

三角形の面積の公式と3通りの底辺

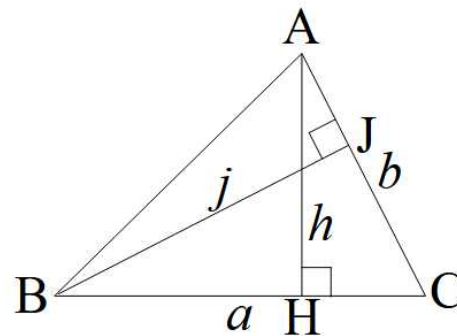
三角形の面積の公式は「底辺×高さ÷2」であるが、このときの底辺は別に水平になった辺である必要はなく、三角形の3つの辺のどれでも底辺として考えることができる。

ここまではよく指導されているが、どの辺を底辺として選んでも「底辺×高さ÷2」の値が等しくなることは、あまり話題にならないような気がする。底辺のとり方により面積の値が異なっては大変であるから、本当は、「底辺×高さ÷2」の値は底辺のとり方によらず一定であることは、「底辺×高さ÷2」が確かに三角形の面積を表していることを保証する上で、たいせつなように思われる。

それでは、「底辺×高さ÷2」の値は本当に、底辺のとり方によらず3つの場合とも同じ値になるのであろうか。

まず「底辺×高さ÷2」の値は「底辺×高さ」の値が決まれば確定するので、3つの場合に「底辺×高さ」の値が一定であることが言えれば、よいことになる。また3つの場合を一度に比べるのはむずかしそうなので、まずは2つの辺について、どちらも「底辺」としても、「底辺×高さ」の値が等しくなることを考えてみる。

そこで△ABCの2つの辺の長さを a 、 b とし、また、それに対応する高さをそれぞれ h 、 j とする。なお図でHとJはそれぞれAとBから対辺に下ろした垂線の足である。



このとき、垂線の足のところにできる直角と∠Cに着目すると、

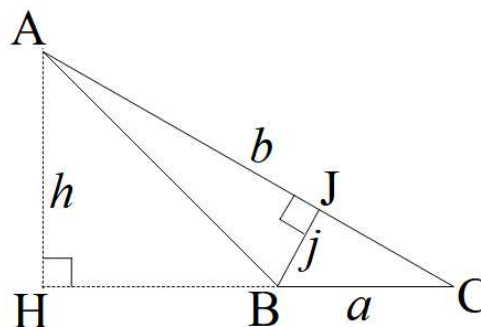
$$\triangle AHC \sim \triangle BJC$$

したがって $AC : AH = BC : BJ$ となり、ここから $AC \cdot BJ = BC \cdot AH$ となる。つまり $b \times j = a \times h$ となり、BCを底辺としたときの「底辺×高さ」の値と、ACを底辺としたときの「底辺×高さ」の値が等しくなることがわかった。

ABを底辺としたときも同様に示すことができるので、結局、3つの辺のどれを底辺にしても「底辺×高さ」の値は等しくなることになる。

ただ、前の説明では、三角形の形が典型的なものを想定して、三角形の相似が示されているように感じる。そこで、高さが外に出るような場合、ある角が鈍角の場合も同じように言えるのかを確かめてみる。

右の図のような場合でも $\triangle AHC$ と $\triangle BJC$ は相似になっている。したがって、 $AC : AH = BC : BJ$ が成り立つ。ここから $AC \cdot BJ = BC \cdot AH$ となるので、前の場合と同様、 BC を底辺としたときの「底辺×高さ」の値と、 AC を底辺としたときの「底辺×高さ」の値が等しくなる。



以上のことから、1つの三角形においては、2つの辺のどれを底辺として選んでも、「底辺×高さ」の値は等しくなり、したがって、「底辺×高さ÷2」の値も等しくなる。つまり、どの辺を底辺としても結果は同じになることが確認された。