^2]$ が成り立つ．

[証明]　補題 2.2 より，

$$\mathfrak{b}^{-2}=[1,\,\theta,\,\theta^2,\,\omega_2,\,\theta\omega_2,\,\omega_2^2]=[1,\,\theta,\,\theta^2].$$

□

次に，$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2(\mathbb{Z})$ を $F(u,v)$ に作用させたとき，K の整環 $\mathcal{O}$ とそのイデアル $\mathfrak{b}$ がどうなるかを調べよう．$(\gamma F)(u,v)=f_1'u^3+f_2'u^2v+f_3'uv^2+f_4'v^3$ とかいて，$(\gamma F)(u,v)$ に付随する整環とその基底を，$\mathcal{O}'$, $1,\omega_1',\omega_2'$ とする．さらに，$\mathfrak{b}'=[f_1',\omega_1'+f_2',\omega_2']$ とおく．そのとき，次の補題が容易に示される．

補題 2.4. $\mathcal{O}'=\mathcal{O}$, $\mathfrak{b}'=(a-b\theta)\mathfrak{b}$.

3　3次体のイデアル類群の 2-torsion 部分群

K を3次体，$\mathcal{O}_K$ を K の整数環，E_K を K の単数群，I_K を K の分数イデアルのなす乗法群，C_K を K のイデアル類群とする．さらに，$E_{K,1}$ によって，ノルムが1

の単数のなす E_K の部分群を表し，$C_K^{(2)} = \{c \in C_K; c^2 = 1\}$ とする．$b \in K^\times$ に対して，$(b) = b\mathcal{O}_K$ とかく．$K^\times$ の部分群 B_1 を

$$B_1 = \{b \in K^\times; N_{K/\mathbb{Q}}\, b \in (\mathbb{Q}^\times)^2, (b) \in I_K^2\}$$

によって定義する．$E_{K,1}(K^\times)^2 \subset B_1$ である．$b \in B_1$ によって代表される $B_1/(K^\times)^2$ の元を $[b]$ で表す．$b \in B_1$ に対して，$(b) = \mathfrak{a}^2$ となる分数イデアル $\mathfrak{a}$ が一意的に定まる．$[\mathfrak{a}]$ によって，$\mathfrak{a}$ の属するイデアル類を表す．そのとき，$(b) = \mathfrak{a}^2$ より，$[\mathfrak{a}] \in C_K^{(2)}$ である．写像

$$\phi : B_1 \longrightarrow C_K^{(2)}$$

を $\phi(b) = [\mathfrak{a}]$, $(b) = \mathfrak{a}^2$，によって定義する．これは明らかに群の準同型である．さらに，ϕ は全射であり，$\ker\phi = E_{K,1}(K^\times)^2$ であることが容易にわかる．結局，ϕ は同型

$$B_1/E_{K,1}(K^\times)^2 \cong C_K^{(2)}$$

を引き起こす．$D_K > 0$ のとき，$r = 2$，$D_K < 0$ のとき，$r = 1$ とおけば，Dirichlet の単数定理によって，

$$E_{K,1}(K^\times)^2/(K^\times)^2 \cong E_{K,1}/E_{K,1}^2 \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$$

である．以上まとめると，

補題 3.1. $|B_1/(K^\times)^2| = 2^r|C_K^{(2)}|$.

4 結果

$x = (x_1, x_2) \in \hat{L}_{irr}$ とする．θ を既約 3 次方程式 $F_x(u,1) = 0$ の一つの根とし，3 次体 $K = \mathbb{Q}(\theta)$ とその整環 $\mathcal{O} = [1, \omega_1, \omega_2]$ を考える．ここで，

$$F_x(u,v) = f_1u^3 + f_2u^2v + f_3uv^2 + f_4v^3$$

とかくとき，$\omega_1 = f_1\theta$, $\omega_2 = -f_4/\theta$ である．必要ならば，x を $-x$ でおきかえて，$f_1 > 0$ としてよい．

以下，$\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ であるとする．そのとき，$F_x(u,v)$ は原始的である．Δ_{ij} によって，$\theta x_1 + x_2$ の (i,j) 余因子を表す．$\alpha_j = -\Delta_{1j}$, $j = 1,2,3$ とおき，$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ とおく．$\det(\theta x_1 + x_2) = F_x(\theta, 1) = 0$ より，$\alpha(\theta x_1 + x_2) = 0$ である．$\mathfrak{a}_x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$ とおく．

