バネ質点系の振動

解析学, 殊に微分方程式の振動理論に興味を持ってもらうために, 大抵の人が多少なりとも馴染みのある一つの問題を考える．バネの先端に錘（質量 m）を付けて垂直に吊す．バネの運動は垂直方向に限られているものとしておく．錘を少し下に引き伸ばして手を放す．あるいは錘を少し上に縮めて手を放す．そのまま手を放してもよいし, 垂直方向の初速度を与えて手を放してもよい．そうすると錘は上下運動を繰り返す, つまりこの質量・バネ系は振動する．この現象を数学的に記述してみよう．

バネの自然の長さを L とする．錘を吊るして静止させたときのバネの全長を $L+a$ とする．もちろん a は正の定数である．錘の運動は垂直方向に限定されるから, 錘の位置は平衡（静止）の位置からの変位 x によって完全に決まる．それゆえ, この質量・バネ系の運動を把握することは, 変位 x が時間 t の経過に従ってどのように変化するかを明らかにすること, つまり x を時間の関数 $x=\phi(t)$ として正確に決めることである．運動の始まる時刻（錘から手を放す瞬間）を $t=0$ とする．上で述べたことは, 関数 $\phi(t)$ に対して, $t=0$ において

$$\{\phi(0)=x_0,\ \phi'(0)=0\} \quad \text{あるいは} \quad \{\phi(0)=x_0,\ \phi'(0)=x_1\}$$

という条件（この付帯条件を初期条件と呼ばれる）を要求することを意味している．われわれの経験から, 初期条件が与えられれば, それ以後の錘の位置は完全に決まる．すなわち関数 $\phi(t)$ は全ての $t \geqq 0$ に対して定められることを教えてくれる．

このバネ系の数学的モデルを得るために以下の仮定を置く．

(a) バネの質量は 0 である．

(b) 錘は質点（質量 m）であるとみなす．

(c) バネは Hooke の法則に従う．
Hooke の法則: バネに働く力は平衡の位置に向かう復元力である．その大きさはバネの自然の長さからの伸び（縮み）の量に比例する．この比例定数 $k>0$ はバネ定数といわれる．

(d) バネに働く外力は重力だけである．

(e) 空気の抵抗はない．

平衡の位置（$x=0$）からの変位を x とする．下向きの方向を正に取る．バネに働く外力 F_1 は重力によるものであるから mg に等しい．一方復元力 F_2 は, Hooke の法則から, $-k(x+a)$ に等しい．従って錘に働く力はトータルで

$$F_1+F_2=mg-k(x+a)$$

に等しい． 平衡の位置はこの力が 0 になる場合に対応する． $mg-k(0+a)=0$ から $a=mg/k$ が得られるから, 錘が一般の位置 x にある場合に働く力の和は

$$F_1+F_2=mg-k(x+mg/k)=-kx$$

となる．ここで Newton の運動の第 2 法則を適用すると

$$F_1+F_2=-kx=\frac{d}{dt}mv=m\frac{d^2x}{dt^2}$$

が得られる．このようにして, われわれの質点・バネ系の運動を記述する 2 階線形微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{1}$$

であることが分かった．これはいわゆる調和振動子である．(1) の解 $x(t)$ で初期条件

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x_1 \tag{2}$$

を満たすものを求めれば, 問題にしている質点・バネ系の運動が解明されることになる．

ところで, (1) の解の基本形は $\{\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t, \cos\sqrt{\frac{k}{m}}t\}$ で, 一般解は

$$x(t) = a\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t + b\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad (a,\ b \text{ は任意定数})$$

で与えられる．これが条件 (2) を満たすためには $a = x_0,\ b = \sqrt{\frac{m}{k}}x_1$ と選べばよいことが簡単に分かるから, 質点・バネ系の運動は関数

$$x(t) = x_0\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t + x_1\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \tag{3}$$