補題 4.1. $\mathfrak{a}_x$ は K の 0 でない分数イデアルである．特に，$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ は K の $\mathbb{Q}$ 上の基底である．

[証明]　$f_1=\det x_1$, $f_4=\det x_2$ より，$f_1x_1^{-1}$, $f_4x_2^{-1}$ は整数係数の 3 次行列である．したがって，$\alpha(\theta x_1+x_2)=0$ より，

$$\omega_1\alpha=-\alpha x_2(f_1x_1^{-1}),\quad \omega_2\alpha=\alpha x_1(f_4x_2^{-1})$$

を得る．これは $\mathfrak{a}_x$ が $\mathcal{O}_K$-イデアルであることを示している．$\mathfrak{a}_x$ は 0 でないことを示そう．もし，$\mathfrak{a}_x=0$ とすると，$\Delta_{1j}=0$, $j=1,2,3$ である．$1,\theta,\theta^2$ は $\mathbb{Q}$ 上 1 次独立であり，Δ_{1j} の θ^2 の係数は x_1 の $(1,j)$ 余因子であるから，$f_1=\det x_1=0$ となる．これは，$F_x(u,v)$ が $\mathbb{Q}$ 上既約であることに矛盾する．□

K の共役を $K^{(1)}=K,K^{(2)},K^{(3)}$ とし，$\alpha\longmapsto\alpha^{(i)}$, $i=1,2,3$ を K の共役写像とする．$\alpha^{(i)}=(\alpha_1^{(i)},\alpha_2^{(i)},\alpha_3^{(i)})$ とすれば，

$$\alpha^{(i)}(\theta^{(i)}x_1+x_2)=0,\quad i=1,2,3 \tag{9}$$

である．等式 (9) で転置行列をとれば，

$$(\theta^{(j)}x_1+x_2)\,{}^t\alpha^{(j)}=0,\quad j=1,2,3. \tag{10}$$

等式 (9) に右から ${}^t\alpha^{(j)}$ をかけ，等式 (10) に左から $\alpha^{(i)}$ をかけることによって，$1\leq i,j\leq 3$ に対して，

$$\begin{aligned}\alpha^{(i)}(\theta^{(i)}x_1+x_2){}^t\alpha^{(j)}&=0,\\ \alpha^{(i)}(\theta^{(j)}x_1+x_2){}^t\alpha^{(j)}&=0\end{aligned}$$

を得る．この差をとれば，

$$(\theta^{(i)}-\theta^{(j)})\alpha^{(i)}x_1{}^t\alpha^{(j)}=0$$

となるが，仮定から，$i\neq j$ のとき，$\theta^{(i)}\neq\theta^{(j)}$ であるから，

$$\alpha^{(i)}x_1{}^t\alpha^{(j)}=0,\quad i\neq j \tag{11}$$

を得る．したがって，

$$\alpha^{(i)}x_2{}^t\alpha^{(j)}=0,\quad i\neq j \tag{12}$$

もわかる．

$$T=(\alpha_j^{(i)})=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}&\alpha_2^{(1)}&\alpha_3^{(1)}\\ \alpha_1^{(2)}&\alpha_2^{(2)}&\alpha_3^{(2)}\\ \alpha_1^{(3)}&\alpha_2^{(3)}&\alpha_3^{(3)}\end{pmatrix}$$

とおけば，補題 4.1 より，$\mathfrak{a}_x$ は 0 でない分数イデアルであるから，

$$\det T^2=D(\mathfrak{a}_x)=N(\mathfrak{a}_x)^2D_K\neq 0$$

である．

$$\beta = x_1[\alpha] = \alpha x_1{}^t\alpha \in K$$

とおけば，等式 (11), (12) は行列 T を用いて次のように表せる:

$$Tx_1{}^tT = \begin{pmatrix} \beta^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \beta^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \beta^{(3)} \end{pmatrix},$$

$$Tx_2{}^tT = -\begin{pmatrix} \theta^{(1)}\beta^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \theta^{(2)}\beta^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \theta^{(3)}\beta^{(3)} \end{pmatrix}.$$

これから，

$$N_{K/\mathbb{Q}}\,\beta = \det(Tx_1{}^tT) = f_1 \det T^2 = f_1 N(\mathfrak{a}_x)^2 D_K \neq 0, \tag{13}$$

$$T(\theta^{(1)}x_1 + x_2)^tT = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\theta^{(1)} - \theta^{(2)})\beta^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & (\theta^{(1)} - \theta^{(3)})\beta^{(3)} \end{pmatrix} \tag{14}$$

を得る．(13) と (14) から直ちに，次を得る:

補題 4.2. 3 次対称行列 $\theta x_1 + x_2$ の階数は 2 である．

注意 4.3. 補題 4.2 より，$v(\theta x_1 + x_2) = 0$ を満たす $v = (v_1, v_2, v_3) \in K^3 - \{0\}$ は $K^\times$ の元によるスカラー倍を除いて一意的に定まる．

補題 4.4. 3 次対称行列 $\theta x_1 + x_2$ の (i,j) 余因子を Δ_{ij} とする．そのとき，任意の $1 \leq i \leq j \leq 3$, $1 \leq i' \leq j' \leq 3$ に対して，$\Delta_{ij}\Delta_{i'j'} = \Delta_{ii'}\Delta_{jj'}$ が成り立つ．

[証明]　3 次対称行列 (Δ_{ij}) の 2 次小行列式は，$\det(\theta x_1 + x_2)(\theta x_1 + x_2)$ の成分である．$\det(\theta x_1 + x_2) = 0$ であるから，それはすべて 0 である．　□

計算によって，次の補題を得る．

補題 4.5. $\delta = 3f_1\theta^2 + 2f_2\theta + f_3$, $x_k = (x_{k,ij})$, $k = 1, 2$ とするとき，

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{1,ij}\Delta_{ij} = \delta, \quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_{2,ij}\Delta_{ij} = -\theta\delta$$

が成り立つ．

$F_x(u,v)$ は原始的であるから，$\mathfrak{b}=[f_1,\omega_1+f_2,\omega_2]$ とおけば，補題 2.1, 2.2, 2.3 より，$\mathfrak{b}$ はノルム f_1 の整イデアルであり，$\mathfrak{b}^{-2}=[1,\theta,\theta^2]$ である．補題 4.4 と補題 4.5 より，

$$\begin{aligned}\beta &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\alpha_i x_{1,ij}\alpha_j=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_{1,ij}\Delta_{1i}\Delta_{1j}\\ &= \Delta_{11}\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}x_{1,ij}\Delta_{ij}=-\alpha_1\delta\end{aligned}$$

を得る．これから，$N_{K/\mathbb{Q}}\,\beta=-N_{K/\mathbb{Q}}\,\alpha_1 N_{K/\mathbb{Q}}\,\delta$ を得る．$N_{K/\mathbb{Q}}\,\delta=-f_1^{-1}D(F_x)=-f_1^{-1}D_K$ であるから，等式 (13) より，

$$N_{K/\mathbb{Q}}\,\alpha_1=f_1^2N(\mathfrak{a}_x)^2 \tag{15}$$

を得る．

命題 4.6. $\alpha_1^{-1}\mathfrak{a}_x^2=\mathfrak{b}^{-2}$.

[証明]　$\mathfrak{a}_x^2$ は $\alpha_i\alpha_j$, $1\le i\le j\le 3$ によって $\mathbb{Z}$ 上生成される．補題 4.4 より，

$$\alpha_i\alpha_j=\Delta_{1i}\Delta_{1j}=\Delta_{11}\Delta_{ij}=-\alpha_1\Delta_{ij}$$

であるから，$\alpha_1^{-1}\mathfrak{a}_x^2$ は Δ_{ij} たちによって $\mathbb{Z}$ 上生成される．特に，$\alpha_1^{-1}\mathfrak{a}_x^2\subset\mathfrak{b}^{-2}$ である．

$$N(\alpha_1^{-1}\mathfrak{a}_x^2)=f_1^{-2}=N(\mathfrak{b}^{-2})$$

であるから，$\alpha_1^{-1}\mathfrak{a}_x^2=\mathfrak{b}^{-2}$ を得る． □

B_1 を §3 において定義した $K^\times$ の部分群とする．

$$b_x=\alpha_1^{-1}=-\Delta_{11}^{-1}$$

とおけば，等式 (15) より，$N_{K/\mathbb{Q}}\,b_x\in(\mathbb{Q}^\times)^2$ である．命題 4.6 より，$(b_x)\mathfrak{a}_x^2=\mathfrak{b}^{-2}$ である．したがって，$b_x\in B_1$ である．