によって記述される．(3) は次のように変形される:

$$\begin{aligned} x(t) &= A\sin\sqrt{\frac{k}{m}}(t+\tau_0), \\ A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}x_1^2}, \\ \tau_0 &= \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\frac{x_0}{x_1}\right). \end{aligned} \tag{4}$$

明らかに, 解 $x(t)$ は周期 $2\sqrt{\frac{m}{k}}\pi$ の周期関数で, $t > 0$ において等間隔に分布する無限個の点列 $t_n = \sqrt{\frac{m}{k}}\pi + \tau_0,\ n = 1, 2, \cdots,$ に沿って 0 になる．$x(t_n) = 0$ は t_n という時刻にバネに付けた錘が平衡の位置に来ることを意味していることを考慮すれば, (4) 式は, われわれの錘の運動が平衡点を通過する上下運動を際限なく繰り返す周期的な振動現象であることを物語っている．

この結論は明快であるが, バネの振動がいつまでも同じ状態で継続するという点で現実離れしている．どんな質点・バネ系の振動も何時かは停止するという現実的な振動の数学モデルを導き出すためには, 初めに設定した仮定 (a)-(e) の中の (e) をより現実的な仮定

(e′) 速度に比例する空気抵抗がある

で置き換えればよい．この抵抗によって質点・バネ系に働く力は $-\rho\frac{dx}{dt}$（$\rho > 0$ は定数）と表されるから, 現象を支配する微分方程式は

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\rho}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{5}$$

になる．ρ は十分小さく $\rho^2 - 4km < 0$ と仮定する．このとき, $\alpha = \frac{\rho}{2m}$, $\beta = \frac{\sqrt{4km-\rho^2}}{2m}$ とおけば, (5) の解で初期条件 (2) を満たすものは,

$$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin\beta(t+\tau_0) \qquad (A,\ \tau_0 \text{ は定数}) \tag{6}$$

の形で表されることを確かめることができる．$x(t)$ は (4) と同様に $t > 0$ で無限回（周期的に）0 になるから, この場合もバネは振動している．しかし因子 $e^{-\alpha t}$ があるために, $t \to \infty$ のとき $x(t) \to 0$ となる. つまり振動の大きさは時間の経過とともに減少して 0 に近づく．得られた結果は質点・バネ系の運動のより現実的な描写であると言えよう．このような振動現象は減衰振動と呼ばれる.

例. 方程式 (5) において, $k = m = \rho = 1$ とした方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x = 0$$

に関して, 初期条件 $x(0) = 1$, $x'(0) = 1$ を満たす解は,

$$x(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\right)$$

である.

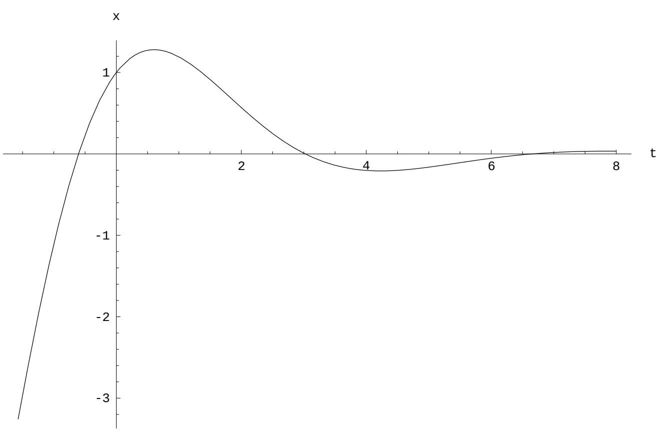

図 1: $x(t) = 2e^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\left(t + \frac{\sqrt{3}}{9}\pi\right)$

追記: パンフレットに記述した美しい挙動を示す関数 $x(t) = t\,\sin\dfrac{1}{t}$ は, 微分方程式

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{1}{t^4}x = 0$$

の解である.