$x'=\gamma x$, $\gamma\in\Gamma$ とおく．そのとき，$b_{x'}$ と b_x の関係はどうなっているか調べよう．まず，$\gamma=(\gamma_1,1)$, $\gamma_1\in SL_3(\mathbb{Z})$ のときを考える．$x'=(x_1',x_2')$, $x_k'=\gamma_1x_k{}^t\gamma_1$ である．$F_{x'}(u,v)=F_x(u,v)$, したがって，θ は変わらない．$\theta x_1'+x_2'$ の (i,j) 余因子を Δ'_{ij} とかけば，$\theta x_1'+x_2'=\gamma_1(\theta x_1+x_2){}^t\gamma_1$ より，

$$(\Delta'_{ij})={}^t\gamma_1^{-1}(\Delta_{ij})\gamma_1^{-1}$$

である．$\alpha_j'=-\Delta'_{1j}$ とおけば，$\mathfrak{a}_{x'}=[\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3']$ である．一方，$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\gamma_1^{-1}$ とおけば，$\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ は $\mathfrak{a}_x$ の基底であり，

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3)(\theta x_1'+x_2')=0$$

であるから，注意 4.3 によって，$\mu \in K^\times$ で $(\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3') = \mu(\eta_1, \eta_2, \eta_3)$ となるものが存在する．したがって，$\mathfrak{a}_{x'} = \mu\mathfrak{a}_x$ である．$b_{x'}/b_x$ を求めよう．$\gamma_1^{-1} = (c_{ij})$ とかく．補題 4.4 より，

$$\begin{aligned}
\alpha_1\alpha_1' &= \Delta_{11}\Delta_{11}' \\
&= \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{j1}\Delta_{11}\Delta_{jk}c_{k1} = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} c_{j1}\Delta_{1j}\Delta_{1k}c_{k1} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{3} c_{i1}\Delta_{1i}\right)^2 = \left(\sum_{i=1}^{3} c_{i1}\alpha_i\right)^2 = \eta_1^2.
\end{aligned}$$

したがって，$\alpha_1' = \mu\eta_1$ より，

$$\frac{b_{x'}}{b_x} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1'} = \left(\frac{\eta_1}{\alpha_1'}\right)^2 = \mu^{-2} \in (K^\times)^2$$

である．次に，$\gamma = (1, \gamma_2)$, $\gamma_2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{Z})$ のときを考える．このとき，$x' = (x_1', x_2')$, $x_1' = ax_1 + bx_2$, $x_2' = cx_1 + dx_2$, $F_{x'}(u, v) = F_x(au + cv, bu + dv)$ であるから，$F_{x'}(u, 1) = 0$ の根 θ' として，

$$\frac{a\theta' + c}{b\theta' + d} = \theta, \quad \theta' = \frac{d\theta - c}{-b\theta + a}$$

を満たすものがとれる．そのとき，

$$\begin{aligned}
\theta' x_1' + x_2' &= \frac{d\theta - c}{a - b\theta}(ax_1 + bx_2) + (cx_1 + dx_2) \\
&= \frac{1}{a - b\theta}\{(d\theta - c)(ax_1 + bx_2) + (a - b\theta)(cx_1 + dx_2)\} \\
&= \frac{\det\gamma_2}{a - b\theta}(\theta x_1 + x_2).
\end{aligned}$$

したがって，$\theta' x_1' + x_2'$ の (i, j) 余因子を Δ_{ij}' とすれば，$\Delta_{ij}' = (a - b\theta)^{-2}\Delta_{ij}$ である．$\mathfrak{a}_{x'} = [\alpha_1', \alpha_2', \alpha_3']$,

$$\alpha_j' = -\Delta_{1j}' = -(a - b\theta)^{-2}\Delta_{1j} = (a - b\theta)^{-2}\alpha_j, \quad j = 1, 2, 3$$

であるから，$\mathfrak{a}_{x'} = (a - b\theta)^{-2}\mathfrak{a}_x$ である．また，

$$\frac{b_{x'}}{b_x} = \frac{\alpha_1}{\alpha_1'} = (a - b\theta)^2 \in (K^\times)^2$$

である．

$F_x(u, v)$ に付随する整環 $\mathcal{O}$ が 3 次体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ に等しいような $x \in \hat{L}_{irr}$ 全体のなす集合を $\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ で表す．上に述べたことをまとめれば，次の命題を得る．

命題 4.7. $x \in \hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$, $\gamma \in \Gamma$ に対して，$b_{\gamma x}/b_x \in (K^\times)^2$ が成り立つ．

x の属する Γ-同値類を $[x]$ で表す．命題 4.7 から，$\Phi([x]) = [b_x]$ とおくことによって，写像

$$\Phi : \Gamma \backslash \hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1) \longrightarrow B_1/(K^\times)^2 \tag{16}$$

を定義できる．補題 3.1 より，$|B_1/(K^\times)^2)| = 2^r |C_K^{(2)}|$ である．

今度は，この逆向きに，与えられた B_1 の元から，$\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ に属する 3 次対称行列のペアを構成しよう．原始的かつ既約な 2 元 3 次形式

$$F(u,v) = f_1 u^3 + f_2 u^2 v + f_3 u v^2 + f_4 v^3, \quad f_1 > 0$$

を，$F(u,v)$ に付随する整環が 3 次体 K の整数環 $\mathcal{O}_K$ に等しくなるようにとる．K に対して，このような $F(u,v)$ は $GL_2(\mathbb{Z})$-同値を除いて一意的に存在する．$K = \mathbb{Q}(\theta)$, $F(\theta,1) = 0$, $\mathcal{O}_K = [1, \omega_1, \omega_2]$ である．ここで，

$$\omega_1 = f_1\theta, \quad \omega_2 = f_1\theta^2 + f_2\theta + f_3$$

である．$\mathfrak{b} = [f_1, \omega_1 + f_2, \omega_2]$ はノルム f_1 の K の整イデアルである．

$b \in B_1$ とする．B_1 の定義と補題 2.3 から，

$$(b)\mathfrak{a}^2 = \mathfrak{b}^{-2} = [1, \theta, \theta^2] \tag{17}$$

が成り立つような分数イデアル $\mathfrak{a}$ が存在する．$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ を $\mathfrak{a}$ の基底とすれば，等式 (17) から，

$$b\alpha_i\alpha_j = \sum_{k=0}^{2} \theta^k y_{k,ij}, \quad y_{k,ij} \in \mathbb{Z},\ 1 \le i,j \le 3 \tag{18}$$

とかける．$k = 0,1,2$ について，$Y_k = (y_{k,ij})$ とおく．Y_k は整数係数の 3 次対称行列である．また，

$$W = (\alpha_i\alpha_j) = {}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

とおく．そのとき，等式 (18) をかきなおして，

$$bW = Y_0 + \theta Y_1 + \theta^2 Y_2 \tag{19}$$

を得る．$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1, \omega_1, \omega_2)A$, $A \in M_3(\mathbb{Q})$ とかく．また，

$$(1, \omega_1, \omega_2) = (1, \theta, \theta^2)A_0, \quad A_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_3 \\ 0 & f_1 & f_2 \\ 0 & 0 & f_1 \end{pmatrix}$$

である． ここで，

$$W_0 = {}^t(1, \theta, \theta^2)(1, \theta, \theta^2)$$

とおけば，$W = {}^tA^tA_0W_0A_0A$ であり，

$$W_0 = \begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta^2 \\ \theta & \theta^2 & \theta^3 \\ \theta^2 & \theta^3 & \theta^4 \end{pmatrix} = Z_0 + \theta Z_1 + \theta^2 Z_2$$

と表せる．ただし，

$$Z_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f_4}{f_1} \\ 0 & -\frac{f_4}{f_1} & \frac{f_2f_4}{f_1^2} \end{pmatrix},\ Z_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{f_3}{f_1} \\ 0 & -\frac{f_3}{f_1} & \frac{f_2f_3-f_1f_4}{f_1^2} \end{pmatrix},\ Z_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{f_2}{f_1} \\ 1 & -\frac{f_2}{f_1} & \frac{f_2^2-f_1f_3}{f_1^2} \end{pmatrix}$$

とおいた．$b(1, \theta, \theta^2) = (1, \theta, \theta^2)R(b)$, $R(b) \in GL_3(\mathbb{Q})$ とかける．したがって，

$$\begin{aligned} bW &= {}^tA^tA_0W_0bA_0A = {}^tA^tA_0W_0R(b)A_0A \\ &= {}^tA^tA_0(Z_0 + \theta Z_1 + \theta^2 Z_2)R(b)A_0A. \end{aligned}$$

一変数 t の整数係数の多項式を成分とする 3 次対称行列 $Y(t)$ を

$$Y(t) = Y_0 + tY_1 + t^2Y_2$$

によって定義する．$Z(t) = Z_0 + tZ_1 + t^2Z_2$ とおけば，

$$Y(t) = {}^tA^tA_0Z(t)R(b)A_0A$$

である．

$$\det R(b) = N_{K/\mathbb{Q}}\, b = N(\mathfrak{a})^{-2}f_1^{-2} = (\det A)^{-2}f_1^{-2}, \quad \det A_0 = f_1^2,$$

である．また，計算によって，

$$\det Z(t) = -f_1^{-2}F(t, 1)^2$$

がわかる．よって，

$$\det Y(t) = -F(t, 1)^2$$

を得る．$F(t, 1)$ は θ の $\mathbb{Q}$ 上の最小多項式である．$Y(\theta) = bW$ の列ベクトルはすべて ${}^t(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ の $K^\times$ の元によるスカラー倍であるから，$\operatorname{rank} Y(\theta) = 1$ である．$Y(t)$ の (i, j) 余因子を $\widetilde{\Delta}_{ij}(t)$ とすると，$\operatorname{rank} Y(\theta) = 1$ より，$\widetilde{\Delta}_{ij}(\theta) = 0$, $1 \leq i, j \leq 3$ である．したがって，$\widetilde{\Delta}_{ij}(t)$ も $\mathbb{Z}[t]$ において $F(t, 1)$ で割り切れる．そこで，

$$X(t) = \frac{1}{F(t, 1)}(\widetilde{\Delta}_{ij}(t))$$

とおけば，$X(t)$ は整数係数の t の高々1次式を成分とするような3次対称行列である．したがって，$X(t)=tx_1+x_2$, x_1,x_2 は整数係数の3次対称行列とかける．

$$X(t)Y(t)=\frac{1}{F(t,1)}\det Y(t)\,1_3=-F(t,1)\,1_3 \tag{20}$$

より，$\det X(t)=F(t,1)$ を得る．これは，$x=(x_1,x_2)$ とおけば，$F_x(u,v)=F(u,v)$ を意味する．よって，$x\in\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ である．以上によって，$b\in B_1$ から整数係数3次対称行列のペア $x=(x_1,x_2)\in\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ で，$F_x(u,v)=F(u,v)$ を満たすものを構成することができた．

$F(u,v)$ を固定したとき，$(b)\mathfrak{a}^2=\mathfrak{b}^{-2}$ を満たす分数イデアル $\mathfrak{a}$ は b に対して一意的に定まるが，$\mathfrak{a}$ の基底のとりかたはいろいろある．そこで，$\mathfrak{a}$ の別の基底 $\{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}$ をとってみる．そのとき，$(\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3')=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\gamma_1$, $\gamma_1\in GL_3(\mathbb{Z})$ とかける．$W'=(\alpha_i'\alpha_j')$ とおいて，整数係数の3次対称行列 Y_k', $k=0,1,2$ を

$$bW'=Y_0'+\theta Y_1'+\theta^2Y_2'$$

によって定める．そのとき，$bW'={}^t\gamma_1(bW)\gamma_1$ であるから，$Y_k'={}^t\gamma_1Y_k\gamma_1$ である．よって，

$$Y'(t)={}^t\gamma_1Y(t)\gamma_1.$$

$X'(t)=-F(t,1)Y'(t)^{-1}$ とおけば，

$$X'(t)=\gamma_1^{-1}X(t){}^t\gamma_1^{-1}.$$

したがって，基底 $\{\alpha_1',\alpha_2',\alpha_3'\}$ から定まる整数係数3次対称行列のペアを $x'=(x_1',x_2')$ とすると，

$$x_k'=\gamma_1^{-1}x_k{}^t\gamma_1^{-1},\quad k=1,2$$

である．ゆえに，$x'=(\gamma_1^{-1},1)x$ である．$\det\gamma_1=-1$ ならば，γ_1 を $-\gamma_1$ でおきかえてもよいから，$[x']=[x]$ である．次に，b を $b\lambda^2$, $\lambda\in K^\times$ でおきかえてみる．そのとき，

$$(b\lambda^2)(\lambda^{-1}\mathfrak{a})^2=\mathfrak{b}^{-2}$$

であるから，$\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{a}'=\lambda^{-1}\mathfrak{a}$ でおきかえられる．$\mathfrak{a}'$ の基底として，$\lambda^{-1}\alpha_1,\lambda^{-1}\alpha_2,\lambda^{-1}\alpha_3$ をとれば，$W'=(\lambda^{-2}\alpha_i\alpha_j)$ であるから，$b\lambda^2W'=bW$ である．したがって，$b\lambda^2$ とこのようにとった $\mathfrak{a}'$ の基底から得られる整数係数の3次対称行列のペアは $x=(x_1,x_2)$ のままである．以上によって，$x=(x_1,x_2)\in\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ の同値類 $[x]$ は $[b]\in B_1/(K^\times)^2$ のみによって定まることが示された．$X(t)=tx_1+x_2$ の (i,j) 余因子を $\Delta_{ij}(t)$ とする．(20) より，

$$Y(t)=-F(t,1)X(t)^{-1}=-(\Delta_{ij}(t))$$

である．$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}(\theta)$ とおけば，

$$-(\Delta_{ij}) = Y(\theta) = bW \tag{21}$$

を得る．(21) より，$b\alpha_1^2 = -\Delta_{11}$ である．よって，

$$b_x = -\Delta_{11}^{-1} = b^{-1}\alpha_1^{-2} = b(b^{-1}\alpha_1^{-1})^2,$$

すなわち，$\Phi([x]) = [b_x] = [b]$ である．以上によって，$\Psi([b]) = [x]$ によって，写像

$$\Psi : B_1/(K^\times)^2 \longrightarrow \Gamma\backslash\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$$

が定義され，これは $\Phi(\Psi([b])) = [b]$ を満たすことがわかった．

最後に，$x = (x_1, x_2) \in \hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)$ に対して，$\Psi(\Phi([x])) = [x]$ が成り立つことを示そう．適当な $\gamma_2 \in GL_2(\mathbb{Z})$ をとって，x を $(1, \gamma_2)x$ でおきかえることによって，はじめから，$F_x(u,v) = F(u,v)$ であるとしてよい．Δ_{ij} を $\theta x_1 + x_2$ の (i,j) 余因子とする．$\alpha_j = -\Delta_{1j}$, $j = 1,2,3$ とおけば，$\mathfrak{a}_x = [\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$, $b_x = \alpha_1^{-1} = -\Delta_{11}^{-1}$, $(b_x)\mathfrak{a}_x^2 = \mathfrak{b}^{-2}$ である．補題 4.4 より，

$$W = (\alpha_i\alpha_j) = \Delta_{11}(\Delta_{ij}),$$

したがって，$b_x W = -(\Delta_{ij})$ である．一方，$X(t) = tx_1 + x_2$ とおき，$X(t)$ の (i,j) 余因子を $\Delta_{ij}(t)$ とする．$\Delta_{ij} = \Delta_{ij}(\theta)$ であるから，$Y(t) = -(\Delta_{ij}(t))$ である．$b_x \in B_1$ から構成される 3 次対称行列のペアは

$$-F(t,1)Y(t)^{-1} = X(t)$$

より，$x = (x_1, x_2)$ である．すなわち，$\Psi([b_x]) = [x]$ が示された．以上によって，Ψ は Φ の逆写像であることが示され，次の定理が得られた．

定理 4.8. 写像 $\Phi : \Gamma\backslash\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1) \longrightarrow B_1/(K^\times)^2$ は全単射である．特に，

$$|\Gamma\backslash\hat{L}_{\mathcal{O}_K}(1)| = 2^r|C_K^{(2)}| \tag{22}$$

が成り立つ．

注意 4.9. 研究会終了後に，文献 [1] の存在を知った．そこでは，具体的な対応はかかれていないが，公式 (22) を含むような代数体上の n 次対称行列のペアに関する結果が得られている．

参考文献

[1] J. Morales, On some invariants for systems of quadratic forms over the integers, J. reine angew. Math. **426**, 107–116 (1992)

[2] J. Nakagawa, On the relations among the class numbers of binary cubic forms, Invent. math. **134**, 101–138 (1998)

[3] D. J. Wright and A. Yukie, Prehomogeneous vector spaces and field extensions, Invent. math. **110**, 283–314 (1992)